УДК 521-93 51-72

Фильтр Калмана с полосовой частотной фильтрацией для выделения Чандлеровского колебания полюса.

Зотов Л.В.[1], Логинов А.В.[2], Ольховский А.М.[1]
lzotov@hse.ru
[1]Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики, Россия
[2]Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Россия

Abstract: *One of the major components of the Earth's polar motion is Chandler wobble with 433-day period. To extract it from observations narrow-band filtering is required. We have developed method which joins Kalman filtering and band-pass filtering in direct time with the phase correction in reversed time. By using Euler-Liouville equation generating resonant CW as a filter we managed to extract prograde Chandler wobble from the two-dimensional state vector. In 2020 the amplitude of CW decayed to zero and phase of the wobble had undergone a jump.*

1 Постановка задачи выделения ЧДП

Движение полюса Земли содержит резонансную компоненту – Чандлеровское колебание. Его амплитуда переменна и может достигать 200 мс дуги (6 метров на поверхности Земли). Поправки за изменение положения оси вращения Земли необходимы при обработке данных навигационных систем, для связи земной и небесной систем отчета, при обработке гравиметрических и др. геодезических наблюдений [1, 2].

Вращение Земли описывается уравнением Эйлера-Лиувилля. Его запись в терминах пространства состояний имеет вид:

$$\dot{m} = Gm + F\varphi, \tag{1}$$

здесь $m = \begin{bmatrix} x_p \\ -y_p \end{bmatrix}$ - вектор положения полюса, $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_x \end{bmatrix}$ - вектор входного возбуждения,

$$G = \begin{pmatrix} -\beta & -\alpha \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} = -F,$$

где комплексная чандлеровская частота задана как $\sigma_c = \alpha + i\beta = 2\pi f_c \left(1 + \frac{i}{2Q}\right)$, f_c - действительная чандлеровская частота (1/433 циклов в год), Q – параметр добротности (100-150).

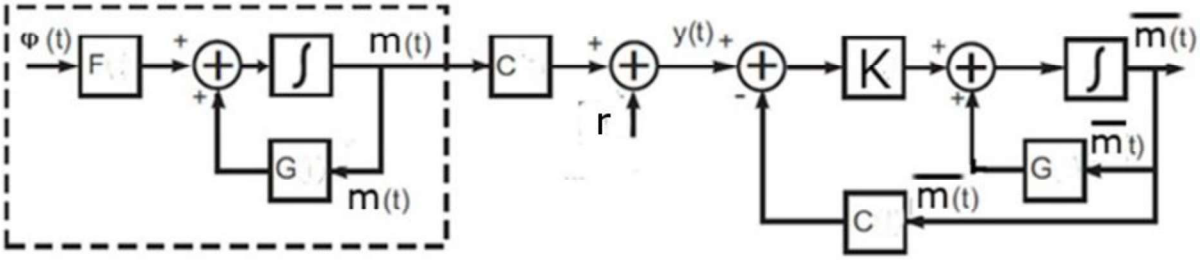
Эквивалентную (1) запись можно задать в виде комплексного уравнения

$$\frac{i\dot{m}}{\sigma_c} + m = \varphi \tag{1.1}$$

где $m = x_p - iy_p$ - траектория движения полюса, $\varphi = \varphi_x + i\varphi_y$ – возбуждающая функция.

Наблюдения за движением полюса велись с 1846 года, вначале методами оптической астрометрии, точность которых составляла 80-10 мс дуги, а в современную эпоху – методами космической геодезии с погрешностью менее 0.1 мс дуги. Результаты публикуются на сайте центра данных Международной службы вращения Земли и систем отсчета МСВЗ [3]. В РФ эти данные предоставляются на интернет-портале Государственной службы времени, частоты и определений параметров вращения Земли ГСВЧ Всероссийского научно-исследовательского института физико-технических и радиотехнических измерений ВНИИФТРИ [4]. Там же предоставляются Бюллетени ГСВЧ с прогнозами. Для прогнозирования движений полюса хорошо зарекомендовали себя методы авторегрессии, фильтр Калмана, методы машинного обучения. Чандлеровское колебание является резонансным, входные воздействия на него со стороны океана и атмосферы крайне малы (1-2 мс дуги), отклик же, весьма велик и меняется на протяжении нескольких лет, и вносит основную погрешность в долгосрочный прогноз.

Разумно поставить вопрос об оптимальном выделении траектории движения полюса *m* из наблюдений, с учетом их меняющихся характеристик. С такой задачей хорошо справляется фильтр Калмана, в котором учитываются ковариационные свойства шумов и используются матрицы динамической системы (1). Классическая система генерации сигнала и его фильтрации по Калману представлена на схеме 1 ниже. На ней *K* – матрица усиления.



Блок 1 генерации движения полюса. Блок 2 канал наблюдений. Блок 3 фильтр Калмана.

Схема 1. Генерация сигнала наблюдений *y* и его фильтрация по Калману.

Однако если мы поставим задачу выделения именно ЧДП, то необходимо будет применить дополнительный полосовой фильтр, чтобы избавиться от годового колебания полюса и прочих высоких и низких частот в сигнале. ЧДП и годовое колебание на шкале частот разделяет всего лишь Δf =1-0.843=0.157 циклов в год, поэтому фильтр должен быть достаточно узкополосным, что в свою очередь вызовет краевые эффекты, которые необходимо минимизировать.

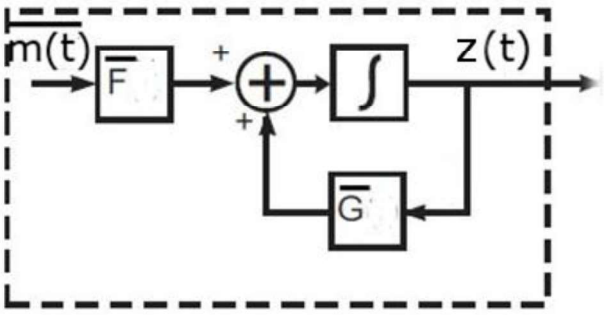
Насколько нам известно, задача выделения некоторой специализированной частотной компоненты в векторе состояния, в свою очередь оцениваемого из наблюдений, является весьма общей и стоит в разнообразных областях исследований и практики, в частности, в гравиметрии. При разработке метода мы опирались на работы В.Л. Пантелеева по морской и аэрогравиметрии [5, 6]. В основу было положено сродство метода частотной фильтрации на основе передаточных функций с подходом Винера к частотному синтезу оптимального фильтра, получившего развитие в подходе Калмана.

2 Синтез полосового фильтра для выделения ЧДП

Система уравнений Эйлера-Лиувилля (1.1) является резонансной. На её основе может быть спроектирован полосовой фильтр. Импульсная характеристика *h* и передаточная функция *W* для (1.1) имеют вид (p-переменная на комплексной плоскости)

$$h(t) = -i\sigma_c e^{i\sigma_c t}, \qquad W(p) = \frac{\sigma_c}{ip+\sigma_c}.$$

Если отнормировать коэффициент передачи на Чандлеровской частоте так, чтобы он равнялся единице, а ширину полосового фильтра выбрать посредством параметра Q так, чтобы она соответствовала желаемой полосе пропускания дополнительного фильтра (Q=5-15), то на основе (1.1) можно спроектировать дополнительный полосовой фильтр для выделения ЧДП. Схема такого фильтра представлена ниже



Блок 4 дополнительной полосовой фильтрации

Фильтр, основанный на дифференциальных уравнениях (1.1) может быть реализован
a) сверткой с импульсной характеристикой фильтра *h*
b) домножением спектров в частотной области
c) численным интегрированием
алгоритмом численного интегрирования дается выражением

$$\mathrm{z}(k) = \frac{\Delta t\tau}{2}\left(\overline{m}(k) + \overline{m}(k-1)e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right) + e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\mathrm{z}(k-1), \qquad (2)$$

где $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ – шаг по времени, $\tau = \frac{i}{\sigma_c}$, $\overline{m}$ – вход, z – выход. Черта над *m* символизирует то, что вектор состояния (движения полюса) был предварительно получен оцениванием по оптимальной процедуре Калмановской фильтрации (схема 2). Таким образом, численное интегрирование можно вести одновременно с Калмановской процедурой. Обе они реализуются в виде численного решения дифференциального уравнения для оценки вектора состояния $\overline{m}$ и чандлеровской составляющей z.

Однако будучи каузальным, спроектированный таким образом дополнительный фильтр обладает недостатком – он искажает фазу сигнала. Для того, что устранить фазовые искажения нужно либо применять квадрат модуля передаточной функции $|W(p)|^2 = \frac{\sigma_c^2}{(ip+\sigma_c)(-ip+\sigma_c)}$, что лишит фильтр свойства устойчивости, либо провести фильтрацию *W*, но в обратном времени.

Для этого, после получения *z* на всем интервале, вплоть до его последнего отсчета, предложено провести повторную фильтрацию в обратном времени с комплексно-сопряженной передаточной функцией $W(p)^* = \frac{\sigma_c}{-ip+\sigma_c}$ того же фильтра. Для этого следует зеркально развернуть сигнал *z(k),*полученный интегрированием (2) во времени (последняя точка становится первой, первая – последней), выполнить его комплексное сопряжение (чтобы прямая частота оставалась прямой, а не ретроградной) и вновь провести фильтрацию с *W(p),* после чего снова развернуть результат во времени и сделать комплексное сопряжение (привести к прямому времени). Итог операции – выходной сигнал $\overline{z(t)}$ - ЧДП с исправленной фазой. Могут использоваться и другие варианты коррекции фазы.

3 Тестовые вычисления, заключение

На рис. 1 представлен результат апробирования описанного выше алгоритма реализованного на языке Matlab в рамках проекта МИЭМ N 1855 2024 года. Были выбраны параметры алгоритма f_c=0.843 цикла в год, Q=15 для фильтра и показано, что предложенная методология выделяет Чандлеровское колебание с необходимой точностью. Удалось подтвердить вывод о том, что Чандлеровское колебание затухло в 2020-е годы со сменой фазы, ранее сделанный нами в работе [7].

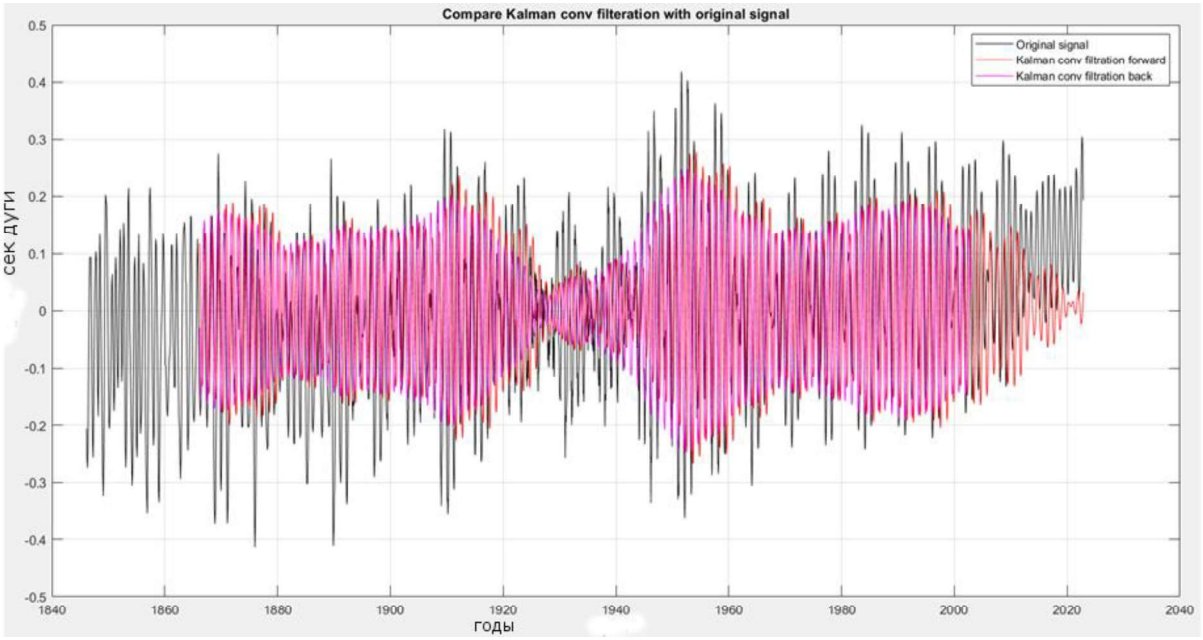


Рисунок 1. Наблюдения за движением полюса m(t), обработанные фильтром Калмана $\overline{m(t)}$ (черным); выделенное ЧДП z(t) (оранжевым); результат фильтрации $\overline{z(t)}$ в обратном времени (красным).

В данной работе мы описали метод выделения конкретной (чандлеровской) составляющей в векторе состояния на основе совместной работы фильтра Калмана и специально спроектированного на базе уравнений Эйлера-Лиувилля полосового фильтра. Процедура может быть реализована в реальном времени рекуррентно, однако требуется коррекция фазы фильтрацией в обратном времени. Если фазу не корректировать, в реальном времени можно наблюдать изменения сигнала вплоть до правой границы интервала вполне уверенно, делая поправку лишь на фазовую задержку/опережение выделенной фильтрацией в прямом времени узкополосной составляющей.

Разработанный подход может служить для более достоверного оценивания целевых компонент сигнала и их прогнозирования не только в приложениях, связанных с вращением Земли, но и в навигации, в гравиметрии на подвижном основании, в инженерных задачах.

Литература

1. Сидоренков Н.С. Атмосферные процессы и вращение Земли, С. Петербург. Гидрометеоиздат, 2002
2. Зотов Л.В. Климатические процессы и вращение Земли. М. МИЭМ 2022.
3. Earth Orientation Center, https://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php
4. Центр обработки и анализа данных ПВЗ ГМЦ ГСВ, https://pvz.vniiftri.ru/bull_A_Q.php
5. Пантелеев В.Л., Чеснокова Т.С., Задача деконволюции в инерциальной гравиметрии, Вестник МГУ серия Физика, Астрономия, N 1, стр.75-79, 2011
6. Panteleev V.L., To the problem of the airborne gravimetry measurements, Results of researches of the international geophysical project, Academy of sciences of USSR, Soviet Geophysical Committee, Moscow, p. 60, 1989
7. Zotov L., N. Sidorenkov, Ch. Bizouard, 2022, Anomalies of the Chandler Wobble in 2010s, Moscow University Physics Bulletin, Vol. 77, N. 3, pp.55-58, DOI:10.3103/S0027134922030134