АСТРОНОМИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
EURO-ASIAN ASTRONOMICAL SOSIETY

V Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Теоретический тур, решения задач.

Троицк,
7-12 апреля 1998 г.

8-9 класс.

1. Правая часть видимой нам поверхности Луны, где меньше морей, отражает солнечный свет лучше, чем левая – это видно с первого взгляда. Поэтому в первой четверти, когда освещена правая часть Луны, она освещает Землю лучше, чем в третьей.

2. 55 кпк – это 180000 световых лет (в 1 парсеке 3.26 световых года). То есть, свет из Большого Магелланова Облака идет до нас около 180000 лет, и любое событие, которое мы видим сейчас, произошло там уже 180 тысяч лет тому назад. Вычислять точно год, в котором на самом деле произошла вспышка сверхновой, бессмысленно, поскольку точность, с которой дано расстояние до галактики, явно не превышает 1%. Правильный ответ: около 180 тысяч лет тому назад.

3. Во время полнолуния направление на Луну практически противоположно направлению на Солнце. То есть, во времена полнолуний Луна находится примерно в той области небесной сферы, которая противоположна направлению на Солнце. С точностью до 5% это означает, что полной Луной белые медведи могут любоваться только тогда, когда Солнце под горизонтом – 6-7 раз в году, во время полярной ночи.

Примечание: если посчитать точно, то полная Луна может быть на Северном полюсе над горизонтом от 5 до 8 раз в году.

4. Спутники, находящиеся на низкой орбите, совершают 1 оборот вокруг Земли примерно за 90 минут. Через это время спутник будет находиться в той же точке относительно центра Земли. Но за это время Земля поворачивается вокруг своей оси примерно на 22.5°. То есть, через 1 оборот спутник будет находиться над точкой земной поверхности, долгота которой отличается от харьковской на 22.5°, причем, поскольку Земля вращается с запада на восток, искомая долгота будет меньше харьковской и составит 13.5°.

Примерно на широте Харькова и долготе 13.5° находится город Прага, над ней и пролетит спутник через один оборот.

5. (8 класс) Поскольку направления вращения совпадают, число суток (с продолжительностью S) в году (T_0) ровно на 1 меньше, чем число оборотов планеты вокруг своей оси (период T), то есть

$$\frac{T_0}{S} = \frac{T_0}{T} - 1.$$

Отсюда

$$S = \frac{T_0 T}{T_0 - T} = 176 \text{ сут.}$$

Заметим, что это в точности два периода обращения Меркурия вокруг Солнца и три – вокруг своей оси.

6. (8 класс) Если мы пренебрегаем всеми планетами, кроме Юпитера, то центр масс Солнечной системы – это центр масс системы Солнце-Юпитер, который находится от центра Солнца на расстоянии

$$L = m_{♃} l_{♃}/(M_{\odot}+m_{♃}) = 5{,}2/1051 \text{ а.е.} \approx 4{,}95\cdot10^{-3} \text{ а.е.} \approx 740000 \text{ км}$$

Радиус Солнца составляет чуть меньше 700 тысяч километров. Видно, что в рамках сделанных в условии допущений, центр масс Солнечной системы находится вне Солнца, хотя и близко к его поверхности.

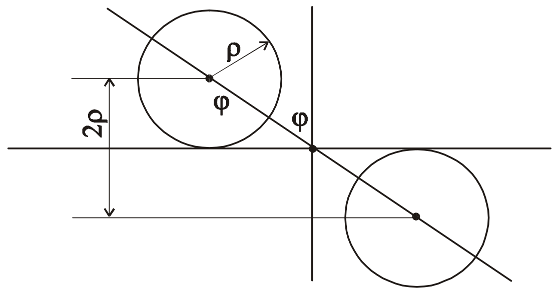
5. (9 класс) Как видно на рисунке, за то время, пока солнечный диск пересекает линию горизонта, Солнце по небосклону проходит угловое расстояние

$$l = \frac{2\rho}{\cos\varphi},$$

где φ – угловой радиус Солнца. Соответственно, заход будет длиться время

$$t = l/u,$$

где u – величина скорости движения Солнца по небу.



Величина u составляет 15° в час, из чего получаем, что заход Солнца на данной широте будет длиться примерно 3.8 минуты.

6. (9 класс) Очевидно, упасть в космос можно в том случае, когда Ваша скорость относительно астероида превысит вторую космическую для него. Впрочем, даже если Вы превысите только первую космическую, то уже будет очень неуютно: придется весьма долго ожидать возвращения на астероид. Так что будем считать, что скорость Вашего бега (человек развивает скорость до 10 м/с) не должна быть больше первой космической, то есть:

$$v < \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{4\pi\rho G}{3}} R.$$

Отсюда

$$R < v\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}} \approx 10 \text{ км.}$$

То есть, без опаски можно бегать по астероидам, диаметр которых больше 20 км.

АСТРОНОМИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
EURO-ASIAN ASTRONOMICAL SOSIETY

V Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Теоретический тур, решения задач.

Троицк,
7-12 апреля 1998 г.

10 класс.

1. Максимальная высота кульминации будет в тот момент, когда у Луны максимальное склонение, равное

$$\delta = \varepsilon + i = 28.6^\circ.$$

Здесь ε и i – наклон экватора и лунной орбиты к эклиптике. Максимальная высота Луны в верхней кульминации составит

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta = 63.1^\circ.$$

2. Никакие части планеты не могут двигаться со скоростью, большей первой космической для этой планеты v_1. Чтобы вещество планеты не улетало с ее экватора, необходимо, чтобы экваториальная скорость v_0 была бы меньше первой космической, то есть

$$\frac{2\pi R}{T} = v_0 < v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{4G\pi\rho}{3}}R.$$

Здесь M, R и ρ – масса, радиус и средняя плотность планеты, T – период ее осевого вращения. Из этого выражения мы получаем ограничение для плотности:

$$\rho > \frac{3\pi}{GT^2}.$$

Подставляя численные данные, получаем, что плотность планеты должна быть не меньше $1.09\cdot10^6$ кг/м^3.

3. Если мы пренебрегаем всеми планетами, кроме Юпитера, то центр масс Солнечной системы – это центр масс системы Солнце-Юпитер, который находится от центра Солнца на расстоянии

$$L = m_♃ l_♃/(M_\odot + m_♃) = 5{,}2/1051 \text{ а.е.} \approx 4{,}95\cdot10^{-3} \text{ а.е.} \approx 740000 \text{ км}$$

Радиус Солнца составляет чуть меньше 700 тысяч километров. Видно, что в рамках сделанных в условии допущений, центр масс Солнечной системы находится вне Солнца, хотя и близко к его поверхности.

4. Известно, что точку перигелия своей орбиты Земля проходит зимой, а точку афелия – летом. Поэтому летом расстояние от Земли до Солнца в (1+e)/(1–e) раз больше, чем зимой. Соответственно разница в звездных величинах Солнца составит:

$$\Delta m = 2.5\lg\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 = 5\lg\frac{1+e}{1-e} = 0.074.$$

5. Луна движется по небу, совершая полный оборот относительно звезд за 27.32 суток (звездный период обращения Луны). За это время лунный диск покрывает полосу площадью 360·0.5=180 квадратных градусов.

Найдем теперь число квадратных градусов в сфере. Площадь сферы равна $4\pi R^2$, а площадь квадратного элемента сферы 1° на 1° (или 0.0175 радиан на 0.0175 радиан) составляет $3.05\cdot10^{-4}\cdot R^2$. В итоге, площадь небесной сферы составляет примерно 41000 квадратных градусов, и Луна покрывает 0.0044 небесной сферы. На этой площади содержится около 700 звезд, покрываемых Луной за 27.32 дня, то есть в среднем одно покрытие происходит за 56 минут.

6. Для того, чтобы послать зонд с поверхности планеты на Солнце, нужно сначала вывести его на околопланетную орбиту, а потом перевести его на очень вытянутую орбиту вокруг Солнца (чтобы она по крайней мере касалась Солнца), то есть уменьшить скорость относительно Солнца практически до нуля.

Очевидно, что оба пункта существенно легче выполнить при запуске зонда с Марса. Выведение на околопланетную орбиту проще, поскольку первая космическая скорость для Марса более чем в два раза меньше, чем для Венеры. Скорость движения Марса по орбите тоже меньше, чем скорость Венеры. Кроме того, на Марсе практически нет атмосферы, преодоление которой при запуске зонда с поверхности Венеры потребует дополнительных затрат.

Для ответа на второй вопрос, рассмотрим движение корабля по траектории, которая касается орбиты Марса и поверхности Солнца. Расстояние корабля в перигелии значительно меньше расстояния в афелии, поэтому большая полуось такой орбиты будет вдвое меньше большой полуоси орбиты Марса, а период обращения, по III закону Кеплера, будет меньше орбитального периода Марса в $2^{3/2}$=2.83 раза и составит 243 дня. Перелет будет длиться половину периода обращения корабля, что составляет 121.5 суток.

АСТРОНОМИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
EURO-ASIAN ASTRONOMICAL SOSIETY

V Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Теоретический тур, решения задач.

Троицк,
7-12 апреля 1998 г.

11 класс.

1. Скорость удаления галактики равна $c \cdot z$, где c – скорость света, z – красное смещение галактики. Разделяя данную величину на постоянную Хаббла H, мы получаем расстояние до галактики, а умножая на ее видимый размер а в радианах – размер этой галактики. В итоге, он получается равным

$$d = \frac{c\,z\,\alpha}{H} = 12 \text{ кпк}.$$

2. Блеск астероида меняется из-за того, что он то приближается к Солнцу, то удаляется от него. Если это единственная причина изменения блеска (то есть мы считаем астероид сферическим и однородно отражающим), то солнечного света на астероид попадает обратно пропорционально квадрату расстояния от него до Солнца ($\sim R^{-2}$), а к наблюдателю возвращается от этого попавшего излучения величина еще раз обратно пропорциональная квадрату это расстояния. То есть, интенсивность I доходящего до нас света пропорциональна R^{-4}. Таким образом, для разницы в звездных величинах астероида, наблюдаемого от Солнца, мы имеем

$$\Delta m_1 = 2.5\lg\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 = 10\lg\frac{R_1}{R_2}.$$

Для Солнца, видимого с астероида

$$\Delta m_2 = 2.5\lg\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 5\lg\frac{R_1}{R_2} = \frac{\Delta m_1}{2} = 2.62.$$

3. Вроде бы, если точка абсолютно противоположная, то ситуация должна быть абсолютно симметричная: в тот же момент там должен начаться восход Солнца, то есть появление первого солнечного лучика. Но это лишь в том случае, если не учитывать два важных обстоятельства:

Первое – для любого наблюдателя физический горизонт немного опущен. Даже если человек просто стоит на земной поверхности, понижение физического горизонта составляет около 2.5'. Это означает, что если у нас солнечный диск коснулся физического горизонта, то его нижний край уже на 2.5' ниже математического горизонта. То есть, в противоположной точке Земного шара верхний край солнечного диска на 2.5' выше математического горизонта. Соответственно, стоящий наблюдатель видит его уже на 5' выше физического горизонта, а 5' – это треть радиуса Солнца.

Но рассмотренное понижение физического горизонта – не главный эффект в этой задаче. Есть еще рефракция – преломление лучей. Величина рефракции немного зависит от погодных условий, но в среднем составляет на уровне горизонта около 35'. Так что, в тот момент, когда у нас солнечный диск только что коснулся горизонта, в противоположной точке Земного шара Солнце уже поднялось над горизонтом примерно на один градус.

4. Задача эта, очевидно, оценочная. Скорее даже – экспериментальная. Вначале надо понять, почему в данном случае светится кошачий глаз. Иногда ведь кошачьи глаза светятся и в полной темноте. Но, конечно, далеко не столь ярко, как вблизи источников света. Проводя экспериментальные наблюдения котов под фонарями, можно установить: для того, чтобы увидеть наиболее яркие глаза, оптимальным вариантом является Ваше расположение практически точно между фонарем и котом. Чем ближе к коту Ваша тень от фонаря, тем ярче сверкают его глаза. Было бы еще ярче, если бы Вы попали точно на линию фонарь-кот, но при этом кота Вы «затмеваете». Из всего этого можно сделать вывод, что кошачьи глаза являются почти зеркальцами, отражающими свет точно назад.

Кстати, здесь немаловажно, что кот тоже за Вами внимательно наблюдает (обычно – опасается), то есть плоскость его глаз перпендикулярна направлению на Вас и фонарь. Но вообще, вовсе не обязательно, чтобы фонарь, Вы и кот находились на одной прямой – иногда глаза сверкают просто при повороте им головы, когда направление его взгляда соответствует примерно биссектрисе угла человек-кот-фонарь.

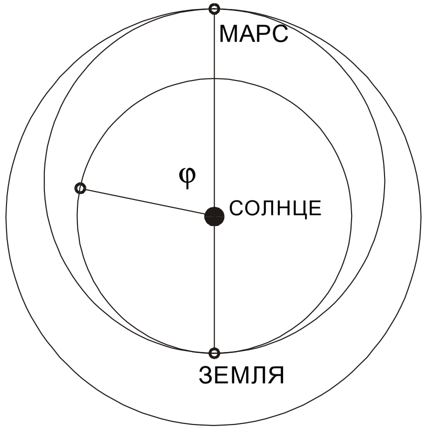
Теперь рассмотрим кота, любующегося полной Луной. Будем считать, что диаметр зрачка кошачьего глаза (ночью!) около 10 мм, глаза отражают свет почти как зеркало, а коэффициент отражения около 1/3 (т.е. отражают треть падающего на него света). Легко вычислить, что угловая площадь светящегося кошачьего глаза с расстояния 5 метров составляет около $3 \cdot 10^{-6}$ квадратных радиан, что явно меньше угловой площади лунного диска ($7 \cdot 10^{-5}$ квадратных радиан). Поэтому можно считать, что в кошачьем глазе, как в зеркале, Вы увидите часть Луны с угловой площадью около $3 \cdot 10^{-6}$ квадратных радиан и втрое меньшей яркостью (так как коэффициент отражения 1/3).

Таким образом, от кошачьего глаза, расположенного на расстоянии 5 метров, к Вам попадает максимум 1/70 света полной Луны. То есть, звездная величина кошачьего глаза будет примерно на 4.5^m больше, чем у полной Луны и составит около -8^m. Оценка, конечно, очень грубая. В зависимости от величины коэффициента отражения в кошачьем глазе и яркости фонаря можно получить от -9^m до -5^m.

5. Большая полуось орбиты, по которой космический корабль совершает перелет ($a_{\oplus♂}$) будет равна полусумме радиусов орбит Земли и Марса $a_\oplus$ и $a_♂$. Время перелета от Земли к Марсу по этой орбите равно половине орбитального периода. Выражая его в годах и воспользовавшись III законом Кеплера, получаем значение времени перелета:

$$\tau = T_{\oplus♂}/2 = [(a_\oplus + a_♂)/2]^{3/2}/2 = 259 \text{ сут}$$

V Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике



Для вычисления времени, в течении которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по такой же орбите, заметим, что в момент прилета Земля опережает Марс на угол

$$\varphi = \omega_\oplus \tau - \pi = 2\pi\tau/T_\oplus - \pi,$$

где $\omega_\oplus = 2\pi/T_\oplus$ – угловая скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца.

В момент отправления в обратный путь Земля, очевидно, должна отставать от Марса не такой же угол φ, что соответствует опережению на угол $2\pi k - \varphi$ (где k – целое число). Для вычисления минимального времени надо найти такое минимальное k, при котором $(2\pi k - \varphi) > \varphi$. Из численных данных видно, что в нашем случае k = 1. Время, за которое опережение Земли увеличится с φ до $2\pi - \varphi$ равно

$$T_{ожид} = (2\pi - 2\varphi)/(\omega_\oplus - \omega_♂),$$

Где $(\omega_\oplus - \omega_♂)$ – относительная угловая скорость движения Земли и Марса,

$$T_{ожид} = (1 - \varphi/\pi)/(1/T_\oplus - 1/T_♂) = (2 - 2\tau/T_\oplus)/(1/T_\oplus - 1/T_♂) \approx 454 \text{ сут.}$$

6. Во-первых, поймем, что значит «свободно путешествовать по Солнечной системе». Разумно считать, что с помощью такого паруса, точнее, с помощью силы солнечного давления на него, можно было бы существенно изменять орбиту космического корабля-яхты. Иными словами, чтобы сила давления солнечного излучения F_R была сопоставима с силой гравитационного притяжения F_G. Поскольку в условии требуется «оценить приблизительно», в качестве исходного условия примем, что эти силы равны друг другу.

Импульс каждого фотона света равен E/c, где E – его энергия, а c – скорость света. Следовательно, суммарный импульс всех фотонов, ударяющихся за время Δt о парус площадью S на расстоянии R от Солнца, равен

$$p = \frac{AS\Delta t}{c} \cdot \frac{R_0^2}{R^2}.$$

Здесь A – солнечная постоянная на расстоянии Земли от Солнца R_0. Если покрасить парус в белый цвет, то фотоны будут отскакивать от паруса обратно, передавая ему свой удвоенный импульс. Из этого мы получаем выражение для силы давления излучения и приравниваем ее к силе тяжести:

$$F_R = \frac{2p}{\Delta t} = \frac{2AS}{c} \cdot \frac{R_0^2}{R^2} = \frac{GMm}{R^2}.$$

Из этого следует, что независимо от расстояния до Солнца, площадь паруса должна быть не менее чем

$$S = \frac{GMmc}{2AR_0^2} = 6 \text{ км}^2.$$