

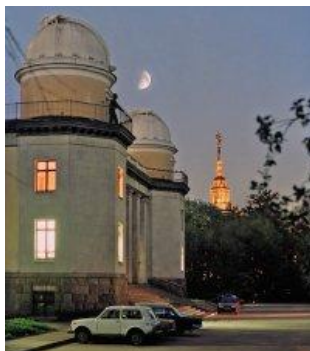
Регуляризованный фильтр Калмана в приложении к Чандлеровскому движению полюса

Леонид Зотов^{1,2}, Баринова С.А.¹, Гаража И.А.¹

wolftempus@gmail.com

¹МИЭМ НИУ ВШЭ, Москва, Россия

²ГАИШ МГУ, Москва, Россия



49-й семинар Успенского
Екатеринбург
27 января 2023 г



Регуляризация рекуррентного МНК

$$\hat{x}(N) = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T l,$$

$$a_{N+1,1}x_1 + a_{N+1,2}x_2 + \dots + a_{N+1,n}x_n + r_{N+1} = l_{N+1}.$$

$$\hat{x}(N+1) = (A^T A + a_{N+1}^T a_{N+1} + \alpha I)^{-1} (A^T l + a_{N+1}^T l_{N+1})$$

$$P_x(N) = \sigma_0^2 (A^T A + \alpha I)^{-1}, \quad P_x(N+1) = \sigma_0^2 (A^T A + a_{N+1}^T a_{N+1} + \alpha I)^{-1}.$$

$$(C^{-1} + yy^T)^{-1} \equiv C - Cy(1 + y^T Cy)^{-1} y^T C,$$

$$\hat{x}(N+1) = \hat{x}(N) + K(N)v_{N+1},$$

$$\begin{aligned} P_x(N+1) &= \sigma_0^2 \left[(A^T A)^{-1} - (A^T A)^{-1} a_{N+1}^T \left(1 + a_{N+1} (A^T A)^{-1} a_{N+1}^T \right)^{-1} a_{N+1} (A^T A)^{-1} \right] = \\ &= P_x(N) \left[(A^T A)^{-1} a_{N+1}^T \left(1 + a_{N+1} (A^T A)^{-1} a_{N+1}^T \right)^{-1} a_{N+1} \right] P_x(N). \end{aligned}$$

$$K(N) = \left((A^T A)^{-1} a_{N+1}^T \left(1 + a_{N+1} (A^T A)^{-1} a_{N+1}^T \right)^{-1} \right) =$$

$$= P_x(N) a_{N+1}^T \left(a P_x(N) a_{N+1}^T + \sigma_0^2 \right)^{-1}$$


$$P_x(N+1) = (E - K(N) a_{N+1}) P_x(N).$$


См. Пантелеев В.Л. Управление динамическими объектами


Регуляризация фильтра Калмана

$$x^+ = x^- + K(z - Cx^-)$$

$$\langle (x^- - x)(Cx^- - z)^T \rangle = K \langle (Cx^- - z)(Cx^- - z)^T \rangle.$$

$$K = P_x^- C^T [C P_x^- C^T + R]^{-1}$$


$$P_x^- C^T = K [C P_x^- C^T + R]$$


$$P_x^+ = P_x^- - K C P_x^-$$


Регуляризация фильтра Калмана по уравнению состояния

$$x_j^+ = x_j^- + K_j (z_j - C_j x_j^-),$$

$$K_j = P_j^- C_j^T [C_j P_j^- C_j^T + R_j]^{-1},$$

$$P_j^+ = P_j^- - K_j C_j P_j^-, \quad \uparrow + \alpha I$$

$$x_{j+1}^- = A_j x_j^+,$$

$$P_{j+1}^- = A_j P_j^+ A_j^T + Q_j.$$

может быть сведена
к добавлению αI
в процедуру вычисления
ковариационных матриц и K ,
при этом остальные формулы не меняются

3.1 Tikhonov Regularized Kalman Filter and Its Algorithm

The objective function of TRKF is designed as follows

$$\Psi(\hat{X}_k^{TRKF}) = V_{\hat{x}_k^{TRKF}}^T R_k^{-1} V_{\hat{x}_k^{TRKF}} + V_{\hat{x}_k^{TRKF}}^T P_{k/k-1}^{-1} V_{\hat{x}_k^{TRKF}} + \alpha_k Z_k^T H_k Z_k \quad (14)$$

where $\alpha_k > 0$ is the regularization parameter, $H_k > 0$ is the regularization matrix and $Z_k = \hat{X}_k^{TRKF} - \hat{X}_{k/k-1}$.

Using the weighted least square method, we can get

$$K_k^{TRKF} = (A_k^T R_k^{-1} A_k + P_{k/k-1}^{-1} + \alpha_k H_k)^{-1} A_k^T R_k^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{X}_k^{TRKF} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k^{TRKF} (L_k - A_k \hat{X}_{k/k-1}) \quad (16)$$

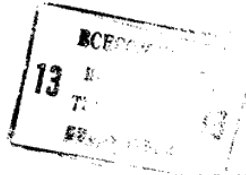
$$P_k^{TRKF} = (I - K_k^{TRKF} A_k) P_{k/k-1} \quad (17)$$



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО ДЕЛАМ ИЗОБРЕТЕНИЙ И ОТКРЫТИЙ

ОПИСАНИЕ ИЗОБРЕТЕНИЯ

К АВТОРСКОМУ СВИДЕТЕЛЬСТВУ



(21) 3985955/24-24

(22) 02.12.85

(46) 15.06.87. Бюл. № 22

(71) Куйбышевский политехнический институт им. В.В. Куйбышева

(72) В.И. Батищев и В.А. Трубин

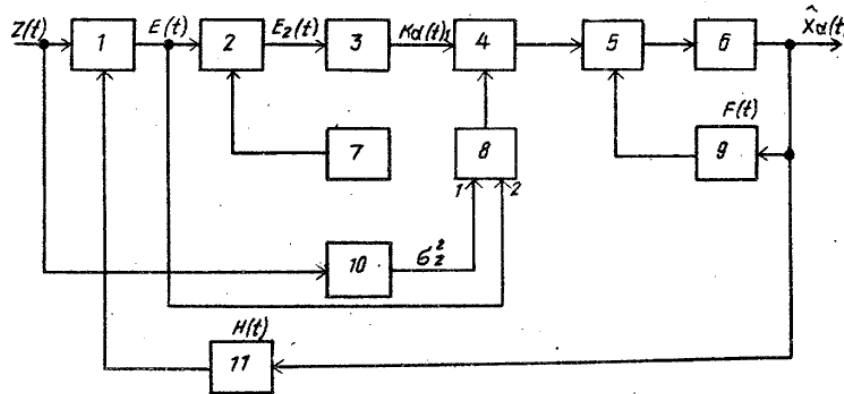
(53) 62-50(088.8)

(56) Авторское свидетельство СССР № 1056432, кл. Н 03 Н 21/00, 1983.

(54) РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

(57) Изобретение относится к вычислительной технике и может быть использовано в специализированных аналоговых и гибридных устройствах для полу-

чения оценок состояния при решении задач навигации, радиолокации, траекторных измерений и восстановления сигналов. Цель изобретения - повышение точности фильтрации. Регуляризованный фильтр Калмана содержит вычитатель 1, первый сумматор 2, усилитель 3, второй сумматор 5, интегратор 6, генератор 7 случайного процесса, первый матричный множитель 9, второй матричный множитель 11. Цель изобретения достигается за счет введения коммутатора 4, блока 8 сравнения и блока 10 определения дисперсии. 1 ил.



мени. Подобный принцип определения коэффициента усиления $K_{\alpha}(t)$ усилителя наряду с регуляризацией характеризует быструю сходимость и соответственно устойчивость регуляризованного решения $\hat{X}_{\alpha}(t)$. Данный алгоритм повышения стабильности и точности фильтра связан с совместным действием двух подходов к устранению расходимости фильтра Калмана: уменьшение матричных коэффициентов усиления усилителя 3 за счет введения к элементам матрицы некоторой добавки в виде регуляризирующего оператора αE ; ограничение дисперсии ошибок за счет введения в схему блока 10 определения дисперсии, блока 8 сравнения и коммутатора 4. Подобные меры предотвращают расходимость фильтра, повышают его точность, сохраняя свойства оптимальности регуляризованного фильтра, накладывают ограничения на выбор параметра регуляризации α . Коэффициент усиления усилителя 3 находится в данном случае по формулам:

$$K_{\alpha}(t) = V_{\hat{x}}(t) H^T(t) [\psi_v(t) + \alpha E]^{-1}; \quad (1)$$

$$\frac{dV_{\hat{x}}(t)}{dt} = F(t)V_{\hat{x}}(t) + V_{\hat{x}}(t)F^T(t) - V_{\hat{x}}(t)H^T(t) \cdot [\psi_v(t) + \alpha E]^{-1} \cdot H(t)V_{\hat{x}}(t) + G(t)\psi_w(t)G^T(t); \quad (2)$$

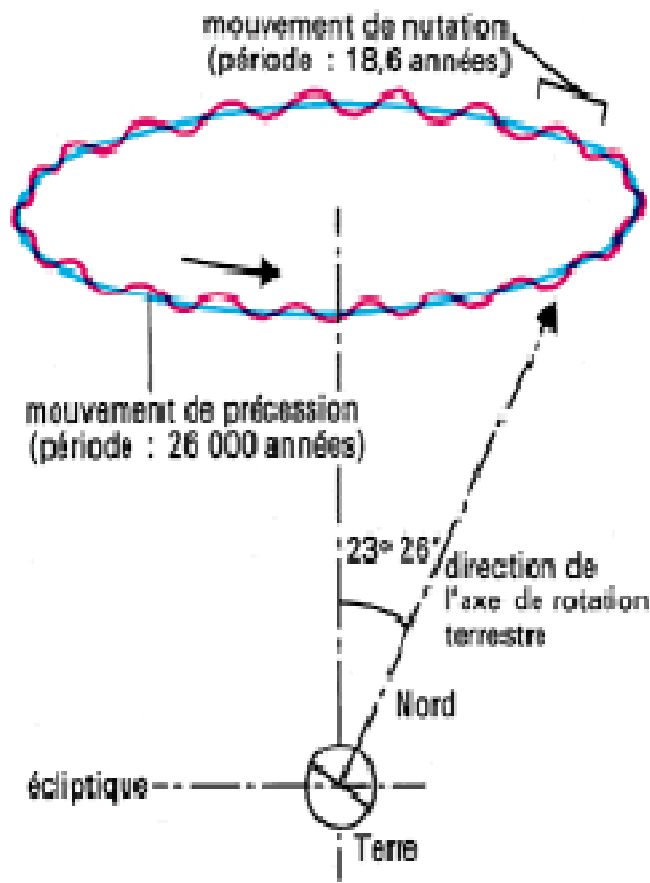
$$E_{\alpha}(t) = E(t) + \eta(t), \quad (3)$$

где $X(t)$ - векторный случайный параметр, значения которого необходимо оценить;

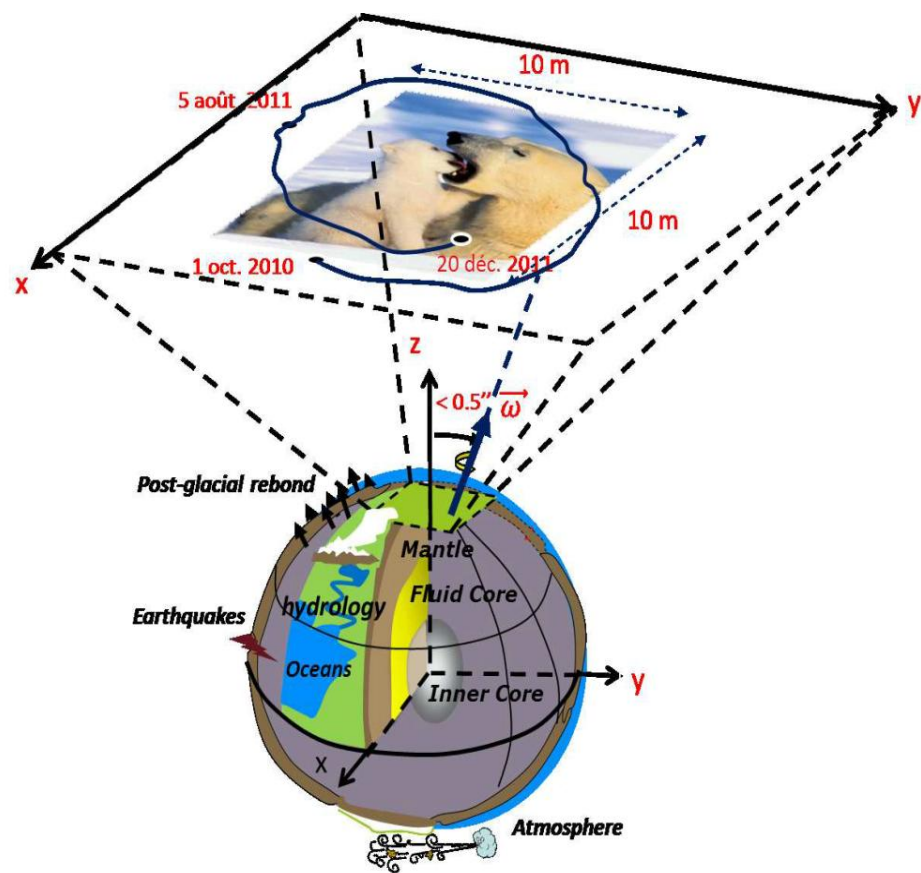
$\tilde{X}(t) = X(t) - \hat{X}(t)$ - ошибка;

Вариации в положении оси вращения Земли

Прецессия (вековая) и нутация (периодическая) земной оси с периодами 25 700, 18.6, 1, 0.5 лет, обусловленные внешним моментом сил от Луны и Солнца



Движение полюса амплитудой до 10 метров обусловленное геофизическими процессами – обменом угловым моментом между океаном, атмосферой и твердой землей



Геофизические процессы, влияющие на вращение Земли

от 1 до 1 000 000 лет

Хорошо моделируются

Лунно-солнечные приливы

12 ч 1 день 365 дней 10 лет

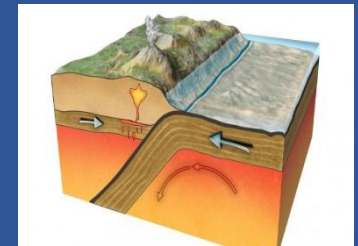
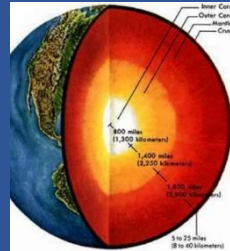
атмосфера

океан

Гидрологические и климатические эффекты

Взаимодействие ядро-мантия

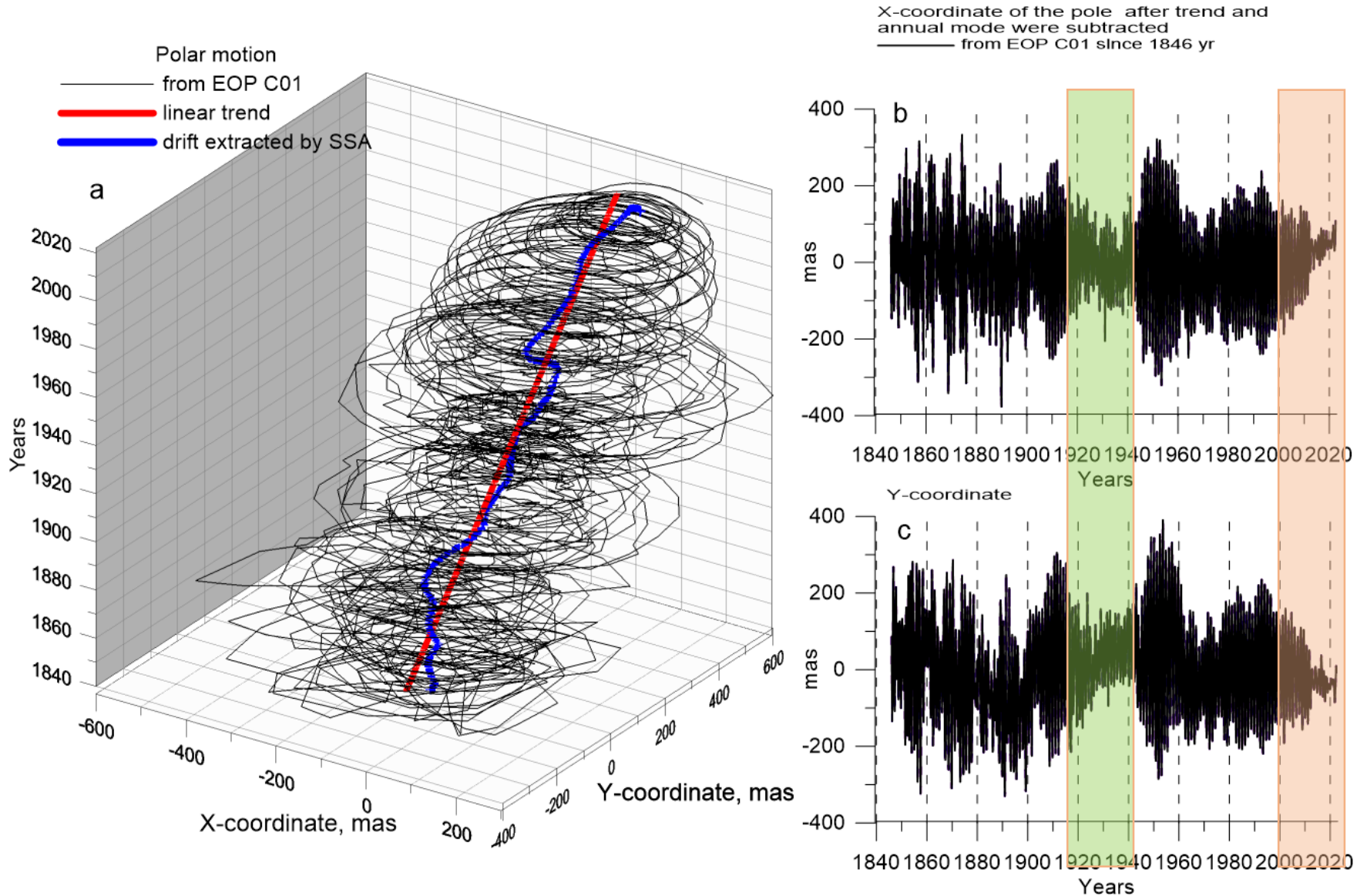
тектоника



10^2 лет 10^3 лет 10^4 лет 10^5 лет 10^6

оледенения

Движение полюса с 1846 по данным EOP C01



ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

$$\frac{i}{\sigma_c} \frac{dp(t)}{dt} + p(t) = \chi(t)$$

$$p = p_1 + ip_2$$

$$\chi = \chi_{mass} + \chi_{motion}$$

$$\sigma_c = 2\pi f_c(1 + i/2Q)$$

$$f_c = \frac{1}{433} \text{ сут}^{-1} \quad Q = 100$$

$$\frac{-\omega \hat{p}(\omega)}{\sigma_c} + \hat{p}(\omega) = \hat{\chi}(\omega)$$

$$\frac{\sigma_c - \omega}{\sigma_c} \hat{p}(\omega) = \hat{\chi}(\omega)$$

$$\hat{p}(\omega) = W(\omega) \hat{\chi}(\omega)$$

$$W(\omega) = \frac{\sigma_c}{\sigma_c - \omega}$$

Во временной области

В частотной области

Матричное уравнение вращения Земли и корректирующая фильтрация

Уравнение состояний для движений полюса Земли по координатам $p_1 = x$ (Вдоль Гринвичского меридиана) и $p_2 = -y$ (по меридиану в 90° к востоку) получается линеаризацией уравнений Эйлера-Лиувилля [12]

$$D \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & -\alpha \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix},$$

где α, β – действительная и мнимая составляющие комплексной чандлеровской частоты $\sigma_c = \alpha + i\beta = 2\pi f_c + i \frac{\pi f_c}{Q}$, Q – добротность (примем ≈ 100), $f_c = 1/433$ сут $^{-1}$ – действительная чандлеровская частота, $D = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования, χ_1, χ_2 – компоненты входного возбуждения, i – мнимая единица.

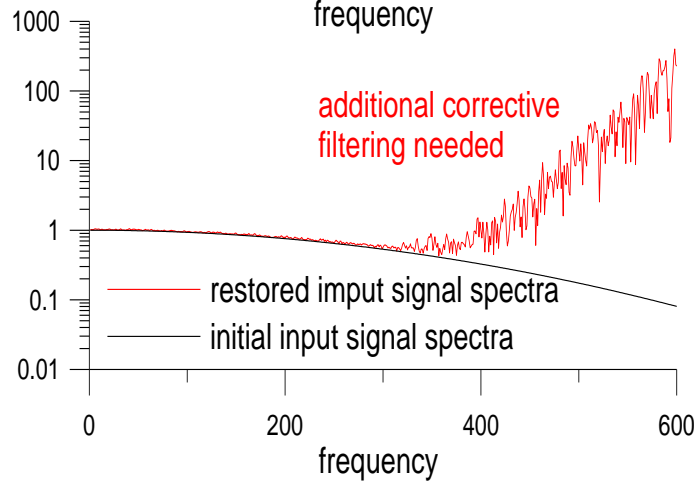
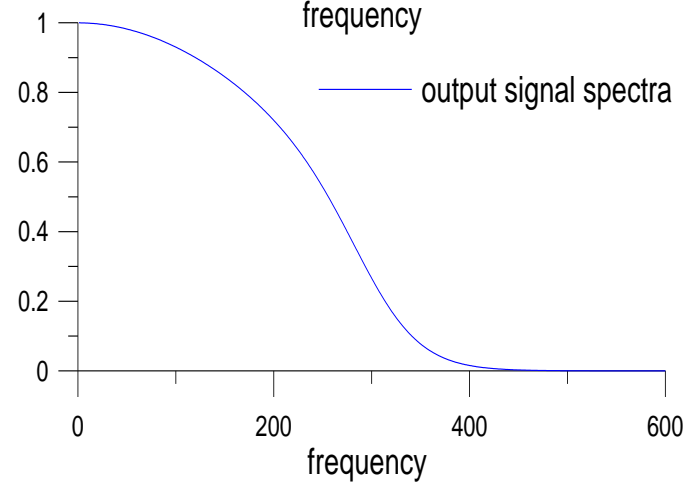
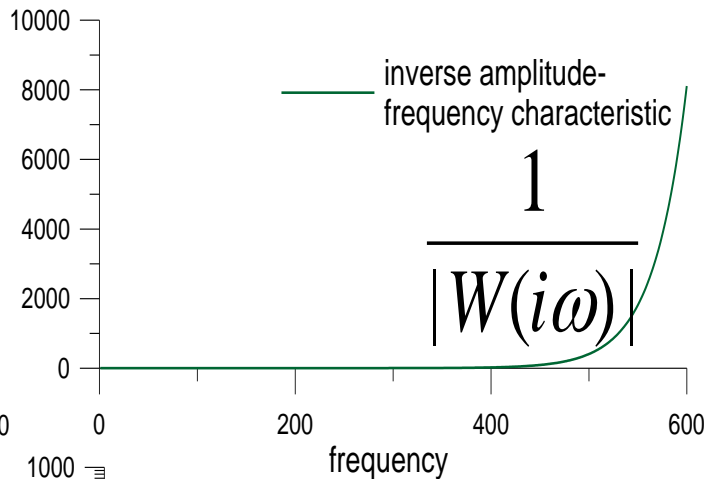
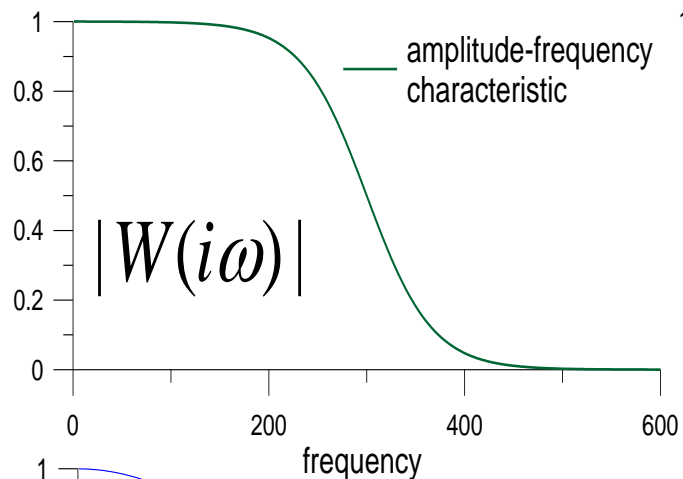
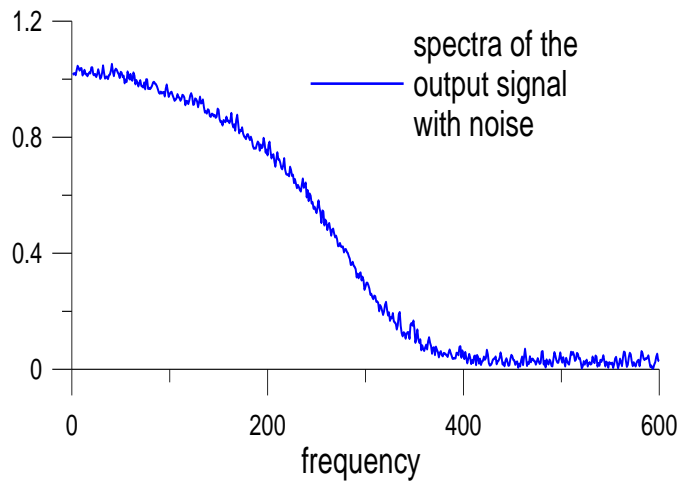
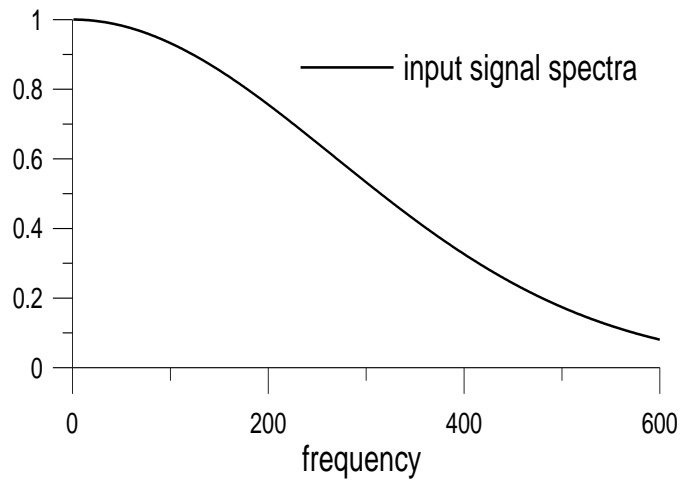
$$x = [p_1, p_2, \chi_1, \chi_2]^T \quad - ?$$

Проблема определения геодезического возбуждения

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix}^{-1} \left(DI - \begin{bmatrix} -\beta & -\alpha \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = W^{-1}(D) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

может быть скорректирована или регуляризована

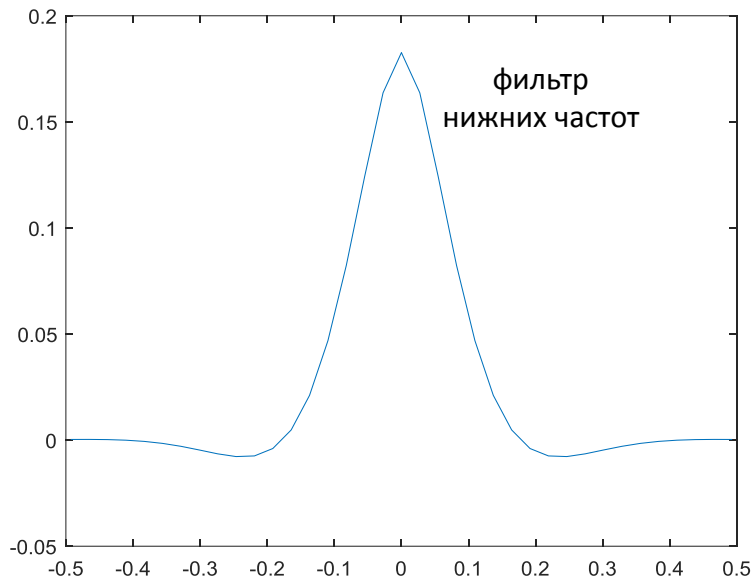
$$W_{\text{corr}}(f)W^{-1}(f) = \frac{W^*(f)}{W^*(f)W(f) + \alpha I},$$





Фильтрация Пантелеева

В.Л. Пантелеев (04.08.1931-06.03.2021)

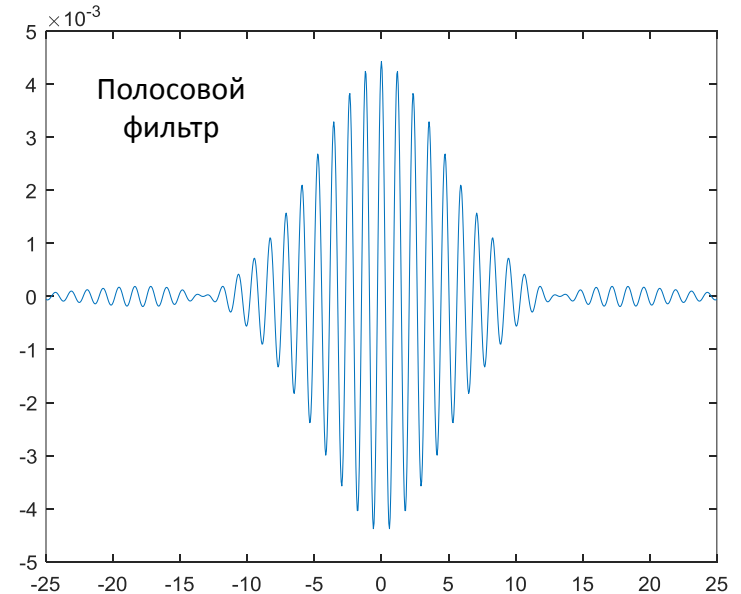


Фильтрация во временной области – свертка сигнала с импульсной характеристикой фильтра

$$h(t) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{\omega_0|t|}{\sqrt{2}} - i2\pi f_c t\right)} \left(\cos \frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\omega_0 |t|}{\sqrt{2}} \right),$$

Фильтр Пантелеева
во временной области

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

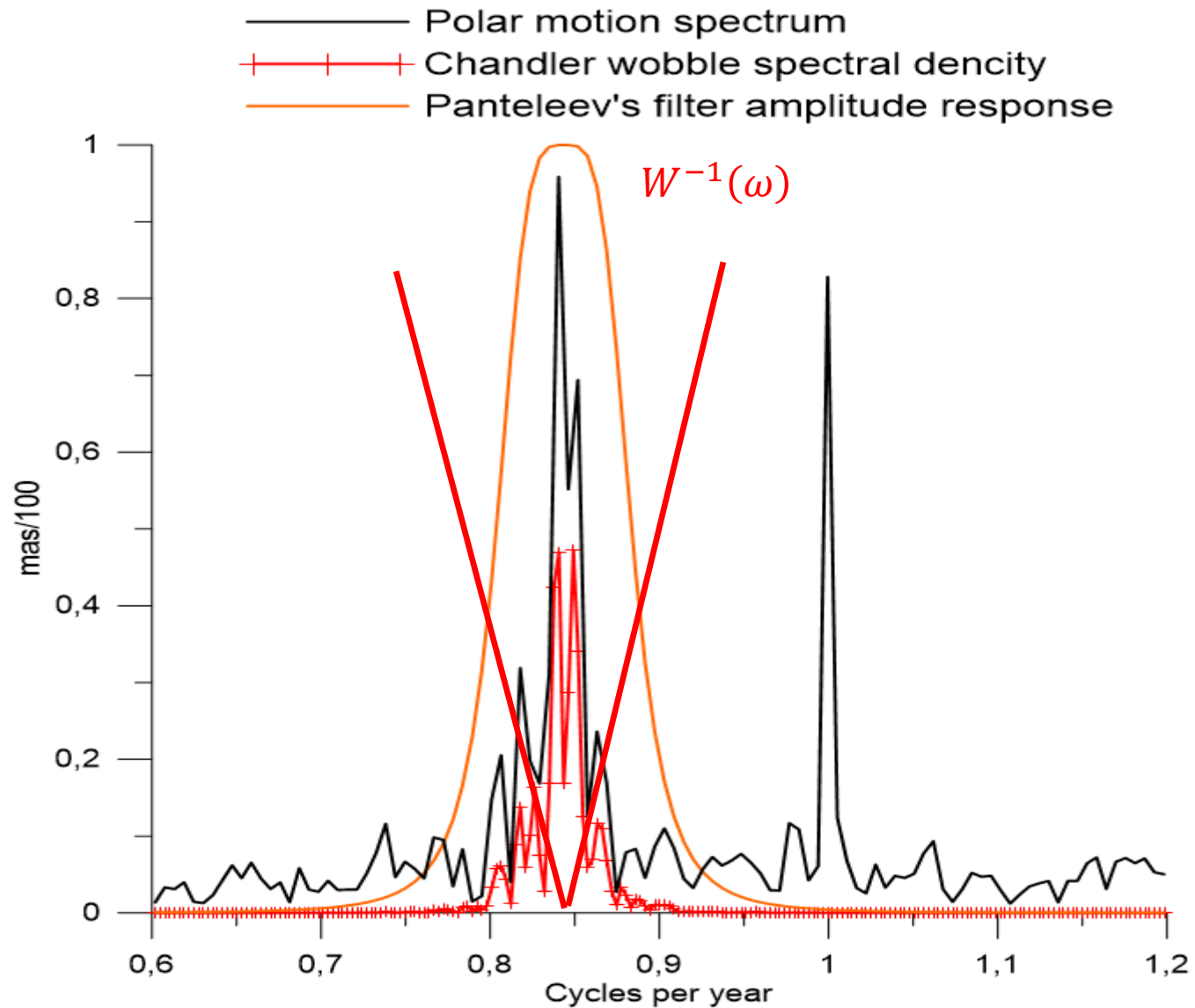


Фильтрация в частотной области – умножение спектра на передаточную функцию

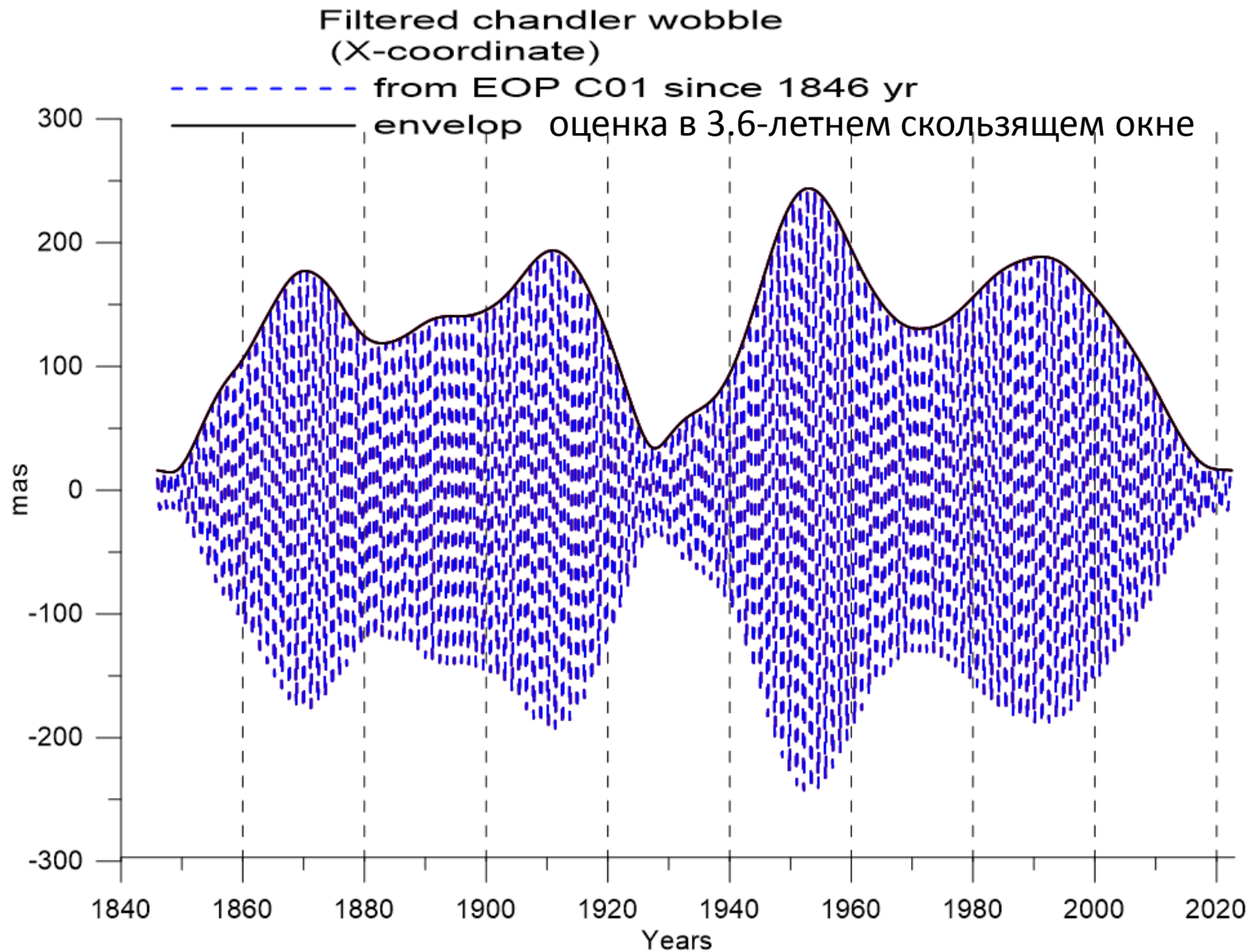
$$L_h(f) = \frac{f_0^4}{(f - f_c)^4 + f_0^4} \cdot \begin{matrix} f_c = 0.166 \text{ лет}^{-1} \\ f_0 = 0.04 \text{ лет}^{-1} \end{matrix}$$

Фильтр Пантелеева в
частотной области

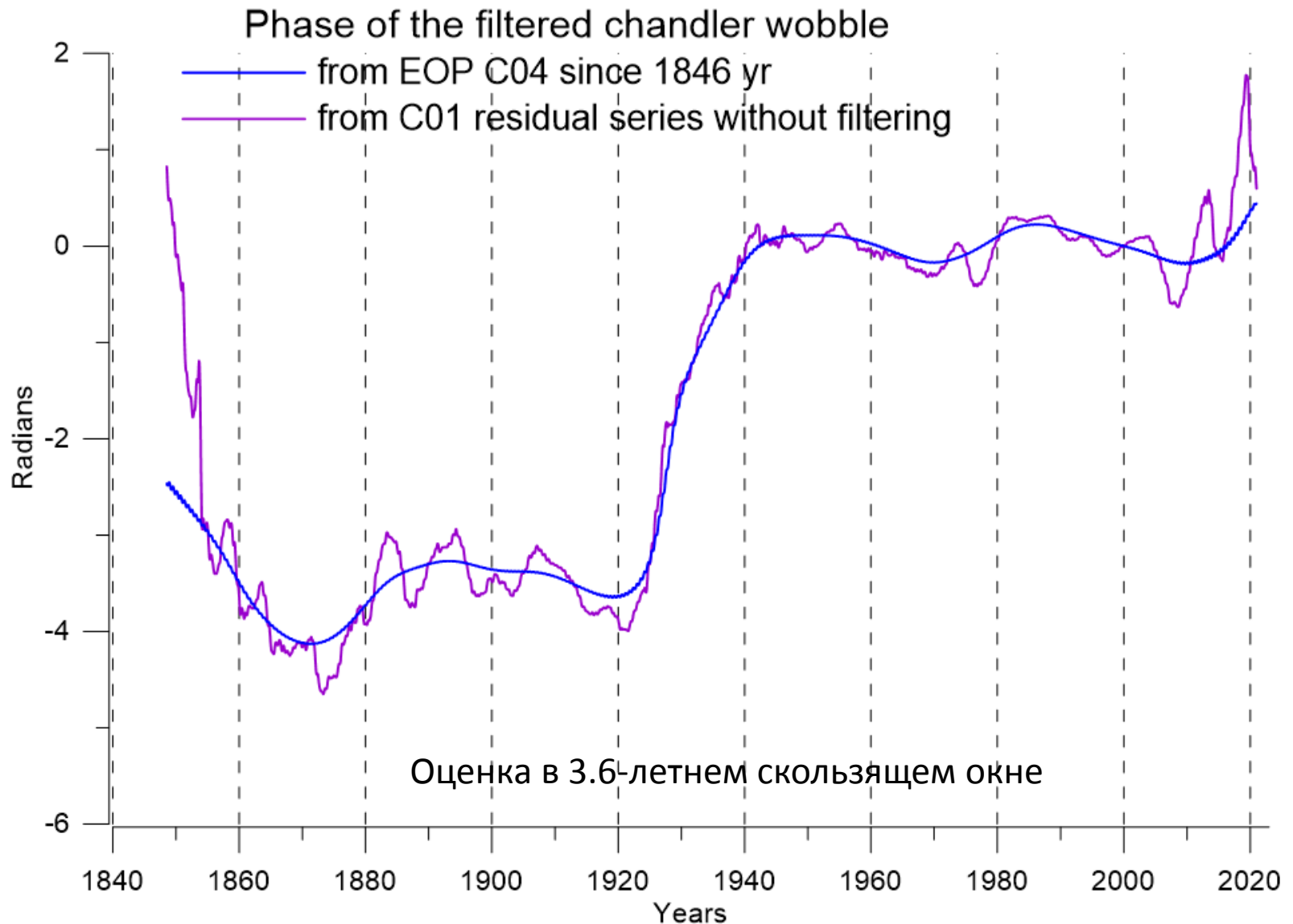
Спектр движения полюса и фильтр Пантелеева



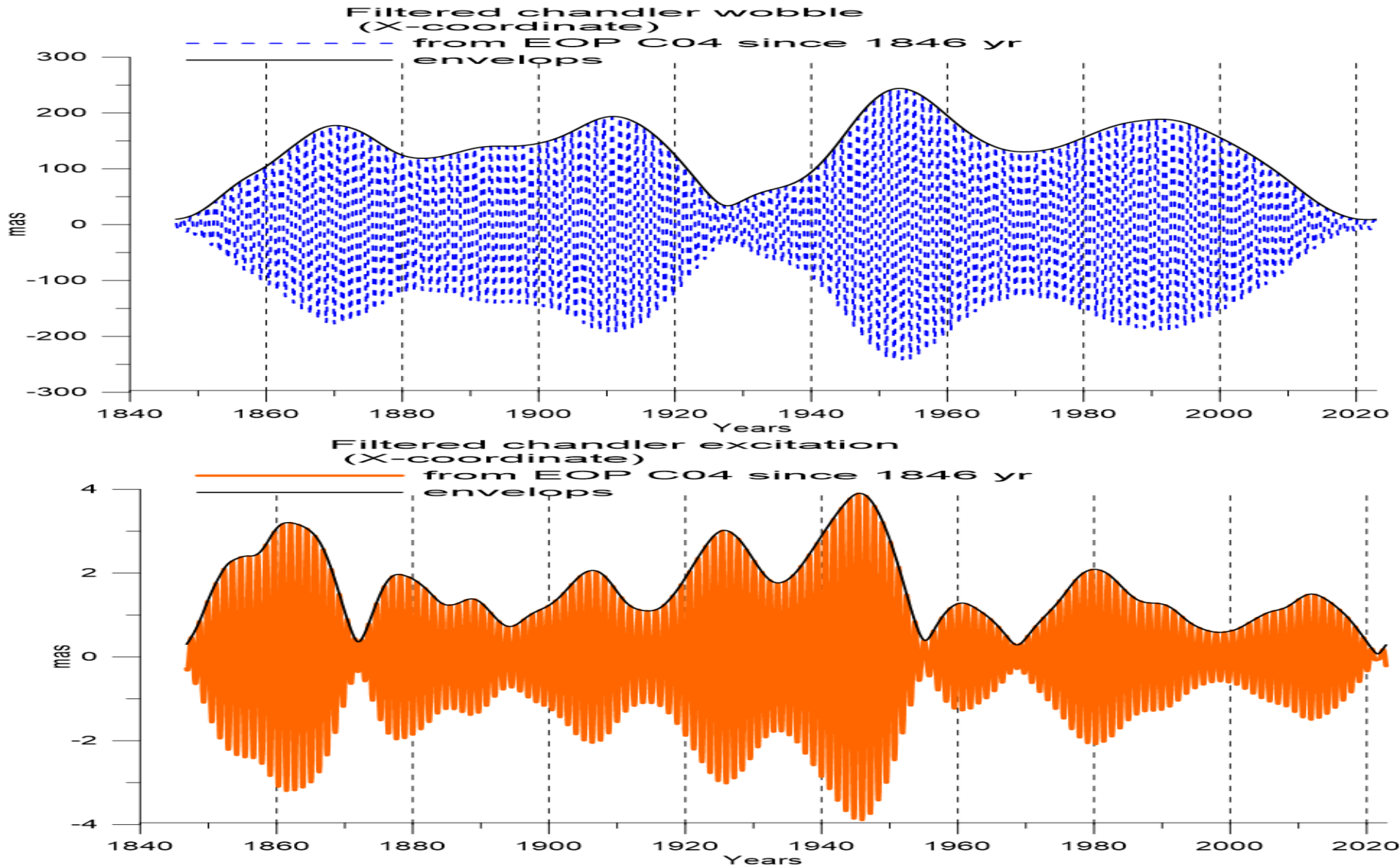
Изменения амплитуды чандлеровского колебания



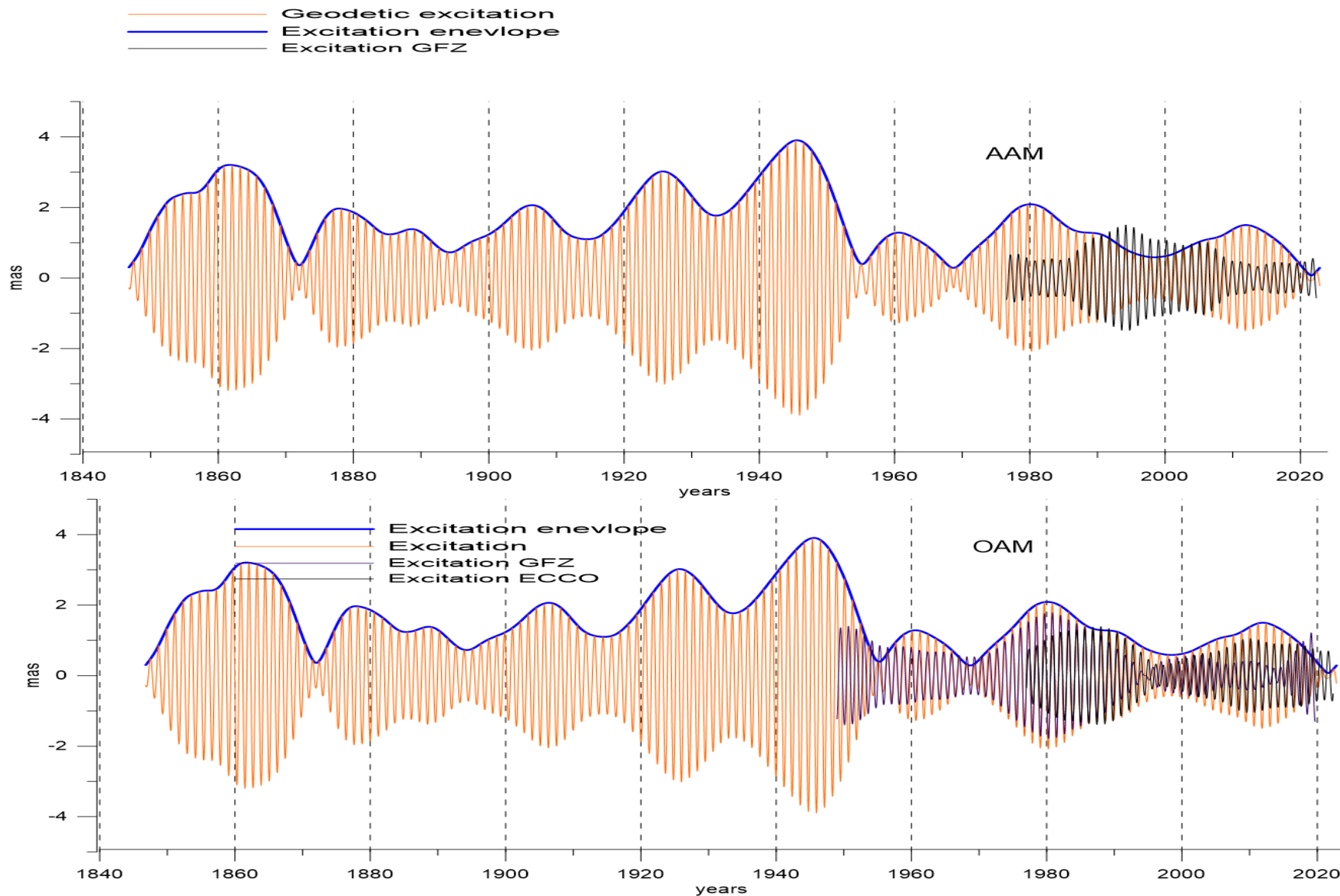
Изменения фазы чандлеровского колебания



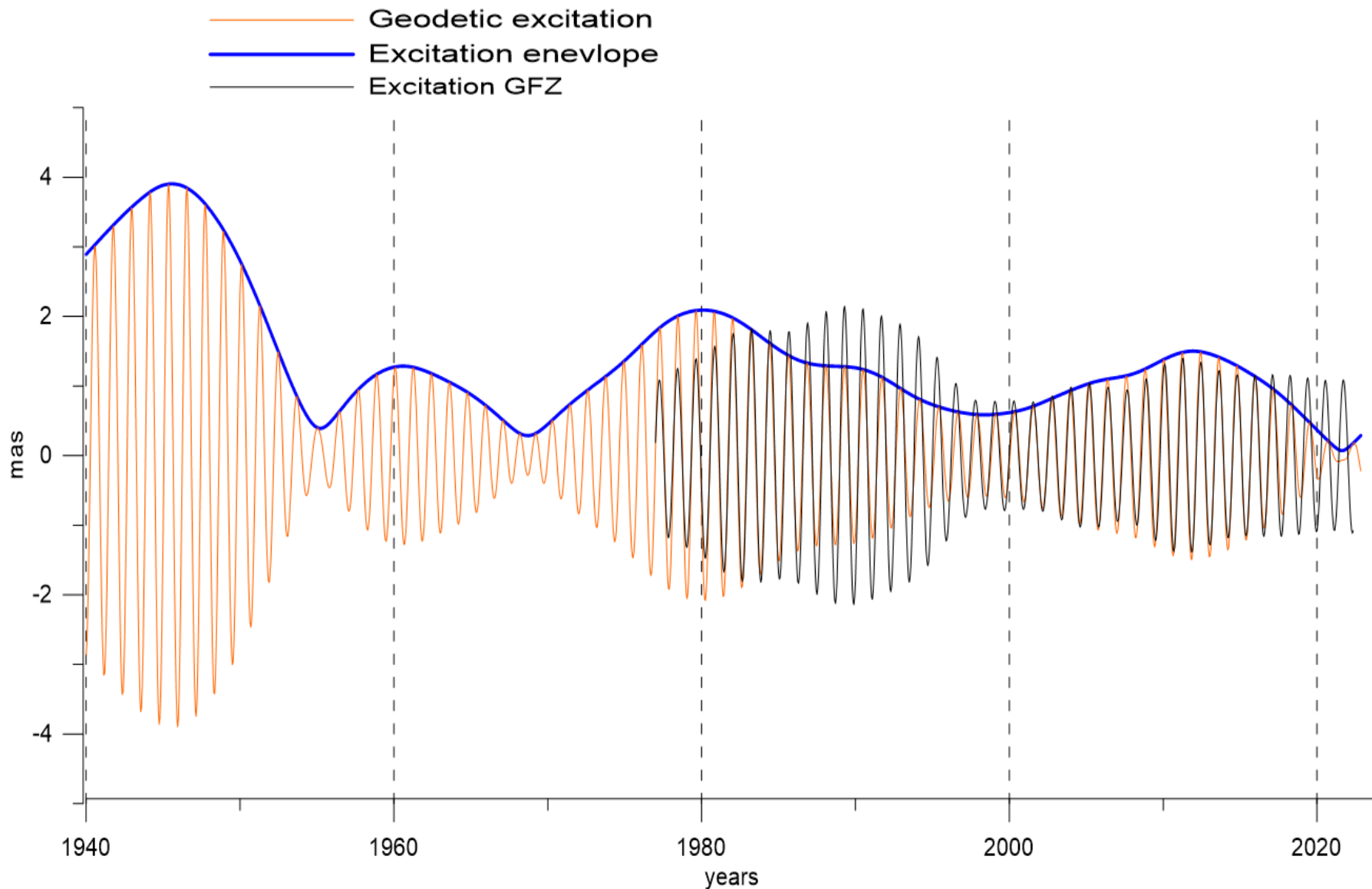
Чандлеровское колебание и возбуждение



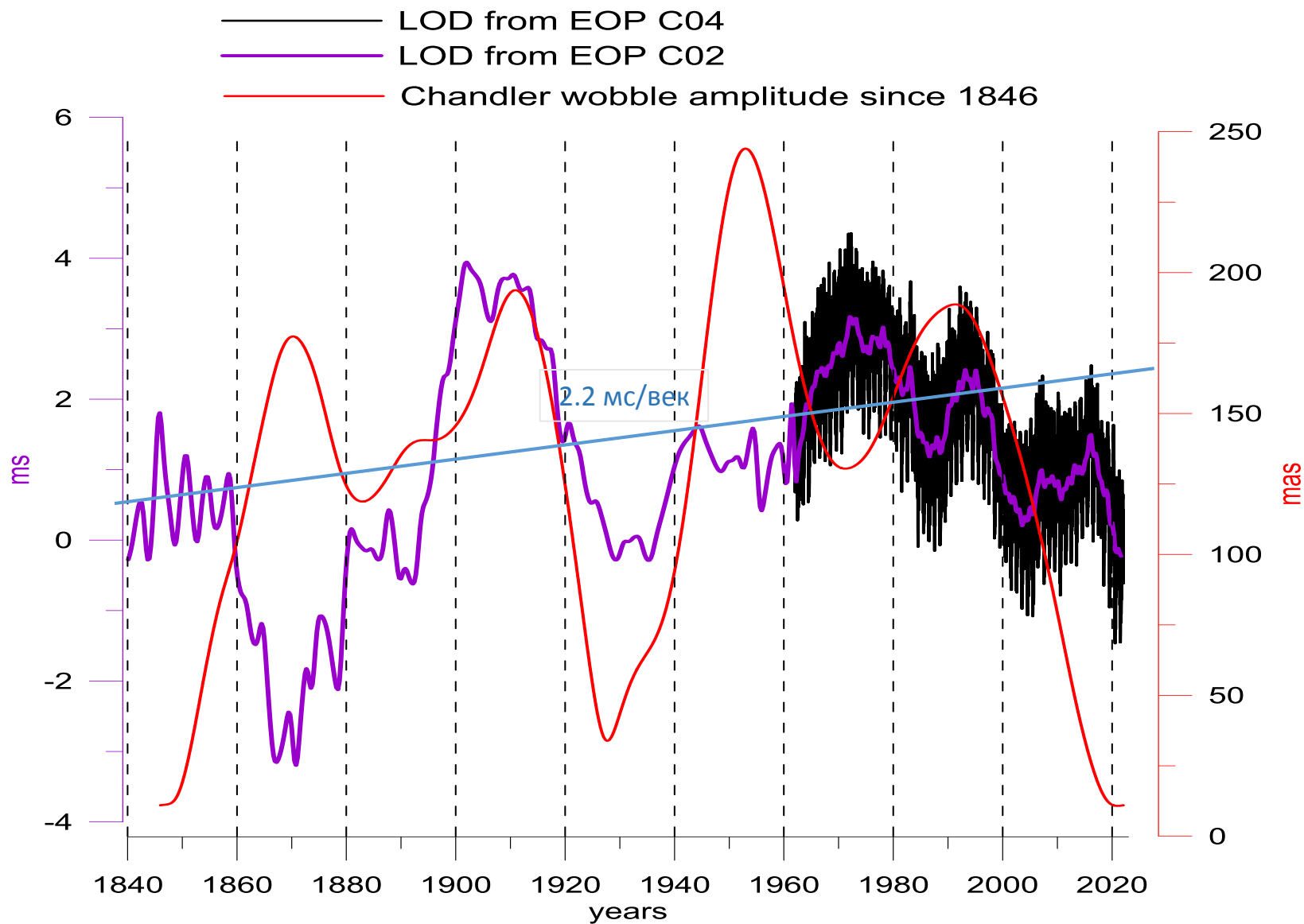
Возбуждение Чандлеровского колебания ААМ+ОАМ



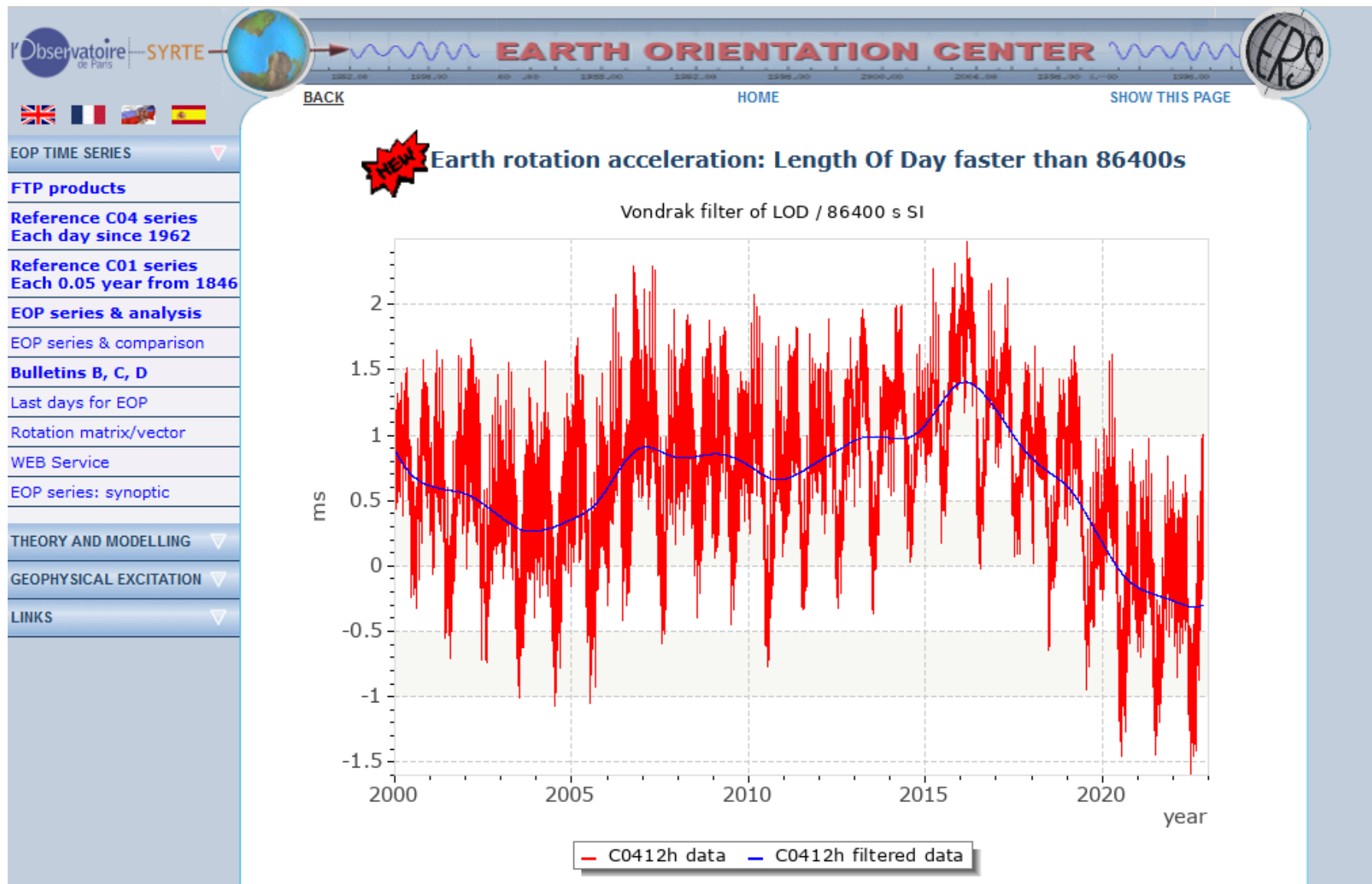
Возбуждение Чандлеровского колебания ААМ+ОАМ



Чандлеровское колебание и LOD с 1840 г

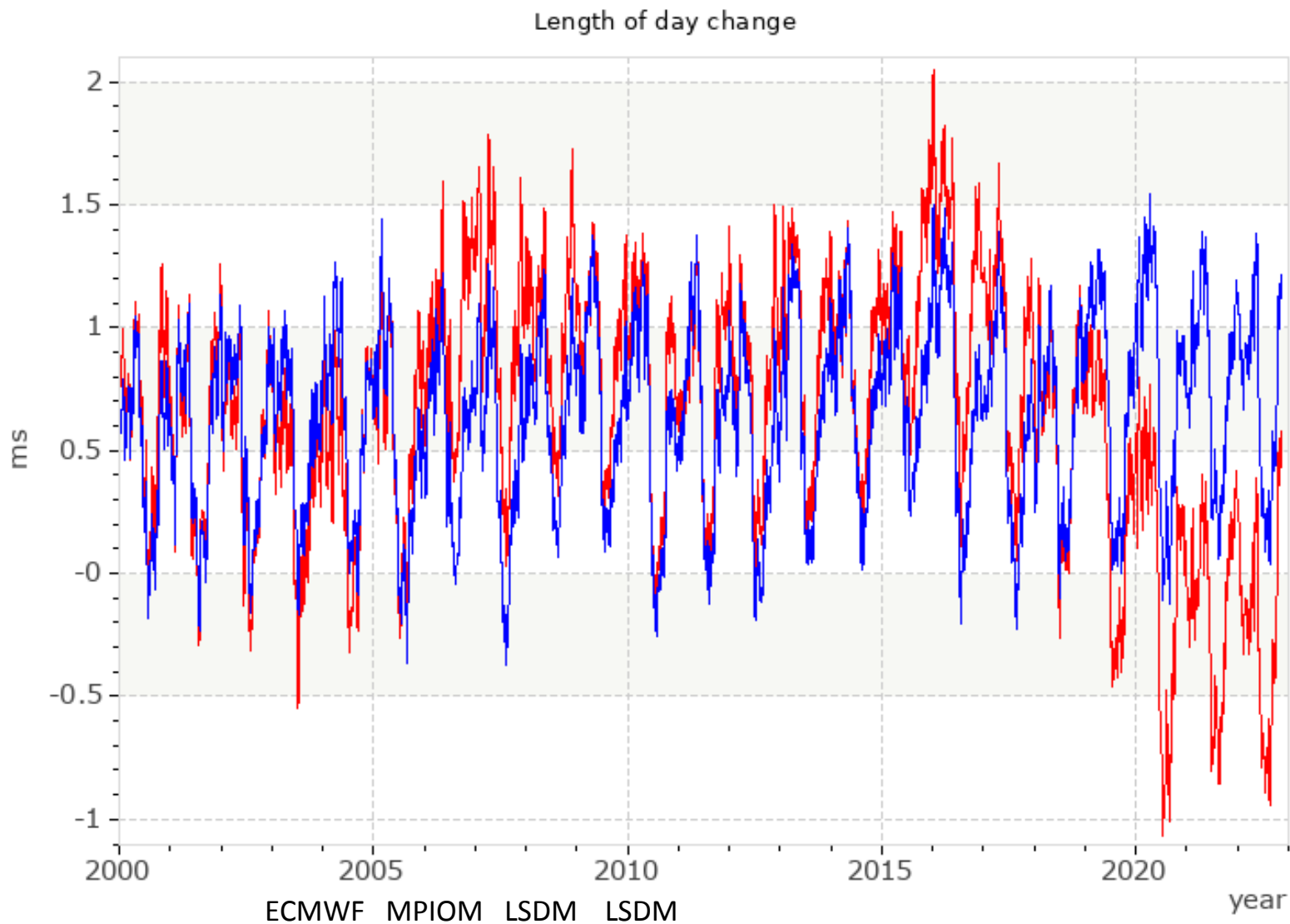


LOD по данным центра параметров вращения Земли в Париже



<http://hpiers.obspm.fr/eop-pc>

Тренд LOD не объясняется AAM+OAM+HAM+SL




G (std= 0.53) — [Ama+mo Oma+mo Hma+mo SLma- -0.61 ms] (std= 0.38) Cor.=0.624 Expvar =-0.09




Multidecadal variation of the Earth's inner-core rotation

Received: 21 December 2021

Accepted: 5 December 2022

Published online: 23 January 2023

 Check for updates

Yi Yang  & Xiaodong Song  

Differential rotation of Earth's inner core relative to the mantle is thought to occur under the effects of the geodynamo on core dynamics and gravitational core–mantle coupling. This rotation has been inferred from temporal changes between repeated seismic waves that should traverse the same path through the inner core. Here we analyse repeated seismic waves from the early 1990s and show that all of the paths that previously showed significant temporal changes have exhibited little change over the past decade. This globally consistent pattern suggests that inner-core rotation has recently paused. We compared this recent pattern to the Alaskan seismic records of South Sandwich Islands doublets going back to 1964 and it seems to be associated with a gradual turning-back of the inner core as a part of an approximately seven-decade oscillation, with another turning point in the early 1970s. This multidecadal periodicity coincides with changes in several other geophysical observations, especially the length of day and magnetic field. These observations provide evidence for

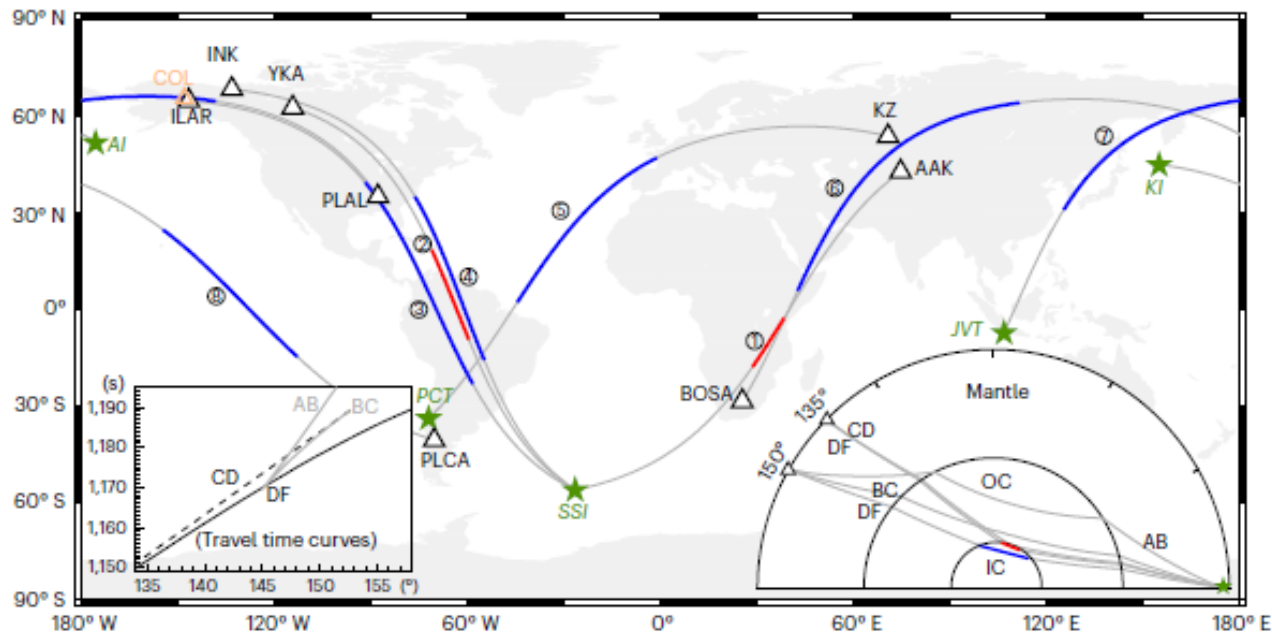


Fig. 1 | Seismic raypaths used in the study. There are eight different paths from repeating earthquakes (stars) to seismic stations or arrays (triangles), including: (1) SSI to station AAK; (2) SSI to Yellowknife array (YKA); (3) SSI to ILAR array; (4) SSI to station INK; (5) Peru–Chile trench (PCT) to Kazakhstan network (KZ); (6) Aleutian Islands (AI) to station BOSA; (7) Java trench (JVT) to station PLAL; and (8) Kurile Islands (KI) to station PLCA. The thickened lines indicate the ray segments

in the Inner core (IC); their colours, red and blue, denote the DF rays from the CD and BC distance ranges, respectively. The two Insets show the travel time curves and raypaths of different PKP branches, including the DF branch traversing the IC, the BC and AB branches traversing the outer core (OC) and the CD branch reflecting at the ICB.

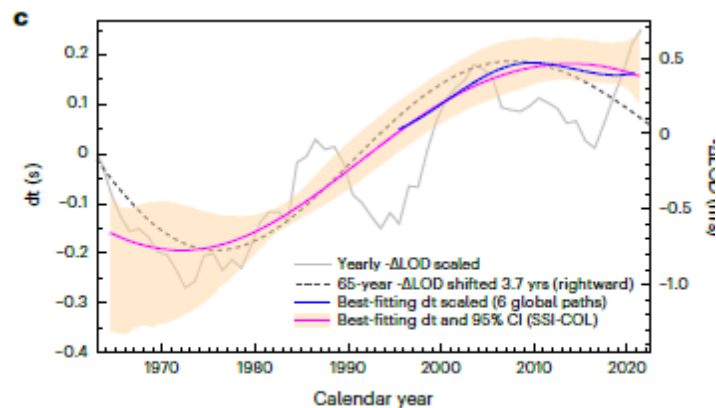


Fig. 4 | Global temporal change of DF's travel time (dt) and the comparison with the Δ LOD. Note that the dt is proportional to the amount of the Inner-core

<https://doi.org/10.1038/s41561-022-01112-z>

46. Zotov, L., Bizouard, C. & Shum, C. K. A possible interrelation between Earth rotation and climatic variability at decadal time-scale. *Geod. Geodyn.* **7**, 216–222 (2016).
47. Ding, H. & Chao, B. F. A 6-year westward rotary motion in the Earth: detection and possible MICG coupling mechanism. *Earth Planet. Sci. Lett.* **495**, 50–55 (2018).
48. Dumberry, M. & Bloxham, J. Variations in the Earth's gravity field caused by torsional oscillations in the core. *Geophys. J. Int.* **159**, 417–434 (2004).
49. Greff-Lefftz, M., Pais, M. A. & Mouël, J.-L. L. Surface gravitational field and topography changes induced by the Earth's fluid core motions. *J. Geod.* **78**, 386–392 (2004).

Выводы

- Рекуррентная процедура фильтрации Калмана может быть регуляризована введением стабилизирующей добавки αI в выражения для ковариационных матриц, что оставляет основные формулы алгоритма неизменными
- Алгоритм можно применить как для оценивания траектории движения полюса, так и его возбуждения. Последнее потребует регуляризовать также уравнение состояний
- Чандлеровское колебание практически исчезло в 2017-2020 гг. и сейчас вновь начало появляться
- Чандлеровское колебание меняет фазу как в 1930-е годы
- LOD достигла 29 июня 2022 глубочайшего за 80 лет минимума
- Влияние момента импульса атмосферы ААМ (NCER, GFZ, ECMWF) океана ОАМ (ECCO, GFZ), не вполне объясняют затухание Чандлеровского колебания и ускорение вращения Земли

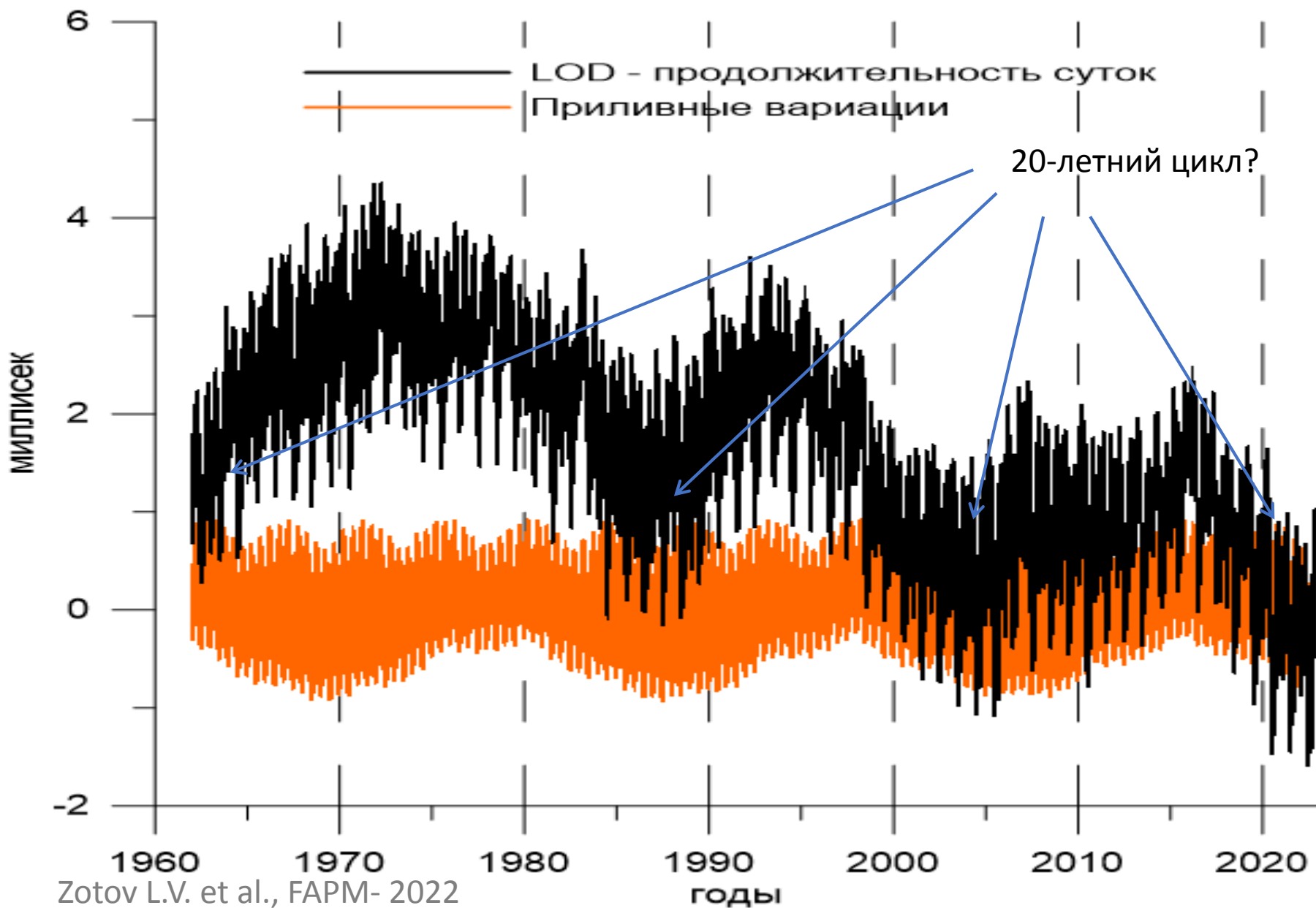
Список литературы

1. Калман Р., Фолб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М., УРСС, 2004
2. Фомин В.Н. Оптимальная и адаптивная фильтрация. СПбГУ, 2003
3. Ширяев А.Н. Вероятность 1,2. М., МЦМНО, 2007
4. Зотов Л.В. Теория фильтрации и обработка временных рядов. М., МГУ, 2010
5. Пантелеев В.Л. Наблюдение и управление динамическими объектами, курс лекций, ГАИШ МГУ, 2001,
6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В. Степанов В.В., Ягола А.Г., Численные методы решения некорректных задач, М., Наука, 1990.
7. Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. СПб. Наука, 1997
8. Зотов Л.В. Климатические процессы и вращение Земли. М. МИЭМ, 2022, ISBN:978-5-600-03155-5
9. Zotov L., Panteleev V.L. Filtering and inverse problems solving, in Computational Methods for Applied Inverse Problems Edited by Y. F. Wang, A. G. Yagola and C. C. Yang, De Gruyter & Higher Education Press, June 2012, pp. 169-194
10. Зотов Л.В., Сидоренков Н.С., Бизуар К., Аномалии чандлеровского колебания полюса в 2010-е годы, Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия, N 3, 2022, стр. 64

Спасибо за внимание!



Длительность суток (LOD) по EOP C04 и зональный прилив



Движение Солнца вокруг барицентра

