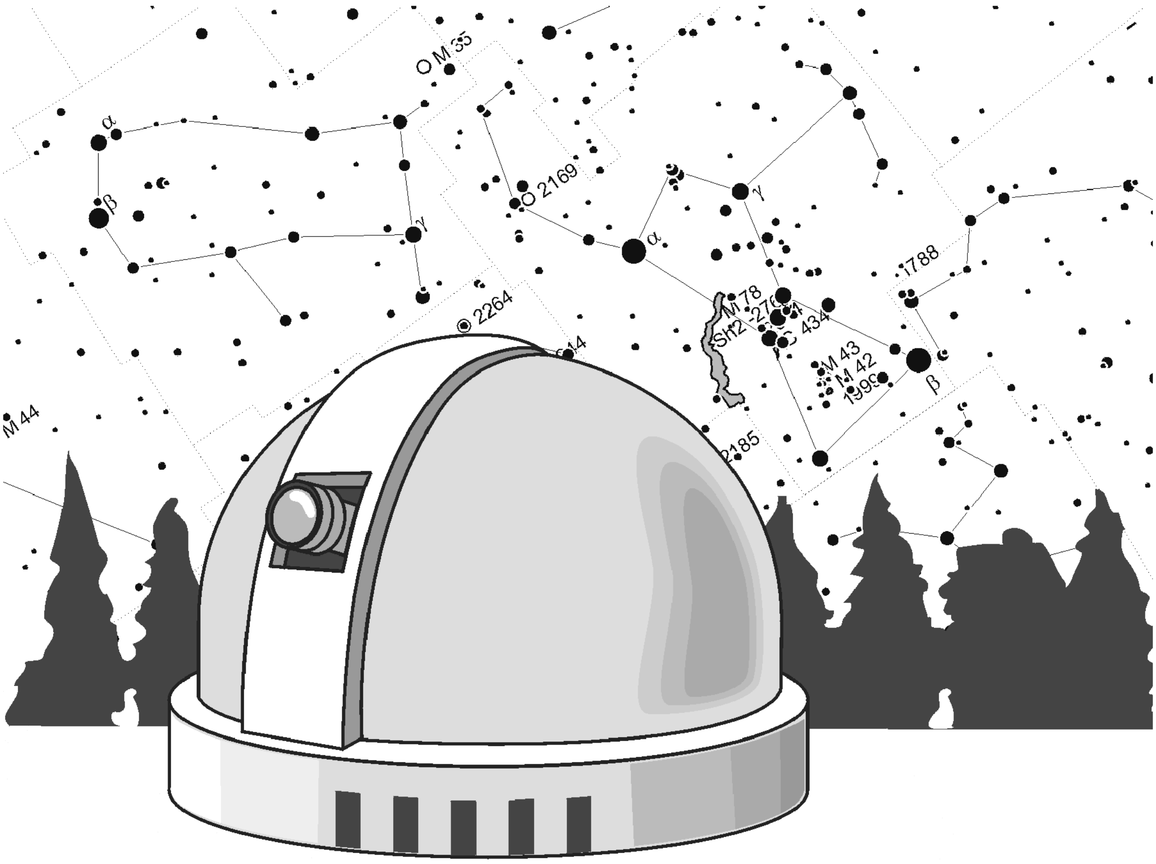
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Академия повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования



XV Всероссийская Олимпиада школьников по астрономии

Условия и решения задач

Новороссийск, 2008 г.

XV Всероссийская олимпиада школьников по астрономии. Новороссийск, 7-13 апреля 2008 года. Условия и решения задач теоретического и практического туров. Сборник под редакцией А.С. Расторгуева, О.С. Угольникова, А.М. Татарникова, Е.Н. Фадеева. 2008. 32 стр.

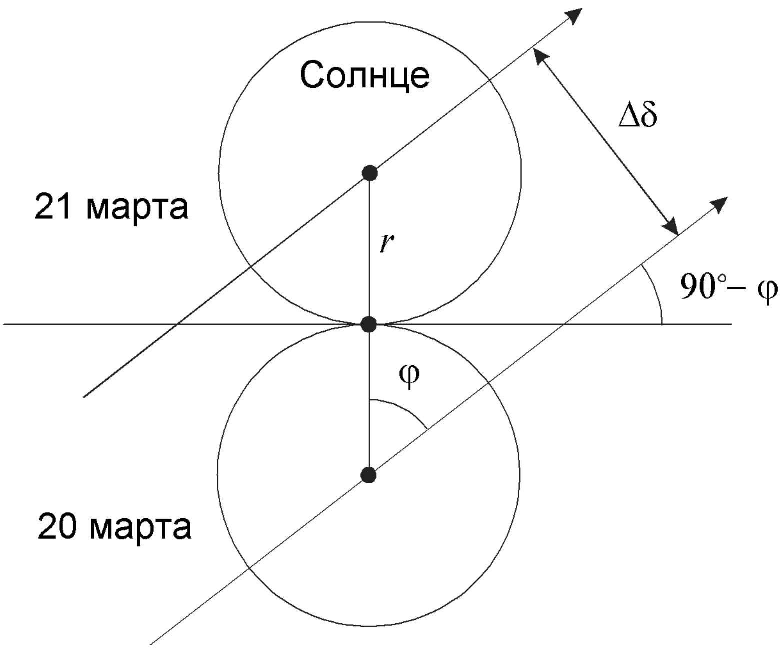
Оригинал-макет и верстка: О.С. Угольников.

Весенний восход Солнца (О.С. Угольников)

Класс: 9 10 Задача: 1

? В некотором пункте Земли утром 21 марта Солнце оторвалось от горизонта в той же точке, где 20 марта появился его первый луч. Найти широту пункта наблюдения. Атмосферной рефракцией пренебречь.

! Описанная в условии задания картина наблюдается вблизи дня весеннего равноденствия. В это время склонение Солнца близко к нулю, и при своем восходе оно движется вдоль небесного экватора под углом (90°–|φ|) к горизонту, где φ — широта места наблюдения. Так как 21 марта видимый путь Солнца проходил выше, чем 20 марта, мы находимся в северном полушарии Земли, и широта φ положительна.



За одни сутки Солнце в своем видимом годичном движении смещается вдоль эклиптики на угол

$$l = 360^{\circ}\,\frac{t}{T} = 0.986^{\circ}.$$

Здесь t — продолжительность солнечных суток, T — продолжительность тропического года. Движение Солнца происходит под углом ε к эклиптике, равным 23.4°. За один день склонение Солнца увеличится на величину

$$\Delta\delta = l\sin\varepsilon = 0.392^{\circ}$$

Как видно из рисунка, широта места наблюдения составляет

$$\varphi = \arcsin\frac{\Delta\delta}{2r},$$

где r – угловой радиус Солнца, который с учетом даты наблюдения можно вычислить исходя из среднего расстояния Земли от Солнца. Угловой радиус Солнца составляет 0.266°, а широта места наблюдения – 47°.

Искусственный спутник Земли (А.М. Татарников)

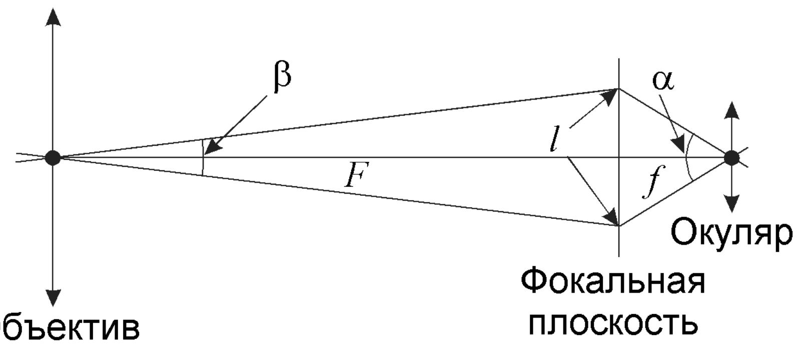
Класс: 9 10 Задача: 2

? **Диаметр поля зрения телескопа составляет 30′ (*для 9 класса*).**
Объектив телескопа имеет диаметр 10 см и фокусное расстояние 1 м. Окуляр имеет фокусное расстояние 1 см и собственное поле зрения 45 градусов (*для 10 класса*).

В этот телескоп случайно наблюдался искусственный спутник Земли, который прошел через центр поля зрения. Считая орбиту спутника круговой, определите, за какое время он пролетел через поле зрения, если известно, что телескоп был направлен в зенит, а период обращения спутника составляет 1 час 30 минут.

! ***Для 10 класса:***

Вначале определим диаметр поля зрения телескопа. Для этого изобразим его оптическую схему:



Изображение объектов строится в фокальной плоскости и рассматривается через окуляр. Обозначим фокусное расстояние окуляра через f, а его собственное поле зрения через α. Тогда линейный размер изображения поля зрения в фокальной плоскости равен

$$l = 2f \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

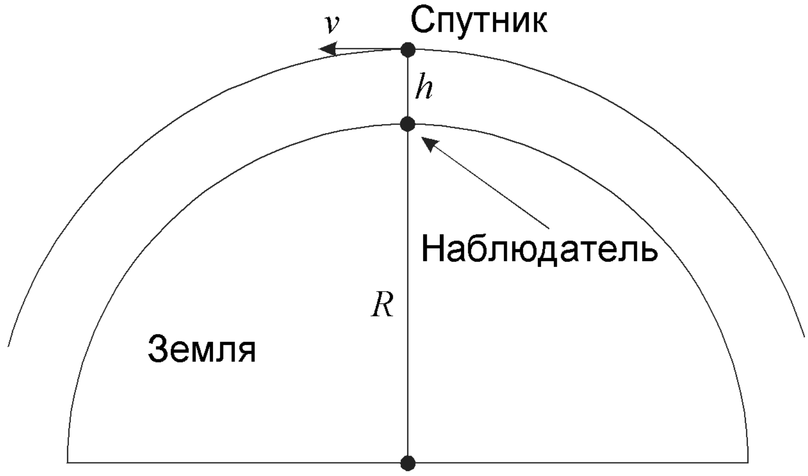
Поле зрения телескопа равно углу β, под которым это изображение видно из объектива телескопа:

$$\beta = 2\mathrm{arctg}\frac{l}{2F} \approx \frac{l}{F} = \frac{2f}{F}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Здесь угол β выражается в радианной мере и учитывается то, что этот угол мал. F – фокусное расстояние объектива. Подставляя численные значения, получаем, что поле зрения телескопа равно примерно 0.008 радиан или 0.5°.

Далее для 9 и 10 классов:

Период обращения спутника вокруг Земли указывает, что спутник движется по низкой околоземной орбите. Его линейная скорость значительно больше скорости наблюдателя, находящегося на вращающейся Земле. Поэтому мы можем считать Землю неподвижной.



Обозначим радиус Земли через R, расстояние между наблюдателем и спутником – через h, период обращения спутника – через T. Орбита спутника круговая, и по III закону Кеплера

$$h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R.$$

Здесь M – масса Земли. Высота спутника над поверхностью Земли равна 280 км. Скорость спутника составляет

$$v = \frac{2\pi(R+h)}{T}.$$

Угловая скорость спутника в точке, где он наблюдается в зените, равна

$$\omega = \frac{v}{h} = \frac{2\pi\,(R+h)}{T\cdot h} = \sqrt{\frac{GM}{h^2\,(R+h)}}.$$

Переводя в градусную меру, получаем значение угловой скорости: 1.6° в секунду. Поле зрения размером 0.5° спутник пересечет примерно за 0.3 секунды.

Олимпиадное летоисчисление (Е.Н. Фадеев)

Класс: 9 10 Задача: 3

? Древнегреческий историк Тимей около 264 г. до н.э. ввел летоисчисление от первой олимпиады. Для обозначения года требовалось указать число прошедших олимпиад и номер года, идущего после последней олимпиады. Так, Саламинская битва произошла в первый год после 75 олимпиады (Ol 75.1). Вычислите, какой это был год по современному летоисчислению, если первая олимпиада произошла 1 июля 776 г. до н.э., а сама битва произошла в начале осени. Какой год по олимпиадному летоисчислению идет сейчас?

! Пусть X — число прошедших олимпиад, а Y — номер года, идущего со времени последней олимпиады. Тогда число целых лет, прошедших после первой олимпиады до Саламинской битвы, составляет

$$N_1 = (X - 1) \cdot 4 + (Y - 1) = 296.$$

В этой формуле из X вычитается единица, так как отсчет идет с первой олимпиады. Аналогично, единица вычитается из Y, так как после каждой олимпиады сразу начинается первый год нового цикла. Получается, что Саламинская битва произошла осенью 480 года до н.э.

Новый год в олимпиадном летоисчислении начинается летом, и сейчас мы живем в олимпиадном году, начавшемся летом 2007 года по нашему календарю. Число лет, на которые этот момент отстоит от первой олимпиады, составляет

$$N_2 = 2007 + 776 - 1 = 2782.$$

Единица вычитается вследствие отсутствия нулевого года. Деля число 2782 на 4 с остатком, получаем, что к лету 2007 года было завершено 695 олимпиадных циклов (начиная с первого) и прошло еще два года. То есть, начался год Ol 696.3 в олимпиадном исчислении.

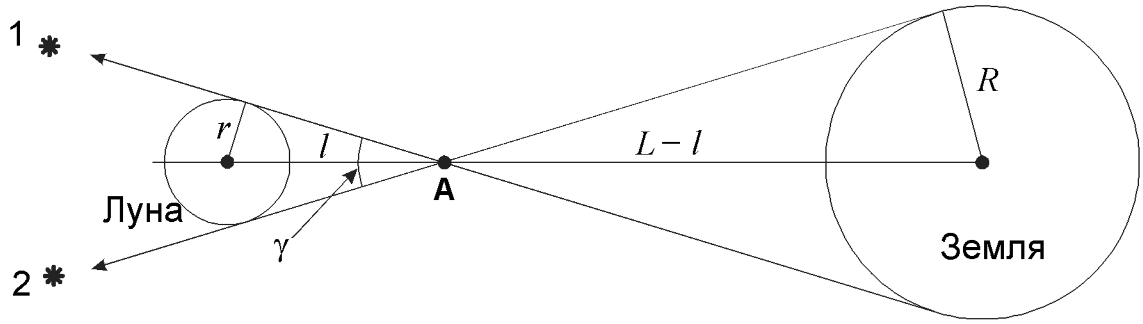
Интересно, что современные летние олимпийские игры не попадают в древний календарь олимпиад. Так, XXIX летние олимпийские игры в Пекине пройдут в четвертый год 696 олимпиады. Зимние олимпийские игры (которых, естественно, не могло быть в Древней Греции) лучше соответствуют этому календарю. Ближайшая зимняя олимпиада 2010 года в Ванкувере придется на год Ol 697.1 по олимпиадному летоисчислению.

Покрытие двух звезд (О.С. Угольников)

Класс: 9 Задача: 4

? Определите максимальное угловое расстояние между двумя звездами, покрытие которых Луной может одновременно наблюдаться на Земле (в разных ее пунктах).

! Рисунок соответствует моменту одновременных покрытий двух наиболее удаленных друг от друга на небе звезд 1 и 2 Луной, видимых из разных пунктов Земли.



Обозначим расстояние между Землей и Луной через L, а расстояние от Луны до точки **A** – через l. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{l}{L-l}=\frac{r}{R},$$

где R и r – радиусы Земли и Луны. Из данной пропорции получаем

$$l=\frac{Lr}{R+r}.$$

Угловое расстояние между звездами 1 и 2 выражается как

$$\gamma = 2\arcsin\frac{r}{l} = 2\arcsin\frac{R+r}{L} = 2.6^\circ.$$

Так как нас интересует максимальное значение угла γ, в качестве расстояния L подставляется минимальное расстояние между Землей и Луной (356 тысяч км).

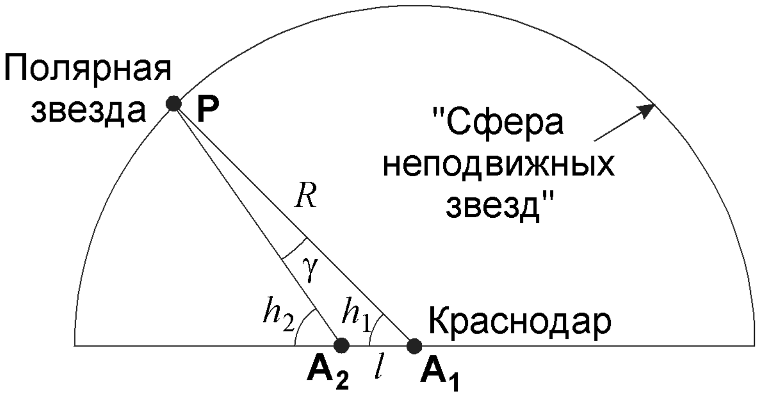
Плоская Земля (А.М. Татарников)

Класс: 9 Задача: 5

? **При движении наблюдателя вдоль меридиана от города Краснодар (широта +45°) до широты +55° высота Полярной звезды над горизонтом увеличивается. В рамках модели "плоской Земли" объясните это явление и вычислите радиус сферы неподвижных звезд, считая, что Краснодар находится точно в ее центре. Принять, что положение Полярной звезды совпадает с Северным Полюсом мира.**

! При перемещении на север вдоль меридиана по широте на угол $\Delta\varphi$, равный 10° (0.175 радиан), нам необходимо преодолеть по поверхности Земли (радиус R_0) расстояние

$$l = R_0 \Delta\varphi,$$



составляющее 1110 км. Изобразим гипотетическую плоскую Землю и сферу неподвижных звезд с радиусом R и центром, расположенным в городе Краснодар. При перемещении по Земле в направлении Полярной звезды она действительно будет видна на большей высоте над горизонтом. На рисунке видно, что высота Полярной звезды в пункте A_2 будет больше, чем в пункте A_1. Обозначим эти высоты как h_2 и h_1 и примем, что они равны широтам пунктов наблюдения (55° и 45°). Тогда угол γ с вершиной в Полярной звезде составляет

$$\gamma = h_2 - h_1 = \Delta\varphi.$$

Из теоремы синусов имеем:

$$\frac{R}{\sin(\pi - h_2)} = \frac{l}{\sin\gamma}.$$

С учетом полученных ранее соотношений

$$R = l \cdot \frac{\sin h_2}{\sin \Delta\varphi} = R_0 \cdot \frac{\Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi} \cdot \sin h_2.$$

Все углы в последних формулах выражаются в радианах. Второй из трех множителей в правой части итоговой формулы близок к единице, так как угол $\Delta\varphi$ небольшой. Радиус "сферы неподвижных звезд" получается равным 5250 км.

Короткопериодические кометы (О.С. Угольников)

Класс: **9** Задача: **6**

? Известно, что кометы переходят на эллиптические орбиты с малым периодом в результате гравитационного взаимодействия с планетами-гигантами. Исходя из этого, найдите минимальное значение орбитального периода кометы.

! При сближении с планетой-гигантом орбита кометы может существенно измениться. Однако какой бы ни была новая орбита кометы, она должна проходить через ту точку Солнечной системы, где произошло сближение кометы и планеты. Поэтому расстояние кометы от

Солнца, хотя бы в точке афелия новой орбиты, должно быть не меньше расстояния планеты-гиганта от Солнца. Среди всех планет-гигантов ближе всего к Солнцу подходит Юпитер, именно его действие чаще всего становится причиной изменения орбит комет. Минимальное расстояние между Юпитером и Солнцем равно

$$L = a(1 - e) = 4.95 \text{ а.е.}$$

Здесь a и e – большая полуось и эксцентриситет орбиты Юпитера. Минимальный орбитальный период будет достигнут для кометы, афелийное расстояние которой будет равно L, а перигелийное расстояние – очень малым. Большая полуось такой орбиты будет не меньше $L/2$, то есть 2.48 а.е., а орбитальный период – не меньшим $2.48^{3/2}$ или 3.9 лет.

Из всех известных короткопериодических комет только одна – комета Энке – имеет период, меньший 3.9 лет. Это связано с тем, что в ходе своей эволюции комета Энке многократно подвергалась гравитационному воздействию не только со стороны Юпитера, но и со стороны Земли, к которой комета периодически подходит на малое расстояние.

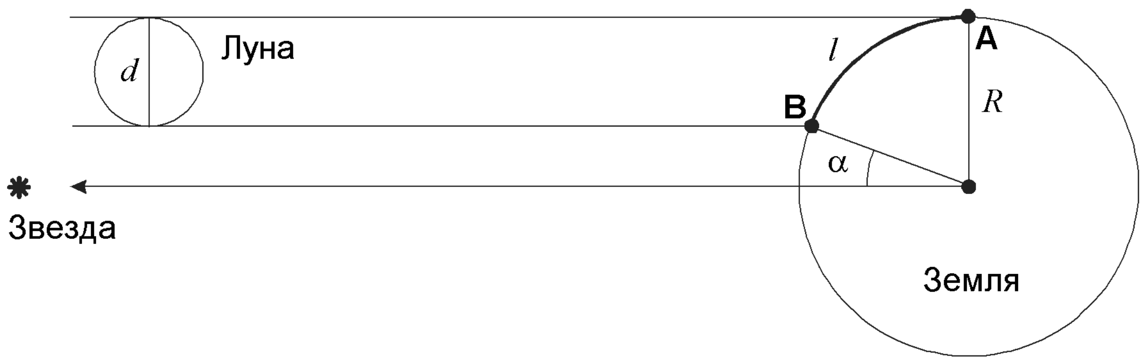
Покрытие одной звезды (О.С. Угольников)

Класс: 10 Задача: 4

? Определите максимальное расстояние (по поверхности Земли) между двумя точками нашей планеты, в которых можно одновременно наблюдать покрытие Луной одной и той же звезды.

! Покрытие Луной звезды в фиксированный момент времени наблюдается внутри цилиндра, направленного от Луны противоположно направлению на звезду. Диаметр этого цилиндра d равен диаметру Луны.

Максимальная длина дуги **AB** на поверхности Земли, которую может вычертить этот цилиндр, будет достигнута в том случае, если край цилиндра будет касаться поверхности Земли, и из одного из концов этой дуги (точки **A** на рисунке) звезда будет видна на горизонте. Для того, чтобы определить длину дуги **AB**, найдем сначала угол α:



$$\alpha = \arcsin\frac{R-d}{R}.$$

Здесь R – радиус Земли. Угол α равен 27° или 0.47 радиан. Длина дуги **AB** равна

$$AB = R\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 7000\ \text{км}.$$

Строго говоря, атмосферная рефракция вблизи точки **A**, составляющая 35′ или 0.01 радиан, увеличивает длину дуги **AB** еще на 60 км.

Разрешающая способность глаза (А.М. Татарников)

Класс: 10 Задача: 5

? При наблюдениях невооруженным глазом некий близорукий человек в своих очках видит на пределе звезды 6 звездной величины. В тех же условиях без очков он видит на пределе звезды 3 звездной величины. Оцените разрешающую способность глаза этого наблюдателя без очков, если с использованием очков она равна 2 угловым минутам.

! Яркость фона неба, на котором близорукий человек наблюдает звезды, не зависит от того, надел этот человек очки или нет. В этих условиях можно считать, что человек видит звезду в том случае, если освещенность от этой звезды на каком-либо элементе сетчатки его глаза превосходит некоторый постоянный уровень. Размер элемента сетчатки d соответствует разрешающей способности глаз в очках (2 угловые минуты).

Когда человек проводит наблюдения звезд в очках, вся световая энергия от звезды, попадающая в зрачок глаза, направляется в один элемент сетчатки. Минимальное количество этой энергии в единицу времени j, необходимое для того, чтобы звезда была замечена, соответствует блеску звезды 6^m.

Если наблюдатель снимает очки, величина j, необходимая для каждого элемента сетчатки, не изменяется. Но при этом излучение от звезды не фокусируется на сетчатке и попадает не в один, а сразу в N элементов сетчатки. Для того чтобы наблюдатель все же увидел звезду, на зрачок должно попадать количество энергии в единицу времени J, равное $j \cdot N$ и соответствующее звезде 3^m. В соответствии с формулой Погсона

$$N = \frac{J}{j} = 10^{0.4\cdot(6-3)} = 16.$$

Следовательно, изображение звезды занимает поле из 16 элементов сетчатки (4 на 4). Разрешающая способность глаза без очков будет в 4 раза хуже и составит 8′.

Двойная звезда с планетой (О.С. Угольников)

Класс: 10 Задача: 6

? Двойная звезда находится в 10 пк от Солнца. Блеск каждой из компонент составляет 5^m. Температуры звезд равны 4000 и 6000 кельвин. Вокруг этой пары обращается планета, похожая по своим свойствам на Юпитер. Луч зрения образует некоторый угол с плоскостью орбиты планеты. Прохождение планеты по диску какой из звезд будет с большей вероятностью замечено, если точность измерений блеска звезд составляет 0.005^m? 0.001^m? Потемнением дисков звезд к краям пренебречь.

! Расстояние до двойной звезды составляет 10 пк, и видимая звездная величина каждой из звезд совпадает с ее абсолютной звездной величиной. Для каждой из звезд абсолютная величина на 0.28^m больше, чем у Солнца. Следовательно, светимость каждой из звезд J составляет

$$J = J_0 \cdot 10^{-0.4 \cdot 0.28} = 0.77 \cdot J_0.$$

Здесь J_0 – светимость Солнца. Исходя из закона Стефана-Больцмана, можно определить радиус каждой из звезд по формуле:

$$\frac{R_i}{R_0} = \sqrt{\frac{J}{J_0}\left(\frac{T_0}{T_i}\right)^2}.$$

Здесь R_0 и T_0 – радиус и температура поверхности Солнца. Первая из звезд в полтора раза холоднее Солнца, и ее радиус превосходит солнечный в два раза. Радиус второй звезды составляет 0.9 от радиуса Солнца.

По условию задачи, планета, движущаяся вокруг двойной звезды, похожа по своим свойствам на Юпитер. Радиус Юпитера в 10 раз меньше радиуса Солнца. Таким образом, планета уступает по радиусу первой, холодной звезде в 20 раз, а второй, более горячей – в 9 раз. Прохождение этой планеты по диску первой звезды вызовет уменьшение ее блеска на (1/400) часть или на 0.003^m. Прохождение планеты по диску горячей звезды вызовет уменьшение блеска на (1/81) часть, то есть на 0.013^m.

Мы видим, что при точности фотометрии 0.005^m мы сможем регистрировать только прохождения планеты по диску горячей звезды с температурой 6000 K. Если же точность фотометрии улучшить до 0.001^m, то можно будет наблюдать прохождения планеты по диску обеих звезд. С большей вероятностью будет замечены те прохождения, которые происходят чаще. Так как плоскость орбиты планеты образует некоторый угол с лучом зрения, прохождения будут наступать не в каждый оборот планеты вокруг звезд. Выше будет вероятность прохождения планеты по диску более холодной звезды, так как эта звезда имеет больший размер. Поэтому при точности фотометрии в 0.001^m, вероятнее, сначала будет замечено прохождение планеты по диску звезды с температурой поверхности 4000 K.

Два восхода Луны (О.С. Угольников)

Класс: 11 Задача: 1

? На широте +62° в один день наблюдаются два восхода Луны в 00.00 и 23.56 по местному времени. Будут ли в ближайший месяц на Земле видны солнечные или лунные затмения?

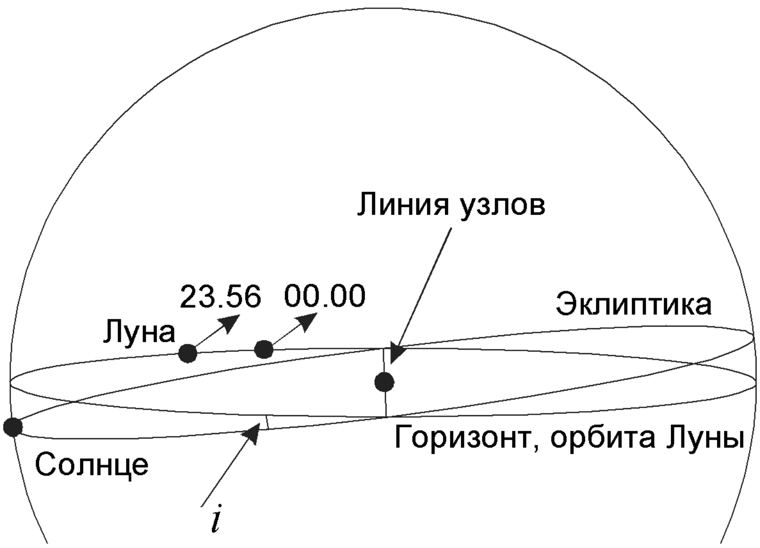
! Мы видим, что между двумя последовательными восходами Луны прошли ровно одни звездные сутки. За это время наблюдатель возвращается в то же положение относительно звезд, плоскости орбиты Земли вокруг Солнца и плоскости орбиты Луны вокруг Земли. Все большие круги, связанные с экваториальной системой координат (эклиптика, проекция орбиты Луны) через звездные сутки занимают то же положение на небе относительно горизонта. За этот же период Луна сместилась примерно на 13° по своей орбите, однако, вновь оказалась на горизонте. Мы видим, что два больших круга небесной сферы – горизонт и проекция плоскости орбиты Луны – в эти моменты имеют две общие точки, не совпадающие и не противостоящие друг другу. Следовательно, эти два больших круга в данные моменты совпадают, то есть плоскость орбиты Луны совпадает с плоскостью горизонта (с точностью до разности параллакса Луны и атмосферной рефракции, не превосходящей 0.5°).

Картина наблюдается в местную полночь на широте +62°. Солнце находится в нижней кульминации. Даже если дело происходит в день летнего солнцестояния, высота Солнца не превышает

$$h = -90° + 62° + 23.4° = -4.6°.$$

В то же время, лунная орбита наклонена к плоскости эклиптики на угол i, равный 5.1°. Солнце не может отстоять на небесной сфере от проекции лунной орбиты дальше, чем на этот же угол. Следовательно, глубина погружения Солнца под горизонт, она же – расстояние Солнца от проекции лунной орбиты, составляет от 4.6° до 5.1°, и дело происходит в местную полночь вблизи летнего солнцестояния.

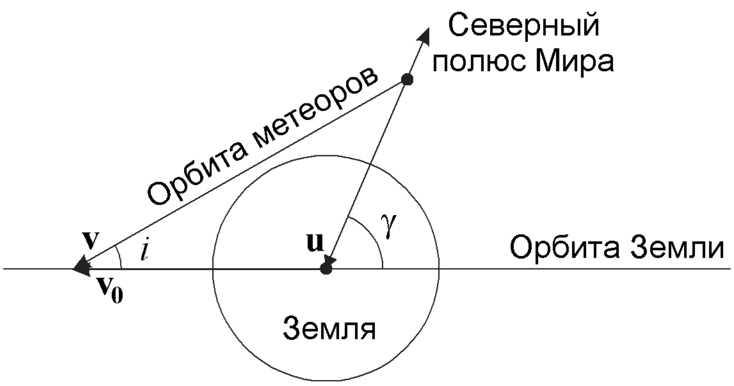
Такое расстояние между Солнцем и проекцией орбиты Луны указывает, что Солнце располагается примерно в 90° от каждого из узлов лунной орбиты. Поэтому солнечные и лунные затмения могут наступить только через четверть года, а в ближайший месяц их не произойдет.



Полярный метеорный поток (О.С. Угольников)

Класс: **11** Задача: **2**

? 21 марта в северном полушарии Земли наблюдается метеорный поток, радиант которого совпадает с Северным полюсом Мира. Наземные измерения скорости метеоров дали результат 15 км/с. Найти эксцентриситет орбиты метеорных тел и ее наклонение к плоскости орбиты Земли.



! 21 марта, в день весеннего равноденствия, Земля движется по своей орбите со скоростью $\mathbf{v}_0$ так, как показано на рисунке. Северный полюс нашей планеты оказывается в задней полусфере Земли по отношению к ее орбитальному движению.

Радиант метеорного потока указывает направление, противоположное геоцентрической скорости метеорных тел в момент их сближения с Землей. Это направление образует с орбитой Земли угол γ, равный 66.6°.

Метеороиды влетают в атмосферу Земли на высоте h (около 100 км) со скоростью u_A. До попадания в гравитационное поле нашей планеты направление геоцентрической скорости метеорных тел было таким же, а ее величину можно найти из закона сохранения энергии:

$$u^2 = u_A^2 - \frac{2Gm}{r+h},$$

где m и r – масса и радиус Земли. Скорость u получается равной 10.1 км/с. Орбитальная скорость Земли v_0 в день весеннего равноденствия близка к своему среднему значению – 29.8 км/с. Как видно из рисунка, величину гелиоцентрической скорости метеорных тел v можно определить из теоремы косинусов с учетом свойств смежных углов:

$$v^2 = v_0^2 + u^2 + 2v_0 u\cos\gamma\,.$$

Подставляя численные значения, получаем 35.1 км/с. Для дальнейшего анализа обратим внимание, что склонение Солнца в день весеннего равноденствия равно нулю, а плоскость рисунка содержит вектор орбитальной скорости Земли $\mathbf{v}_0$ и направление на Северный полюс Мира, оба перпендикулярные направлению от Земли к Солнцу. Тем самым, вся картинная плоскость, в том числе и вектор $\mathbf{v}$, перпендикулярна направлению на Солнце. Следовательно, метеороиды в момент встречи с Землей находятся в перигелии или афелии своей орбиты. Величина скорости v, превосходящая круговую скорость v_0, указывает, что метеорные тела находятся в перигелии. Скорость v связана с характеристиками орбиты метеорных тел (большой полуосью a и эксцентриситетом e) следующим соотношением:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{GM}{R} \cdot (1+e)} = v_0 \sqrt{1+e}.$$

Здесь M – масса Солнца, R – расстояние от Солнца до Земли. В итоге, эксцентриситет орбиты метеорных тел равен

$$e = \frac{v^2}{v_0^2} - 1 = \frac{u^2}{v_0^2} + \frac{2u}{v_0}\cos\gamma = 0.39.$$

Наклонение орбиты потока к плоскости орбиты Земли вычисляется из теоремы синусов:

$$i = \arcsin\frac{u\sin\gamma}{v} = 15.3^\circ.$$

Мы видим, что хотя радиант метеорного потока и совпал с Северным полюсом мира, наклонение орбиты метеорных тел не столь велико.

Эклиптика в точке востока (О.С. Угольников)

Класс: **11** Задача: **3**

? Сколько раз в течение 2008 года в пункте проведения олимпиады (город Новороссийск, долгота +38°) эклиптика будет проходить через точку востока?

! Точка востока находится на горизонте, ее склонение равно 0. Эклиптика может проходить через точку востока, если с ней совпадет одна из двух точек эклиптики, имеющих нулевое склонение – точки весеннего и осеннего равноденствий. Эти точки восходят в точке востока каждые звездные сутки. В итоге, эклиптика проходит через точку востока дважды за звездные сутки.

2008 год – високосный, его продолжительность составляет ровно 366 солнечных суток. Это равно 367.00246 звездным суткам или 367 звездным суткам и 3.5 звездным минутам. Поэтому в течение 2008 года эклиптика пройдет через точку востока как минимум 734 раза. Однако мы не можем исключить и 735-й момент, если он произойдет в течение этих "лишних" 3.5 звездных минут. Для того чтобы точно ответить на вопрос задачи, нужно проверить, не проходит ли эклиптика через точку востока вблизи декретной новогодней полуночи в пункте наблюдения.

Точка осеннего равноденствия восходит в точке востока в 6 часов по звездному времени. Это имеет место в местную полночь в день зимнего солнцестояния (21 декабря), и на 40 минут раньше, то есть в $23^ч20^м$ по местному времени 31 декабря. Пункт наблюдения имеет долготу $2^ч32^м$ и находится во 2-м часовом поясе. Следовательно, момент $23^ч20^м$ по местному времени соответствует $23^ч20^м-2^ч32^м+2^ч+1^ч=23^ч48^м$ по декретному зимнему времени, что на 12 минут отстоит от декретной полуночи. Вариации этой величины год от года не превосходят 4 минут.

Следовательно, в течение "лишних" 3.5 звездных минут в новогоднюю ночь еще одного пересечения эклиптики и точки востока не произойдет. В течение 2008 года эклиптика пройдет через точку востока 734 раза.

В центре шарового скопления (А.М. Татарников)

Класс: **11** Задача: **4**

? Мы находимся в центре плотного шарового звездного скопления, имеющего радиус 30 пк. Во сколько раз больше звезд на всем небе видно в телескоп с диаметром объектива 20 см, нежели невооруженным глазом? Считайте, что звезды скопления похожи на Солнце и равномерно распределены внутри скопления. Влиянием фона неба пренебречь.

! Предельная звездная величина, доступная визуальным наблюдениям в телескоп с диаметром объектива D, составляет

$$m = 6 + 5\lg\frac{D}{d},$$

где d – диаметр зрачка глаза в ночное время, равный 6 мм. Для 20-см телескопа предельная звездная величина составит 13.5^m. Звезда солнечного типа имеет абсолютную величину M, равную $+4.7^m$. С расстояния, равного радиусу шарового скопления R, она будет иметь блеск

$$m_C = M - 5 + 5\lg R = 7.1.$$

Мы видим, что с помощью 20-см телескопа мы сможем наблюдать все звезды шарового скопления. Определим, какую часть от этих звезд мы сможем увидеть невооруженным глазом. Для этого найдем расстояние r, с которого звезда солнечного типа будет иметь блеск m_0, равный 6^m:

$$\lg r = 1 + \frac{m_0 - M}{5}.$$

Расстояние получается равным 18.2 пк. Учитывая равномерное распределение звезд внутри скопления, определим, какая часть звезд будет видна невооруженным глазом:

$$\eta = \left(\frac{r}{R}\right)^3 = 0.22.$$

В итоге, с помощью телескопа мы увидим в $(1/\eta)$, то есть в 4.5 раза больше звезд скопления, нежели невооруженным глазом. Учет ярких звезд, не принадлежащих скоплению, не изменяет ответ, так как по условию задачи скопление плотное, количество входящих в него звезд (обычно это сотни тысяч) значительно превосходит число ярких фоновых звезд на небе.

"Горячий Юпитер" с водой (Н.И. Перов)

Класс: 11 Задача: 5

? Вблизи звезды HD209458 спектрального класса G0V обнаружена планета HD209458b с круговой орбитой и парами воды в атмосфере. Угловой радиус этой звезды при наблюдении с данной планеты составляет 6.61°. Найдите сферическое альбедо планеты, если ее эффективная температура 1130 К.

! Обозначим радиусы звезды и планеты через R и r, большую полуось орбиты планеты через a, температуры звезды и планеты через T_0 и T, сферическое альбедо планеты через A. Из условия теплового равновесия звезды и планеты имеем

$$\frac{4\pi\sigma R^2 T_0^4}{4\pi a^2}\cdot\pi\, r^2(1-A) = 4\pi\sigma r^2 T^4$$

и далее

$$\left(\frac{R}{2a}\right)^2 T_0^4\cdot(1-A) = T^4.$$

Обозначим угловой радиус звезды при наблюдении с планеты через ρ и обратим внимание, что

$$\frac{R}{a} = \sin\rho.$$

Для сферического альбедо планеты справедливо выражение:

$$A = 1-\frac{4}{\sin^2\rho}\left(\frac{T}{T_0}\right)^4.$$

Спектральный класс звезды близок к спектральному классу Солнца, и температуру звезды T_0 можно считать равной 6000 К. В итоге, сферическое альбедо планеты равно 0.6.

Звездные скопления в Галактике (А.М. Татарников)

Класс: 11 Задача: 6

? В настоящее время в нашей Галактике известно порядка 2500 рассеянных звездных скоплений с членами до 24 звездной величины и около 150 шаровых скоплений. Оцените полное число рассеянных и шаровых скоплений в нашей Галактике. Величина межзвездного поглощения в окрестностях Солнца составляет 0.002^m на парсек.

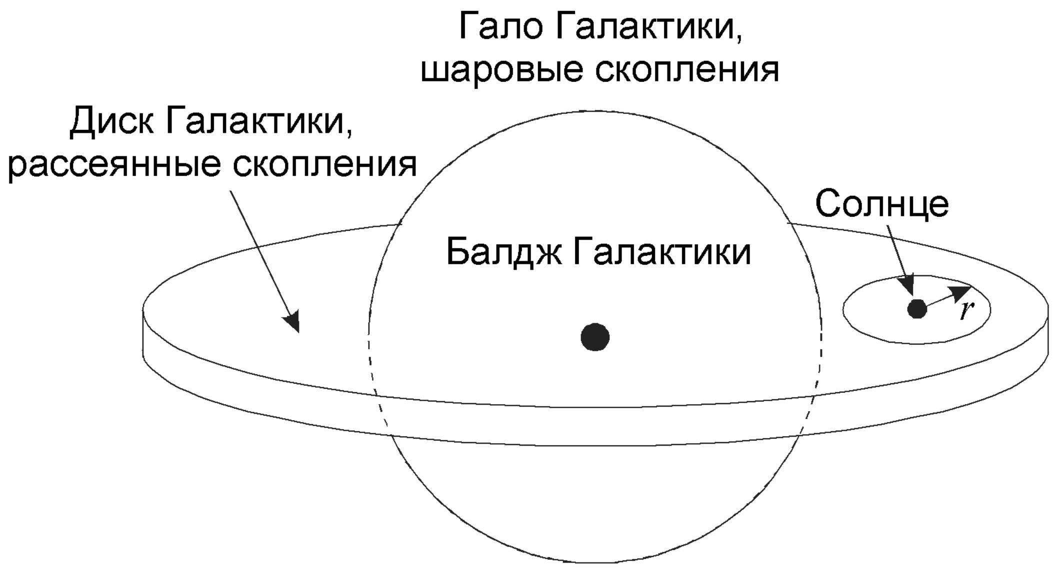
! Для решения задачи нужно вспомнить, как расположены рассеянные и шаровые звездные скопления в нашей Галактике. Она состоит из двух основных компонент – диска и балджа, окруженного обширным гало. Составляющие их звезды часто называют населением I и II типа. В тонком диске много сравнительно молодых звезд, он также богат межзвездным газом и пылью. В диске располагается наше Солнце. Там же, в диске, наблюдаются и рассеянные звездные скопления.

Шаровые звездные скопления относятся к сферической составляющей (балдж и гало Галактики). В ней наблюдаются старые звезды, газ и пыль там практически отсутствует. Большинство шаровых скоплений располагаются вдали от диска Галактики. Благодаря своей высокой светимости (шаровые скопления состоят из сотен тысяч и миллионов звезд) они видны с больших расстояний. С существующими в настоящее время телескопами нам доступны практически все шаровые скопления нашей Галактики. Исключение могут составить лишь единицы скоплений, находящиеся с противоположной от нас стороны балджа, за центром Галактики. Поэтому общее число шаровых скоплений в Галактике мало отличается от числа наблюдаемых скоплений – 150.

С рассеянными звездными скоплениями ситуация отличается. Так как и скопления, и Солнце расположены в диске Галактики, излучение скоплений распространяется сквозь межзвездную пыль, в значительной степени поглощаясь на пылевых частицах. В результате, даже используя мощные телескопы, мы можем видеть только самые близкие к нам рассеянные скопления, находящиеся внутри круга с центром в Солнце. Определим, с какого расстояния мы сможем их наблюдать.

В случае распространения света через межзвездную пыль зависимость блеска звезды (m) от расстояния до нее (r, выражается в парсеках) будет иметь вид

$$m = M - 5 + 5\lg r + E \cdot r,$$



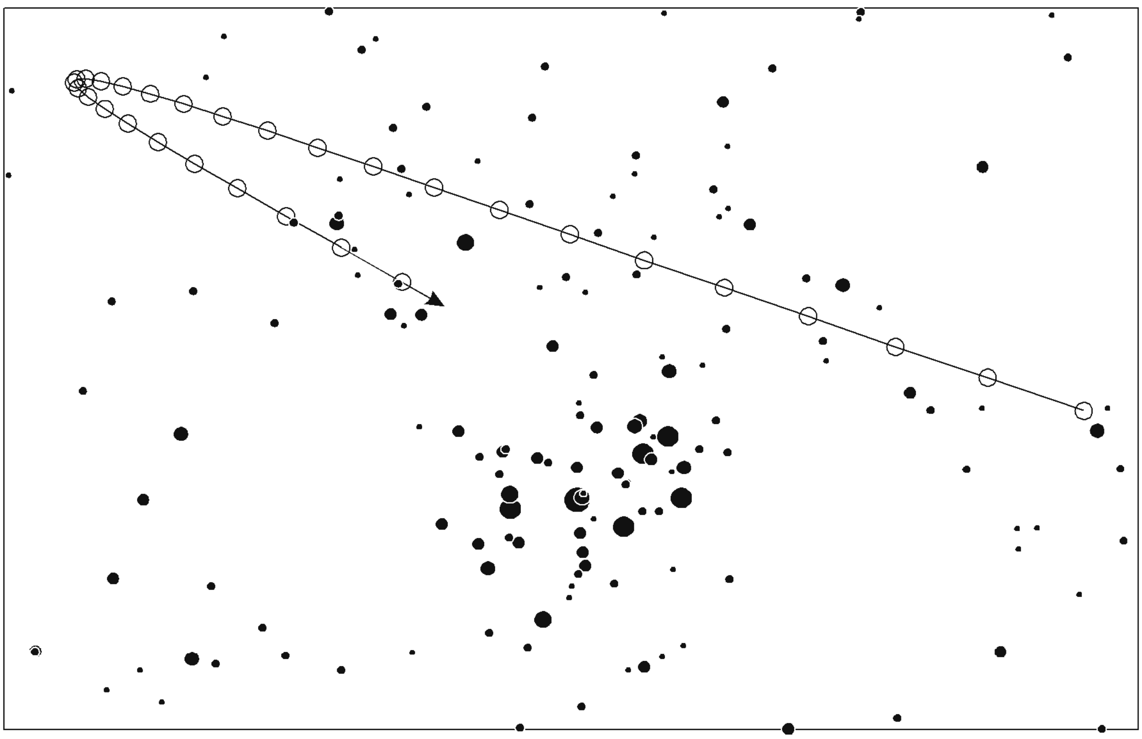
где M – абсолютная звездная величина звезды, E – показатель поглощения в диске Галактики, равный 0.002^m/пк. По условию задачи, мы видим скопления, отдельные звезды которых имеют блеск 24^m. Эти звезды – яркие молодые гиганты и сверхгиганты. Примем их абсолютную звездную величину равной -3^m. Тогда мы получаем уравнение для величины r:

$$5\lg r + 0.002 \cdot r = 32.$$

Это уравнение нельзя решить аналитически, но его корень достаточно легко найти подбором. Расстояние r составляет около 6 кпк. Примем радиус диска Галактики R равным 20 кпк. Тогда общая доля рассеянных скоплений, видимых с Земли, составит

$$\frac{n}{N} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = 0.1.$$

Количество рассеянных скоплений, видимое с Земли, n, составляет 2500. Следовательно, всего в нашу Галактику входит около 25 тысяч рассеянных звездных скоплений.



Венера и Плеяды (О.С. Угольников)

Класс: 9 Задача: 1

? На звездной карте (стр. 18) показан видимый путь Венеры среди звезд неподалеку от звездного скопления Плеяды (созвездие Тельца) в течение месяца. Определите, в какой сезон года (с точностью до месяца) могла наблюдаться такая картина. Будет ли это сближение Венеры и Плеяд видно в средней полосе России на темном небе, и если да, то в какое время суток? Возможно ли наблюдать с Земли прохождение Венеры по диску Солнца в данный год, до или после сближения с Плеядами?

! Мы видим, что в течение месяца Венера двигалась сначала в прямом направлении (с запада на восток), затем прошла точку стояния и начала двигаться попятно. При этом планета располагалась на небе вблизи звездного скопления Плеяды в северо-западной части созвездия Тельца. Это звездное скопление располагается вблизи эклиптики, проходя соединение с Солнцем в середине мая.

Точку восточного стояния планета Венера проходит чуть меньше, чем за месяц до нижнего соединения, располагаясь примерно в 30° к востоку от Солнца. Так как планета вступила в стояние чуть восточнее Плеяд, можно сделать вывод, что это имело место в апреле. В этом же году случится одно нижнее соединение, оно произойдет в мае, через месяц после восточного стояния планеты. Нижнее соединение застанет Венеру несколько западнее Плеяд, таким образом оно произойдет еще раньше их соединения с Солнцем. Прохождение Венеры по диску Солнца при этом не наступит, так как оно может произойти только в нижнем соединении в июне и декабре.

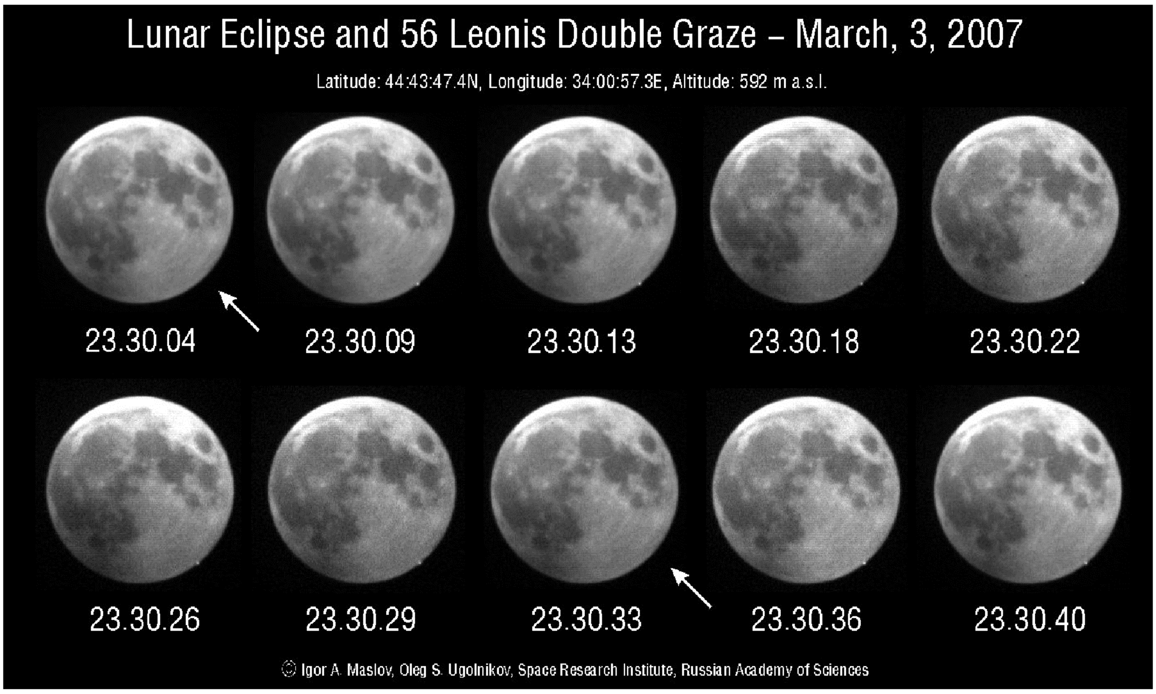
Звездное скопление Плеяды в апреле в северных широтах хорошо видно по вечерам над северо-западным горизонтом. Яркая Венера, имеющая большое положительное склонение, может наблюдаться по вечерам в течение нескольких часов.

Трек Венеры, показанный на рисунке, соответствует видимому пути планеты с 6 апреля до 5 мая 2084 года.

Лунная гора (О.С. Угольников)

Класс: 9 10 Задача: 2

? Вам представлены 10 фотографий Луны во время полного затмения 3-4 марта 2007 года, сделанные в поселке Научный (Крым, 44.7° с.ш., 34° в.д.) с интервалом через несколько секунд друг после друга (моменты по Всемирному времени указаны для каждой фотографии). Первая фотография сделана перед окончанием покрытия Луной звезды 56 Льва, которая вновь исчезла на восьмой фотографии (стрелки на рисунке). Определите минимальную высоту горы на Луне, за которую зашла звезда в момент получения восьмой фотографии.



! Луна движется по своей орбите со скоростью v_0, равной 1 км/с. Эта скорость направлена с запада на восток под углом ε (23.4°±5.1°) к плоскости небесного экватора. Последний факт следует из того, что затмение происходило в марте, и Луна располагагась на небесной сфере вблизи точки осеннего равноденствия. По координатам пункта наблюдения и времени съемки видно, что Луна в это время находилась недалеко от верхней кульминации. За счет осевого вращения Земли наблюдатель также движется с запада на восток со скоростью

$$u = \frac{2\pi R_0}{T} \cos\varphi,$$

где R_0 – радиус Земли, T – период ее осевого вращения, φ – широта места наблюдения. Величина скорости u равна 0.33 км/с. Скорость Луны относительно земного наблюдателя выражается с помощью теоремы косинусов

$$v^2 = v_0^2 + u^2 - 2v_0 u \cos\varepsilon$$

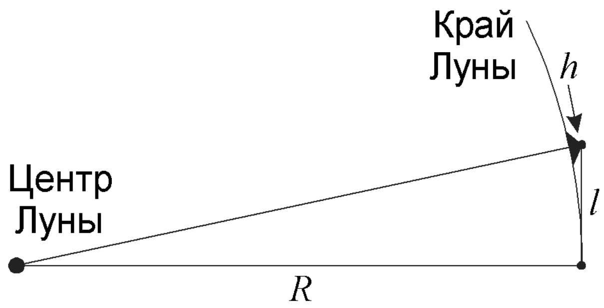
и составляет около 0.7 км/с. Учитывая оценочный характер задачи и не очень большую величину угла ε, примерно тот же ответ можно получить из более простых вычислений, считая скорости v_0 и u сонаправленными:

$$v \approx v_0 - u.$$

По фотографиям видно, что между окончанием "основного" покрытия звезды 56 Льва и ее исчезновением за лунной горой прошло около 30 секунд. За это время Луна сместилась относительно наблюдателя на расстояние l, равное примерно 20 км. Минимальная высота горы определяется в соответствии с рисунком по следующей формуле:

$$h = \sqrt{R^2 + l^2} - R \approx \frac{l^2}{2R},$$

что составляет примерно 100 метров. Как мы видим, явления "двойного покрытия звезды" могут создаваться даже невысокими горами на поверхности Луны.



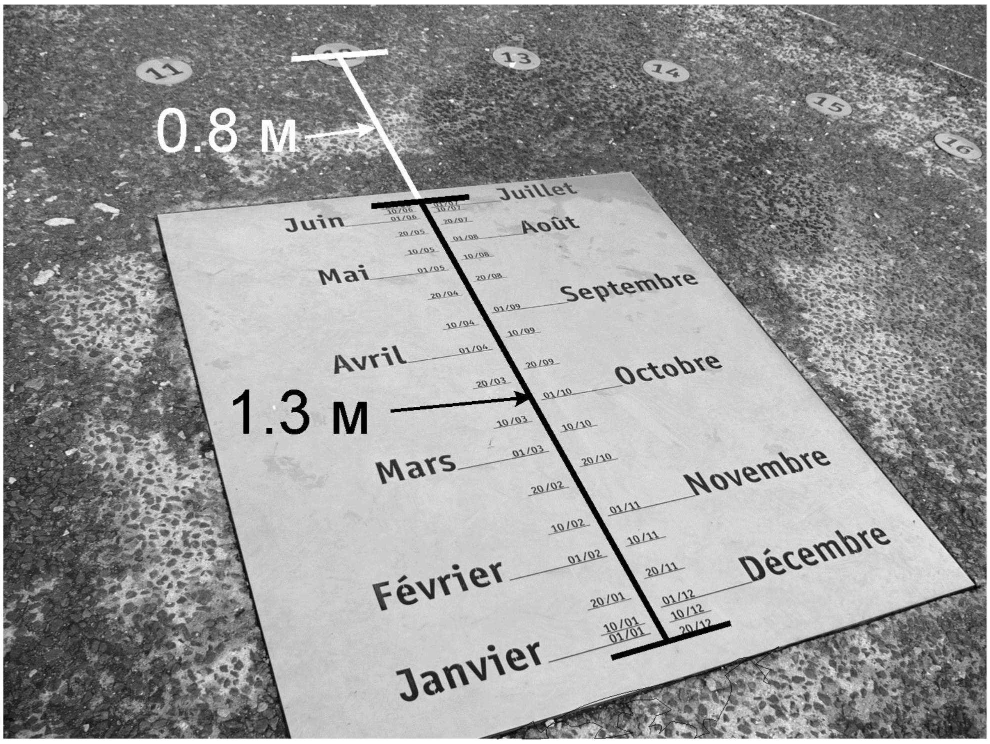
Солнечные часы (О.С. Угольников)

Класс: **9** Задача: **3**

? **На фотографии (стр. 22) представлены горизонтальные солнечные часы. Роль вертикального предмета, отбрасывающего тень, исполняет сам человек, желающий узнать время. Для этого он должен встать на ось часов в положение, соответствующее дате наблюдения. Определите широту места, где установлены эти солнечные часы.**

! Изображенные на рисунке солнечные часы представляют собой наилучшую модель горизонтальных солнечных часов. Такие часы могут работать на разных широтах во все времена года, они учитывают разность скоростей изменения азимута Солнца в различные сезоны.

На рисунке изображено суточное движение Солнца вблизи местного полудня в дни летнего и зимнего солнцестояния в северных широтах. В оба дня солнцестояний модуль склонения Солнца и угловая скорость его суточного перемещения по небу одинаковая. За равные промежутки времени после местного полудня Солнце сместится в западном направлении на одинаковый угол (это перемещение показано на рисунке стрелками). Однако из-за разности высот Солнца над горизонтом h его азимут будет изменяться по-разному, летом он будет увеличиваться быстрее. Для моментов времени t вскоре после местного полудня t_0 астрономический азимут Солнца будет равен

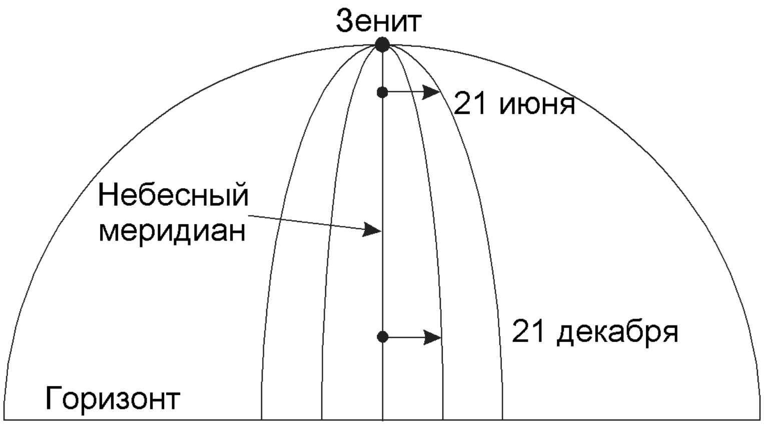


$$A(t) = \frac{\omega\,(t - t_0)}{\cos h}.$$

Здесь ω – угловая скорость перемещения Солнца по небу. Так как скорость изменения азимута 21 июня в северных умеренных широтах достигает максимума, то ось солнечных часов в этот день должна располагаться ближе к циферблату. Именно такую картину мы наблюдаем на фотографии, следовательно, она сделана в северном полушарии. Скорость поворота тени в солнечных часах обратно пропорциональна расстоянию от основания (стоящего человека) до циферблата. Обозначив данные в условии задачи расстояния через L_1 (1.3 м) и L_2 (0.8 м), а высоты Солнца в момент летнего и зимнего солнцестояния через h_1 и h_2, запишем соотношение:

$$C \equiv \frac{L_1 + L_2}{L_2} = \frac{\cos h_2}{\cos h_1} = \frac{\cos(90^\circ - \varphi - \varepsilon)}{\cos(90^\circ - \varphi + \varepsilon)} = \frac{\sin(\varphi + \varepsilon)}{\sin(\varphi - \varepsilon)}.$$

Здесь φ – широта места, ε – угол наклона экватора к эклиптике. Воспользовавшись формулами для синуса суммы и разности углов, получим:



$$C = \frac{\sin\varphi\cos\varepsilon + \cos\varphi\sin\varepsilon}{\sin\varphi\cos\varepsilon - \cos\varphi\sin\varepsilon}.$$

Из этого соотношения мы получаем уравнение

$$\sin\varphi\cos\varepsilon\,(1-C) + \cos\varphi\sin\varepsilon\,(1+C) = 0$$

и далее

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\,\varepsilon\,\frac{C+1}{C-1} = \mathrm{tg}\,\varepsilon\,\frac{L_1 + 2L_2}{L_1}.$$

Подставляя численные данные, получаем, что широта места составляет +44°. Солнечные часы, изображенные на фотографии, установлены на выставочном комплексе "Город Космоса" (Cite de l'espace) в городе Тулуза, Франция.

Падение метеорита на Луну (Е.Н. Фадеев)

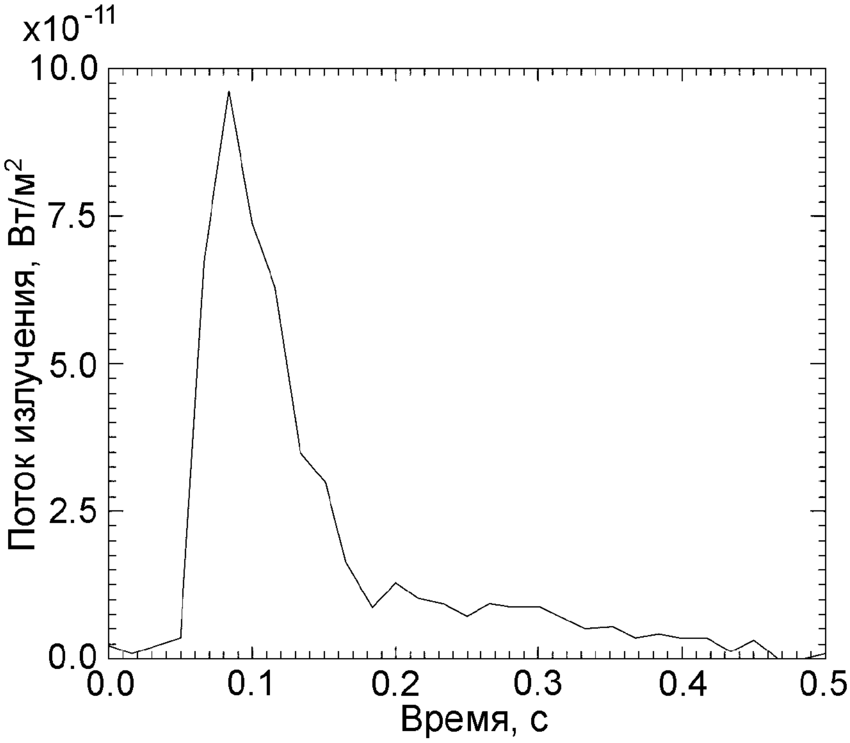
Класс: 10 11 Задача: 1

? **При падении метеорита на поверхность Луны была зафиксирована вспышка. Вам предоставлен график зависимости потока излучения, зафиксированного прибором на поверхности Земли, от времени (стр. 24). Используя этот график, оцените характерный размер метеорита (диапазон, в который попадает этот размер). При расчетах принять, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите, плотность метеорита 2800 кг/м³, при ударе о поверхность Луны в пространство изотропно высвечивается 0.2% его кинетической энергии.**

! Форма метеорита неизвестна, но при оценочных расчетах вполне можно принять, что метеорит шарообразный. Тогда при известной плотности размер можно определить, исходя из массы. Массу метеорита можно найти из его кинетической энергии, если при этом известна его скорость. Однако скорость нам неизвестна, мы можем определить лишь диапазон ее известных значений. Минимальная скорость метеорита близка ко второй космической скорости для поверхности Луны. Эта скорость вычисляется из соотношения

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2Gm}{R}}$$

и составляет 2.4 км/с. Максимальная скорость будет достигнута, если метеорное тело движется в перигелии по параболической орбите навстречу Земле и Луне в полнолунии. Скорость метеорита относительно Луны складывается из его гелиоцентрической скорости, орбитальной скорости Земли и орбитальной скорости Луны. Для нее справедливо выражение



$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2GM_0}{L}} + \sqrt{\frac{GM_0}{L}} + \sqrt{\frac{GM}{l}}.$$

Здесь M_0 и M – массы Солнца и Земли, L и l – радиусы орбит Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли. Скорость получается равной 73 км/с. Гравитационное ускорение от Луны перед падением на этой скорости практически не скажется.

Чтобы определить полную энергию падения метеорита, нужно вычислить, какую ее часть принял прибор на Земле. Для этого нужно найти площадь под кривой потока F. Это можно сделать разными способами, ее значение получается равной $9.6 \cdot 10^{-12}$ Дж/м^2. Тогда зарегистрированная величина F связана с энергией E, высвеченной в виде излучения, как

$$F = \frac{E}{4\pi l^2}.$$

Эта энергия получается равной $2 \cdot 10^7$ Дж. Но это лишь 0.2% от полной энергии падения метеорита E_0, которая составляет 10^{10} Дж. Масса метеорита равна

$$\mu = \frac{2E_0}{v^2},$$

а его радиус

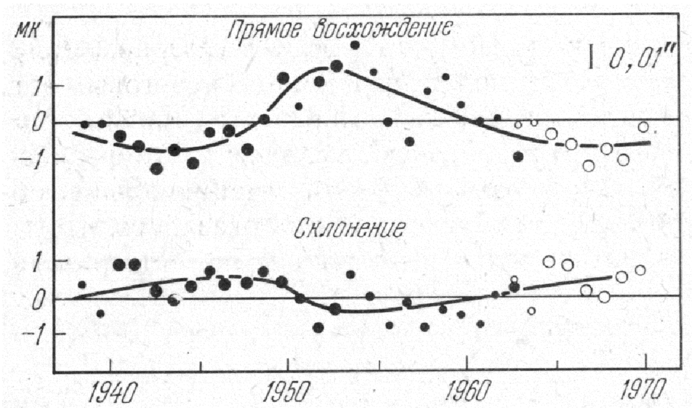
$$a = \sqrt[3]{\frac{3\mu}{4\pi\rho}} = \sqrt[3]{\frac{3E_0}{2\pi\rho v^2}}.$$

Минимальный радиус получается при подстановке максимальной скорости и наоборот. В итоге, радиус метеорита лежит в диапазоне от 7 до 65 см.

Звезда Барнарда (А.М. Татарников)

Класс: 10 Задача: 3

? На рисунке приведены графики отклонения в собственном движении звезды Барнарда (красный карлик главной последовательности) из книги И.С. Шкловского "Вселенная. Жизнь. Разум". Масштаб графика указан в правом верхнем углу. Оцените по графику массу невидимого спутника звезды, если известно, что расстояние до звезды равно 2 пк, а ее светимость в 1600 раз меньше солнечной.



! По графикам видно, что орбитальный период в системе звезды Барнарда и ее спутника составляет 24 года. Определим наибольшие отклонения звезды Барнарда от прямолинейной траектории в ее собственном движении. В 1945 году отклонение составило −0.008″ по прямому восхождению и +0.005″ по склонению. В 1953 году отклонение по прямому восхождению равно +0.015″, а по склонению −0.005″. Таким образом, амплитуда отклонения по прямому восхождению составляет 0.023″, а по склонению 0.010″. По теореме Пифагора получаем общую амплитуду отклонений: 0.025″. Будем считать, что под таким углом мы видим большую ось орбиты звезды Барнарда. Зная расстояние до нее (2 пк), мы получаем, что большая полуось орбиты звезды Барнарда a_0 составляет 0.025 а.е.

Звезда Барнарда находится на главной последовательности. Для звезд с массой Солнца и меньше, находящихся на главной последовательности, справедливо соотношение масса-светимость: $L \sim M^4$. Из этого можно сделать вывод, что масса звезды Барнарда M составляет примерно 0.15 от массы Солнца. Будем считать, что масса планеты много меньше массы звезды (впоследствии мы убедимся, что это действительно так). Тогда большая полуось орбиты планеты a, выраженная в астрономических единицах, может быть найдена из обобщенного III закона Кеплера:

$$a = (T^2 M)^{1/3} = 4.4.$$

Здесь T — период обращения, выраженный в годах. Звезда Барнарда и планета обращаются вокруг общего центра масс, и большие полуоси их орбит обратно пропорциональны массам. Таким образом, мы можем оценить массу планеты:

$$m = M\frac{a_0}{a}.$$

Масса получается равной $9{\cdot}10^{-4}$ массы Солнца или одной массе Юпитера.

Патруль "космического мусора" (А.М. Татарников)

Класс: 11 Задача: 2

? **На искусственном спутнике Земли работает специальный прибор для определения расстояния до частиц "космического мусора". Прибор состоит из двух объективов с фокусным расстоянием 10 см и диаметром 2 см, разнесенных на расстояние 1 м (называемое базой) и направленных в одну и ту же область неба. Оба приемника оснащены ПЗС-матрицами, работающими в видимом диапазоне спектра и способными регистрировать изображение при накоплении более 10 фотонов на пиксел. Оцените максимальное расстояние до частиц диаметром 1 см, которое может измерить этот прибор, в зависимости от тангенциальной скорости частиц относительно спутника *v*. Размер чувствительного элемента матрицы (пикселя) составляет 5 мкм, сферическое альбедо частицы равно 0.1. Считать, что поток фотонов от звезды 0^m составляет 10^{10}/(м^2·сек).**

! Для начала определим линейный размер дифракционного изображения точечного объекта, которое будет строить каждый из объективов в фокальной плоскости:

$$b_D = \frac{1.22\cdot\lambda}{D}\cdot F.$$

Здесь D и F — диаметр и фокусное расстояние объектива, λ — длина волны излучения, составляющая для середины видимого диапазона 5500 А. Мы получаем чуть больше 3 микрон, что меньше размера пикселя ПЗС-матрицы b. Следовательно, дифракционная картина не будет накладывать ограничений на разрешающую и проницающую способность прибора.

Вычислим далее, на каком расстоянии частица с диаметром a будет зарегистрирована прибором как точечный объект:

$$l_a = \frac{F\cdot a}{b}.$$

Для сантиметровых частиц это расстояние получается равным всего 200 метрам. Более далекие частицы будут регистрироваться как точечные объекты. Чтобы измерить расстояние до частицы, необходимо заметить ее параллактическое смещение на фоне далеких светил при наблюдении с двух камер. Разрешающая способность одной камеры с ПЗС-матрицей равна

$$\alpha = \frac{b}{F} = 5 \cdot 10^{-5}$$

или 10″. Параллактическое смещение будет заметно, если база B будет видна с частицы под углом, не меньшим α. Рассмотрим наиболее благоприятный случай, когда база перпендикулярна направлению на частицу. Тогда максимальное расстояние, которое можно измерить, составит

$$l_0 = \frac{B}{\alpha} = \frac{B \cdot F}{b},$$

что равно 20 км. Однако мы получили только одно ограничение на расстояние. Нам необходимо проверить, с какого расстояния сантиметровая частица будет заметна на ПЗС-изображениях. Спутник находится вблизи Земли. Звездная величина Солнца с расстояния Земли равна -26.8^m, и поток фотонов от Солнца равен

$$J_0 = 10^{0.4\cdot 26.8}\cdot 10^{10}/(\text{м}^2\cdot\text{сек}) = 5\cdot 10^{20}/(\text{м}^2\cdot\text{сек}).$$

Пусть альбедо частицы равно A, а расстояние до нее – l. Тогда поток отраженных фотонов, попадающий на объективы камер, равен

$$J = J_0 \frac{\pi a^2}{4} A \frac{1}{4\pi l^2} = \frac{J_0 A a^2}{16 l^2}.$$

Определим промежуток времени, в течение которого отраженный свет будет падать на один элемент матрицы. Угловая скорость частицы при наблюдении со спутника равна

$$\omega = \frac{v}{l},$$

а промежуток времени:

$$t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{b l}{F v}.$$

Количество фотонов, попадающих в камеру с диаметром объектива D за это время, составит

$$N = J \frac{\pi D^2}{4} t = \frac{J_0 \cdot \pi A a^2 D^2 b}{64 l F v}.$$

Чтобы частица была зафиксирована, число N должно быть не меньше 10. Расстояние до частицы должно быть

$$l \le \frac{J_0 \cdot \pi A a^2 D^2 b}{64 N F v} = 500 \text{ м} \cdot \frac{1 \text{км/с}}{v}.$$

Приравняв эту величину к l_0, получаем значение скорости v_0, при которых оба ограничения на расстояние совпадают. Эта скорость равна 25 м/с. Окончательный ответ в задаче следующий: максимальное измеряемое расстояние до частицы "космического мусора" составляет 20 км при ее тангенциальной скорости менее 25 м/с и 500м·(1/v(км/с)) при тангенциальной скорости более 25 м/с.

Озоновый слой Земли (О.С. Угольников)

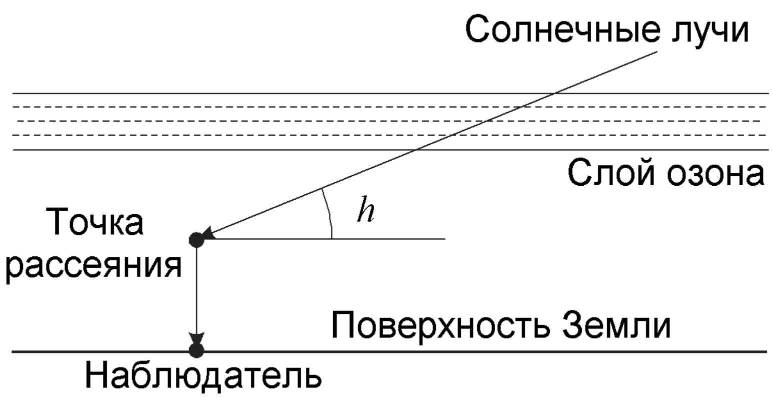
Класс: 11 Задача: 3

? В таблице приведены результаты измерения яркости фона ясного дневного неба в относительных единицах (своих для каждой из длин волн) в зените при разных положениях Солнца над горизонтом для трех длин волн, находящихся на длинноволновом краю полос Хеггинса поглощения атмосферного озона (O_3). Считая, что фон дневного неба образуется рассеянием солнечного света в нижних слоях атмосферы (под слоем озона), а свойства рассеяния плавно зависят от длины волны, определите общее содержание озона (ОСО) в столбе атмосферы над наблюдателем. Выразите его как толщину слоя чистого озона при нормальном атмосферном давлении ($1.014 \cdot 10^5$ Па) и температуре 0°C. Величины сечения (эффективной площади) поглощения одной молекулы озона в каждой из трех длин волн также приведены в таблице.

высота Солнца, градусы	Показания фотометра		
	3100 Å	3500 Å	3900 Å
31.5	487.6	2005.7	1158.1
33.3	567.3	2166.7	1281.6
33.6	576.3	2195.4	1304.2
34.6	629.5	2296.2	1379.6
36.4	712.0	2440.1	1479.9
38.2	801.4	2600.3	1591.4
39.2	862.4	2716.5	1673.5
41.0	953.8	2840.8	1751.2
43.1	1079.9	3048.9	1880.6
44.9	1186.7	3209.4	1969.2
46.1	1260.6	3324.4	2038.0
47.8	1374.2	3480.0	2119.6
49.5	1496.6	3654.4	2226.4
Сечение поглощения молекулы O_3, м^2	$1.0 \cdot 10^{-23}$	$3.9 \cdot 10^{-26}$	$1.0 \cdot 10^{-26}$

! Значения высоты Солнца над горизонтом, при которых производились измерения фона неба, достаточно большие. При таких высотах мы можем использовать простую модель плоской атмосферы. Рассмотрим, как распространяется солнечное излучение, формирующее фон дневного неба, с использованием этой модели.

Пусть Солнце располагается на высоте h над горизонтом. Его лучи про-ходят сквозь горизонтальный слой с повышенной концентрацией озона, далее рассеиваются в более низких слоях атмосферы и попадают на измерительный прибор, направленный в зенит. Показания этого прибора составят



$$J(h,\lambda)=S(\lambda)D(\lambda)e^{-\frac{\tau_O(\lambda)}{\sin h}}e^{-\frac{\tau_A(\lambda)}{\sin h}}F(\lambda,h)e^{-\tau_2(\lambda)}.$$

Здесь $S(\lambda)$ − солнечный спектр, $D(\lambda)$ − спектральная зависимость чувствительности прибора, $\tau_0(\lambda)$ и $\tau_A(\lambda)$ − вертикальная оптическая толщина атмосферного озона и воздуха по пути до точки рассеяния, $\tau_2(\lambda)$ − оптическая толщина по пути от точки рассеяния до наблюдателя. $F(\lambda,h)$ − некоторая функция, связанная с медленным изменением высоты и свойств рассеяния с увеличением высоты Солнца над горизонтом. Запишем эту формулу в логарифмическом виде, объединив все слагаемые, не зависящие от высоты Солнца над горизонтом:

$$\ln J(h,\lambda)=const_h-\frac{\tau_O(\lambda)}{\sin h}+\ln F(\lambda,h)-\frac{\tau_A(\lambda)}{\sin h}.$$

Из таблицы видно, что в двух длинах волн (3500 и 3900 ангстрем) сечение поглощения молекулы озона крайне мало, оно почти в тысячу раз меньше, чем на длине волны 3100 ангстрем. В то же время на длине волны 3100 А поглощение еще не слишком велико, так как мы регистрируем сигнал от фона неба. Поэтому мы можем пренебречь поглощением на молекулах озона на длинах волн 3500 и 3900 А. Запишем выражение для разности логарифмов яркости неба в зените в этих длинах волн:

$$\Delta\ln J_{23}(h)=\ln J(h,\lambda_2)-\ln J(h,\lambda_3)=const_h+\ln\frac{F(\lambda_2,h)}{F(\lambda_3,h)}-\frac{\tau_A(\lambda_2)-\tau_A(\lambda_3)}{\sin h}.$$

По условию задачи, величины F и τ_A сравнительно медленно меняются с длиной волны. Как следствие, логарифм отношения яркости на длинах волн 3500 и 3900 ангстрем мало меняется с h, в чем можно убедиться из данных измерений.

Так как разница длин волн для 1 и 2 спектрального канала совпадает с разницей для 2 и 3 спектрального каналов, то с учетом сказанного выше мы можем считать, что в случае отсутствия озона будет иметь место равенство:

$$\Delta\ln J_{12}(h)\big|_0=const_h+\Delta\ln J_{23}(h).$$

Однако, на длине волны λ_1 (3100 ангстрем) наблюдается сильное поглощение атмосферным озоном. В результате, для логарифма отношения яркостей неба на длинах волн 3100 и 3500 ангстрем можно записать соотношение:

$$\Delta \ln J_{12}(h) = \Delta \ln J_{12}(h)\Big|_0 - \frac{\tau_O(\lambda_1)}{\sin h} = const_h + \Delta \ln J_{23}(h) - \frac{\tau_O(\lambda_1)}{\sin h}.$$

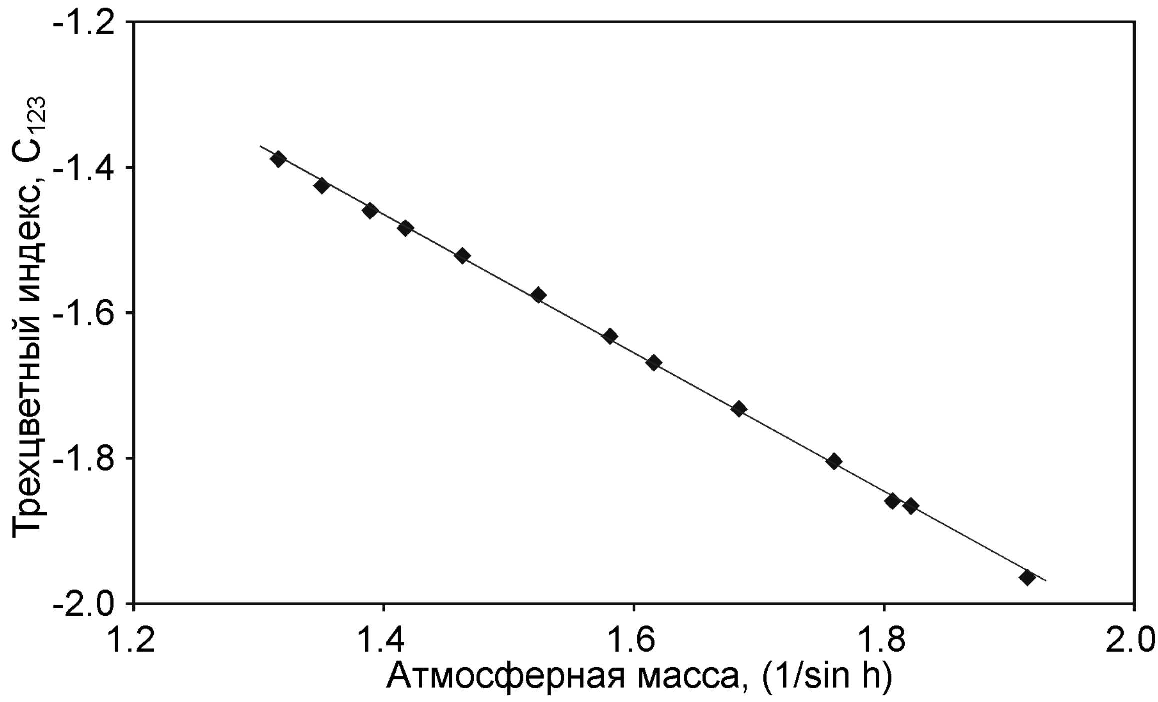
Основываясь на этой формуле, мы можем ввести трехцветный индекс фона неба, для которого будет справедливо равенство:

$$C_{123} = \Delta \ln J_{12}(h) - \Delta \ln J_{23}(h) = \ln \frac{J(\lambda_1, h) \cdot J(\lambda_3, h)}{J^2(\lambda_2, h)} = const_h - \tau_O(\lambda_1) \frac{1}{\sin h}.$$

Величину C_{123} можно получить непосредственно для каждого из измерений. Также для каждого измерения нам известна величина ($1/\sin h$), называемая также атмосферной массой. Дальнейшая процедура определения вертикальной оптической толщины для атмосферного озона аналогична методу определения суммарной вертикальной оптической толщины атмосферы по методу Бугера. Отложим данные измерений на диаграмму "трехцветный индекс – атмосферная масса" (см. рисунок).

Мы видим, что экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую с отрицательным наклоном, как и предсказывает последняя формула. Из анализа данных (как численного, так и графического) можно получить значение вертикальной оптической толщины озонового слоя для длины волны 3100 ангстрем:

$$\tau_O(\lambda_1) = 0.95.$$



Практический тур

Предположим, что весь атмосферный озон сосредоточен в тонком приземном слое, состоящем только из этого газа. Очевидно, что его вертикальная оптическая толщина при этом не изменится. Обозначим приземное атмосферное давление через p, температуру – через T, толщину слоя – через l. Концентрация молекул озона в слое составит

$$n = \frac{p}{k\,T},$$

а вертикальная оптическая толщина

$$\tau_{\mathrm{O}}(\lambda_1) = \sigma_{\mathrm{O}}(\lambda_1)\,n\,l = \frac{\sigma_{\mathrm{O}}(\lambda_1)\,p\,l}{kT}.$$

Из последних двух формул получаем выражение для эффективной толщины слоя озона:

$$l = \frac{\tau_{\mathrm{O}}(\lambda_1)\,kT}{\sigma_{\mathrm{O}}(\lambda_1)\,p}.$$

Подставляя численные значения, получаем 3.5 мм. Это соответствует нормальному содержанию озона в атмосфере для времени и пункта наблюдения (начало лета, центральная полоса России).

Автор задания выражает благодарность А.А. Соломатниковой (Главная Геофизическая обсерватория им. А.И. Воейкова, Санкт-Петербург) за предоставление экспериментальных данных.