АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 80, № 5, с. 387–408

УДК 524.7-56-8

МИНИМАЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ СКОРОСТЕЙ В УСТОЙЧИВЫХ ЗВЕЗДНЫХ ДИСКАХ. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

© 2003 г. **А. В. Хоперсков, А. В. Засов, Н. В. Тюрина**

Астрономический институт им. П.К. Штернберга, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20.02.2002 г.; принята в печать 27.11.2002 г.

Методом динамического моделирования (N-тел) исследуются условия гравитационной устойчивости трехмерных звездных дисков в гравитационном поле стационарных сферических компонент — балджа и гало, степень концентрации и относительные массы которых варьируются в широких пределах. Количество точек N в экспериментах составляет от 40 до 500 тысяч, эволюция прослеживается в течение 10–20 оборотов диска по внешнему краю. Неустойчивые в начале эволюции диски нагреваются и по истечении 5–8 оборотов, как правило, приходят в квазистационарное равновесное состояние с установившейся дисперсией радиальных скоростей c_r. Оценивается радиальное поведение параметра устойчивости $Q_T(r)$ по Тоомре для конечного состояния диска. На примере простых моделей рассмотрено влияние на гравитационную устойчивость дисков выбора относительной массы сферических компонент, толщины диска, дифференциальности вращения и начального состояния диска. Показано, что формальное использование существующих аналитических локальных критериев маржинальной устойчивости дисков может привести к ошибкам в оценке c_r более чем в 1.5 раза. Предлагается использовать приблизительное постоянство $Q_T \simeq 1.2$–1.5 на $r \simeq (1$–$2) \cdot L$ (L — радиальная шкала изменения поверхностной плотности диска), которое выполняется для самых различных моделей, для примерной оценки верхнего предела плотности и массы диска по наблюдаемым распределениям скорости вращения газовой компоненты и дисперсии скоростей звезд.

1. ВВЕДЕНИЕ

Диски галактик, состоящие в основном из старых звезд, можно рассматривать как бесстолкновительные системы, находящиеся в квазистационарном равновесном состоянии с очень медленной динамической эволюцией. Этому состоянию соответствуют определенные радиальные зависимости дисперсий скоростей звезд (c_r, c_φ, c_z), при которых диск гравитационно устойчив. Знание условий устойчивости открывает возможность построения самосогласованных моделей звездных дисков реальных галактик, у которых измерены как скорости вращения, так и дисперсии скоростей звезд на различных расстояниях от центра.

Проблема поиска минимально возможной дисперсии скоростей звезд, обеспечивающей гравитационную устойчивость дисков к возмущениям произвольной формы, особенно важна, если справедливо предположение о пороговой (маржинальной) устойчивости дисков реальных галактик, которое неоднократно высказывалось различными авторами (см., например, [1–7]). Такой подход открывает возможность оценки локальной плотности или интегральной массы диска по наблюдаемой дисперсии скоростей звезд. В общем случае старое звездное население диска галактики может иметь более высокую дисперсию скоростей при наличии других факторов, нагревающих диск, не связанных напрямую с гравитационной неустойчивостью. Но и в этом случае использование условий маржинальной устойчивости дает ценную информацию, позволяя получить верхнюю оценку массы диска, при которой устойчивость может иметь место.

Теоретический анализ проблемы устойчивости вращающихся тонких дисков к различного рода возмущениям (включая и изгибные) подробно рассмотрены в монографиях Фридмана и Поляченко [8, 9]. Аналитический подход к рассмотрению динамики возмущений в гравитирующем диске и определению условия устойчивости имеет наряду с преимуществом перед методом численного моделирования (математическая строгость решения в рамках поставленной задачи) тот недостаток, что реализуется только в рамках сильно упрощенных моделей и в приложении к реальным объектам может дать лишь грубую оценку параметров дисковой компоненты.

Рассмотрим эти упрощения подробнее.

Прежде всего в основе простых аналитических моделей бесстолкновительных дисков, рассмат-

риваемых при анализе устойчивости, обычно лежит предположение о малой толщине диска — фактически рассматривается бесконечно тонкий слой. Несмотря на малость отношений h_z/r и h_z/L (r — радиальная координата, h_z — характерная вертикальная шкала, L — характерный масштаб неоднородности диска в радиальном направлении) для большей части звездного диска, это условие может быть недостаточным для того, чтобы пренебречь вертикальными движениями (подробное обсуждение этого вопроса, как и вывод о том, что в общем случае уравнения динамики астрофизических дисков не могут рассматриваться в двумерной постановке задачи, см. в книге Горькавого и Фридмана [10, Приложение II [1]]).

При аналитических исследованиях динамики малых возмущений в звездном диске обычно исходят из малости радиальных градиентов параметров диска (см., например, [1, 11, 12]). Попытки учета градиентных факторов проводились только в рамках ВКБ-приближения (см., например, [2, 13–15]). Это означает, что характерная длина волны возмущений должна быть малой по сравнению с локальными масштабами неоднородности равновесной скорости вращения $V(r)$, дисперсии радиальных скоростей звезд $c_r(r)$ и поверхностной плотности $\sigma(r)$. Во многих случаях эти условия выполняются с малым запасом или даже нарушаются. Пожалуй, особую трудность представляет дифференциальность вращения. Учет слабой неоднородности угловой скорости вращения возможен для слабонерадиальных возмущений [13, 16]. Однако более неустойчивыми являются сильно неосесимметричные (в пределе — "спицеобразные") возмущения. Для их стабилизации при прочих равных условиях требуется существенно более сильный разогрев диска, т.е. более высокая дисперсия скоростей звезд [17], и именно они, по-видимому, приводят на нелинейной стадии к увеличению дисперсии скоростей звезд в случае первоначально холодной системы.

При аналитических исследованиях гравитационной устойчивости дисков обычно используется эпициклическое приближение $c_r \ll V$, которое для большинства галактик может выполняться на периферии, где $c_r/V \simeq 0.1$–0.3, но нарушается при приближении к центру, где $c_r \gtrsim V$.

Другое важное ограничение аналитических подходов связано с локальным характером получаемых критериев. В то же время ряд исследований свидетельствует о глобальном характере условия устойчивости диска [18, 19]. Это означает, что если изменить равновесные параметры, например, в центре, сохранив их на периферии диска, то условие гравитационной устойчивости может измениться во всем диске. В рамках глобального анализа, в отличие от локального, основанного на анализе дисперсионных уравнений, собственная частота ищется для всего диска при решении задачи типа краевой, что и определяет возможность влияния условий в одной из частей системы на дисперсионные свойства возмущений во всем диске. Поэтому строгий подход требует рассмотрения диска как целого. Но глобальный анализ проведен только для специфических распределений степенного вида [18–20]. В применении к поддержанию долгоживущих спиральных волн плотности в галактиках глобальные моды в дисках рассматривались, например, Бертином и др. [21].

Численные эксперименты с бесстолкновительными системами более гибки к выбору модели. Они позволяют выйти за рамки локального анализа и простых двумерных моделей и непосредственно следить за развитием возмущений в первоначально равновесном диске. Однако этот подход также имеет свои недостатки. Наиболее серьезными проблемами при использовании метода N-тел являются, во-первых, определенные математические упрощения, неизбежные при любом способе представления диска системой N гравитирующих тел, где N несравнимо меньше числа звезд в реальных галактиках, а во-вторых, зависимость конечного состояния системы после ее прихода в квазистационарное состояние от задаваемых начальных параметров, которые для галактик плохо известны. При сопоставлении с реальными галактиками может также возникнуть проблема учета диссипативной среды (газа), скорость звука в которой существенно меньше дисперсии скоростей старых звезд.

Эти проблемы будут подробнее рассмотрены ниже.

Основной целью настоящей работы является поиск минимально допустимых локальных значений дисперсии скоростей звезд в дисках галактик с различным распределением масс, при которых достигается квазистационарное состояние трехмерных дисков, начавших эволюцию со слабо неустойчивых равновесных состояний. В разделах 2 и 3 дается краткий обзор результатов аналитических и численных подходов к оценке дисперсий скоростей звезд, требуемых для устойчивого состояния бесстолкновительных дисков. Раздел 4 описывает принципы построения численных динамических моделей и определения порога устойчивости, использовавшиеся в работе. В разделе 5 рассматриваются различные трехмерные модели галактик, а в последнем разделе приводятся и обсуждаются основные выводы.

[1] Написано совместно с О.В. Хоружим.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

В литературе встречается несколько критериев гравитационной устойчивости бесстолкновительных дисков, аналитически полученных в рамках различных моделей. Рассмотрим, на наш взгляд, важнейшие из них.

а) Критерий Тоомре

Для гравитационной устойчивости относительно осесимметричных возмущений бесконечно тонкого однородного твердотельно вращающегося звездного диска необходимо выполнение условия Тоомре [1]

$$c_r \geq c_T = \frac{3.36G\sigma}{\varkappa}, \qquad Q_T = \frac{c_r}{c_T} \geq 1, \qquad (1)$$

где $\varkappa = 2\Omega\sqrt{1 + rd\Omega/2\Omega dr}$ — эпициклическая частота, σ — поверхностная плотность. Условие (1) предполагает выполнение эпициклического приближения, когда различием между скоростью вращения диска $V(r)$ и круговой скоростью $V_c(r)$ можно пренебречь. Хотя оно получено в рамках локального анализа, исследования собственных мод в рамках автомодельных дисков в соответствующем приближении, проведенные в работе Эванса и Рида [19], в целом подтверждают это соотношение. Миллер [22] провел сравнение теоретических инкрементов в рамках модели Тоомре с результатами моделирования осесимметричных мод — для этого все остальные возмущения искусственно подавлялись. Было показано, что экспериментально определенные инкременты не противоречат теоретическим выводам.

б) Учет конечной толщины диска

Конечная толщина оказывает стабилизирующее влияние на гравитационную неустойчивость в плоскости диска [9, 12]. Обобщение критерия устойчивости Тоомре (1) на случай диска конечной толщины, полученное Морозовым, имеет вид [13, 14, 16]:

$$Q_T^{(1)} = \frac{1}{1 + 0.974\Delta\varkappa/c_r} < 1, \qquad (2)$$

где Δ — полутолщина изотермического самогравитирующего диска. Но это условие оказалось заведомо недостаточным для устойчивости сколько-нибудь реальных систем. Это стало ясно из первых численных экспериментов, выполненных еще в 70-е гг. и показавших, что на периферии стационарных бесстолкновительных дисков $c_r \simeq (1.5{-}5) \cdot c_T$ [23–30].

в) Критерий с упрощенным учетом неосесимметричных возмущений

Одной из причин, по которой условие Тоомре оказывается недостаточным, является более сильная неустойчивость спиральных волн по сравнению с осесимметричными. В работах [9, 31, 32] было впервые показано, что в гравитационно неустойчивом диске доминируют неаксиальносимметричные моды. Как отмечалось в [9], поскольку дисперсия азимутальных скоростей c_φ меньше c_r (за исключением самых центральных областей), то в силу соотношения

$$c_\varphi = c_r\frac{\varkappa}{2\Omega}, \qquad (3)$$

для стабилизации более холодного в азимутальном направлении диска требуется сильнее его разогреть, поэтому с учетом (3) условие (1) формально можно переписать в виде

$$Q_T^{(2)} \geq S, \qquad S = \frac{2\Omega}{\varkappa}. \qquad (4)$$

Параметр S характеризует степень дифференциальности вращения диска. Исходя из наблюдаемых форм кривых вращения галактик можно считать, что в большинстве случаев $1 \leq S \leq 2$. Условие устойчивости в такой форме обсуждалось в работах [13–16].

Таким образом, дисперсия азимутальных скоростей определяет упругость среды для сильно неосесимметричных возмущений и для подавления гравитационной неустойчивости необходимо в $2\Omega/\varkappa$ раз сильнее разогреть диск.

Критерий (4) можно назвать критерием Тоомре с упрощенным учетом неосесимметричных возмущений.

г) Критерий Морозова

В рамках ВКБ-приближения динамика слабо нерадиальных возмущений в неоднородном диске рассматривалась в работах [13, 14, 16]. Полученный критерий устойчивости учитывает большое число факторов (радиальные неоднородности поверхностной плотности σ и c_r, толщину диска, дифференциальность вращения):

$$Q_T^{(M)} = c^{(M)}/c_T, \qquad (5)$$

$$c^{(M)} = SDc_T\left\{1 + 1.07 \cdot \left|1.87S\frac{c_T}{\varkappa}\left(\frac{d\sigma}{\sigma dr} + \frac{dS}{Sdr} - 1.09\frac{dc^{(M)}}{c^{(M)}dr}\right)\right|^{2/3}\right\},$$

где $S = 2\Omega/\varkappa$, $D = (1 + 0.974\varkappa\Delta/(S^2c_T))^{-1}$. В общем случае нахождение $c^{(M)}$ из (5) сводится к интегрированию приведенного дифференциального уравнения [33]. Основным недостатком данного критерия является то, что он получен на основе динамики сильно закрученных спиральных волн ($m/r \ll k_r$, k_r — радиальное волновое число), а затем произведен формальный переход к спитцеобразным возмущениям.

Если считать, что характерный масштаб неоднородности $L_c \equiv (d\ln c^{(M)}/dr)^{-1}$ является фиксированной величиной, то дифференциальное уравнение (5) сводится к простому алгебраическому соотношению [13, 14, 16]. Для типичных форм кривых вращений $D \simeq 0.6$–0.8. Введением множителя D можно формально учесть толщину диска и в критериях (3) и (6).

д) Критерий Поляченко–Поляченко–Стрельникова

В отличие от рассмотренных выше критериев в работе Поляченко и др. [17] рассматривались предельно неосесимметричные возмущения в тонком диске. В рамках сделанных приближений граница устойчивости определяется исключительно кривой вращения, поскольку зависит только от параметра $n \equiv -rd\Omega/(\Omega dr)$. Зависимость безразмерной дисперсии радиальных скоростей на границе устойчивости от $\alpha = 2/n$ представлена на рис. 1 работы Поляченко и др. [17]. Для приложений будем пользоваться аппроксимирующей функцией

$$Q_T^{(P)} = \frac{c^{(P)}}{c_T} = 1.88\sqrt{1.1 + \frac{8}{\exp(\alpha - 1/4) - 1}}, \quad (6)$$

где $Q_T^{(P)}$ — минимальное значение параметра Тоомре для устойчивого диска.

Данная аппроксимация имеет достаточную для приложений точность в области $1.2 < \alpha^2$. Критерий Поляченко и др. [17] является однопараметрическим, поскольку форма кривой вращения полностью определяет границу устойчивости. В частности, для области с постоянной скоростью вращения ($n = 1$) следует ожидать $Q_T^{(P)} \simeq 3$.

е) Учет газовой подсистемы при анализе устойчивости звездных дисков

Наличие более холодного компонента дает дополнительную дестабилизацию звездного диска. Этот вопрос был подробно рассмотрен в целом ряде работ [34–38], где анализировалась устойчивость звездно-газовых дисков относительно радиальных возмущений. Заметим, что в [38] решалась более общая задача: исследовалось, как влияет на устойчивость тонкого диска к малым радиальным возмущениям неоднородность его состава, когда он состоит из частиц с определенным спектром масс, причем более массивные имеют меньшую дисперсию скоростей.

Задача упрощается, если масса "холодного" компонента относительно мала. Считая, что поверхностная плотность газа σ_{gas} обычно значительно меньше, чем у звездного диска σ_{star}, и $c_s \ll c_r$ (c_s — адиабатическая скорость звука в газе), можно записать для дисперсии скоростей звездного диска, содержащего газ, на границе устойчивости [37]:

$$\frac{c_r^{crit}}{c_T} = 1 + \frac{\sigma_{gas}}{\sigma_{gas} + \sigma_{star}} \frac{1 - (c_s/c_T)^2}{1 + (c_s/c_T)^2}. \quad (7)$$

Например, для параметров солнечной окрестности Галактики следует, что наличие газовой подсистемы, вклад от которой в поверхностную плотность диска составляет около 20%, увеличивает в соответствии с (7) на $\lesssim 10\%$ дисперсию скоростей звезд, достаточную для стабилизации радиальных возмущений.

В заключение отметим, что для определения параметров дисковой подсистемы рассматривались также и другие подходы, основанные не на условиях локальной устойчивости, а на возможности существования в диске различных структур (спиральных волн плотности или бара) исходя из определенных механизмов их образования и поддержания, но их рассмотрение находится за рамками настоящей работы.

3. АНАЛИЗ ГРАВИТАЦИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКА В ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Численные эксперименты, описывающие динамическую эволюцию дисков, позволяют, задавая определенные начальные условия, исследовать неустойчивости диска с учетом неоднородности в распределении массы и угловой скорости. При этом естественным образом учитывается образование таких существенно нелинейных и неосесимметричных структур, как бар или транзиентные спирали. Сложностью такого подхода, однако, является зависимость результатов от начальных условий, поскольку эволюция диска, начинающаяся с сильно неустойчивого состояния, может происходить иначе, чем с субкритического уровня. К тому же диск может быть подвержен очень медленным секулярным неустойчивостям, которые трудно учесть в численных экспериментах.

Эволюционные модели N-тел обычно бывают нацелены либо на изучение характера развития неустойчивости, либо, что представляет для нас наибольший интерес, на анализ состояний системы по истечении многих оборотов диска. Из большого числа опубликованных работ мы упомянем с нашей точки зрения те, которые представляются наиболее важными для установления условий устойчивости диска.

Карлберг и Селвуд [39, 40] исследовали влияние малых нестационарных возмущений потенциала на эволюцию функции распределения скоростей. В частности, рассматривалось рассеяние на нестационарных спиральных волнах; полученное увеличение дисперсии скоростей звезд со временем хорошо

согласуется с результатами численных экспериментов.

Критическое значение дисперсии скоростей звездных дисков (параметр Q_T) неоднократно вычислялось по результатам динамического моделирования в рамках задачи N-тел (см., например, [7, 24, 28, 33, 40–46]). Ни в одном случае не был получен устойчивый диск с $Q_T < 1$. Как правило, на периферии диска параметр $Q_T(r)$ обнаруживает рост с расстоянием от центра. Данная особенность сохраняется и в экспериментах с трехмерными дисками [5, 46–48], и в некоторых теоретических исследованиях [49].

Классической можно считать работу Атанассулы и Селлвуда [34], которые пришли к выводу, что двумерный диск заведомо устойчив, если параметр Тоомре превышает значение $Q_T \gtrsim 2.2$–2.4. Однако этот вывод был сделан без учета вертикальных движений. Трехмерные диски являются гравитационно более устойчивыми, поэтому двумерные модели приводят к недооценке массы маржинально устойчивого диска. Заметим также, что параметр Q_T в работе [34] усреднялся по радиусу, а моделирование проводилось для специфического распределения поверхностной плотности — использовалась модель Тоомре–Кузьмина. Поэтому возможность прямого приложения результатов этой работы к реальным трехмерным дискам галактик не очевидна.

4. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ. ЗАДАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

В основе используемых в данной работе динамических моделей лежит численное интегрирование уравнений движения N гравитационно взаимодействующих частиц с учетом внешнего поля, которое обусловлено заданным стационарным распределением вещества в балдже и гало.

Мы принимали часто использующееся пространственное распределение объемной плотности в гало в виде

$$\varrho_h(\xi) = \frac{\varrho_{h0}}{(1+\xi^2/a^2)^k}, \tag{8}$$

где $\xi = \sqrt{r^2+z^2}$ — радиальная координата. Выбор $k=1$ обеспечивает плоскую кривую вращения в области преобладания гало. С увеличением k возрастает относительная концентрация сферической компоненты к центру, что оказывает влияние, сходное с влиянием балджа. Поскольку балдж входит в нашу модель в качестве отдельной сферической компоненты, то мы ограничимся использованием модели гало с $k=1$.

Динамика гравитирующих N-тел описывается системой уравнений

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_j^N \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{F}_s \quad (i=1,...,N), \tag{9}$$

где радиус-вектор $\mathbf{r}_i(t)$ определяет положение i-той частицы, $\mathbf{f}_{ij}$ — сила взаимодействия между i-той и j-той частицами, сила $\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_h$ обусловлена сфероидальной подсистемой балдж/гало. Распределение вещества в гало (8) с центральной плотностью $\varrho_{h0} = M_h/\{4\pi a^3[R/a - \mathrm{arctg}(R/a)]\}$ дает для силы выражение

$$\mathbf{F}_h(\xi) = -\frac{4\pi G a^3 \varrho_{h0}}{\xi^2}\left\{\frac{\xi}{a} - \mathrm{arctg}\left(\frac{\xi}{a}\right)\right\}\frac{\mathbf{r}}{\xi} \tag{10}$$

и определяется пространственной шкалой a и массой M_h внутри сферы $\xi = |\underline{r}| < R$. Для описания распределения плотности в сферическом балдже используем модель Кинга

$$\varrho_b = \begin{cases} \varrho_{b0}/\left[1+(\xi/b)^2\right]^{3/2}, & r < (r_b)_{\max}, \\ 0, & r > (r_b)_{\max}, \end{cases} \tag{11}$$

для которой величина

$$M_b = 4\pi b^3 \varrho_{b0} \times \tag{12}$$
$$\times \left\{ \ln\left[(r_b)_{\max}/b + \sqrt{1+((r_b)_{\max}/b)^2}\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{(r_b)_{\max}/b}{\sqrt{1+((r_b)_{\max}/b)^2}} \right\}$$

является массой балджа. Внутри $\xi \le (r_b)_{\max}$ для гравитационной силы имеем

$$\mathbf{F}_b = -\frac{4\pi G b^3 \varrho_{b0}}{\xi^2}\left\{\ln\left(\frac{\xi}{b} + \sqrt{1+\frac{\xi^2}{b^2}}\right) - \right. \tag{13}$$
$$\left. - \frac{\xi/b}{\sqrt{1+\xi^2/b^2}}\right\}\frac{\mathbf{r}}{\xi}.$$

Очевидно, в области $r > (r_b)_{\max}$ выполняется $\mathbf{F}_b = -GM_b\mathbf{r}/\xi^3$.

Динамическая модель должна адекватно описывать ньютоновское взаимодействие между звездами и обеспечивать бесстолкновительность системы. Последнее свойство достигается модификацией гравитационной силы на малых расстояниях, для чего вводится радиус обрезания потенциала r_c между любыми двумя взаимодействующими частицами i и j. Вопрос об оптимальном выборе радиуса обрезания и числа частиц неоднократно обсуждался в литературе (см., например, [50–53] и ссылки в этих работах).

Будем использовать модель Пламмера для потенциала

$$\Phi_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{\sqrt{r_{ij}^2 + r_c^2}}, \qquad (14)$$

где r_{ij} — расстояние между двумя частицами, r_c — радиус обрезания. При фиксированном числе частиц N всегда можно выбрать значение r_c, обеспечивающее бесстолкновительность модели. Но для уменьшения погрешности, связанной с изменением потенциала взаимодействия между частицами на малых расстояниях, их число должно быть достаточно велико.

Поверхностную плотность диска будем характеризовать шкалой L, которая определяет экспоненциальный закон $\sigma(r) = \sigma_0 \exp(-r/L)$. В области $r \geq 5L$ поверхностная плотность диска считалась равной нулю в начале эксперимента. При расчетах выбиралась система единиц, в которой $G = 1$, $R = 4L = 1$, масса диска $M_d = 1$. Массу гало M_h внутри радиуса $r \leq 4L$ будем нормировать на массу диска $\mu \equiv M_h/M_d$. В этой системе единиц один период вращения диска по внешнему краю лежит в пределах $t \sim 3 \div 4$ для значений $\mu = 1 \div 4$.

Опишем процедуру задания начального распределения плотности вдоль z-координаты и остаточных скоростей равновесного диска.

Вертикальная структура диска определяется уравнениями [54]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \qquad (15)$$

$$= 4\pi G(\varrho + \varrho_s), \quad c_z^2\frac{\partial \varrho}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}\varrho,$$

где ϱ и ϱ_s — соответственно объемная плотность вещества в дисковой и сфероидальной подсистемах, c_z — дисперсия вертикальных скоростей, которая предполагается постоянной вдоль координаты z в начальный момент времени $t = 0$. Исключая потенциал Φ в уравнениях (15) и вводя круговую скорость

$$V_c(r) \equiv \sqrt{r\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{|z=0}}, \qquad (16)$$

можно перейти от системы дифференциальных уравнений в частных производных к приближенному уравнению для объемной плотности диска $\varrho(z)$ в форме обыкновенного дифференциального уравнения [54]:

$$\varrho\frac{d}{dz}\left(c_z^2\frac{d\varrho}{dz}\right) - c_z^2\left(\frac{d\varrho}{dz}\right)^2 + \qquad (17)$$

$$+ 4\pi G\varrho^2\big(\varrho + E + \varrho_s(z)\big) = 0,$$

$$E = -\frac{1}{4\pi G r}\frac{dV_c^2}{dr},$$

которое совместно с условиями $\varrho(z=0) = \varrho_0$, $d\varrho(0)/dz = 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varrho(z;r)dz = \sigma(r)$ для заданного распределения поверхностной плотности σ определяет вертикальную структуру диска на фиксированном радиусе r. В центре диска слагаемое E может давать большую погрешность в оценку плотности, и на практике принимается $E(r \to 0) \to 0$. При заданных $\varrho_s(z,r)$, $c_z(z,r)$ и $\sigma(r)$ для определения ϱ_0 и $\varrho(z)$ строится функция $F(\varrho_0) = 2\int\limits_0^{\infty} \varrho(z)dz - \sigma$. Уравнение $F(\varrho_0) = 0$ решается итерационным способом совместно с численным интегрированием (17). После того как найден закон распределения плотности вдоль z-координаты, частицы размещаются вдоль вертикальной оси на заданной сетке $z_k = k\Delta z$ $(k = -K, \ldots, K)$. В k-ую ячейку помещаются частицы в пропорции σ_k/σ, где $\sigma_k = \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} \varrho(z)dz$.

Уравнение (17) имеет приближенный характер, поскольку при его выводе в первом слагаемом в (15) пренебрегается зависимостью потенциала от вертикальной координаты. Строго говоря, построенный таким образом диск не является равновесным. Однако мы изучаем начальные неустойчивые состояния, которые эволюционируют к новому стационарному состоянию диска. Поэтому отсутствие точного равновесия в вертикальном направлении играет роль небольшого дополнительного начального возмущения.

Начальная функция распределения по скоростям является шварцшильдовской и представляет собой анизотропное максвелловское распределение:

$$f(u,v,w) = A\exp\left\{-\frac{u^2}{2c_r^2} - \frac{(v - r\Omega)^2}{2c_\varphi^2} - \frac{w^2}{2c_z^2}\right\},$$

где $\{u, v, w\}$ — компоненты скорости частиц в цилиндрической системе координат.

Для получения модели с минимальной дисперсией скоростей в конечном устойчивом состоянии диска мы выбирали такое субкритическое начальное состояние диска, при котором его динамическая эволюция обеспечивала в конце расчета как сохранение экспоненциального профиля поверхностной плотности, так и устойчивость относительно первоначально имеющих место возмущений в плоскости диска и изгибных возмущений (ответственных за рост вертикальной дисперсии скоростей).

На практике начальные значения дисперсии радиальных скоростей c_r в моделях с маломассивным балджем соответствовали параметру Тоомре $Q_T \simeq 0.8 \div 1.1$ в центральной зоне диска ($r \lesssim 2L$)

и $Q_T \simeq 1.2$–2.2 на периферии. В случае массивного балджа модели "стартовали" с более высоких значений Q_T в центральной области. Начальное значение дисперсии вертикальных скоростей c_z задавалось пропорциональным c_r. Нами рассматривались два типа моделей, различающихся начальной толщиной диска: "тонкие" неустойчивые по z-координате диски[2], у которых для $t = 0$ центральные значения $(c_z/c_r)_0 = (0.4$–$0.5)$, и "толстые" диски с $(c_z/c_r)_0 = (0.6$–$0.8)$, которые близки к границе устойчивости относительно изгибных возмущений. Вдоль радиуса эти отношения выбирались медленно уменьшающимися по экспоненциальному закону с радиальной шкалой, в несколько раз большей L. Такой выбор дисперсии скоростей обеспечивал слабую неустойчивость диска на всех r. За исключением специально оговоренных случаев, ниже мы описывали численные модели "толстых дисков".

Ни в одной из моделей значения дисперсии скоростей c_r не оставались постоянными: в процессе эволюции диск "нагревался".

Средняя тангенциальная скорость точек в модели находилась из уравнения Джинса в предположении отсутствия систематического радиального движения $< u >= 0$, осесимметричности и симметрии относительно плоскости $z = 0$:

$$V^2 = (< v >)^2 = V_c^2 + c_r^2 \times \tag{18}$$
$$\times \left\{ 1 - \frac{c_\varphi^2}{c_r^2} + \frac{r}{\varrho c_r^2}\frac{\partial(\varrho c_r^2)}{\partial r} + \frac{r}{c_r^2}\frac{\partial < uw >}{\partial z} \right\},$$

где обозначение $< \ldots >$ означает усреднение скоростей, последнее слагаемое в фигурных скобках в (18) обусловлено хаотическими составляющими радиальной скорости u и вертикальной w. При задании начального состояния модели принималось $< u >= 0$, $< w >= 0$, а скорость вращения $V \equiv < v >$ задавалась в соответствии с (18). Таким образом, в начальный момент времени имеется баланс радиальных и вертикальных сил, и диск начинает эволюцию с состояния, близкого к равновесному.

Во всех расчетах для начального момента $t = 0$ распределение дисперсии c_φ задавалось в соответствии с (3). В процессе эволюции диска проводился контроль за выполнением условия $Q_c \equiv \frac{c_r}{c_\varphi}\frac{\varkappa}{2\Omega} = 1$. Средние отклонения от него на заданном r в моделях с достаточно массивным гало ($\mu \gtrsim 2$) не превышали 3% на протяжении десятков оборотов вращения периферии диска. Следует отметить, что эта погрешность частично связана также с численным дифференцированием при вычислении эпициклической частоты $\varkappa$. В рассматривавшихся моделях с массивным гало область, где эпициклический радиус $c_r/\varkappa > r$, мала (при $\mu = 3$ она имеет размеры $r \lesssim 0.03$). В случае $\mu \lesssim 1$ эта зона расширяется до $r \lesssim 0.15$. Кроме того, в таких моделях вертикальная шкала диска увеличивается, и указанные факторы приводят к бóльшим нарушениям равенства (3). Амплитуда флуктуаций $Q_c(t)$ уменьшается с увеличением числа частиц, и в моделях с $\mu \gtrsim 2$ при $N = 2 \cdot 10^5$ не превышает 2% (за исключением самой центральной области диска $r \lesssim 0.5L$), что является отражением *бесстолкновительности* построенных моделей.

В рамках описанного подхода нами было проведено свыше 40 численных экспериментов по динамической эволюции дисков к устойчивому состоянию в зависимости от начальных значений $c_r(r)$ и $c_z(r)$. В широких пределах варьировались параметры балджа ($M_b/M_d = 0$–3, $b/L = 0.02$–0.8) и гало ($M_h/M_d = 0$–3.5, $a/L = 1$–4). Число частиц в моделях составляло $N = (40$–$500) \cdot 10^3$ при использовании алгоритма TREE-code.

Чтобы проверить устойчивость получаемых решений к методу расчета, мы провели тестирование, основанное на сравнении нескольких моделей, использующих расчет гравитационной силы двумя совершенно различными методами: методом TREE-code и методом прямого интегрирования "частица–частица" PP (когда каждая частица взаимодействует с каждой), для $N = (20$–$80) \cdot 10^3$. На рис. 1 в качестве примера показана временнáя зависимость дисперсии радиальных скоростей в рамках этих двух подходов в случае сходных начальных условий для одной из моделей[3]. Сравнение показывает отсутствие существенных различий между итоговыми состояниями дисков.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРОГОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ Q_T

5.1. Механизм разогрева диска

Первоначально осесимметричный холодный диск, находящийся в равновесии, разогревается, что выражается в росте дисперсии скоростей частиц со временем. Важнейшим для динамического

[2]Изгибные неустойчивости моды колебаний приводят к разогреву тонкого диска в вертикальном направлении и, как следствие, его утолщению. При этом, как показали наши численные модели, важную роль играет осесимметричная изгибная мода колебаний.

[3]На начальной стадии ($t < 10$) разогрева первоначально холодного тонкого диска с начальным значением параметра Тоомре $Q_T(r < 2L) \simeq 0.85$ происходит быстрый рост дисперсий скоростей в плоскости диска c_r, c_φ. Релаксация диска в вертикальном направлении протекает существенно медленнее, поэтому при разогреве диска по z-координате и наличии движений в радиальном направлении оказываются возможными небольшие локальные уменьшения c_r (см. кривую *1* на рис. 1 после $t > 7$).

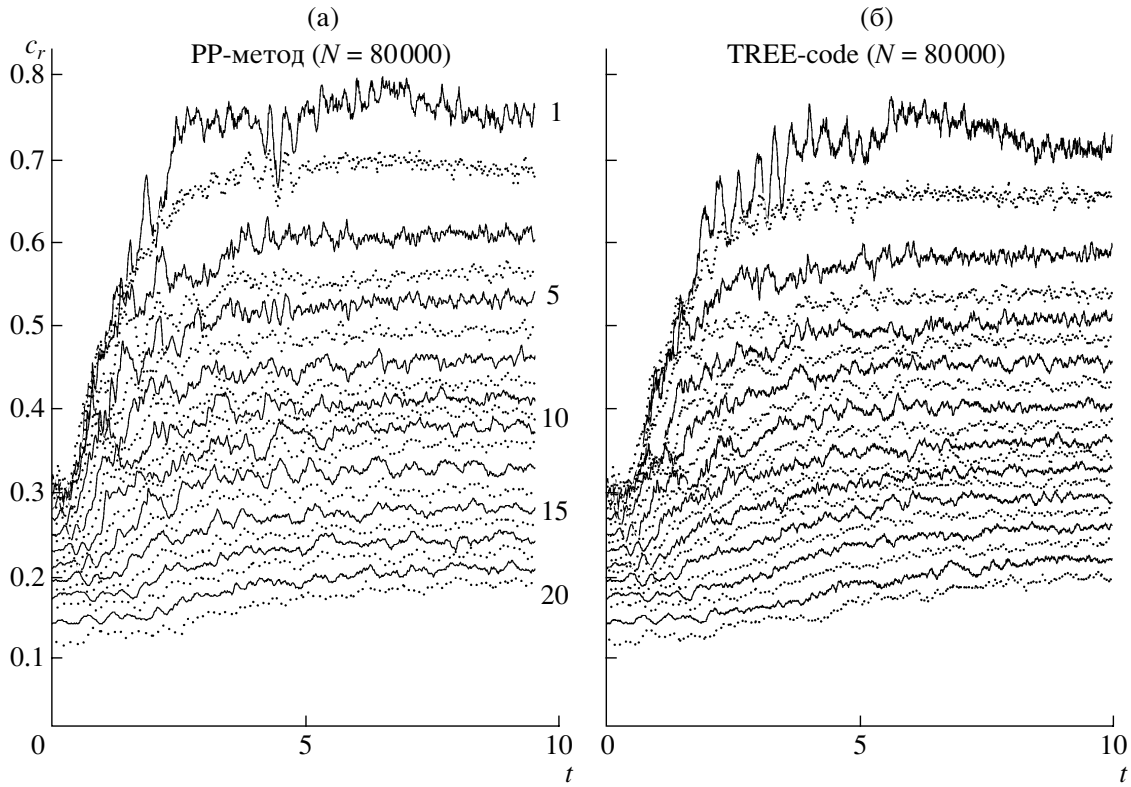


Рис. 1. Зависимость дисперсии радиальных скоростей частиц $c_r(r)$ от времени на 20 различных расстояниях от центра (1 — центральная зона, ширина каждой зоны — $0.05R$) на начальной стадии разогрева первоначально холодного диска ($t = 10$ соответствует ~3 оборотам внешнего края диска) для двух методов вычисления гравитационной силы в модели с $N = 80000$: а — PP-алгоритм, б — TREE-code.

моделирования является вопрос о механизме разогрева. Для правильного представления процессов в звездных дисках важно, в частности, чтобы разогрев не был обусловлен столкновительной релаксацией частиц, связанной с тем, что их число N на много порядков меньше числа звезд в реальных системах. Это достигается надлежащим выбором числа частиц и радиуса обрезания. Критерием отсутствия заметного влияния столкновительной релаксации является сохранение характера эволюции системы при увеличении числа частиц, что проверялось на многих моделях [4].

[4] Минимальное число частиц N_{crit}, при котором указанный критерий выполняется с достаточной точностью (т.е. в пределах случайных флуктуаций оценок конечных параметров) зависит, в частности, от вида кривой вращения. В случае концентрированного ядра (балджа) N_{crit} выше, что связано с большим градиентом угловой скорости вращения в центральной области диска, и в предельных случаях очень короткого твердотельного участка N_{crit} может достигать $3 \cdot 10^6$ [20]. Если кривая вращения монотонно растет до $r \simeq 2L$, то, как показали эксперименты, в качестве N_{crit} можно принять $\simeq 4 \cdot 10^4$.

Отметим важнейшие особенности разогрева диска, полученные в численных экспериментах.

1. Время разогрева диска существенно больше среднего периода обращения частиц (рис. 2а). На начальном этапе ($t \lesssim 1$) величина c_r практически не меняется до тех пор, пока диск остается осесимметричным. В случае маломассивного гало или его отсутствия эволюцию диска определяет глобальная бар-мода, и разогрев обусловлен процессом формирования неосесимметричной центральной перемычки и связанной с ней двухрукавной спиралью. Для моделей с достаточно массивным гало рост бар-моды не происходит, но образуется сложная транзиентная система мелкомасштабных спиральных волн (рис. 2б), уменьшение амплитуды которых со временем сопровождается переходом кинетической энергии вращения в хаотическую компоненту скорости и приводит к нагреву диска.

2. Разогрев первоначально холодного диска ($0.5 \lesssim Q_T \lesssim 1$) начинается в центральной части (рис. 2а, б). Процесс разогрева периферии происходит значительно медленнее. Увеличение дисперсии скоростей там обычно начинается, когда

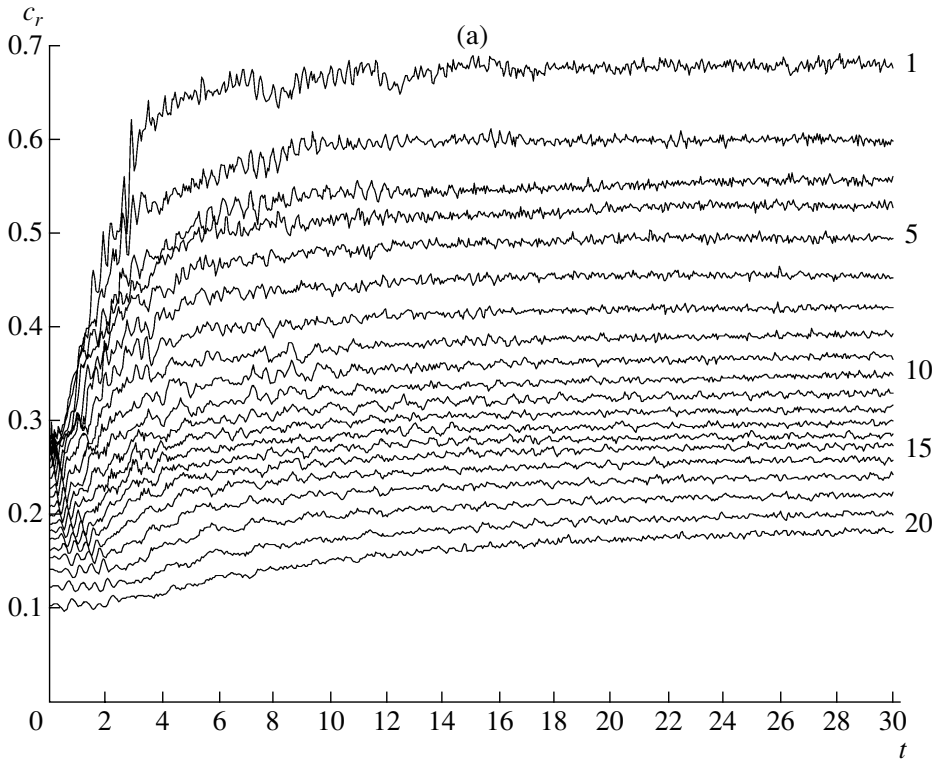


Рис. 2. Эволюция первоначально неустойчивого диска ($\mu = 3, a = L$). а — Зависимость дисперсии радиальных скоростей от времени для 20 радиальных зон. б — Формирование системы транзиентных спиральных волн из первоначально осесимметричного диска. На плоскости (x, y) показаны положения точек в разные моменты времени (модель содержит $5 \cdot 10^5$ частиц, поэтому изображена только часть точек). в — Зависимость от времени интегральных амплитуд Фурье-гармоник $\hat{A}(m)$ для различных мод $m = 2, ..., 6$. В интервале $1 \lesssim t \lesssim 4$ значения $\hat{A}$ максимальны, и на этом промежутке времени возмущения имеют максимальные амплитуды (рис. 1б). После $t > 4$ происходит уменьшение $\hat{A}$, что соответствует началу диссипации волн и замедлению роста дисперсии радиальных скоростей c_r (рис. 2а).

в центре уже достигается квазистационарное состояние (рис. 2а). В то же время процессы в центре и на периферии оказываются взаимосвязанными: быстрая неустойчивость в центральной области способна ускорить разогрев внешней области диска, а ее устойчивость замедлять этот процесс.

3. Если не образуется бар, то с ростом дисперсии скоростей амплитуда возмущений начинает уменьшаться. В свою очередь с уменьшением амплитуды волн замедляется и рост дисперсии радиальных скоростей c_r. Разогрев практически прекращается после затухания транзиентных спиральных волн (рис. 2а,б). Интегральная амплитуда Фурье-гармоник

$$\hat{A}(m;t) = \sqrt{\sum_p A^2(m,p,t)},$$

$$A(m,p,t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \exp\left\{i\left[m\varphi_j(t) + p\ln(r_j(t))\right]\right\}$$

для всех номеров мод m со временем уменьшается, но медленнее всего для $m = 2$ (рис. 2в). Распределение плотности в диске становится близким к осесимметричному (если масса сферичесих компонент достаточно велика, чтобы в нем не появлялся бар), и дисперсия c_r в целом сохраняет свой уровень на протяжении десятков оборотов вращения при условии прекращения релаксационных процессов в вертикальном направлении.

4. Если на начальной стадии эволюции первоначально холодного диска ($Q_T(r \leq 2L) \lesssim 1$) могут доминировать трехрукавные и даже четырехрукавные моды (рис. 2б,в), то характер спиральной структуры меняется, когда начальное состояние задается субкритическим (неустойчивым, но не очень холодным, для которого $Q_T \gtrsim 1$). Пространственная структура возмущений в значительной степени зависит также от относительной массы сфероидальной подсистемы. На рис. 3 показаны распределения логарифма поверхностной плотности диска в разные моменты времени. В данной

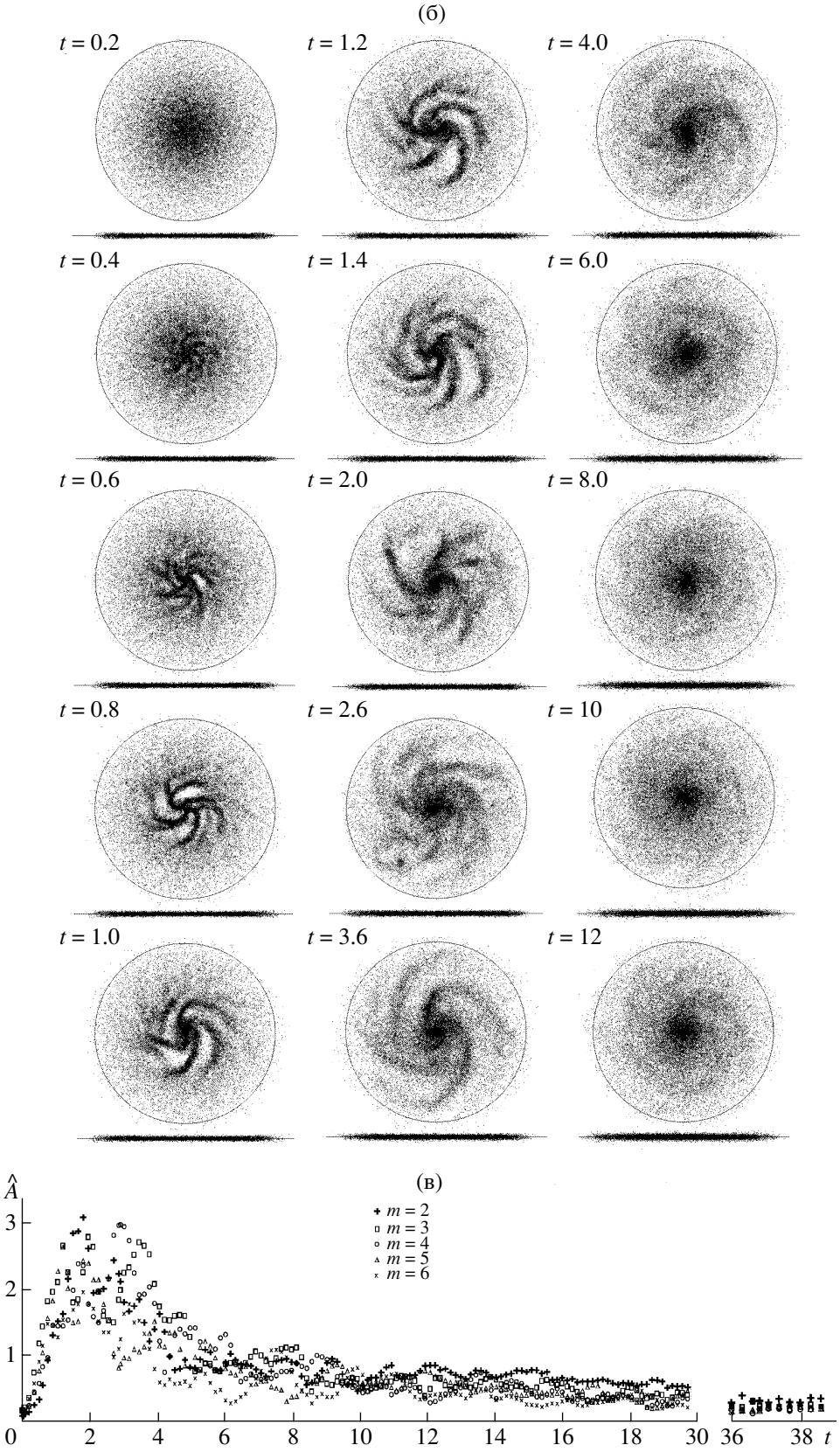


Рис. 2. (Окончание.)

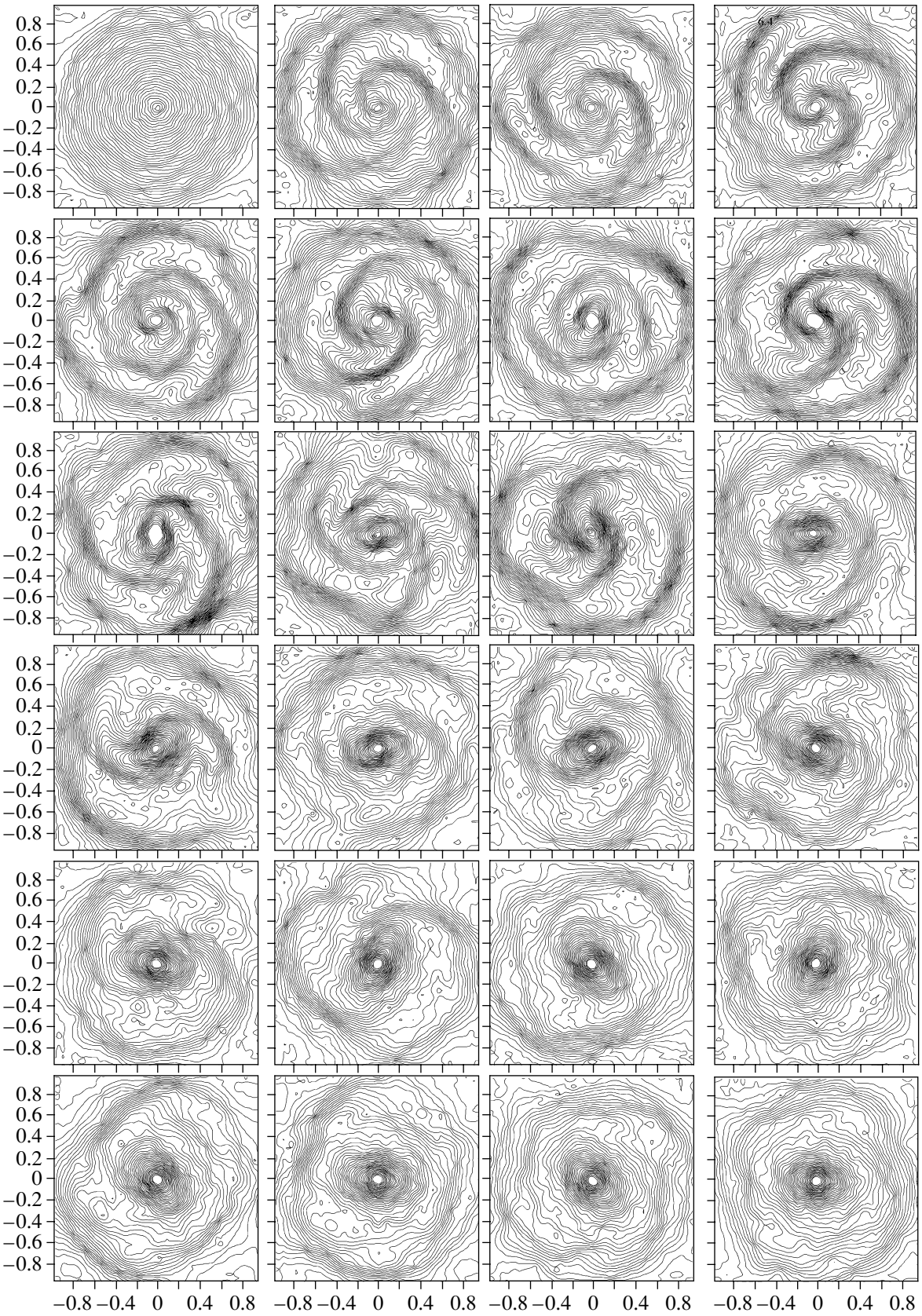


Рис. 3. Распределение логарифма поверхностной плотности $\lg\sigma$ в разные моменты времени от $t = 1$ до $t = 30$ для начального субкритического состояния с $Q_T \gtrsim 1$.

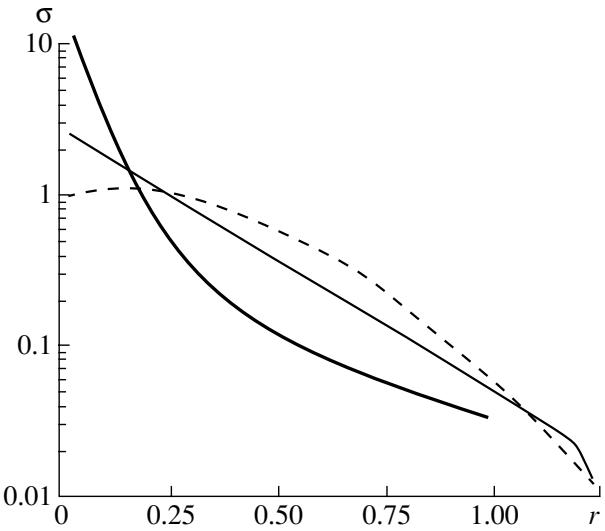


Рис. 4. Радиальные зависимости поверхностной плотности диска для модели, "стартующей" с холодного состояния, в которой происходит существенное перераспределение плотности. Тонкая сплошная линия — начальный экспоненциальный профиль; жирная сплошная — конечный профиль, усредненный по азимуту, после сильного разогрева с образованием бара; штриховая линия — исходный профиль, обеспечивающий в конце расчета квазиэкспоненциальное распределение.

модели основной является двухрукавная мода, хотя гармоника $m = 3$ также играет важную роль, особенно на начальных стадиях эволюции. Достаточно характерной особенностью представляется замыкание во внешней области диска спиралей в кольцеобразную структуру.

5. В случае очень холодного начального состояния в моделях с маломассивной сфероидальной подсистемой происходят существенное перераспределение вещества в диске и изменение формы кривой вращения $V(r)$ в процессе разогрева и формирования бара. При этом конечное распределение поверхностной плотности $\sigma(r)$ оказывается сильно отличающимся от экспоненциального (рис. 4)[5].

Другой особенностью моделей дисков с очень холодным начальным состоянием ($Q_T \lesssim 1$) является то, что дисперсия скоростей в конце расчета (через 10–15 оборотов) оказывается несколько больше, чем требуется для гравитационной устойчивости. Причина этого эффекта обусловлена разогревом за счет коллективных процессов — волновых движений большой амплитуды, возникающих при сильной неустойчивости. Когда диск нагревается и достигает пороговой устойчивости, эти возмущения затухают, однако процесс затухания волн носит инерционный характер: дисперсия скоростей уже обеспечивает устойчивость диска, а спиральные волны еще не затухли (фурье-анализ возмущений плотности диска подтверждает это) и вызывают дополнительный разогрев. Поэтому для получения минимальной дисперсии скоростей, требуемой для устойчивости диска, нами использовался итерационный алгоритм последовательных приближений начальной дисперсии скоростей к границе устойчивости.

В основе *итерационного подхода* лежала серия нескольких (2–4) последовательных расчетов, каждый из которых стартовал с начальной дисперсией скоростей, находящейся несколько ближе к критическому значению, чем в каждом предыдущем случае. Для этого для данного радиуса r стартовое значение дисперсии выбиралось промежуточным между начальным и конечным (после 5–10 оборотов по внешнему краю диска) значениями предшествующего эксперимента.

Как и следовало ожидать, граница устойчивости зависит и от первоначальной толщины диска[6]. Если диск является изначально толстым (вертикальная шкала $h_z \gtrsim 0.2L$) и неустойчивым лишь в плоскости ($c_r < c_r^{crit}$), то его разогрев происходит медленнее и прекращается при меньших значениях дисперсии радиальных скоростей, чем в случае изначально тонкого диска. Этот эффект обусловлен двумя факторами: стабилизирующим влиянием конечной толщины диска и медленностью релаксационных процессов в вертикальном направлении по сравнению с характерным временем разогрева в плоскости диска.

Результаты динамического моделирования позволяют определить параметры диска на границе гравитационной устойчивости (когда дисперсия скоростей перестает меняться — после 5–20 оборотов диска по внешнему краю).

[5]В принципе можно "подобрать" такой начальный профиль плотности, который приводит в конце расчета к экспоненциальному (штриховая линия на рис. 4), однако подобный подход представляется искусственным. По-видимому, звездные диски большинства галактик не проходят через стадию сильной динамической неустойчивости.

[6]Начальная толщина дисков реальных галактик зависит от условий их формирования. К примеру, если интенсивное звездообразование имело место в процессе коллапса газового диска до достижения им квазистационарного состояния, то сформировавшийся звездный диск может иметь значительно большую толщину и более высокую дисперсию скоростей c_z, чем минимальное значение, требуемое для устойчивости; однако такой сценарий трудно совместим с существованием очень тонких ($h_z/L < 0.2$) звездных дисков у галактик, видимых с ребра. Зависимость толщины дисков от относительной массы гало также согласуется с допущением, что дисперсия скоростей звезд близка к ожидаемой для их маржинальной устойчивости [7].

5.2. Граница гравитационной устойчивости моделей без балджа

Нами была рассчитана серия моделей галактик без балджа, которые различаются относительной массой $\mu = M_h/M_d$ и шкалой a гало при фиксированной радиальной шкале диска L.

В случае $a \gtrsim L$ кривые вращения имеют протяженный (условно называемый "твердотельным") участок $V_c(r)$, переходящий в области $r \gtrsim 2L$ в плато $V_c \simeq const$ (линия 1 на рис. 5а). На рис. 5а показаны для модели галактики без балджа с $\mu = 1$ радиальные распределения круговой скорости вращения $V_c(r)$ (линия 1), средней скорости вращения частиц $V(r)$ (линия 2), дисперсия радиальных скоростей $c_r(r)$ (линия 3), а также параметры дифференциальности вращения $S = 2\Omega/\varkappa$, отдельно вычисленные соответственно для скоростей $V_c(r)$ и $V(r)$ (символы 4, 5).

Зная конечные значения дисперсии скоростей, а также плотность диска и скорость вращения, можно для выбранной модели сравнить значения параметра устойчивости Тоомре (1) Q_T с аналитически полученными локальными критериями, обсуждавшимися выше, а также последние между собой.

Заметим, что аналитические критерии были получены в предположении малости различия между скоростью кругового вращения $V_c(r)$ и средней скоростью вращения $V(r)$ гравитирующих точек. Однако различие между ними для бесстолкновительных дисков может быть существенным. Поэтому параметры устойчивости определялись как для $V_c(r)$, так и для $V(r)$.

На рис. 5б для данной модели приведены результаты расчета величин Q_T и параметров Тоомре для маржинальной устойчивости по критериям Поляченко–Поляченко–Стрельникова (ППС) $Q_T^{(P)}$ (6) и Морозова $Q_T^{(M)}$ (5), вычисленных отдельно с использованием как круговой скорости, так и средней скорости вращения точек. В случае массивного гало ($\mu \gtrsim 2$) различие между параметрами устойчивости, вычисленными для $V_c(r)$ и $V(r)$, мало, но может становиться заметным при $\mu \lesssim 1$ (рис. 5а, б). Это связано с увеличением разности $V_c - V$ с ростом дисперсии скоростей в соответствии с (18).

Как в рассматриваемом случае, так и для большинства моделей выполняется условие $S \simeq Q_T^{(M)} \lesssim Q_T \lesssim Q_T^{(P)}$ (напомним, что $Q_T = S$ — это условие маржинальной устойчивости по Тоомре с грубым учетом неосесимметричных возмущений (см. раздел 2)).

На рис. 5в, г сравнение критериев устойчивости представлено в иной форме. На них приводятся радиальные зависимости для отношений модельной дисперсии скоростей диска c_r, при которой он становится устойчивым, к критическим значениям по различным критериям, рассмотренным в разделе 2. Полному согласию аналитических критериев с модельными зависимостями соответствовало бы отношение $c_r/c_{crit} = 1$.

Хотя ни один критерий не объясняет модельные зависимости $Q_T(r)$ на всех r, ближе всего к ним оказываются критерий ППС, обобщенный на случай конечной толщины (по формуле (2)), и критерий Морозова (5) (символы 15 и 16 на рис. 5в). Если критерии устойчивости определять по средней скорости вращения (рис. 5б), то вариации c_r/c_{crit} с радиусом сохраняют свой вид (рис. 5г), и в области $0.1 < r < 0.8$ это отношение оказывается ближе всего к единице для критерия Морозова (символ 16). Примечательно, что во всех случаях критерий ППС (символ 12) дает завышенное значение c_{crit}, но отношение c_r/c_{crit} остается почти постоянным в большом интервале r, что позволяет легко ввести поправочный множитель к c_{crit}.

Важным результатом представляется то, что радиальная зависимость параметра Тоомре $Q_T(r)$, вычисленная для круговой скорости $V_c(r)$, имеет качественно сходный вид для всех рассмотренных моделей без балджа (рис. 5д). При этом наблюдается примерное постоянство $Q_T(r)$ в области $0 \lesssim r/L \lesssim 2$ на уровне $Q_T \simeq 1.2$–1.6 (рис. 5д). На периферии диска ($r \gtrsim 2L$) с ростом радиуса величина Q_T монотонно увеличивается, достигая на краю диска ($r \simeq 4L$) значений $Q_T \simeq 2.5$–3. Однако разброс значений Q_T для различных моделей невелик, что позволяет в качестве ограничивающей функции выбрать функцию вида

$$Q_T^{(*)} = A_0 + A_1 \cdot \left(\frac{r}{L}\right) + A_2 \cdot \left(\frac{r}{L}\right)^2, \qquad (19)$$

где $A_0 = 1.25$, $A_1 = -0.19$, $A_2 = 0.134$ (жирная линия на рис. 5д). Минимум этой функции достигается в точке $r/L = 0.7$, где он составляет 1.2.

Оценки дисперсии скоростей звездного диска, получаемые из наблюдений, относятся, как правило, к внутренней области диска $r < 2L$. Поэтому примерное постоянство Q_T в этой же области является удобным для оценки поверхностной плотности диска и его массы M_d (в предположении его устойчивости), если известны кривая вращения галактики и радиальная экспоненциальная шкала диска L. Связывающим соотношением является уравнение

$$c_r = Q_T^{(*)}(r)\frac{3.36G\sigma_0 \exp(-r/L)}{\varkappa}, \qquad (20)$$

где $Q_T^{(*)}$ для галактик с протяженным участком роста $V_c(r)$ определяется соотношением (19). Оценка

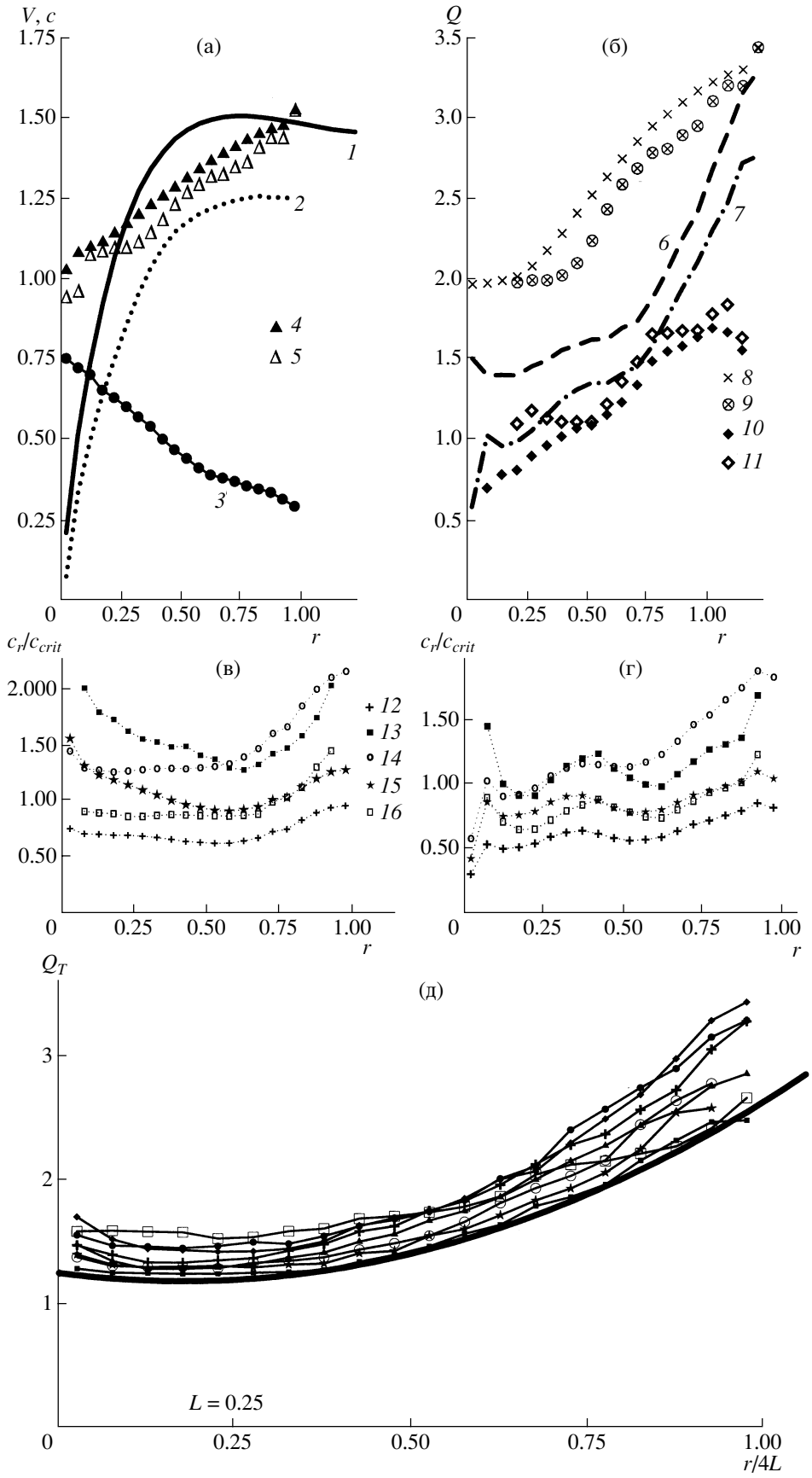

V, c
(а)
1
2
3
4
5
Q
(б)
6
7
8
9
10
11
r
c_r/c_{crit}
(в)
12
13
14
15
16
(г)
Q_T
(д)
L = 0.25
r/4L

Рис. 5. Параметры диска, проэволюционировавшего к устойчивому состоянию, на границе устойчивости в моделях без балджа. Радиальные зависимости круговой скорости $V_c(r)$ (линия *1*), скорости вращения диска $V(r)$ (линия *2*), дисперсии радиальных скоростей $c_r(r)$ (линия *3*) и параметров $S = 2\Omega/\varkappa$, вычисленных для круговой скорости вращения (линия *4*) и скорости вращения диска (линия *5*) соответственно. Используется модель, в которой масса гало в пределах $r \leq 1 = 4L$ равна массе диска и шкала гало a равна радиальной шкале диска L. б — Радиальные зависимости параметра Тоомре на границе устойчивости, вычисленные с использованием различных критериев устойчивости для модели, показанной на рис. 5а: *6* — Q_T, определенной по V_c, *7* — Q_T по V, *8* — $Q_T^{(P)}$ по V_c, *9* — $Q_T^{(P)}$ по V, *10* — $Q_T^{(M)}$ по V_c, *11* — $Q_T^{(M)}$ по V. Используется та же модель, что и для рис. 5а. в — Радиальные распределения отношений дисперсии радиальных скоростей в численной модели (линия *3* на рис. 5а) к критическим значениям c_r/c_{crit} (критические значения дисперсии радиальных скоростей c_{crit} вычислены с использованием круговой скорости вращения $V_c(r)$ (кривая *1* на рис. 5а)): *12* — в соответствии с критерием Поляченко—Поляченко—Стрельникова (6); *13* — в соответствии с критерием Морозова (5); *14* — $c_r/(c_T 2\Omega/\varkappa)$ в соответствии с упрощенным критерием (4); *15* — c_r нормирована на величину $c^{(P)}Q_T^{(1)}$, которая является обобщением критерия (6) на случай диска конечной толщины по формуле (2); *16* — для критерия Морозова (5) в случае бесконечно тонкого диска ($D = 1$). г) То же, что на рис. 5в, но для скорости вращения диска $V(r)$ (см. кривую *2* на рис. 5а). д — Параметр Тоомре $Q_T(r)$ на границе устойчивости для серии моделей без балджа с различными параметрами гало. Жирная сплошная линия рассчитана по формуле (19).

массы диска $M_d = 2\pi\sigma_0 L^2$ в свою очередь при известной скорости вращения позволяет "вычленить" массу темного гало в пределах данного радиуса.

5.3. Модели с образованием бара

В случае маломассивного или очень "рыхлого" гало при отсутствии балджа эволюция первоначально холодной динамической модели неизбежно приводит к образованию бара. В процессе его формирования, как правило, происходит заметное радиальное перераспределение вещества, которое тем сильнее, чем более холодным являлось начальное состояние. Внешняя граница диска отодвигается наружу. В результате характерная радиальная шкала азимутально усредненной поверхностной плотности $L = -(d\ln\sigma/dr)^{-1}$ изменяется, что может приводить к отклонениям от экспоненциального профиля ($L = \mathrm{const}$ во всем диске). В самой центральной области ($r \lesssim 0.3L$) поверхностная плотность может увеличиться по сравнению с первоначальным значением в несколько раз (рис. 4), что в соответствии с формулой (1) приводит к уменьшению Q_T. Аналогичный вывод о росте центральной плотности в процессе формирования бара получен и в моделях с "живым" (эволюционирующим) гало [55]. Заметим, что, как показали численные модели, при определенных условиях взаимодействие бара и "живого" гало может заметно влиять на динамическую эволюцию баров [56].

Условия устойчивости, рассмотренные выше, были получены и сравнивались для осесимметричных дисков, однако представляет интерес их формальное вычисление по усредненным по азимуту параметрам при отсутствии осевой симметрии во внутренней области — для галактик с баром. В качестве примера на рис. 6 приведены радиальные распределения параметров диска, в котором сформировался бар (рис. 6 а—в — для модели с маломассивным гало, а рис. 6 г—е — для модели с гало, масса которого в начальный момент времени в пределах $4L$ вдвое больше, чем у диска). Законы радиального распределения поверхностной плотности в области бара и вне его могут различаться (рис. 6 в, е). Формирование бара, как правило, приводит к дополнительному утолщению диска. Функция $Q_T(r)$ зависит от параметров бара (фактически от начальных условий), но в области $r \gtrsim L$ выполняется условие $Q_T \gtrsim 1.5$, и радиальная зависимость $Q_T(r)$ имеет характер, качественно сходный со случаем осесимметричного диска. В моделях с более массивным гало формирование бара при прочих равных условиях сопровождается меньшим нарушением первоначального экспоненциального профиля поверхностной плотности (рис. 6 е).

Характерный вид зависимостей для модели с массивным гало (рис. 6 г—е) слабо отличается от случаев, показанных на рис. 5 для моделей без бара.

Как и следовало ожидать, для подавления бар-моды требуется первоначально более высокая дисперсия скоростей c_r либо более массивное гало в соответствии с "классическими" представлениями (см., например, [29, 44]).

5.4. Модели с балджем

Рассмотрим теперь модели галактик, у которых кривая вращения в центральной области ($r \lesssim L$) определяется прежде всего балджем. Вне балджа ($r \gtrsim L$) кривые вращения, как правило, являются почти плоскими $V \simeq \mathrm{const}$. На рис. 7 показаны типичные модельные радиальные зависимости параметров диска для этого случая. При наличии балджа параметр Q_T сильно увеличивается в центральной области диска, где динамика определяется потенциалом балджа (рис. 7 б, д). Однако вне этой области в зоне $r \simeq (1{-}2) \cdot L$ радиальная зависимость Q_T сохраняет свой вид (см. формулу (19) и

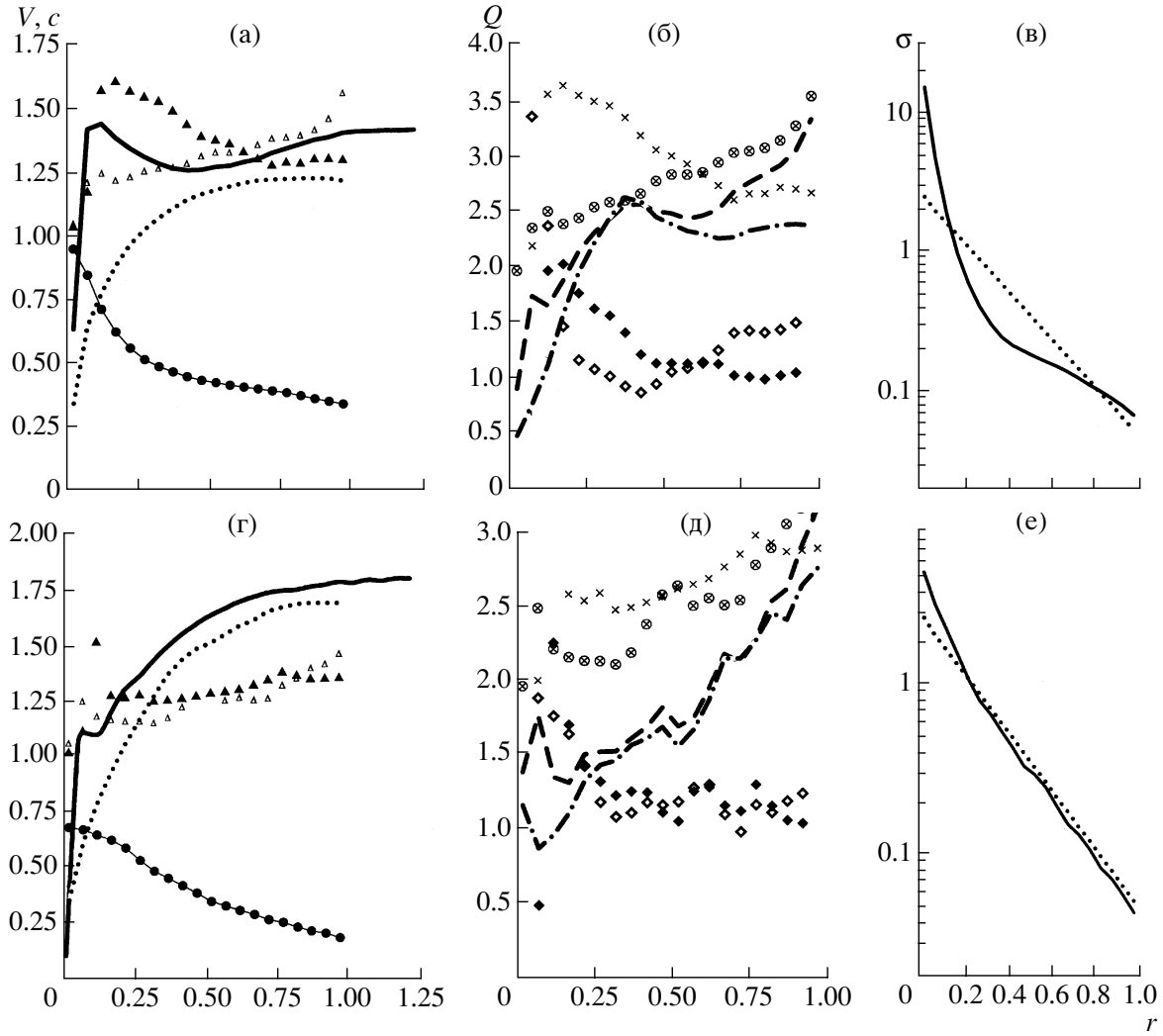


Рис. 6. Модели без балджа, в процессе эволюции которых формируется бар. а–в – $M_h = 0.7M_d$, $a = 2L$; г–е – $M_h = 2M_d$, $a = 1.6L$. Обозначения те же, что на рис. 5. На графиках в и е приведены азимутально усредненные профили поверхностной плотности в начальный момент времени (штриховая линия) и после установления квазистационарного состояния с баром при $t \geq 25$ (сплошная линия).

рис. 5д). С ростом r величина Q_T монотонно нарастает до значений 2.5–3.5. Полученное радиальное распределение параметра Q_T является типичным для систем с не очень массивным ($M_b/M_d \lesssim 0.3$) и непротяженным балджем ($(r_b)_{max} \lesssim L$).

Чем более массивным и компактным является балдж, тем больше значение Q_T в центре диска. Этот рост параметра Тоомре в основном обусловлен увеличением эпициклической частоты $\varkappa$. С ростом массы сильно концентрированного балджа дисперсия радиальных скоростей в центральной области диска также несколько увеличивается. Дополнительный разогрев самого центра ($r \lesssim 0.5L$) дисковой подсистемы в модели, показанной на рис. 7а, не связан непосредственно с гравитационной неустойчивостью. В этой модели с $\mu = 1$ на начальной стадии формируется бар, который разрушается со временем в результате рассеяния частиц, проходящих вблизи концентрированного ядра, шкала которого $b = 0.01$. Механизм разрушения бара аналогичен действию массивной черной дыры [57].

В результате диск дополнительно нагревается и утолщается в центральной области (рис. 7 е). Степень дополнительного разогрева и круговая скорость V_c в центре диска очень чувствительны к параметрам балджа, прежде всего радиусу ядра b (в частности, при $b \gtrsim 0.05L$ указанного разрушения

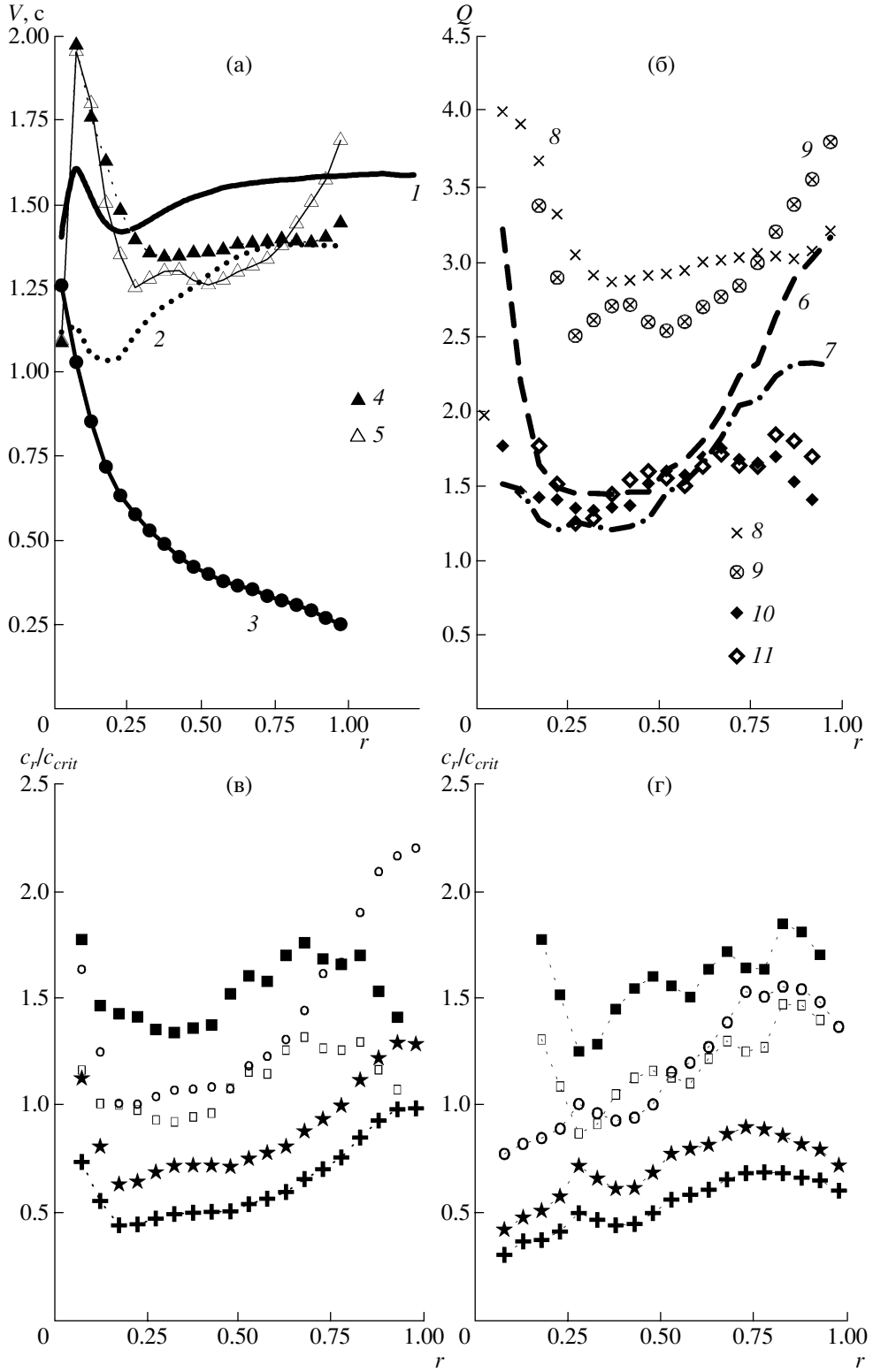
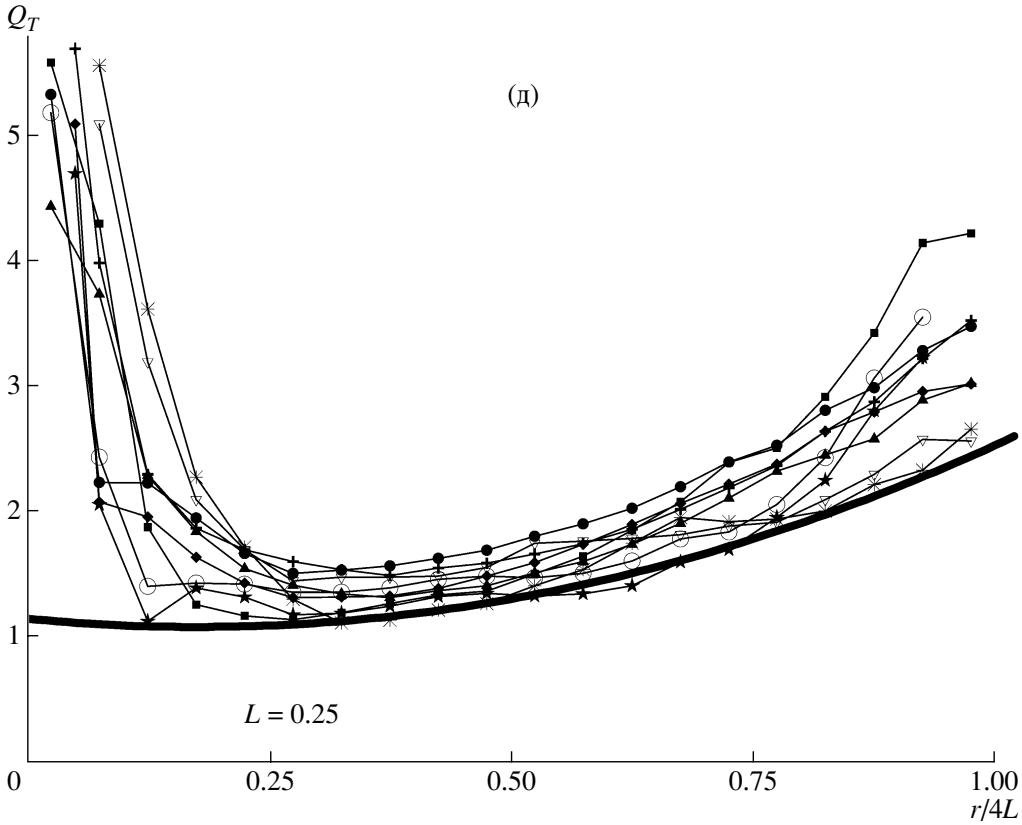


Рис. 7. Параметры диска на границе устойчивости в моделях с балджем. а–г — Радиальные зависимости параметров диска (обозначения те же, что на рис. 5). Масса гало в пределах $r \leq 1 = 4L$ равна массе диска, шкала гало $a = 3.6L$. Параметры балджа: $M_b = 0.24M_d$, $b = 0.04L$, $(r_b)_{\max} = 0.5L$. *д* — Параметр Тоомре $Q_T(r)$, рассчитанный с использованием $V_c(r)$, на границе устойчивости для серии моделей с балджем. Жирная сплошная линия построена по формуле (19). е — Вид диска с ребра в конце расчета в модели, изображенной на графике а. Точками показаны положения частиц. В центральной области возникает заметное утолщение диска.



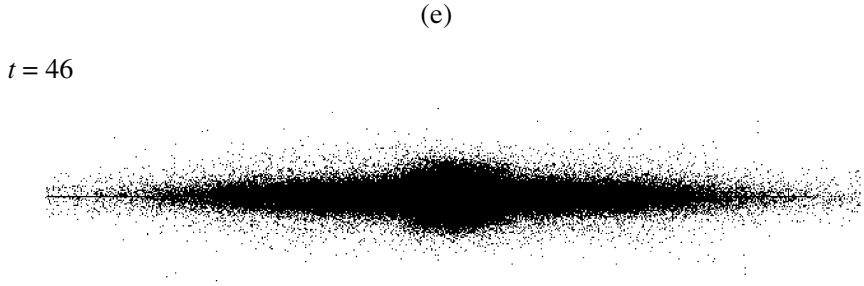


Рис. 7. (Окончание.)

бара не наблюдается). Поэтому в области $r \lesssim 0.5L$ параметр Тоомре Q_T может очень сильно меняться в разных моделях (рис. 7 д).

5.5. Дифференциальность вращения как фактор, повышающий порог гравитационной устойчивости

Рассмотрим два предельных случая — диск, вращение которого близко к твердотельному, и квазикеплеровский диск, скорость вращения которого падает как $V \propto r^{-1/2}$. Поскольку дифференциальность вращения является дестабилизирующим фактором, для твердотельно вращающегося диска следует ожидать при прочих равных условиях меньшие значения Q_T.

Протяженный участок почти твердотельного вращения в галактике обычно наблюдается в том случае, если масса диска в пределах значительной части диска ($r \lesssim 2L$) является доминирующей и как следствие для подавления барообразующей неустойчивости требуется более высокий разогрев диска, чем при наличии массивных сферических компонент. Поэтому для выяснения роли дифференциальности вращения мы рассмотрели модель, в которой образование бара подавлено массивным гало, и имеется "твердотельный" участок во внешней области диска ($r \gtrsim L$). Параметр дифференциальности вращения в этой модели $S(r > L) = 2\Omega/\varkappa = 1.1{-}1.2$ близок к значению

$S = 1$, которое соответствует строго твердотельному вращению (рис. 8а). Радиальные зависимости параметров, характеризующих устойчивость системы Q_T, $Q_T^{(P)}$, $Q_T^{(M)}$, S приведены на рис. 8а. Как видим, в целом диск оказывается устойчивым при меньших значениях параметра Q_T (кривая 6) по сравнению со случаями, рассмотренными выше. В центре имеем $Q_T \simeq 1$, а на периферии диска — $Q_T \simeq 2$.

Обратимся к другому предельному случаю, который соответствует кривой вращения, близкой к кеплеровской (рис. 8б). У галактик такие участки наблюдаются очень редко, однако нас будет интересовать принципиальный вопрос о влиянии сильной дифференциальности вращения на минимально необходимое для устойчивости значение дисперсии скоростей. Для создания квазикеплеровских дисков в динамическую модель вводились массивные концентрированные компоненты. Построенная серия моделей является естественным продолжением моделей с очень массивными балджами ($M_b > (2{-}4)M_d$). На рис. 8б приведены результаты расчетов для такой модели. Для дисков с сильным дифференциальным вращением значение параметра Тоомре заметно возрастает, так что даже в области, где Q_T минимально ($r \simeq (1{-}2)L$), для устойчивости уже требуется $Q_T > 2$.

Поскольку сфероидальная подсистема доминирует в центральной части, то бар не образуется и не возникает дополнительного увеличения дисперсии скоростей, отмеченного в п. 5.4 (рис. 7а).

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

С помощью численного моделирования эволюции первоначально неустойчивых равновесных бесстолкновительных дисков нами для целого ряда трехмерных моделей было проведено сравнение минимальных значений радиальной дисперсии скоростей c_r, при которых диски достигают конечного квазистационарного состояния (как правило, через $5 - 10$ оборотов по внешнему краю), с дисперсией скоростей $c_T = 3.36\pi G\sigma/\varkappa$, достаточной для локального подавления гравитационной неустойчивости тонкого диска относительно осесимметричных возмущений (критерий Тоомре), а также с другими локальными критериями устойчивости. Отдельно рассматривалось влияние на радиальный ход $Q_T = c_r/c_T$ балджа, темного гало, дифференциальности вращения, а также начальных параметров диска.

Проведенные численные эксперименты показали, что дифференциальность вращения диска, его неоднородность, глобальный характер возмущений, конечная толщина диска могут менять локальные значения дисперсии скоростей (или параметр Тоомре) маржинально устойчивых дисков на $\gtrsim 50\%$. Численные модели позволяют исследовать действие каждого из этих факторов по отдельности.

Рассмотренные модели наглядно демонстрируют быстрый нагрев первоначально неустойчивых дисков в процессе образования и разрушения транзиентных спиральных ветвей. При этом слабоконтрастные "остатки" этих ветвей прослеживаются на протяжении более 10 оборотов. Сходный характер эволюции дисков получен как в моделях с различным числом частиц, так и в моделях, использующих иной алгоритм расчета (PP).

Как и следовало ожидать, минимальное значение радиальной дисперсии скоростей в конце экспериментов оказывается тем больше (по сравнению с круговой скоростью), чем меньше относительная масса гало, чем меньше начальная толщина диска и чем более дифференциальный характер имеет его вращение. При этом, хотя радиальная зависимость Q_T имеет в разных моделях различный характер и в первую очередь определяется относительной массой и степенью концентрации сферических компонент, во всех случаях $Q_T(r)$ проходит через минимальное значение $Q_T \simeq 1.2{-}1.6$, слабо зависящее от модели галактики, на расстоянии $(1{-}2)L$ от центра. Это обстоятельство может быть использовано для примерной оценки плотности (а следовательно, и массы) диска галактики (или их предельных значений) по известной дисперсии радиальных скоростей с использованием соотношений (19), (20) и без привлечения численного моделирования или аналитических критериев устойчивости. Диск, эволюция которого начинается не с субкритического, а с сильно неустойчивого состояния, в случае не очень массивного гало ($M_h/M_d \lesssim 2$) может претерпевать существенное перераспределение массы всего за 1–2 оборота. Экспоненциальный характер распределения яркости, обычно наблюдаемый у галактик, говорит о том, что формирование звездных дисков, по-видимому, не сопровождалось развитием сильной гравитационной неустойчивости.

Эволюция диска, прослеживаемая в численных моделях, наглядно демонстрирует взаимосвязь процессов на различных r. Начальная устойчивость центральной области диска замедляет, а сильная неустойчивость ускоряет рост дисперсии скоростей на его периферии, не приводя, однако, к существенному изменению конечного состояния.

Существующие аналитические критерии устойчивости тонких дисков выводятся исходя из иных позиций и, строго говоря, не обязаны совпадать с найденными в работе параметрами Q_T вследствие локального характера критериев и двумерности используемых аналитических моделей, в то время как в динамических моделях разогрев диска происходит в трех измерениях. Сравнение модельных

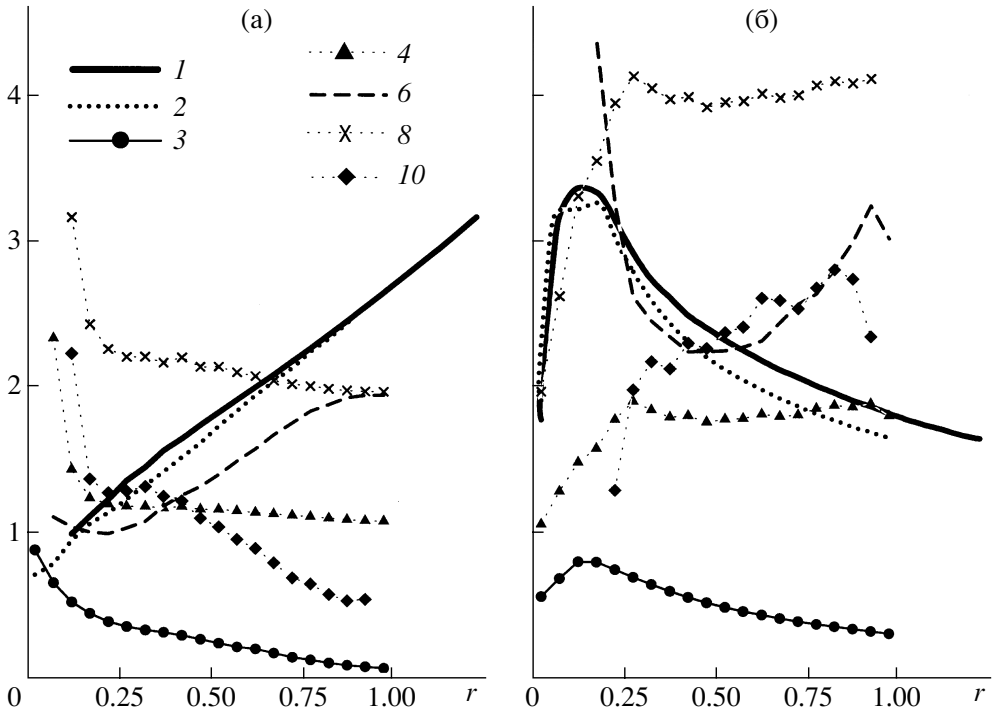


Рис. 8. Радиальные зависимости параметров диска в принятых в работе единицах в моделях, где: а — существенная часть диска вращается квазитвердотельно, б — вращение в области $r > L = 0.25$ близко к кеплеровскому. Система обозначений аналогична рис. 5: *1* — круговая скорость $V_c(r)$; *2* — скорость вращения диска (звезд) $V(r)$; *3* — дисперсия радиальных скоростей $c_r(r)$; *4* — параметр S, рассчитанный по формуле (3) для круговой скорости; *6* — параметр Тоомре Q_T, рассчитанный с круговой скоростью; *8* — критический параметр Тоомре $Q_T^{(P)}$, рассчитанный по критерию (6) с $V_c(r)$; *10* — критический параметр Тоомре $Q_T^{(M)}$, рассчитанный по критерию (5) с $V_c(r)$.

значений дисперсии скоростей с предсказываемыми различными критериями (рис. 5 б, в, г; 6 б, д; 7 б, в, г; 8 а и б) демонстрирует заметные расхождения между ними. Однако формальное использование этих критериев, безусловно, дает правильные по порядку величины результаты. В частности, как и модельные оценки, они показывают, что параметр $Q_T > 1$ на всех r и возрастает на периферии дисков, но вытекающие из локальных критериев зависимости $Q_T(r)$ ни в одном случае не совпадают с найденными в работе во всем интервале радиусов $(0 < r < 4L)$ и могут отличаться от модельных оценок на некоторых r более чем в 1.5 раза.

Пройдя через минимум, $Q_T(r)$ для диска, достигшего устойчивого состояния, монотонно растет с r до $Q_T \simeq 2$–3 на расстоянии $(3$–$4)L$ от центра (в реальных галактиках это обычно близко к оптическим границам диска). Отметим, что подобный же рост $Q_T(r)$ от 1.5 до 2.5 на периферии был ранее получен иным методом в работе [49] путем построения равновесных устойчивых функций распределения для плоских систем при широком выборе свободных параметров, а также отмечался в ряде динамических моделей других авторов [5, 21, 24, 44–47].

Диски галактик с не очень массивным гало ($\mu \lesssim 1.5$) подвержены барообразующей неустойчивости. Для подавления образования долгоживущего бара в галактиках с маломассивными сферическими компонентами требуется не только более высокая дисперсия скоростей (что было продемонстрировано еще в классической работе Острайкера и Пиблса [29]), но и более высокое значение параметра Тоомре Q_T, чем при наличии массивного гало или балджа. При этом образование бара сопровождается ростом Q_T даже за его пределами. Этот эффект, по-видимому, связан с “перегревом” системы выше порогового значения: в процессе формирования бара происходит перераспределение вещества, и локальное уменьшение поверхностной плотности диска при данной дисперсии скоростей дает дополнительное увеличение Q_T. Однако наши модели в этом случае не позволяют получить уверенных количественных оценок, поскольку характеристики бара сильно зависят от начальных условий в системе. Условия развития бар-моды нами детально не рассматривались.

Полученные результаты дают возможность, опираясь на численные модели, оценить степень динамического нагрева звездных дисков и связать

их массу и плотность, значения которых априори неизвестны, с дисперсией скоростей старых звезд, образующих диски, если последняя известна из наблюдений.

Авторы благодарны А.М. Фридману, О.В. Хоружему и В.Л. Поляченко за полезные обсуждения данной работы и высказанные замечания. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 01-02-17597) и частично ФЦНТП "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники" (контракт 40.022.1.1.1101).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Toomre, Astrophys. J. **139**, 1217 (1964).
2. А. Г. Морозов, Астрон. журн. **58**, 734 (1981).
3. А. В. Засов, Письма в "Астрон. журн." **11**, 730 (1985).
4. R. Bottema, Astron. and Astrophys. **275**, 16 (1993).
5. R. Bottema and J. P. E. Gerritsen, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **290**, 585 (1997).
6. B. Fuchs, in *Galaxy Dynamics*, ASP Conf. Ser. **182**, 365 (1999), Ed. by R. David Merritt, Monica Valluri, and J. A. Sellwood.
7. А. В. Хоперсков, А. В. Засов, Н. В. Тюрина, Астрон. журн. **78**, 213 (2001); А. В. Засов, Д. В. Бизяев, Д. И. Макаров, Н. В. Тюрина, Письма в "Астрон. журн." **28**, 599 (2002).
8. А. М. Фридман, В. Л. Поляченко, *Physics of gravitating systems* (N.Y.: Springer-Verlag, 1984).
9. В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем* (М.: Наука, 1976).
10. Н. Н. Горькавый, А. М. Фридман, *Физика планетных колец* (М.: Наука, 1994).
11. C. C. Lin, F. H. Shu, Astrophys. J. **140**, 646 (1964).
12. O. P. Vandervoort, Astrophys. J. **161**, 87 (1970).
13. А. Г. Морозов, Астрон. журн. **57**, 681 (1980).
14. А. Г. Морозов, А. В. Хоперсков, Астрофизика **24**, 467 (1986).
15. E. Griv, C. Yuan, and M. Gedalin, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **307**, 1 (1999).
16. А. Г. Морозов, Письма в "Астрон. журн." **7**, 197 (1981).
17. В. Л. Поляченко, Е. В. Поляченко, А. В. Стрельников, Письма в "Астрон. журн." **23**, 598 (1997).
18. N. W. Evans and J. C.A. Read, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **300**, 83 (1998a).
19. N. W. Evans and J. C. A. Read, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **300**, 106 (1998б).
20. J. A. Sellwood and N. W. Evans, Astrophys. J. **546**, 176 (2001).
21. G. Bertin, C. C. Lin, S. A. Lowe, and R. P. Thurstans, Astrophys. J. **338**, 78 (1989).
22. R. H. Miller, Astrophys. J. **223**, 811 (1978).
23. R. H. Miller, K. H. Prendergast, and W. J. Quirk, Astrophys. J. **161**, 903 (1970).
24. F. Hohl, Astrophys. J. **168**, 343 (1971).
25. F. Hohl, Astron. and Space Sci. **14**, 91 (1971).
26. R. H. Miller, Astron. and Space Sci. **14**, 73 (1971).
27. R. H. Miller, Astrophys. J. **190**, 539 (1974).
28. R. H. Miller, Astrophys. J. **223**, 811 (1978).
29. J. P. Ostriker and P. J.E. Peebles, Astrophys. J. **186**, 467 (1973).
30. R. A. James and J. A. Sellwood, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **182**, 331 (1978).
31. В.Л. Поляченко, И.Г. Шухман, Препринт СибИЗМИР СО АН СССР. №1–2 (1972).
32. A. J. Kalnajs, Astrophys. J. **175**, 63 (1972).
33. Е. А. Михайлова, А. В. Хоперсков, Астрон. журн. **69**, 1112 (1992).
34. E. Athanassoula and J. A. Sellwood, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **221**, 213 (1986).
35. C. J. Jog and P. M. Solomon, Astrophys. J. **276**, 114 (1984).
36. C. J. Jog and P. M. Solomon, Astrophys. J. **276**, 127 (1984).
37. B. Wang and J. Silk, Astrophys. J. **427**, 759 (1994).
38. V. G. Ortega, E. Volkov, and L. Monte-Lima, Astron. and Astrophys. **366**, 276 (2001).
39. J. A. Sellwood and R. G. Carlberg, Astrophys. J. **282**, 61 (1984).
40. R. G. Carlberg and J. A. Sellwood, Astrophys. J. **292**, 79 (1985).
41. J. A. Sellwood and E. Athanassoula, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **221**, 195 (1986).
42. J. A. Sellwood, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **238**, 115 (1989).
43. J. A. Sellwood and D. N.C. Lin, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **240**, 991 (1989).
44. J. A. Sellwood and E. Athanassoula, IAUS. **100**, 203 (1983).
45. H. C. Schroeder and N. F. Comins, Astrophys. J. **346**, 108 (1989).
46. B. Fuchs and S.von Linden, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **294**, 513 (1998).
47. J. M. Bardeen, *Dynamics of stellar systems*, IAU Symp. №69. 297 (1975).
48. А. В. Засов, А. Г. Морозов, Астрон. журн. **62**, 475 (1985).
49. C. Pichon and D. Lynden-Bell, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 282, 1143 (1996).
50. A. B. Romeo, Astron. and Astrophys. **286**, 799 (1994).
51. A. B. Romeo, Astron. and Astrophys. **335**, 922 (1998).
52. J. Sommer-Larsen, H. Vedel, and U. Hellsten, Monthly Notices Roy Astron. Soc. **294**, 485 (1998).
53. J. C. Lambert and A. Bosma, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **314**, 475 (2000).
54. J. N. Bahcall, Astrophys. J. **276**, 156 (1984).
55. E. Athanassoula and A. Misiriotis, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **330**, 35 (2002).
56. V. P. Debattista and J. A. Sellwood, Astrophys. J. **543**, 704 (2000).
57. H. Hasan and C. Norman, Astrophys. J. **361**, 69 (1990).

MINIMUM VELOCITY DISPERSION IN STABLE STELLAR DISKS. NUMERICAL SIMULATIONS

A. V. Khoperskov, A. V. Zasov, and N. V. Tyurina

N-body dynamical simulations are used to analyze the conditions for the gravitational stability of a three-dimensional stellar disk in the gravitational field of spherical components — a bulge and halo whose central concentrations and relative masses vary over wide ranges. The number of point masses N in the simulations varies from 40 to 500 000, and the evolution of the simulated systems is followed over 10—20 rotations of the outer edge of the disk. The initially unstable disks heat up and, as a rule, reach a quasi-stationary equilibrium with a steady-state dispersion of the radial velocities c_r over five to eight rotations. The radial behavior of the Toomre stability parameter $Q_T(r)$ for the final state of the disk is estimated. Simple models are used to analyze the dependence of the gravitational stability of the disk on the the relative masses of the spherical components, disk thickness, degree of differential rotation, and the initial state of the disk. Formal application of existing, analytical, local criteria for marginal stability of the disk can lead to errors in c_r of more than a factor of 1.5. It is suggested to use the approximate constancy of $Q_T \simeq 1.2$—1.6 for $r \simeq (1$—$2) \cdot L$ (where L is the radial scale of the disk surface density), which is valid for a wide range of models, to estimate upper limits for the mass and density of the disk based on the observed distributions of the rotational velocity of the gaseous component and of the stellar velocity dispersion.