Пущино, 8–14 апреля 2004 г.

Теоретический тур, решения задач

9 класс.

1. Созвездия в Подмосковье. ***(Н.Е. Шатовская, обработка и дополнения – О.С. Угольников, 2004.)***

На нашем небе нельзя одновременно увидеть созвездия Ворона и Рыб. Их прямые восхождения отличаются на 12 часов, при этом Рыбы находятся вблизи небесного экватора, а Ворон – южнее его. Поэтому он восходит после захода Рыб, а заходит – до их восхода, независимо от сезона года. Но вот пять из шести перечисленных созвездий, все, кроме Рыб, можно увидеть на небе весенними ночами.

2. Полнолуния. ***(А.В. Засов, 2004.)***

Ответ: одно или ни одного. Полнолуние может наблюдаться, когда Луна оказывается вблизи направления на Солнце, находясь за ним. Её положение относительно Земли при этом не играет роли. Не исключено также, что в это время Луна окажется закрытой солнечным диском, и в этом случае полнолуния вообще не будет.

3. Кинетическая энергия. ***(А.В. Засов, 2004.)***

Пусть M и m – массы Солнца и Земли, R и r – радиусы их орбит вокруг общего центра масс, а V и v –скорости их движения по орбитам (соответственно). Центр масс находится на прямой, соединяющей центры Земли и Солнца, поэтому периоды обращения Земли и Солнца равны: $T = 2\pi R/V = 2\pi r/v$. Отношение расстояний этих тел от центра масс $R/r = m/M$. Отсюда следует, что $V/v = m/M$. Тогда для отношения кинетических энергий орбитального движения Земли и Солнца можно записать: $E_з/E_с = mv^2/MV^2 = M/m$.

Ответ: у Земли, в 300 тысяч раз.

4. Новоюлианский календарь. ***(М.Г. Гаврилов, 2001.)***

Разница Новоюлианского и Юлианского календарей возрастает на 1 день каждое 1 марта $N\times128$-го года. Возрастает – означает увеличение опережения даты Новоюлианским календарём по сравнению с Юлианским. Таким образом, начиная с 1 марта 1920 года (и по 28 февраля 2048 года) эта разница составляет 15 дней. Григорианский календарь опережает Юлианский сейчас (в XX и XXI веках) на 13 дней. Значит, Новоюлианский календарь опережает Григорианский на 2 дня, и если сегодня по Григорианскому календарю 10 апреля, то по Новоюлианскому – 12 апреля 2004 года.

Средняя продолжительность года в Григорианском календаре равна $365 + 97/400 = 365{,}2425$ дня. Это на 0,000310 дня больше длины тропического года. Примерно за 3200 лет набежит один лишний день. Значит, примерно раз в 3200 лет нужно отменять один високосный год. Средняя продолжительность года в Новоюлианском календаре равна $365 + 31/128 = 365{,}2421875$ дня. Это на 0,0000025 дня меньше длины тропического года. Примерно за 400000 лет мы не досчитаемся одного дня. То есть, примерно раз в 400000 лет нужно добавлять один високосный год.

Таким образом, Новоюлианский календарь в $400000 / 3200 \approx 125$ раз точнее Григорианского.

Примечание: в действительности, поправку в Новоюлианский календарь придётся вводить существенно раньше, поскольку вращение Земли замедляется.

5. Пионер-10. ***(В.Г. Сурдин, 2004, обработка и дополнения – М.Г. Гаврилов, 2004)***

При первом прочтении указанного предложения настораживают три обстоятельства:

1. Пересечение аппаратом орбит планет.
2. Тот факт, что «Пионер-10» сначала пересёк орбиту девятой планеты, а только затем – восьмой.
3. Тот факт, что «Пионер-10» прошёл 5,6 млрд. км, в то время как расстояние от Солнца до Нептуна всего 4,5 млрд. км.

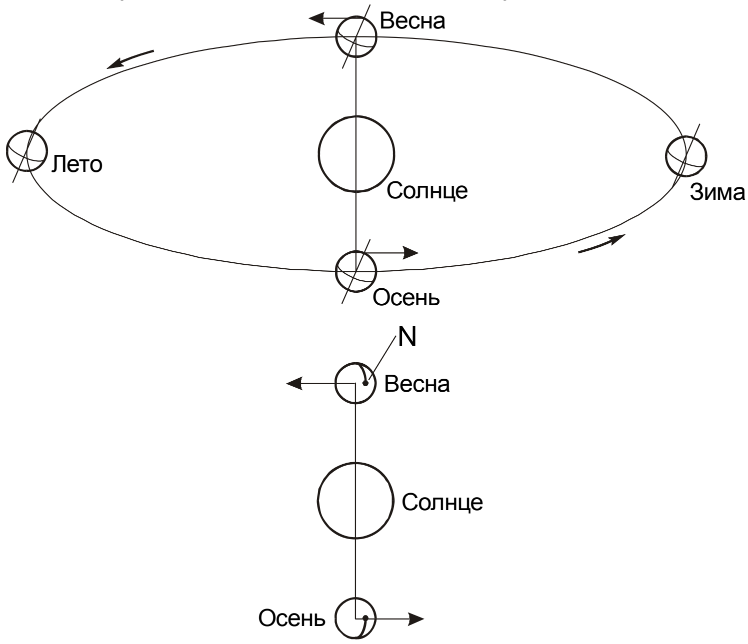
Первое действительно является неточностью. Орбита – это, по определению, траектория центра массы тела. Поэтому пересечь её аппарат мог только в том случае, если какой-нибудь частью (размеры – порядка метра) пересёк эту линию. Очевидно, что такое событие исчезающее маловероятно. В обыденной речи понятие «пересечь орбиту» носит условный характер: имеется в виду, имеется в виду, что пересечение траекторий состоялось бы, если бы они лежали в одной плоскости, например в плоскости эклиптики.

Что касается второго обстоятельства, то в данном случае журналисты не ошиблись: часть орбиты Плутона вследствие её большого эксцентриситета лежит внутри орбиты Нептуна, поэтому, двигаясь в области перигелия Нептуна, «Пионер-10» действительно сначала «пересёк» орбиту девятой планеты, а только затем – восьмой. Любопытно, что как раз в те годы и сам Плутон был в этой же области: с 1979 по 1998 г. он был к Солнцу ближе, чем Нептун. Однако о встрече «Пионера-10» с планетой не могло быть и речи: орбита Плутона слишком сильно наклонена к плоскости эклиптики.

Третий подозрительный момент может быть правдой. Ведь аппарат летел не по прямой, а по участкам эллипсов, то есть длина его траектории должна быть больше 4,5 млрд. км.

6. Спорадические метеоры. ***(О.С. Угольников, 2004.)***

На верхнем рисунке показана орбита Земли вокруг Солнца и положение нашей планеты и ее оси вращения в моменты равноденствий и солнцестояний. На рисунке видно, что в день весеннего равноденствия северный полюс Земли и его окрестности вне зависимости от времени суток оказываются в задней полусфере Земли относительно направления её движения вокруг Солнца. Следовательно, большинство спорадических метеоров, падающих на эту часть Земли, будут «догонять» её в своём движении, следовательно, их средняя скорость относительно движущейся Земли, будет несколько меньше их истинной скорости в пространстве. Напротив, в день осеннего равноденствия северная часть Земли будет лететь навстречу метеорам, и их скорость будет выше.



Максимум средней скорости полночных спорадических метеоров будет наблюдаться 23 сентября не только на полюсе, но и на всем северном полушарии Земли. Это видно на нижнем рисунке, где показано положение Земли в дни равноденствий со стороны северного полюса эклиптики. На этом рисунке также показано положение северного полюса и северной половины полночного меридиана. В день весеннего равноденствия весь этот полу-меридиан оказывается в задней, в день осеннего равноденствия – в передней полусфере Земли. Итак, средняя скорость спорадических метеоров в полночь достигнет максимума 23 сентября.

Теоретический тур, решения задач

10 класс.

1. Шаровое скопление. ***(О.С. Угольников, 2004.)***

Возраст шарового скопления очень велик, он сопоставим с возрастом нашей Галактики. За это время шаровое скопление не распалось, значит, составляющие его звёзды гравитационно связаны. Характерная скорость звезды, находящейся вблизи края скопления, должна быть порядка первой космической скорости. Среднюю массу звёзд скопления примем равной массе Солнца, то есть масса скопления – 10^6 $M_{\odot}$ или $2 \cdot 10^{36}$ кг, радиус равен 30 пк или $9{,}3 \cdot 10^{17}$ м. Первая космическая скорость равна

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx 1{,}2 \cdot 10^4 \, м/с$$

или 12 км/с.

2. Новолуния. ***(А.В. Засов, 2004.)***

Ответ: одно. Новолуние будет наблюдаться, когда Луна окажется между наблюдателем и Солнцем. Ее положение относительно Земли при этом не играет роли.

3. Кинетическая энергия. ***(А.В. Засов, 2004.)***

Пусть M и m – массы Солнца и Земли, R и r – радиусы их орбит вокруг общего центра масс, а V и v –скорости их движения по орбитам (соответственно). Центр масс находится на прямой, соединяющей центры Земли и Солнца, поэтому периоды обращения Земли и Солнца равны: $T = 2\pi R/V = 2\pi r/v$. Отношение расстояний этих тел от центра масс $R/r = m/M$. Отсюда следует, что $V/v = m/M$. Тогда для отношения кинетических энергий орбитального движения Земли и Солнца можно записать: $E_з/E_с = mv^2/MV^2 = M/m$.

Ответ: у Земли, в 300 тысяч раз.

4. Период обращения планеты ***(В.В. Порфирьев, 2004, обработка и дополнение – М.Г. Гаврилов, 2004)***

Если на планете тот же климат, что и Земле, то поток энергии падающей на нее совпадает с потоком энергии, падающим на Землю:

$$\frac{4\pi R_Q^2 T_Q^4}{a_i^2} = \frac{4\pi R^2 T^4}{a^2}$$

где a_i и a – расстояния от Земли до Солнцаи от планеты до звезды соответственно. Полагая $a_i = 1$, получим (в астрономических единицах):

$$a = \sqrt{\left(\frac{R}{R_Q}\right)^2 \left(\frac{T}{T_Q}\right)^4} = \frac{R}{R_Q}\left(\frac{T}{T_Q}\right)^2 \approx 9.35 \text{ а.е.}$$

Период обращения планеты определяем по обобщенному III закону Кеплера. Если t брать в годах, a – в астрономических единицах, M – в массах Солнца, то:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{M}} \approx 24{,}2 \text{ года}$$

Примечание: справедливости ради надо отметить, что в данном решении для того, чтобы климат на планете был такой же, как на Земле, необходимо, необходимо, чтобы и альбедо Земли и планеты были одинаковы.

5. Звездная величина Луны. ***(М.Г. Гаврилов, 2004).***

Для сравнения нужно рассмотреть два крайних случая. Наибольший блеск (наименьшую звездную величину) Луна будет иметь в том случае, когда она находится в перигее своей орбиты, а Земля в перигелии. Наименьший блеск – наоборот, когда она в апогее, а Земля – в афелии. Сравним эти два случая.

В первом случае, падающий на Луну поток солнечного света пропорционален $1/(a(1-e))^2$, во втором – ~ $1/(a(1+e))^2$, где a – среднее расстояние от Солнца до Луны, e –эксцентриситет Земной орбиты (расстоянием Земля-Луна пренебрегаем по сравнению с расстоянием Солнце-Земля).

Кроме того, для первого случая уже идущий от Луны поток света к земному наблюдателю пропорционален $1/(a(1-e_R))^2$, для второго – ~ $1/(a(1+e_R))^2$, где r – среднее расстояние от Земли до Луны, e_R – эксцентриситет орбиты Луны (а здесь мы пренебрегаем размерами Земли и Луны по сравнению с расстоянием Земля-Луна).

Таким образом, в первом случае поток света к земному наблюдателю пропорционален $1/(r(1-e_R)\cdot a(1-e))^2$, во втором – ~ $1/(r(1+e_R)\cdot a(1+e))^2$. Их отношение даёт

$$\left(\frac{1+e_R}{1-e_R}\right)^2 \times \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2;$$

$$\Delta m = 2{,}5\lg\left[\left(\frac{1+e_R}{1-e_R}\right)^2 \times \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2\right] = 5\lg\frac{1+e_R}{1-e_R} + 5\lg\frac{1+e}{1-e}.$$

Подстановка численных данных даёт:

$$\Delta m = 0{,}239 + 0{,}074 \approx 0.31$$

Как видим, второй член (возникающий из-за эксцентриситета земной орбиты) мал, но, всё же, существенен.

6. Приливная гравитация. ***(М.Г. Гаврилов, 1999)***

Первая и главная часть решения задачи фактически представляет собой вывод формулы для приливных сил. Центр аппарата обращается вокруг чёрной дыры по круговой траектории с угловой скоростью ω, определяемой из условия нахождения на орбите:

$$\omega^2 R = \frac{GM}{R^2},$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3},$$

Точки A и B обращаются с этой же угловой скоростью, но силы притяжения со стороны чёрной дыры, действующие на тела в этих точках, иные:

$$\frac{GM}{(R-L/2)^2} \text{ и } \frac{GM}{(R+L/2)^2} \text{ соответственно.}$$

В результате в точке A тела будут как бы испытывать искусственное тяготение (ускорение силы тяжести), направленное по направлению к чёрной дыре и равное

$$g_{иск} = \frac{GM}{(R-L/2)^2} - \omega^2(R-L/2),$$

а в точке B – искусственное тяготение, направленное по направлению от чёрной дыры и равное

$$g_{иск} = \omega^2(R+L/2) - \frac{GM}{(R+L/2)^2}.$$

Подставляя значение ω^2, получаем для первого случая:

$$g_{иск} = GM\left(\frac{1}{(R-L/2)^2} - \frac{R-L/2}{R^3}\right),$$

$$g_{иск} = GM\frac{R^3-(R-L/2)^3}{R^3(R-L/2)^2} = GM\frac{\left(R^3 - R^3 + 3R^2\,L/2 + 3R(L/2)^2 - (L/2)^3\right)}{R^3(R-L/2)^2} \approx GM\frac{3R^2L}{2R^5} \approx \frac{3}{2}GM\frac{L}{R^3}.$$

Аналогично для второго случая получаем эту же величину (только направление её, напомним, от чёрной дыры).

Таким образом, ответ будет одинаковым для пунктов а) и б) задачи. Учитывая, что нам необходимо $g_{иск} = g_{земн}$ = 9,81 м/с^2, получаем

$$R^3 = \frac{3}{2} GM \frac{L}{g},$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{2} GM \frac{L}{g}} \approx 1{,}83 \cdot 10^7\,м = 18{,}3\,тыс.км\,.$$

Теоретический тур, решения задач

11 класс.

1. **Созвездия в Подмосковье** ***(Н.Е. Шатовская, обработка и дополнения – О.С. Угольников, 2004.)***

   На нашем небе нельзя одновременно увидеть созвездия Ворона и Рыб. Их прямые восхождения отличаются на 12 часов, при этом Рыбы находятся вблизи небесного экватора, а Ворон – южнее его. Поэтому он восходит после захода Рыб, а заходит – до их восхода, независимо от сезона года. Но вот пять из шести перечисленных созвездий, все, кроме Рыб, можно увидеть на небе весенними ночами.

2. **Прохождение Луны** ***(А.В. Засов, 2004, обработка – М.Г. Гаврилов, 2004).***

   Максимальное расстояние, на которое Луна «приподнимается» над плоскостью земной орбиты, равно h=R×sin i. Значения R = 384 тыс. км и i = 5,15° берем из таблицы Солнечной Системы.

   $$h = L \times \sin i = 384 \text{ тыс. км} \times \sin 5{,}15° \approx 34{,}5 \text{ тыс. км.}$$

   В проекции на диск Солнца это расстояние составит

   $$2h / D = 2L \times \sin i/D = 2 \times 34{,}5 \text{ тыс. км} / 1392 \text{ тыс. км} \approx 0{,}050$$

   Или примерно 1/20 долю диаметра Солнца.

3. **Точка Лагранжа** ***(Е.Б. Постников, дополнения - А.В. Засов, М.Г. Гаврилов, О.С. Угольников)***

   По описанию, корабль находится в той точке либрации, которая располагается на прямой, соединяющей Юпитер и Ио и находится между ними. Так как масса Юпитера M и Ио μ много больше массы корабля m, то вращение этой прямой в пространстве определяется вращением Ио вокруг Юпитера с угловой скоростью ω.

   Эта угловая скорость определяется равенством $\frac{GM}{L^2} = \omega^2 L$, откуда $\omega^2 = \frac{GM}{L^3}$.

   Обозначим через ΔL расстояние от корабля до Ио. Корабль находится в равновесии под действием противоположно направленных сил притяжения со стороны Юпитера $GMm/(L-\Delta L)^2$ и Ио $G\mu m/(\Delta L)^2$, которые сообщают ему центростремительное ускорение $a = \omega^2(L-\Delta L)$. По второму закону Ньютона:

   $$\frac{GMm}{(L-\Delta L)^2} - \frac{G\mu m}{\Delta L^2} = m\omega^2(L-\Delta L);$$

   $$\frac{GM}{(L-\Delta L)^2} - \frac{G\mu}{\Delta L^2} = \omega^2(L-\Delta L);$$

   $$\frac{GM}{L^2\left(1-\frac{\Delta L}{L}\right)^2} - \frac{G\mu}{\Delta L^2} = \omega^2(L-\Delta L)$$

   Так как μ << M, то точка либрации находится гораздо ближе к Ио, чем к центру Юпитера, то есть $\frac{\Delta L}{L} << 1$ и $\frac{1}{\left(1-\frac{\Delta L}{L}\right)^2} \approx 1 + 2\frac{\Delta L}{L}$,

   $$\frac{GM\left(1+2\frac{\Delta L}{L}\right)}{L^2} - \frac{G\mu}{\Delta L^2} = \omega^2(L-\Delta L).$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\frac{GM}{L^2}+\frac{2GM\Delta L}{L^3}-\frac{G\mu}{\Delta L^2}=\omega^2 L-\omega^2\Delta L .$$

Учитывая, что $\omega^2 = GM/L^3$ и сокращая соответствующие слагаемые, получаем:

$$\frac{2GM\Delta L}{L^3}-\frac{G\mu}{\Delta L^2}=\frac{GM\Delta L}{L^3} .$$

Окончательный ответ: $\Delta L = L\sqrt[3]{\frac{\mu}{3M}}$.

Подставим числа: ΔL = 422 тыс. км × (89,4·10^{21} кг / 3·1,90·10^{27}кг)$^{1/3}$ = 10,6 тыс. км. Таким образом, у Артура Кларка приведено абсолютно правильное положение точки Лагранжа.

Теперь ответим на вопрос о видимых радиусах Юпитера и Ио.

Обозначим радиусы Юпитера и Ио, соответственно, как R и r, их видимые угловые радиусы – как P и p, а плотности – как ρ_1 и ρ_2. Учитывая, что

$$M=\frac{4}{3}\pi\rho_1 R^3 ,\ \mu=\frac{4}{3}\pi\rho_2 r^3 ,$$

получаем, что

$$P=\frac{R}{L-\Delta L}=\frac{3M}{4\pi\rho_1\left(L-\Delta L\right)} ,$$

$$p=\frac{r}{\Delta L}=\frac{3\mu}{4\pi\rho_2\Delta L} .$$

Откуда

$$\frac{p}{P}=\frac{L-\Delta L}{\Delta L}\times\sqrt[3]{\frac{\mu}{\mathrm{M}}}\times\sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}=\left(\sqrt[3]{\frac{3M}{\mu}}-1\right)\times\sqrt[3]{\frac{\mu}{\mathrm{M}}}\times\sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}=\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{\frac{\mu}{M}}\right)\times\sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}} .$$

Подставим значения μ, M, ρ_1 и ρ_2, взяв их из таблицы Солнечной системы. Благодаря тому, что средняя плотность Ио как раз примерно втрое больше, чем у Юпитера (3,55 против 1,33 г/см^3) получается, что видимый радиус Ио будет всего лишь в 1,014 раза больше. Разницу в 1,4 % обычный наблюдатель не замечает (тем более, в противоположных точках горизонта). То есть, Юпитер и Ио действительно выглядят одинаковыми из этой точки.

Примечание: Кстати, заметим интересный факт. Соотношение видимых из точки Лагранжа угловых размеров планеты и спутника определяется, главным образом, соотношением их плотностей. А если масса спутника пренебрежимо мала по сравнению с массой планеты, что имеет место и в нашем случае (μ << M: μ/M ≈ 1/20000), то исключительно соотношением их плотностей.

Если в последней формуле сделать приближение, учтя, что μ << M, получим:

$$\frac{p}{P}\approx\sqrt[3]{\frac{3\rho_1}{\rho_2}} .$$

В таком приближении видимый радиус Ио будет всего в (3,99/3,55)$^{1/3}$ ≈ 1,04 раза больше. Разница в 4 % – тоже небольшая. Обычный наблюдатель о в противоположных точках горизонта её также не замечает.

4. Период обращения планеты ***(В.В. Порфирьев, 2004, обработка и дополнение – М.Г. Гаврилов, 2004)***

Если на планете тот же климат, что и Земле, то поток энергии падающей на нее совпадает с потоком энергии, падающим на Землю:

$$\frac{4\pi R_{\mathrm{Q}}^2 T_{\mathrm{Q}}^4}{a_{;}^2}=\frac{4\pi R^2 T^4}{a^2}$$

где a_i и a – расстояния от Земли до Солнцаи от планеты до звезды соответственно. Полагая $a_i = 1$, получим (в астрономических единицах):

$$a = \sqrt{\left(\frac{R}{R_Q}\right)^2 \left(\frac{T}{T_Q}\right)^4} = \frac{R}{R_Q}\left(\frac{T}{T_Q}\right)^2 \approx 9.35 \text{ а.е.}$$

Период обращения планеты определяем по обобщенному III закону Кеплера. Если t брать в годах, a – в астрономических единицах, M – в массах Солнца, то:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{M}} \approx 24{,}2 \text{ года}$$

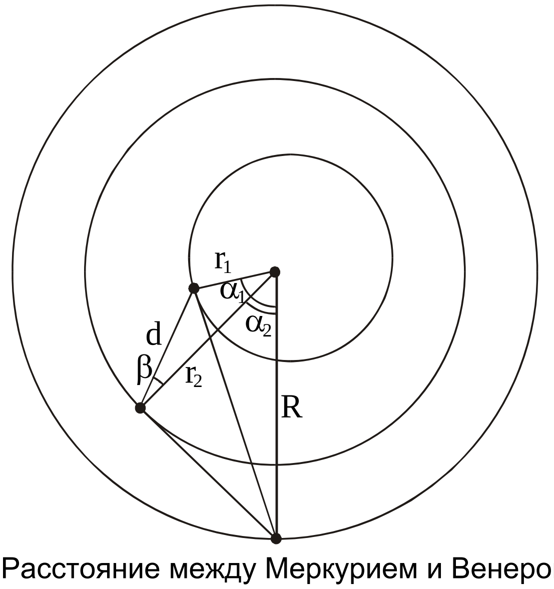
Примечание: справедливости ради надо отметить, что в данном решении для того, чтобы климат на планете был такой же, как на Земле, необходимо, необходимо, чтобы и альбедо Земли и планеты были одинаковы.

На второй вопрос задачи ответить труднее. Стадия красного гиганта в эволюции звезды следует после стадии главной последовательности. На главной последовательности светимость нашей звезды примерно в 3 раза меньше. Соответственно и поток энергии, падающий на планету во столько же раз меньше. Температура (абсолютная) пропорциональна корню четвертой степени из потока излучения, то есть меньше в 1,3 раза. Если считать, что на Земле средняя температура 287 К, то на нашей планете , когда звезда проходит на стадию главной последовательности, температура была равной 218 К или –55 С. При такой температуре планета покрыта льдом и появление жизни на ней представляется мало вероятной.

С другой стороны, парниковый эффект может значительно поднять температуру на поверхности планеты. В этом случае, вероятность появления жизни становится достаточно большой. То есть, ответ на второй вопрос задачи зависит от химического состава атмосферы планеты. Второй вариант ответа (жизнь на планете возможна) представляется более вероятным.

5. Меркурий и Венера. ***(Н.Е. Шатовская, обработка и дополнения – О.С. Угольников, М.Г. Гаврилов, 2004.)***

Орбита Венеры практически круглая, и ее наибольшая элонгация наступает, когда угол с вершиной в Венере между направлениями на Солнце и Землю составляет 90°. Для Меркурия, чья орбита сильно вытянута, такое выполняется, только если наибольшая элонгация наступает вблизи его перигелия или афелия. Именно первый из этих двух случаев реализуется 29 марта 2004 года. Точные расстояния Меркурия и Венеры от Солнца можно вычислить, зная их угловые расстояния от Солнца (расстояние Земли от Солнца в этот день очень близко к 1 а.е.):



$$r_1 = R \cdot \sin 19° = 0.326 \text{ а.е.},$$
$$r_2 = R \cdot \sin 46° = 0.719 \text{ а.е.}$$

Разности гелиоцентрических долгот Земли и Меркурия (Венеры) $\alpha_{1,2}$ вычисляются в данном случае очень просто:

$$\alpha_1 = 90° - 19° = 71°$$
$$\alpha_2 = 90° - 46° = 44°$$

Расстояние между Меркурием и Венерой:

$$d = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2))^{1/2} = 0.453 \text{ а.е.}$$

Косинус угла β с вершиной в Венере между направлениями на Солнце и Меркурий равен

$$\cos\beta = ((r_2^2 + d^2 - r_1^2)/(2*r_2*d)) = 0.945.$$

Фаза Венеры, видимая с Меркурия, равна $\Phi = (1 + \cos\beta)/2 = 0.973$.

6. Приливная гравитация. ***(М.Г. Гаврилов, 1999)***

Первая и главная часть решения задачи фактически представляет собой вывод формулы для приливных сил. Центр аппарата обращается вокруг чёрной дыры по круговой траектории с угловой скоростью ω, определяемой из условия нахождения на орбите:

$$\omega^2 R = \frac{GM}{R^2},$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3},$$

Точки A и B обращаются с этой же угловой скоростью, но силы притяжения со стороны чёрной дыры, действующие на тела в этих точках, иные:

$$\frac{GM}{(R-L/2)^2} \text{ и } \frac{GM}{(R+L/2)^2} \text{ соответственно.}$$

В результате в точке A тела будут как бы испытывать искусственное тяготение (ускорение силы тяжести), направленное по направлению к чёрной дыре и равное

$$g_{иск} = \frac{GM}{(R-L/2)^2} - \omega^2 (R - L/2),$$

а в точке B – искусственное тяготение, направленное по направлению от чёрной дыры и равное

$$g_{иск} = \omega^2 (R+L/2) - \frac{GM}{(R+L/2)^2}.$$

Подставляя значение ω^2, получаем для первого случая:

$$g_{иск} = GM\left(\frac{1}{(R-L/2)^2} - \frac{R-L/2}{R^3}\right),$$

$$g_{иск} = GM\,\frac{R^3-(R-L/2)^3}{R^3(R-L/2)^2} = GM\,\frac{\left(R^3-R^3+3R^2\,L/2+3R(L/2)^2-(L/2)^3\right)}{R^3(R-L/2)^2} \approx GM\,\frac{3R^2L}{2R^5} \approx \frac{3}{2}GM\,\frac{L}{R^3}.$$

Аналогично для второго случая получаем эту же величину (только направление её, напомним, от чёрной дыры).

Таким образом, ответ будет одинаковым для пунктов а) и б) задачи. Учитывая, что нам необходимо $g_{иск} = g_{земн} = 9{,}81$ м/с^2, получаем

$$R^3 = \frac{3}{2}GM\,\frac{L}{g},$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{2}GM\,\frac{L}{g}} \approx 1{,}83\cdot 10^7\,м = 18{,}3\,тыс.км.$$