

**Регуляризованный фильтр Калмана в приложении к
Чандлеровскому движению полюса.**

Зотов Л.В.^{1,2}, Барينو С.А.¹, Гаража И.А.¹

lzotov@hse.ru

¹*Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики, Россия*

²*Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Россия*

Abstract: We applied regularization procedure to the recurrent least squares and extended it to Kalman filter. Then we estimated polar motion, trying to filter out its eigen mode – Chandler wobble (CW) of the pole. This component has demonstrated very interesting behavior in recent decade. It almost disappeared in 2016-2020, now appears again. The phase of CW is changing. This happened once before in the history of observations around 1930s. Thus, the analysis of input excitation and comparison with oceanic, atmospheric angular momentum and processes inside the Earth are very important to explain observed anomalies in the Earth's rotation.

Аннотация: Мы применяем процедуру регуляризации к рекуррентному методу наименьших квадратов и расширяем её на фильтр Калмана. Далее мы оцениваем траекторию полюса вращения Земли, стараясь отфильтровать собственную моду – Чандлеровское движение полюса (ЧДП). Эта компонента ведет себя весьма интересно в последнее десятилетие. Она практически полностью исчезла в 2016-2020 гг., а сейчас появилась вновь. Фаза ЧДП меняется. Такое случалось раньше за историю наблюдений в 1930-е гг. Анализ входного возбуждения и его сравнение с угловым моментом океана, атмосферы и внутренними процессами в недрах крайне важны для объяснения наблюдаемых аномалий во вращении Земли.

Ключевые слова: регуляризованный фильтр Калмана, Чандлеровское движение полюса, вращение Земли

1 Регуляризованный фильтр Калмана

Фильтр Калмана был разработан Сверлингом, Калманом и Бьюси в 1958-1961 гг. [1-2]. С его помощью, используя уравнения состояния и наблюдений, оценивается вектор состояния динамической системы, при условии наличия сведений о ковариационных свойствах шумов наблюдений и входных воздействий. В настоящее время алгоритм фильтра Калмана получил широкое распространение и существует ряд его модификаций. Основы фильтрации Калмана излагаются во множестве учебников и курсов лекций [3-5]. Суть состоит в постановке задачи Винера оптимальной фильтрации, получении уравнения Винера-Хопфа как условия оптимальности, формулировке соответствующих ему дифференциальных уравнений для оценивания состояния и ковариационной матрицы и их численного решения в дискретном времени [6].

В курсе лекций Пантелеева В.Л. [7] для астрономов дискретный фильтр Калмана описан как расширение рекуррентного метода наименьших квадратов (МНК). Пусть имеется уравнение состояния (дискретная линейная динамическая система) и наблюдений:

$$x(j+1) = A(j)x(j) + q(j), \quad z(j) = C(j)x(j) + r(j),$$

где x – $n \times 1$ вектор состояния, $A(j)$ – $n \times n$ матрица, связывающая текущее состояние с предыдущим, $q(j)$ – $n \times 1$ вектор белого шума с нулевым средним и корреляционной

матрицей Q для нулевой задержки, $z - l \times 1$ вектор наблюдений, $C(j) - l \times n$ матрица наблюдений, $r(j) - l$ -мерный шум наблюдений (некоррелированный, с матрицей R для нулевой задержки). Далее номер шага j будем обозначать нижним индексом. Матрица усиления в фильтре Калмана вычисляется по формуле $K = P_j^- C^T (C P_j^- C^T + R)^{-1}$, где P_j^- – ковариационная матрица погрешности априорной оценки. Алгоритм позволяет уточнить вектор состояния $x^+ = x^- + K(z - Cx^-)$ по поступившему наблюдению z с последующим перевычислением ковариационной матрицы $P_j^+ = P_j^- + K_j C_j P_j^{-1}$. Вероятностный подход и понимание оптимальной линейной оценки как проектирования позволяет видеть в формулах алгоритма фильтра Калмана регрессию, уточняющую оценку на основе поступающей с наблюдениями информации. Записанные выше формулы представляют собой аналог формул для рекуррентного МНК. Уравнение состояния используется для перехода на следующий шаг по времени $x_{j+1}^- = A_j x_j^+$. $P_{j+1}^- = A_j P_j^+ A_j^T + Q_j$.

Вопрос о регуляризации фильтра Калмана для случая плохо-обусловленной матрицы наблюдений C или плохо известных параметров системы A привлекал внимание ученых, работавших в различных областях науки и инженерии [8-10]. Продемонстрируем, что добавление Тихоновского стабилизатора в нормальную систему уравнений не составляет труда. В рекуррентном МНК для этого достаточно добавить член αI , где α – параметр регуляризации, I – единичная матрица размерности $N \times N$, в выражение для ковариационных матриц: априорной (по N наблюдениям) $P_N^- = \sigma_0^2 (C^T C + \alpha I)^{-1}$, и апостериорной (по $N+1$ наблюдению) $P_{N+1}^+ = \sigma_0^2 (C^T C + c_{N+1}^T c_{N+1} + \alpha I)^{-1}$. Здесь σ_0^2 – дисперсия единицы веса, T – символ транспонирования, c_{N+1} – строка коэффициентов $N+1$ -го уравнения наблюдений. При этом выражение для матрицы усиления останется без изменений

$$K(N) = ((C^T C + \alpha I)^{-1} c_{N+1}^T (1 + c_{N+1} (C^T C + \alpha I)^{-1} c_{N+1}^T)^{-1}) = P_N^- c_{N+1}^T (c P_N^- c_{N+1}^T + \sigma_0^2)^{-1}.$$

В нём ковариационные матрицы использованы вместо обратных нормальных матриц. Тогда уточненные оценки будут получены по не изменившимся формулам (см [7] гл. 11):

$$\hat{x}(N+1) = \hat{x}(N) + K(N)(z_{N+1} - c_{N+1} \hat{x}(N)), \quad P_{N+1}^+ = (E - K(N)c_{N+1})P_N^-.$$

Аналогично и для фильтра Калмана, достаточно включить стабилизатор в вычисление регуляризованных ковариационных матриц. Добавление αI в вычисление P_j^-, P_{j+1}^- сохранит все формулы фильтра Калмана (§2 выше) неизменными, регуляризовав при этом процедуру обращения нормальной матрицы $C^T C$. Выбор параметра регуляризации, как всегда, следует согласовывать с погрешностями этой матрицы и входных данных [11], в рекуррентном алгоритме его также можно плавно менять от шага к шагу.

2 Система уравнений для движения полюса, проблема оценки возбуждения

Уравнение состояний для движений полюса Земли по координатам $p_1 = x$ (Вдоль Гринвичского меридиана) и $p_2 = -y$ (по меридиану в 90° к востоку) получается линеаризацией уравнений Эйлера-Лиувилля [12]

$$D \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & -\alpha \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix},$$

Где α, β – действительная и мнимая составляющие комплексной чандлеровской частоты $\sigma_c = \alpha + i\beta = 2\pi f_c + i \frac{\pi f_c}{Q}$, Q – добротность (примем ≈ 100), $f_c = 1/433$ сут $^{-1}$ – действительная чандлеровская частота, $D = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования, χ_1, χ_2 – компоненты входного возбуждения, i – мнимая единица. [13]. При постоянных параметрах уравнений связь χ с p можно переписать через обратную передаточную функцию $W^{-1}(D)$:

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix}^{-1} \left(DI - \begin{bmatrix} -\beta & -\alpha \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = W^{-1}(D) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}.$$

Известно, что фильтр Калмана может быть обобщен так, что в вектор оцениваемых параметров будет включено входное воздействие. Пусть стоит задача рекуррентного оптимального оценивания вектора $x = [p_1, p_2, \chi_1, \chi_2]^T$ по зашумленным наблюдениям за движением полюса $z = Cx + r$, где C – матрица, верхний левый блок которой размерности 2×2 – единичная матрица I , а нижний правый содержит нули (компоненты χ мы напрямую не наблюдаем). Подчеркнем, что мы расширили задачу так, чтобы оценивать не только траекторию полюса p , но и входное воздействие χ .

При оценивании p не возникает проблем с обусловленностью и регуляризовать как в разделе 1 процедуру нет никакой необходимости – задача вполне корректна. Стоит отметить, что ковариационную матрицу ошибок наблюдений за движением полюса можно сделать зависящей от времени $R(t)$: наблюдения XIX – начала XX века имели точность 0.1-0.01” дуги, в современную эпоху космической геодезии их точность ~0.1 мкс дуги.

Но если мы хотим включить в вектор оцениваемых параметров входное возбуждение χ , регуляризирующая добавка αI к диагональным элементам нижнего правого блока C сделает ненаблюдаемые компоненты χ как-бы наблюдаемыми. Попробуем применить другой подход к решению: вначале оценим с помощью фильтра Калмана движение полюса p без регуляризирующей процедуры, а на втором этапе оценим χ , которое поступало на вход. Обратный оператор $W^{-1}(D)$, содержащий дифференцирование p , чрезвычайно усиливает любые шумы наблюдений вне резонансной частоты f_c . Необходима либо регуляризация, либо дополнительная фильтрация наблюдений p , прежде чем выделять из них χ . При этом нужно регуляризовать не задачу определения p , а некорректную задачу оценивания компонент χ . Т.е. проблема возникает уже не на уровне уравнения наблюдений, а для уравнения состояний. Как встроить регуляризатор в него?

Согласно взгляду на проблему, сформулированному В.Л. Пантелеевым в методе, получившем название корректирующей фильтрации [14], на p может быть наложен дополнительный частотный фильтр $W_{\text{corr}}(f)$ а затем уже вычислено возбуждение χ . Такой фильтр может основываться и на Тихоновской регуляризации исходя из выражения

$$W_{\text{corr}}(f)W^{-1}(f) = \frac{W^*(f)}{W^*(f)W(f) + \alpha I},$$

где * обозначает сопряжение, оператор D заменен на $i2\pi f$. Параметр регуляризации должен быть выбран так, чтобы существенно уменьшилось пропускание слева и справа от резонансной частоты. Таким образом удастся отсечь те области, где прямой оператор $W(f)\chi \approx 0$. То есть мы ограничиваемся задачей оценивания лишь того χ , которое вызвало резонансное чандлеровское колебание полюса, считая полезным сигнал, сосредоточенный вблизи резонансной частоты чандлера f_c .

Если говорить о фильтре Калмана – рекуррентной процедуре, то неотфильтрованное χ могло бы оцениваться по двум соседним значениям оценок $p(j)$, $p(j-1)$ фильтром Вилсона [13], основанным на замене D численной производной по двум точкам и аппроксимирующим $W^{-1}(D)$. Однако $W_{\text{corr}}(f)$, если потребовать от него подавления годовой и других близких к резонансу частот, будет описываться довольно широким (около 20 лет) окном, к тому же симметричным, если потребовать нулевого искажения фазы. Т. о. встроить корректирующую фильтрацию или регуляризацию в алгоритм фильтра Калмана для оценивания χ возможно, но с временным лагом (запаздыванием). Перемножение передаточных функций во временной области можно задать сверткой импульсной характеристики корректирующего фильтра и весов операции $W^{-1}(D)$. Дискретизацию исходной системы Эйлера-Лиувилля осуществить на основе переходной матрицы системы.

3 Результаты для Чандлеровского движения полюса.

ЧДП - составляющая движения полюса Земли с периодом 433 сут и средней амплитудой ~135 мс дуги. Оно было открыто С. Чандлером в 1891 г. Движение полюса также имеет годовую и вековую составляющие. В спектре, полученном по данным бюллетеня ЕОР С01 с 1846 г., рис. 1а, видны: нерасщепленная годовая и расщепленная чандлеровская линии с боковыми лепестками. Расщепление – результат амплитудной и фазовой изменчивости ЧДП. На график спектра наложена амплитудная характеристика фильтра Пантелеева [6], который может использоваться для выделения ЧДП, в том числе как $W_{\text{corr}}(f)$.

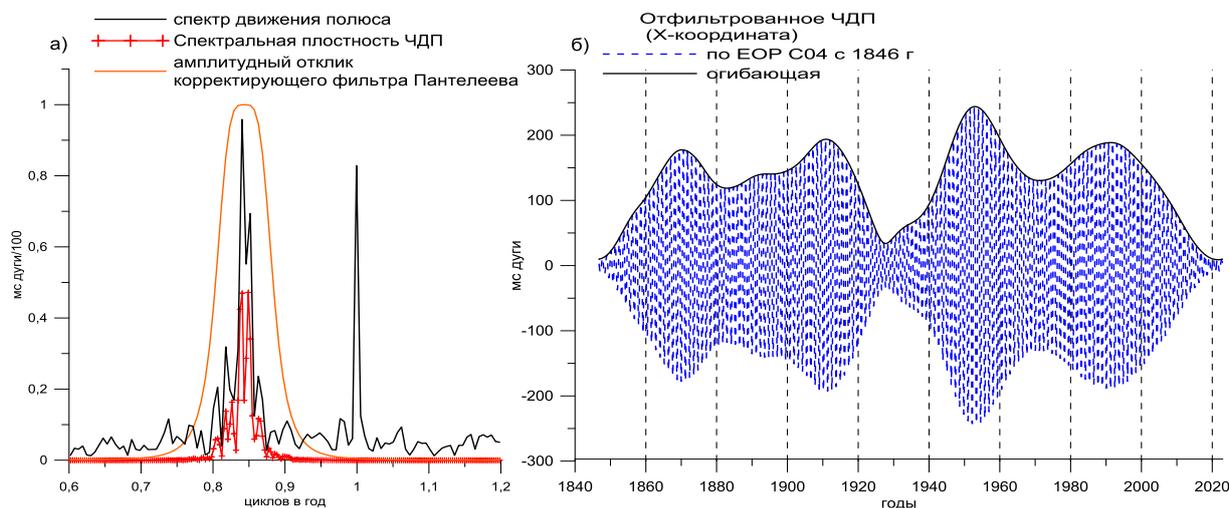


Рисунок 1 а) спектр движения полюса; б) выделенная чандлеровская составляющая p .

На рис. 1б представлена X-компонента выделенного ЧДП. В 1930-е и 2017-2020 гг. его амплитуда уменьшалась почти до нуля [15]. Представлены огибающая амплитуды (рис. 1б) и дрейф фазы (рис. 2а) ЧДП, полученные в скользящем окне длительностью 3.6 года. Из графика 2а видно, что в 1930-е гг. фаза ЧДП изменилась на π рад и с 2010 также происходит её смещение. Т.о.. ситуация напоминает наблюдавшуюся 90 лет назад.

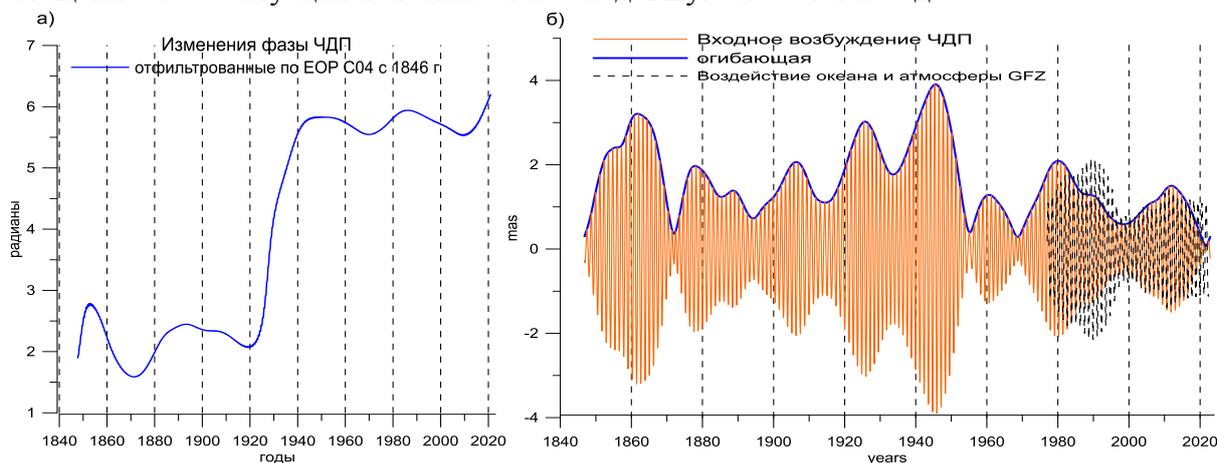


Рисунок 2 а) фаза ЧДП; б) выделенное чандлеровское возбуждение χ .

На рис. 2 представлен результат решения некорректной обратной задачи выделения χ – входного возбуждения ЧДП. Амплитуда составляет менее 3 мс дуги, её модуляции обусловлены поведением производной Dp . С 1980 г выполнено сопоставление с суммарным угловым моментом атмосферы (ААМ) и океана (ОАМ), компонент массы+движения по данным GFZ. Видно, что он не вполне объясняет затухание ЧДП в настоящее время.

Заключение. В работе предложен подход к регуляризации фильтра Калмана по уравнению наблюдений, отличающийся от результатов [8-9] тем, что он основан на

рекуррентном МНК и включает стабилизатор как в кросс-ковариационную так и обратную дисперсионную матрицы в формуле усиления K . Решается задача оценивания чандлеровского движения полюса Земли и входного возбуждения для него, при этом возникает необходимость регуляризации по уравнению состояний. Дается ряд идей, на основе которых это можно было бы сделать. Представлены результаты, показывающие, что ЧДП находится в настоящее время в аномальном режиме, как в 1930-е гг.

Благодарности: исследование выполнено при поддержке школы “Космос” МГУ им М.В. Ломоносова.

Regularized Kalman Filter in application to the Chandler wobble of the pole.

Zotov L.V.,^{1,2}, Barinova S.A.¹, Garazha I.A.¹

¹*Moscow Institute of Electronics and Mathematics*

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

²*Sternberg Astronomical Institute Lomonosov Moscow State University*

Список литературы

1. Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. Transactions ASME–J Basic Eng., 82, Series D, 35–45, 1960
2. Калман Р., Фолб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М., УРСС, 2004
3. Фомин В.Н. Оптимальная и адаптивная фильтрация. СПбГУ, 2003
4. Ширяев А.Н. Вероятность 1,2. М., МЦМНО, 2007
5. Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. М., Наука, 1989
6. Зотов Л.В. Теория фильтрации и обработка временных рядов. М., МГУ, 2010
7. Пантелеев В.Л. Наблюдение и управление динамическими объектами, курс лекций, ГАИШ МГУ, 2001, <http://lnfm1.sai.msu.ru/grav/russian/lecture/nudo/nudo.htm>
8. Li YM, Gu QM, Han SH, Gu YW, Tikhonov Regularized Kalman Filter and its Applications in Autonomous Orbit Determination of BDS., WSEAS Transactions on Mathematics archive, Vol 16, 2017, pp. 187-196
9. Трубин В. А., Батищев В. Регуляризованный фильтр Калмана. Патент 1317652 СССР, Опубл. в Б. И. N 7, 1988
10. Asgharpour M., Foodeh R., Daliri M.R. Regularized Kalman filter for brain-computer interfaces using local field potential signals, J Neurosciences Methods. N 350, 2021, 109022
11. Тихонов А.Н., Гончарский А.В. Степанов В.В., Ягола А.Г., Численные методы решения некорректных задач, М., Наука, 1990.
12. Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. СПб. Наука, 1997
13. Зотов Л.В. Климатические процессы и вращение Земли. М. МИЭМ, 2022, ISBN:978-5-600-03155-5
14. Zotov L., Pantelev V.L. Filtering and inverse problems solving, in Computational Methods for Applied Inverse Problems Edited by Y. F. Wang, A. G. Yagola and C. C. Yang, De Gruyter & Higher Education Press, June 2012, pp. 169-194
15. Зотов Л.В., Сидоренков Н.С., Бизуар К., Аномалии чандлеровского колебания полюса в 2010-е годы, Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия, N 3, 2022, стр. 64