

# **Физические основы строения и эволюции звезд**

Я. Б. Зельдович, С. И. Блинников, Н. И. Шакура

МГУ

1981

<b>Предисловие</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Элементы ньютоновской теории тяготения</b>	<b>6</b>
§1.1. Энергия взаимодействия, силы, ускорения, постоянная тяготения, отличие гравитационного взаимодействия от других типов взаимодействия . . . . .	6
§1.2. Векторное поле ускорений, теорема Гаусса, гравитационный потенциал уравнение Пуассона . . . . .	8
§1.3. Сферически-симметричные поля тяготения, полная и текущая массы звезд, эйлеровы и лагранжевы координаты . . . . .	10
§1.4. Энергия гравитационного взаимодействия . . . . .	14
§1.5. Давление газа. Уравнение равновесия звезды . . . . .	16
§1.6. Основы термодинамики звезд . . . . .	19
§1.7. Вариационный принцип . . . . .	21
§1.8. Теорема вириала . . . . .	22
<b>Глава 2. Аналитическая теория политропных шаров (теория Лейна–Риттера–Эмдена)</b>	<b>24</b>
§2.1. Уравнение Эмдена . . . . .	24
§2.2. Основные параметры политропы . . . . .	27
§2.3. Частные случаи политропных моделей . . . . .	28
§2.4. Теория белых карликов . . . . .	30
§2.5. Горячие звезды . . . . .	34
<b>Глава 3. Перенос излучения в звездах</b>	<b>37</b>
§3.1. Введение . . . . .	37
§3.2. Основные понятия теории равновесного излучения . . . . .	38
§3.3. Кинетика фотонов и формула Планка . . . . .	39
§3.4. Тормозное излучение зарядов . . . . .	43
§3.5. Рассеяние излучения на свободных электронах . . . . .	47
<b>Глава 4. Теория переноса (продолжение)</b>	<b>49</b>
§4.1. Перенос излучения при рассеянии . . . . .	49
§4.2. Коэффициент теплопроводности. Росселандово среднее . . . . .	50
§4.3. Поведение $\rho$ и $T$ вблизи поверхности горячей звезды . . . . .	53
§4.4. Критическая эддингтоновская светимость . . . . .	54
§4.5. Устойчивость теплового потока . . . . .	55
§4.6. Конвекция . . . . .	56
<b>Глава 5. Ядерные реакции</b>	<b>58</b>
§5.1. Свойства ядерных сил . . . . .	58
§5.2. Простейшие примеры . . . . .	59

§5.3. Учет электромагнитного взаимодействия частиц . . . . .	61
§5.4. Слабое взаимодействие . . . . .	63
§5.5. Ядерные реакции в звездах . . . . .	66
§5.6. Поиски солнечных нейтрино . . . . .	73
<b>Глава 6. Строение и устойчивость звезд</b>	<b>76</b>
§6.1. Уравнения звездой структуры . . . . .	76
§6.2. Соотношение масса-светимость . . . . .	78
§6.3. Тепловая устойчивость звезд . . . . .	80
§6.4. Эволюция звезд главной последовательности . . . . .	83
§6.5. Горение гелия: $3\alpha$ -реакция . . . . .	84
§6.6. Определение возраста скоплений . . . . .	86
§6.7. Качественная картина эволюции звезды . . . . .	88
<b>Глава 7. Новые физические факторы.</b>	
<b>Механическая устойчивость звезд</b>	<b>91</b>
§7.1. Общая теория относительности — ОТО . . . . .	91
§7.2. Нейтронизация . . . . .	91
§7.3. Два типа энергетических потерь . . . . .	94
§7.4. Роль нейтрино в эволюции звезд . . . . .	98
<b>Глава 8. Введение в общую теорию относительности</b>	<b>107</b>
§8.1. Идея искривленного пространства-времени . . . . .	108
§8.2. Параллельный перенос векторов . . . . .	111
§8.3. Физика искривленного пространства-времени . . . . .	113
§8.4. Гравитационное красное смещение. Замедление времени . . . . .	116
<b>Глава 9. Сильные гравитационные поля</b>	
<b>и строение релятивистских звезд</b>	<b>118</b>
§9.1. Решение Шварцшильда . . . . .	118
§9.2. Движение частиц в поле Шварцшильда . . . . .	120
§9.3. Сферически-симметричное поле внутри звезды . . . . .	122
§9.4. Общие свойства равновесия релятивистских звезд . . . . .	130
§9.5. Устойчивость релятивистских звезд . . . . .	132
§9.6. Несферические поля тяготения . . . . .	135
<b>Глава 10. Наблюдательные проявления релятивистских звезд</b>	<b>140</b>
§10.1. Пульсары . . . . .	140
§10.2. Электродинамика пульсаров . . . . .	142
§10.3. Магнитосфера пульсара . . . . .	146
§10.4. Аккреция на релятивистские звезды . . . . .	149

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение строения и эволюции звезд является важнейшей классической частью астрономии.

На каждом этапе развития физики теория звезд обогащалась новыми физическими принципами. Теория тяготения, термодинамическая теория уравнения состояния газов, теория теплового излучения, лучистого и конвективного переноса энергии — таков первый круг физических знаний, использованный к началу века при построении теории звезд. Эти знания пополнялись и в дальнейшем в связи с квантовой теорией атомов и ионов и уточнением их оптических свойств, а также теорией вырожденного электронного газа. Главным новшеством XX в. было понимание источника энергии звезд, связанное с развитием ядерной физики. За этим следует создание общей теории относительности и выяснение ее астрономических следствий.

Однако не физика, а сама астрономия, именно наблюдательная астрономия, явилась главным источником наших сведений о звездах. Победное шествие астрономии началось с изучения солнечной системы. Определение астрономической единицы, т.е. расстояния от Земли до Солнца, дало возможность определить массу и светимость этой ближайшей к нам звезды. Вскоре были определены расстояния до других звезд, что позволило найти их параметры. Большую роль сыграло изучение двойных звезд.

Современная астрономия особенно заинтересована бурными катастрофическими процессами взрыва звезд и получающимися при этом нейтронными звездами и коллапсировавшими телами — черными дырами. Рентгеновские телескопы, выведенные за пределы атмосферы, обнаружили звезды, которые в рентгеновском диапазоне излучают энергии в сотни тысяч раз больше, чем Солнце во всех диапазонах. Еще ранее были обнаружены радиопульсары — вращающиеся с огромной скоростью нейтронные звезды.

Таковы в нескольких словах предмет, которому посвящена эта книга, и те физические идеи, которые привлекаются к объяснению астрономических наблюдений.

О звездах существует огромная литература, от популярных статей и книг (лучшая из которых, по нашему мнению, “Физика звезд” С.А.Каплана, М.,

“Наука”, 1977) до специализированных обзоров, публикуемых, например, в “Annual Review of Astronomy and Astrophysics”.

Какое место, какую экологическую нишу занимает предлагаемая книга?

Авторы поставили перед собой задачу уяснения важнейших качественных особенностей и свойств процессов, протекающих в звездах, задачу уяснения сущности физических теорий, управляющих этими процессами. Современная теория в значительной мере опирается на точные расчеты, производимые с помощью электронно-вычислительных машин. При этом аналитические решения утрачивают свое значение, но остается и усиливается потребность в качественном понимании исходных основ и результатов расчетов. Именно акцент на качественную картину явлений отличает нашу книгу от близкой к ней по содержанию замечательной монографии Д. А. Франк-Каменецкого “Физические процессы внутри звезд” (М., Физматгиз, 1959). Кроме того, в нашей книге затрагивается ряд проблем, казавшихся неактуальными 20 лет назад (таких как эффекты общей теории относительности и нейтринные процессы в астрофизике).

Книга в первую очередь предназначена для студентов старших курсов физических факультетов, специализирующихся по астрономии. Она и возникла на основе лекций, читаемых одним из авторов (Я. Б. Зельдовичем) студентам IV и V курсов астрономического отделения физического факультета Московского университета. Формально, согласно учебным планам, эти студенты знают большую часть физических законов, излагаемых в книге. Однако педагогический опыт показывает, что огромную роль играет рассмотрение общих законов именно в связи с конкретными задачами. С этой целью полезно и повторить известное, обращая внимание на те моменты общего, которые понадобятся в рассматриваемых частных задачах. Такой принцип положен в основу изложения.

Многие вопросы остались незатронутыми; наиболее важными из них являются, вероятно, теория колебаний звезд (в связи с цефеидами) и проблема взрывов сверхновых. Необходимую информацию по этим вопросам, так же как и по ряду других, относящихся к физике звезд, читатель может найти в упомянутом выше сборнике обзоров.

Мы благодарим редактора книги Г. Е. Горелика, чья работа способствовала улучшению содержания книги. Мы также благодарим С. А. Ламзина и М. М. Романову за помощь в оформлении рукописи.

# Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ НЬЮТОНОВСКОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

В основе теории строения и эволюции звезд лежит теория тяготения. В настоящее время известно, что закон тяготения, открытый Ньютоном в XVII в., неприменим в сильных гравитационных полях, и современной теорией, описывающей гравитационное взаимодействие, является общая теория относительности (ОТО), созданная А.Эйнштейном в 1916 г. Однако в пределе слабых гравитационных полей теория тяготения Эйнштейна сводится к теории тяготения Ньютона.

Наиболее простой характеристикой гравитационного поля является максимальная скорость движения, которую могут достичь частицы, свободно падая из “бесконечности” в этом поле. Для гравитационного поля Земли скорость свободного падения у поверхности достигает 11 км/с, для Солнца и других обычных звезд эта величина порядка сотен и даже тысяч км/с. Тем не менее для обычных звезд она составляет малую часть скорости света  $c$  (к тому же поправки на релятивистские эффекты, как правило, пропорциональны  $v^2/c^2$ ). В этом смысле гравитационные поля звезд являются слабыми (нерелятивистскими), и теория тяготения Ньютона для этих объектов с достаточной степенью точности вполне пригодна. В дальнейшем, когда мы перейдем к изучению конечных фаз эволюции звезд, мы встретимся с небесными телами — нейтронными звездами и особенно черными дырами, для которых  $v \sim c$ , и полное описание их свойств возможно с помощью только ОТО.

## § 1.1. Энергия взаимодействия, силы, ускорения, постоянная тяготения, отличие гравитационного взаимодействия от других типов взаимодействия

Энергия гравитационного взаимодействия между двумя точечными массами, удаленными на расстояние  $r_{12}$ ,

$$U_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} .$$

Именно такую по величине энергию нужно затратить, удаляя на бесконечность одну массу от другой, если начальное расстояние между массами равно  $r_{12}$ . Гравитационная сила, действующая со стороны второй частицы на первую,

$$\vec{F}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}.$$

По второму закону Ньютона ускорение первого тела

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = -\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \frac{Gm_2}{r_{12}^2}.$$

Отметим, что величина ускорения не зависит от массы  $m_1$ , т.е. гравитационное поле совершенно одинаково действует на различные тела. В этом коренное отличие гравитационного взаимодействия от других типов универсальных взаимодействий. В ньютоновской теории сила тяготения зависит от расположения тел в данный момент, конечная скорость (равная  $c$ ) передачи гравитационного взаимодействия не учитывается.

Везде в этих формулах фигурирует коэффициент  $G$  — константа гравитационного взаимодействия,  $G = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2$  ( $= 1/(15 \cdot 10^6)$ ). С очень большой точностью известно, что сила взаимодействия между двумя точечными массами пропорциональна  $r^{-2}$  — это подтверждается наблюдениями движения планет солнечной системы. Величину  $G$  можно определить только лабораторным путем (опыт Кавендиша). Точность определения  $G$  гораздо меньше, чем большинства других физических констант, это обусловлено малостью гравитационного взаимодействия. Согласно измерениям М.У.Сагитова (ГАИШ) 1978 г.  $G = 6.6745 \pm 0.0008 \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2$ .

Сравним электростатическое и гравитационное взаимодействия двух частиц — электрона и протона :

$$U_{\text{гр}} = -\frac{Gm_p m_e}{r}, \quad U_{\text{эл}} = -\frac{e^2}{r},$$

$$\frac{U_{\text{гр}}}{U_{\text{эл}}} = \frac{Gm_p m_e}{e^2} \simeq 10^{-39}!$$

Итак, в атомных масштабах роль гравитации ничтожна. Однако несмотря на малую величину сил тяготения, в больших астрономических масштабах (планеты, звезды, галактики, скопления галактик) движение материи определяется главным образом гравитационным взаимодействием. Для электромагнитного взаимодействия характерно наличие зарядов разных знаков (плюс и минус). Электрическое поле, которое создается некоторым распределением зарядов, действует на заряды так, чтобы нейтрализовать начальный заряд, и из-за электронейтральности роль электростатических сил в больших масштабах мала. Гравитационное поле одинаковым образом притягивает все различные типы частиц — частицы и даже античастицы (нет

антигравитации!), и сила этого притяжения пропорциональна массе тел, поэтому при переходе к большим масштабам гравитационное взаимодействие является определяющим. Опыт показывает, что частицы с отрицательной массой не существуют. В современной квантовой теории поля предположение о существовании таких частиц создало бы существенные трудности.

### § 1.2. Векторное поле ускорений, теорема Гаусса, гравитационный потенциал, уравнение Пуассона

Введем понятие векторного поля ускорений  $\vec{a}$ , создаваемых гравитирующими телами. Одна точечная масса  $m$  создает поле ускорений :

$$\vec{a} = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{Gm}{r^2}.$$

Окружим массу  $m$  произвольной замкнутой поверхностью (рис.1) и вычислим поток поля  $\vec{a}$  через поверхность  $S$  :

$$\begin{aligned} \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} &= \int_S a \cos \theta dS = - \int_S \frac{Gm}{r^2} \cos \theta dS = \\ &= - \int_S \frac{Gm \cos \theta r^2}{r^2 \cos \theta} d\Omega = -4\pi Gm. \end{aligned}$$

Здесь  $\theta$  — угол между  $\vec{a}$  и нормалью к поверхности  $S$ . Важно отметить, что полный поток оказался независимым от формы поверхности.

Если имеется несколько масс  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , то поле  $\vec{a}$  является суперпозицией полей  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$ , создаваемых этими массами

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots$$

Используя это свойство гравитационного поля и окружая поверхность  $S$  несколько масс, легко получить

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM,$$

где  $M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ .

Можно убедиться, что масса, расположенная вне замкнутой поверхности  $S$ , не дает вклада в  $\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$ .

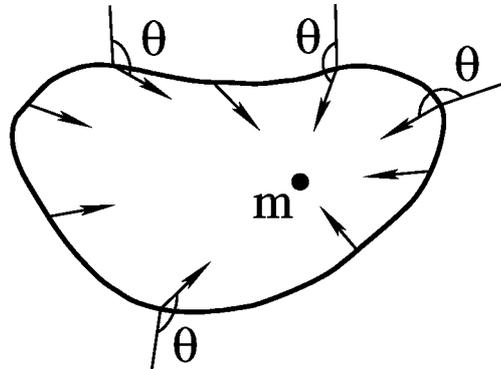


Рис. 1:

Таким образом, полный поток векторного поля  $\vec{a}$  равен

$$\int_S \vec{a} \, d\vec{S} = -4\pi G(m_1 + m_2 + m_3 + \dots),$$

причем в сумму входят только те массы, которые лежат внутри  $S$ . Это положение называется теоремой Гаусса.

Применим теорему Гаусса к сферическому слою. Пусть  $S$  — сфера радиуса  $r$ , лежащая внутри этого слоя. Тогда  $4\pi r^2 \cdot a = 0$ , т.к. внутри  $S$  нет масс. Следовательно, внутри сферического слоя<sup>1</sup>  $a = 0$ . Окружим теперь сферически-симметричную конфигурацию массы  $M$  поверхностью  $S$ . Тогда  $a \cdot 4\pi r^2 = -4\pi GM$  и  $a = -GM/r^2$ . Итак, сферически-симметричная конфигурация создает поле, эквивалентное полю точечной массы, сосредоточенной в ее центре.

Для малого объема  $V$  можно написать

$$\frac{1}{V} \int \vec{a} \, d\vec{S} = -\frac{4\pi Gm}{V},$$

где интеграл берется по поверхности объема  $V$ , а  $m$  — масса, заключенная в этом объеме. В пределе при  $V \rightarrow 0$  отношение  $m/V$  есть локальная плотность  $\rho$ , так что получим

$$\operatorname{div} \vec{a} = -4\pi G \rho.$$

Сделаем следующий шаг — введем потенциал гравитационного поля согласно условию:

$$\vec{a} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Это всегда можно сделать, так как гравитационное поле консервативно: всегда  $\int \vec{a} \, d\vec{l} = 0$ , т.е.  $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ , а это и означает возможность введения потенциала. Теперь имеем

$$\operatorname{div} \vec{a} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta \varphi = -4\pi G \rho,$$

или

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho.$$

Мы получили уравнение Пуассона — основное уравнение теории потенциала. Дифференциальный оператор  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \equiv \Delta$  называют лапласианом. В декартовых координатах

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

<sup>1</sup>При этом используем тот факт, что по симметрии  $\vec{a}$  может быть направлено только по радиусу. К эллиптической полости это доказательство неприменимо.

В сферических координатах  $(r, \theta, \alpha)$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial \alpha^2}.$$

Нетрудно понять, откуда берется такой вид для  $\Delta$ . Рассмотрим член  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}$ , который остается в уравнении Пуассона для сферически-симметричной задачи. Очевидно, что  $\frac{4\pi r^2 \partial\varphi}{\partial r}$  — это поток поля ускорений  $\frac{\vec{a}=\partial\varphi}{\partial r}$  через сферу радиуса  $r$ . Разность потоков  $\vec{a}$  через сферы  $r$  и  $r + \delta r$  равна  $4\pi \delta r \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}$ , объем между сферами —  $4\pi r^2 \delta r$ . Разделив разность потоков  $\vec{a}$  на объем, получаем  $\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}$ . Ясно, что в задаче с цилиндрической симметрией из тех же соображений получим  $\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\varphi}{\partial r}$  ( $r$  — цилиндрический радиус).

Итак, для сферически-симметричного распределения плотности

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} = 4\pi G\rho. \quad (1.1)$$

### § 1.3. Сферически-симметричные поля тяготения, полная и текущая массы звезд, эйлеровы и лагранжевы координаты

Рассмотрим тонкий сферический слой с радиусом  $r$ , толщиной  $\delta \ll r$  и поверхностной плотностью  $\mu$  [г/см<sup>2</sup>]. Найдём силу притяжения со стороны сферы, которая действует на пробную частицу единичной массы, помещённую в какой-либо точке  $A$  внутри сферы. Из рис.2 наглядно видно, что силы притяжения двух элементов масс, вырезанных на сфере телесным углом  $d\Omega$ , одинаковы по величине и противоположны по направлению. Более близкий к точке  $A$  элемент  $dm_1$  имеет меньшую массу, и сила притяжения, создаваемая им в точке  $A$ ,

$$dF_1 = G \frac{dm_1}{r_1^2} = \frac{G\mu dS_1}{r_1^2} = \frac{G\mu d\Omega}{\cos \theta}.$$

Так как правая часть этого выражения зависит лишь от величины телесного угла  $d\Omega$  и  $\cos \theta$ , которые одинаковы для  $dm_1$  и  $dm_2$ , то со стороны  $dm_2$  действует равная по величине сила  $dF_2 = -dF_1$ . Таким образом, любая пара участков сферы внутри двойного конуса  $d\Omega$  даёт полную силу, равную нулю, и пробная частица внутри сферы не испытывает силы и ускорения. Этот результат остается в силе и для сферы конечной толщины ( $\delta \sim r$ ).

Теперь расположим нашу пробную частицу вне сферы (рис. 3). Сила, действующая на частицу в этом случае, равна

$$F = -\frac{GM}{r^2} \quad (1.2)$$

и направлена к центру сферы. Здесь  $M$  — полная масса сферической оболочки,  $r$  — расстояние от  $A$  до центра сферы. Направленность к центру

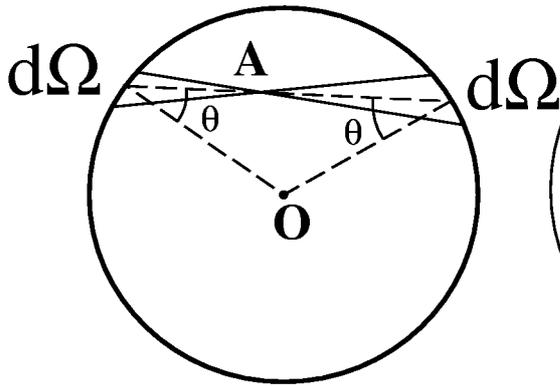


Рис. 2:

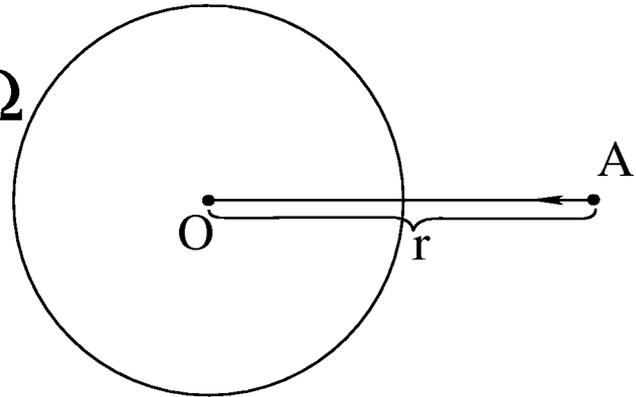


Рис. 3:

сферы очевидна из симметрии задачи, а то что, действие такое же, как от точечной массы, помещенной в центре, можно получить простым интегрированием.

Рассмотрим звезду радиуса  $R$  с переменной плотностью  $\rho(r)$  и полной массой

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr.$$

Полная сила, действующая на пробную частицу при  $r > R$  равна

$$F = -\frac{GM}{r^2},$$

но внутри звезды ( $r < R$ )

$$F = -\frac{Gm(r)}{r^2}.$$

Величину  $m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(q) q^2 dq$  обычно называют текущей массой. Величина  $m(r)$  естественно появляется при рассмотрении равновесия звезд.

Решение нестационарных задач сжатия звезд, как и любых гидродинамических задач, можно проводить двумя способами. Выбирая в качестве независимых переменных координату  $\vec{r}$  и время  $t$ , можно рассматривать изменения физических величин (плотности, давления и т.д.) в какой-либо фиксированной точке пространства (эйлеров подход). Но часто бывает удобно следить за поведением выбранных заранее частиц вещества (лагранжев подход), в этом случае независимыми переменными являются начальные координаты  $r_0(t_0)$  и время  $t$ , а координата  $\vec{r}(t)$  является функцией  $r_0$ . Лагранжев подход чаще всего осуществляется в задачах, обладающих какой-либо симметрией движений, например, при сферически-симметричном расширении (или сжатии) звезды. Зададим в начальный момент в качестве лагранжевой координаты

расстояние до центра звезды  $r_0$ . Сфера с радиусом  $r_0$  содержит вполне определенную часть массы звезды  $m(r_0)$ , величина которой при сферических движениях не меняется со временем. В этом случае текущая масса  $m(r)$  может быть выбрана в качестве независимой (лагранжевой) координаты.

Рассмотрим несколько примеров:

1. Шар радиуса  $R$  имеет постоянную плотность  $\rho = \text{const}$ . Очевидно, что решение уравнения (1.1) имеет вид

$$\varphi = kr^2 + \text{const}.$$

Подставляя это решение в уравнение (1.1), получим

$$\Delta\varphi = 6k = 4\pi G\rho$$

и найдем, что

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}G\rho r^2 + \text{const} \quad (r \leq R). \quad \text{Рис. 4:}$$

Снаружи, при  $r > R$ , имеем  $\varphi = -GM/r$ . Значение  $\text{const}$  находим из условия непрерывности потенциала при  $r = R$  (см. рис. 4) (производные при этом сшиваются автоматически):

$$-\frac{GM}{r} \Big|_R = \frac{2\pi}{3}G\rho r^2 \Big|_R + \text{const}.$$

Учтем, что  $M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$ , и получим

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}G\rho r^2 - 2\pi G\rho R^2 = -\frac{GM}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (\text{при } r \leq R).$$

2. Теперь предположим, что

$$\rho(r) = \mu\delta(r - R)$$

( $\delta(r - R)$  — дельта-функция Дирака), т.е.  $\rho = 0$  при  $r < R$  и  $r > R$ , а масса

$$M = 4\pi \int_0^\infty \rho(r)r^2 dr = 4\pi\mu R^2.$$

Очевидно, что  $\mu$  имеет смысл поверхностной плотности (размерность  $[\mu] = \text{г}/\text{см}^2$ ). Поскольку  $a = d\varphi/dr = 0$  внутри сферы  $R$ , ясно, что  $\varphi = \text{const}$  при  $r < R$ . Снаружи по-прежнему  $\varphi = -GM/r$ . Сшивая потенциал при  $r = R$ , получим (рис. 5)

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{GM}{R} & (r \leq R), \\ -\frac{GM}{r} & (r \geq R). \end{cases}$$

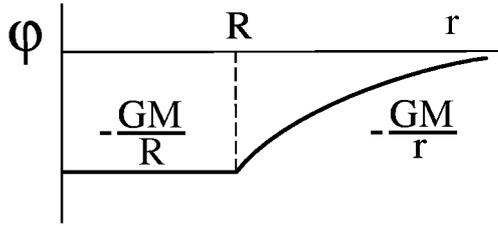


Рис. 5:

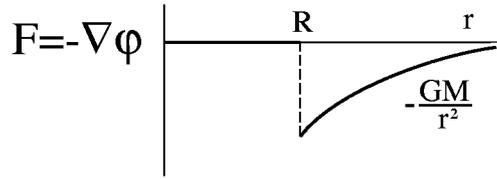


Рис. 6:

Мы видим, что в этом случае  $d\varphi/dr$  имеет разрыв (рис. 6). Можно показать, что этот результат совершенно общий: конечная масса, сосредоточенная в бесконечно тонком слое с конечной поверхностью, дает разрыв нормальной производной потенциала:

$$\left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_1 - \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_2 = 4\pi G\mu.$$

3. Дано:  $\varphi = -GM/r$ . Чему равно  $\Delta\varphi$ ? Непосредственное вычисление производных дает нуль везде, за исключением точки  $r = 0$ . В самом деле

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

и легко убедимся, что  $\Delta\varphi = 0$ , кроме  $x = y = z = 0$ , где имеем неопределенность  $0/0$ .

Еще проще в данном случае вычисление в сферических координатах. Для потенциала, не зависящего от угла  $\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ , и подставляя  $\varphi = 1/r$ , снова получим  $\Delta\varphi = 0$ . Однако неправильно было бы отвечать, что везде  $\Delta(1/r) = 0$ . Такой ответ не верен, так как поток  $d\varphi/dr$  через любую поверхность, окружающую начало координат, отличен от нуля и равен  $4\pi GM$ . Правильный ответ:

$$\Delta\varphi = 4\pi Gm\delta_3(\vec{r}).$$

Здесь  $\delta_3(\vec{r})$  — трехмерная дельта-функция Дирака. Таким образом, отвечая, что  $\Delta\varphi = 0$ , нужно добавить: везде, кроме начала координат, где вторые производные от  $\varphi$  стремятся к бесконечности.

4. Рассмотрим теперь общий случай сферически-симметричного распределения плотности  $\rho(r)$ . Определим, как раньше, текущую массу

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(q)q^2 dq.$$

Интегрируя уравнение Пуассона, последовательно получим

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \int_{\infty}^r \frac{d\varphi}{dq} dq = - \int_r^{\infty} \frac{Gm(q)}{q^2} dq = \int_r^{\infty} Gm(q) d\left(\frac{1}{q}\right) = \\ &= \frac{Gm(q)}{q} \Big|_r^{\infty} - \int_r^{\infty} \frac{Gdm(q)}{q} = -\frac{Gm(r)}{r} - G \int_r^{\infty} \frac{dm(q)}{q}.\end{aligned}$$

Смысл полученного выражения для  $\varphi$  легко понять. Первый член — это потенциал сферически-симметричной массы, расположенной внутри сферы радиуса  $r$ . Второй член является суммой потенциалов от внешних слоев.

С учетом соотношения для  $m(r)$  запишем выражение для потенциала в виде

$$\varphi(r) = -4\pi G \left( \frac{1}{r} \int_0^r \rho(q) q^2 dq + \int_r^R \rho(q) q dq \right).$$

В последнем интеграле мы заменили верхний предел  $\infty$  на  $R$ , предполагая, что при  $r > R$  плотность  $\rho = 0$ .

#### § 1.4. Энергия гравитационного взаимодействия

Мы видели, что энергия гравитационного взаимодействия  $U$  для двух масс  $m_1$  и  $m_2$  равна  $U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ . На случай  $N$  точечных масс выражение для  $U$  обобщается следующим образом:

$$U = \sum_{\substack{i, k \\ i > k}}^N -\frac{Gm_i m_k}{r_{ik}}.$$

При таком определении  $U$  каждая пара  $m_i, m_k$  входит в сумму только один раз. Введем величину

$$\varphi_k = - \sum_{i \neq k}^N \frac{Gm_i}{r_{ik}},$$

что, очевидно, представляет собой гравитационный потенциал, создаваемый в  $k$ -той точке всеми остальными массами. Теперь для  $U$  можно написать

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varphi_k m_k.$$

Коэффициент  $\frac{1}{2}$  появился вследствие того, что каждая пара точек входит в сумму два раза. Это выражение легко обобщить на случай непрерывной среды:

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi dm = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV$$

(по определению  $dm = \rho dV$ ).

Для точечных масс необходимо было отбрасывать энергию самодействия, оговаривая правило суммирования. В сплошной среде самодействие не учитывается автоматически. По порядку величины  $dV \sim (dr)^3$ , и самодействие элемента  $dV$  есть  $G(\rho dV)^2/dr \sim (dr)^5$ , т.е. величина более высокого порядка, чем энергия взаимодействия с остальными массами, которая  $\sim (dr)^3$ .

Используем теперь выражение  $\varphi$  для сферически-симметричного распределения  $\rho(r)$  и вычислим гравитационную энергию. Имеем:

$$U = \frac{G}{2} \int_0^M dm \left\{ -\frac{m}{r} - \int_r^R \frac{dm(q)}{q} \right\}. \quad (1.3)$$

Это выражение можно значительно упростить. Введем вспомогательную функцию  $f(m) = \int_r^R \frac{dm}{q}$ . Очевидно,  $f(M) = 0$  и кроме этого

$$\int_0^M f(m) dm = mf|_0^M - \int_0^M mdf = - \int_0^M mdf.$$

Имеем также  $df = -dm/q$ .

Таким образом, интеграл от первого члена в выражении (3.3) равен интегралу от второго, и окончательно получим

$$U = -G \int_0^M \frac{mdm}{r(m)}.$$

Это выражение проще получить иным путем, рассматривая, какую работу совершают гравитационные силы при наращивании данной конфигурации последовательными слоями. Пусть масса  $m$  с радиусом  $r$  уже изготовлена. Прибавим к этой массе новый сферический слой  $dm$ . Тогда совершенная работа, очевидно, равна  $dU = \frac{Gmdm}{r}$  и т.д. В результате получим

$$U = -G \int_0^M \frac{mdm}{r}.$$

### § 1.5. Давление газа. Уравнение равновесия звезды

Для звезды, находящейся в равновесии, сила гравитационного притяжения, действующая на какой-либо элемент массы  $dm$ , должна быть скомпенсирована равной по величине и противоположной по направлению силой. Такая уравновешивающая гравитацию сила в звездах обусловлена давлением вещества (точнее, градиентом давления).

В общем случае давление  $P$  является величиной, позволяющей описать силу, действующую на выделенный в жидкости или газе объем  $V$  произвольной формы со стороны окружающего его вещества, как интеграл по разделяющей поверхности

$$\vec{F} = - \int_S P d\vec{S}, \quad (1.4)$$

где давление  $P$  зависит только от состояния вещества на этой поверхности. Вектор  $d\vec{S} = \vec{n}dS$  ( $\vec{n}$  — нормаль к элементу поверхности  $dS$ ) направлен в любой точке наружу от поверхности, поэтому в (1.4) перед интегралом стоит знак минус. Из (1.4) следует размерность давления  $[P] = \text{дин}/\text{см}^2$ .

Для жидкости, в которой давление однородно ( $P = \text{const}$ ), имеем очевидное выражение для силы, действующей на замкнутую поверхность:  $\vec{F} = 0$ . Пусть теперь давление неоднородно. В общем случае в малой окрестности некоторой точки, раскладывая в ряд, можно записать:

$$P = P_0 + \vec{r}\nabla P + r_i r_k (\text{вторые производные}) + \dots \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.4), найдем, что с точностью до величин второго порядка малости сила, действующая на объем  $dV$ , ограниченный поверхностью  $dS$ , равна  $d\vec{F}_P = -\nabla P dV$ , т.е. сила давления является объемной силой — она пропорциональна  $dV$  и направлена из области большего давления в область меньшего. Масса объема  $dV$  равна  $dm = \rho dV$ . Сила гравитационного притяжения, которая является массовой силой, равна  $d\vec{F}_g = -\nabla\varphi dm$ .

В равновесии для невращающейся звезды эти две силы должны компенсировать друг друга, т.е.

$$d\vec{F} = -\nabla\varphi dm - \nabla P dV = 0$$

Окончательно условие механического равновесия записывается в виде

$$\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla\varphi = 0.$$

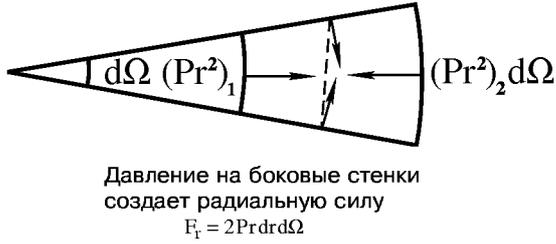


Рис. 7:

Для сферически-симметричных звезд уравнение гидростатического равновесия имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{Gm(r)}{r^2} = 0. \quad (1.6)$$

Сила гравитационного притяжения направлена к центру звезды. Уравновешивающая сила давления

пропорциональна  $-\nabla P$ , т.е. для поддержания равновесия звезды давление должно с необходимостью монотонно расти от поверхности к центру звезды.

Выделим внутри звезды единичный цилиндрический объем ( $dV = dS dr = 1 \text{ см}^3$ ,  $dr = 1 \text{ см}$ ,  $dS = 1 \text{ см}^2$ ) так, чтобы основания цилиндра были перпендикулярны радиусу. Для такого объема сила, обусловленная давлением, равна  $-\frac{dP}{dr}$  [дин/см<sup>3</sup>]. Выделим теперь шаровой сектор с раствором телесного угла  $d\Omega$  (см. рис. 7). Кажется бы, поскольку сила давления на внешнюю поверхность шарового сектора равна  $r^2 P d\Omega$ , то результирующая сила давления, действующая на единичный объем этого сектора, равна  $-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 P)$ . Не будет ли более правильным подставлять это выражение в (1.6) вместо величины  $-\frac{dP}{dr}$ ? Оказывается нет. При выводе силы, действующей на шаровой сектор, мы не учли давление на боковые поверхности сектора, что дает добавочную силу вдоль радиуса  $\frac{P}{r^2} \frac{dr^2}{dr}$ . С учетом последнего мы опять приходим к выражению для силы газового давления  $-\frac{dP}{dr}$ .

В общем случае неізотропного давления следует применять выражение

$$F_r = -\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 P_{rr})}{dr} + \frac{P_{\theta\theta}}{r^2} \frac{dr^2}{dr},$$

где  $P_{rr} \neq P_{\theta\theta}$ . Для обычных газовых звезд давление изотропно — выполняется закон Паскаля:  $P_{rr} = P_{\theta\theta}$  и  $F_r = -\frac{dP}{dr}$ .

Предположим, что нам известно уравнение состояния в виде  $P = P(\rho)$ , т.е. давление является функцией только плотности. Зададимся значениями в центре  $\rho_c$  и  $P_c$  ( $r = 0$ ). Тогда имеем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}, \quad (1.7)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2, \quad (1.8)$$

решая которую, получаем распределение плотности и давления вдоль радиуса.

Рассмотрим асимптотическое поведение решения в центре ( $r \rightarrow 0$ ) и на краю звезды ( $r \rightarrow R$ ). При  $r \rightarrow 0$  получим

$$m \approx \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3,$$

$$P = P_c - k_1 r^2 = P_c - \frac{2\pi}{3} G \rho_c^2 r^2,$$

$$\rho = \rho_c - k_2 r^2 = \rho_c - \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)^{-1} \frac{2\pi}{3} G \rho_c^2 r^2,$$

т.е. в центре  $dP/dr = 0$  и  $d\rho/dr = 0$ .

На краю звезды имеем  $m = M$  и, интегрируя уравнение равновесия (1.7), получим

$$\int \frac{dP}{\rho} = \frac{GM}{r} + \text{const.}$$

Для того чтобы звезда имела определенную внешнюю границу, интеграл  $\int dP/\rho$  должен сходиться при  $\rho \rightarrow 0$ . Например, для изотермической атмосферы  $P \sim \rho T$  ( $T = \text{const}$ ) интеграл расходится, т.е. изотермическая атмосфера должна быть бесконечна.

Если давление является степенной функцией плотности  $P = K \rho^\gamma$ , то необходимым (но не достаточным) условием конечности атмосферы является  $\gamma > 1$ . В этом случае

$$\rho^{\gamma-1} \sim A + \frac{GM}{r}.$$

Из условия  $\rho \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow R$  получим  $A + \frac{GM}{R} = 0$  и

$$\rho^{\gamma-1} \sim M \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \sim \frac{M(R-r)}{R^2}, \text{ т.е. } \rho \sim (R-r)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

вблизи края звезды. Для частного, но встречающегося часто случая  $\gamma = 4/3$  ( $\rho \sim T^3$ ,  $P \sim \rho T \sim \rho^{4/3}$ ), получим  $\rho \sim (R-r)^3$  при  $r \rightarrow R$ .

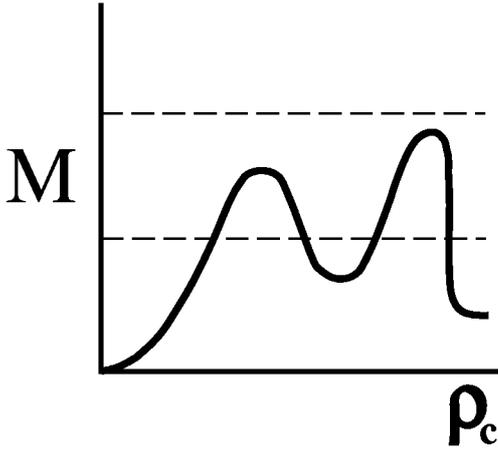


Рис. 8:

При определенном уравнении состояния  $P(\rho)$  не всегда можно решить задачу для данной массы (может оказаться, что решений для выбранной массы вообще не существует). Однако, задавая центральную плотностью  $\rho_c$ , можно найти набор решений с различными массами, т.е. построить кривую  $M(\rho_c)$  (рис. 8). После этого уже видно, какие решения соответствуют данной массе, при каких массах существуют решения (т.е. состояния равновесия) и т.п.

Такой же подход применим и в ОТО. Качественно все остается по-

прежнему: решение можно находить, интегрируя от центра, так как внешние слои не создают ускорения.

## § 1.6. Основы термодинамики звезд

Ограничимся случаем химически однородной звезды. Одной из самых важных термодинамических функций вещества является удельная тепловая энергия  $E$ . Пусть  $E$  известна как функция удельного объема  $v = 1/\rho$  [см<sup>3</sup>/г] и удельной энтропии  $S$ :  $E = E(v, S)$ .

По I закону термодинамики  $dE = -Pdv + TdS$ . Поэтому, зная  $E(v, S)$ , можно найти и другие термодинамические величины. Например,

$$P = -\left.\frac{\partial E}{\partial v}\right|_S; \quad T = \left.\frac{\partial E}{\partial S}\right|_v.$$

При заданной температуре  $T$  иногда при расчетах удобно пользоваться свободной энергией системы  $F = E - TS$ :

$$dF = -Pdv - SdT.$$

Таким образом,  $F = F(v, T)$ . Однако при исследовании механической устойчивости равновесной звезды важно знать  $E(v, S)$ , так как процессы теплопроводности в звезде очень медленные и поэтому пульсации происходят адиабатически, т.е. с сохранением энтропии, но не температуры.

Введем еще одну важную термодинамическую функцию — энтальпию  $H = E + Pv$

$$dH = TdS + vdP.$$

Если энтропия фиксирована, то  $dH|_S = vdP = \frac{dP}{\rho}$ . Используя это соотношение, запишем условие равновесия звезды  $-\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\varphi = 0$  в виде  $-\nabla(H + \varphi) = 0$ . Итак, для изэнтропических звезд ( $S = \text{const}$ ) условие равновесия есть  $H + \varphi = \text{const}$  по звезде. На краю  $P = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $H = 0$ , поэтому  $\text{const} = -\frac{GM}{R}$ . Внутри звезды энтальпия является “зеркальным отражением”  $\varphi$  (рис. 9).

Каков физический смысл соотношения  $H + \varphi = \text{const}$ ? Возьмем 1 г холодного вещества на бесконечности и поместим его в звезду на расстоянии  $r$  от центра. Работа гравитационного поля при этом равна  $\varphi(r)$ . Чтобы этот грамм находился в равновесии с веществом звезды, его необходимо нагреть до температуры окружающей среды  $T(r)$ , придать объем  $v(r)$ , т.е. совершить работу  $E(T, v)$ . Кроме этого,

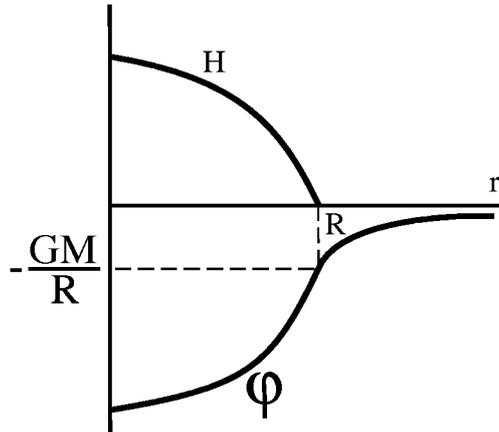


Рис. 9:

необходимо произвести работу  $Pv$ , освобождая полость объема  $v$ , в которую мы поместим наш элемент. Итак, полная работа равна  $\varphi + E + Pv = \varphi + H$ . Условие  $\varphi + H = \text{const}$  говорит о том, что затраченная работа не зависит от места, в котором мы размещаем элемент вещества.

Вместо того, чтобы брать элемент вещества на бесконечности, мы можем взять его в другом месте звезды. Тогда условие  $H + \varphi = 0$  означает, что полная работа при перестановке двух элементов равна нулю, т.е. изэнтропическая звезда находится в безразличном равновесии относительно таких перестановок.

### § 1.7. Вариационный принцип

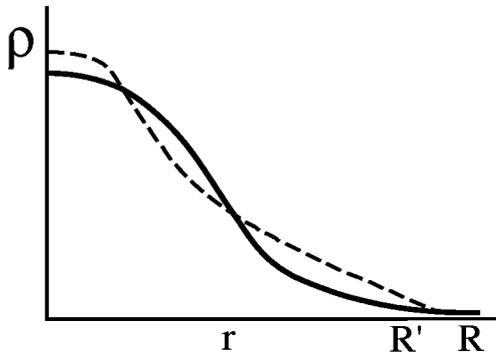


Рис. 10:

В химически однородной звезде не обязательно переносить вещество: к тем же результатам относительно устойчивости можно прийти, просто изменяя распределение вещества  $\rho(r)$ , не меняя при этом взаимного расположения слоев (рис. 10). Можно утверждать, что если равновесие звезды слегка нарушить, то энергия при этом не изменится. Точная формулировка этого утверждения: условие экстремума полной энергии звезды  $\mathcal{E}$  совпадает с условием равновесия.

Рассматриваем звезду с произвольным распределением энтропии  $S(r)$ . Полная энергия звезды  $\mathcal{E}$  складывается из тепловой энергии  $Q = \int_0^M E(v, S) dm$

и гравитационной энергии  $U = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm$ :

$$\mathcal{E} = \int_0^M E(v, S) dm - G \int_0^M \frac{m}{r} dm.$$

Найдем условие экстремума  $\mathcal{E}$ , используя  $m$  в качестве лагранжевой координаты. Распределение плотности полностью определено, если задана функция  $\rho(m)$ . Будем варьировать  $r(m)$ , т.е. смещать отдельные слои, считая энтропию  $S(m)$  фиксированной, при этом у нас будут определены вариации и всех остальных величин. Имеем:

$$\delta U = -G \int_0^M m dm \delta \left( \frac{1}{r} \right) = G \int_0^M \frac{m dm}{r^2} \delta r;$$

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr = \rho d\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right), \quad \text{поэтому } v = \frac{d}{dm}\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right).$$

Тогда  $\delta Q = \int_0^M \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_S \delta v dm = - \int_0^M P \frac{d}{dm} (\delta \frac{4\pi}{3} r^3) dm$ . Интегрируя по частям с учетом того, что  $r(0) = 0$ ,  $P(M) = 0$ , получим

$$\delta Q = \int_0^M \delta\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right) \frac{\partial P}{\partial m} dm = \int_0^M 4\pi r^2 \delta r \frac{\partial P}{4\pi r^2 \rho \partial r} dm = \int_0^M \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \delta r dm.$$

В результате

$$\delta \mathcal{E} = \int_0^M dm \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{Gm}{r^2} \right] \delta r.$$

Если  $\mathcal{E}$  экстремально, то  $\delta \mathcal{E} = 0$  при любых  $\delta r(m)$ , следовательно, из экстремальности  $\mathcal{E}$  следует уравнение равновесия

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = - \frac{Gm}{r^2}.$$

Чем полезен вариационный принцип? Оказывается, что с помощью этого принципа исследовать устойчивость много проще, чем используя уравнение равновесия. В этом можно убедиться следующим образом. Запишем выражение для полной энергии звезды, не предполагая равенства нулю скоростей движения вещества звезды:

$$\mathcal{E} = \int_0^M \left[ E(v, S) - \frac{Gm}{r} + \frac{u^2}{2} \right] dm,$$

где  $u$  — скорость элемента массы. Очевидно, что равновесное расстояние (которое всегда соответствует экстремуму энергии) будет устойчивым, если экстремум является минимумом. Действительно, тогда из него не может возникнуть никакое другое состояние, ни с  $u = 0$  (но другим  $r(m)$ ), ни тем более с  $u^2 > 0$ . Следовательно, исследование устойчивости сводится к нахождению условий, при которых вторая вариация энергии  $\delta^2 \mathcal{E} > 0$ .

Помимо исследования устойчивости вариационный принцип позволяет находить приближенные решения для структуры звезды.

### § 1.8. Теорема вириала

Предположим, что уравнение состояния степенное:  $P = K\rho^\gamma$ . Тогда удельная тепловая энергия  $E = \frac{K}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} = \frac{K}{\gamma-1}v^{-(\gamma-1)}$ . Мы знаем, что в равновесии  $\delta \mathcal{E} = 0$  при произвольной  $\delta r(m)$ . Пусть  $\delta r = \alpha r$  ( $|\alpha| \ll 1$ ). Такое возмущение

описывает подобное (гомологическое) расширение или сжатие звезды. Тогда  $v' = (1 + 3\alpha)v$ ,  $\delta U = -\alpha U$ ,  $\delta Q = -3(\gamma - 1)\alpha Q$ . Следовательно,

$$\delta \mathcal{E} = -3(\gamma - 1)\alpha Q - \alpha U = 0,$$

откуда

$$Q = -\frac{1}{3(\gamma - 1)}U$$

(это соотношение и называют теоремой вириала). Для одноатомного газа с  $\gamma = \frac{5}{3}$  имеем  $Q = -\frac{U}{2}$ ,  $\mathcal{E} = \frac{U}{2} = -Q$ .

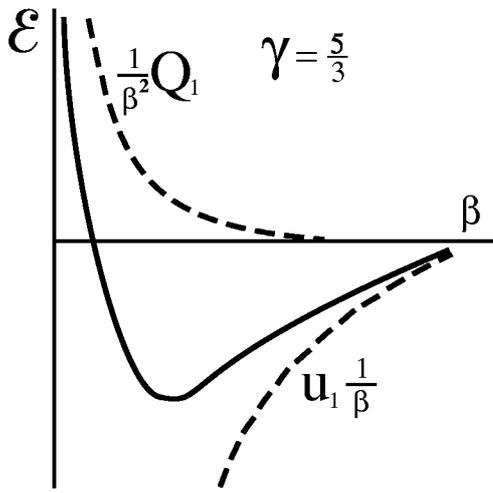


Рис. 11:

Теперь положим  $r' = \beta r$ , причем не будем считать  $|\beta - 1|$  малой величиной, а исходное состояние — равновесным. Обозначим через  $U_1$  и  $Q_1$  соответствующие величины энергий исходной модели. Тогда после преобразования  $U = \frac{1}{\beta}U_1$ ,  $Q = \frac{1}{\beta^3(\gamma-1)}Q_1$  (для степенного уравнения состояния). Если  $\gamma = \frac{5}{3}$ , то  $Q = \frac{1}{\beta^2}Q_1$ . Как выглядит в этом случае кривая  $\mathcal{E}(\beta)$ ? При  $\beta \rightarrow \infty$  асимптотика определяется величиной  $U$ , при  $\beta \rightarrow 0$  — величиной  $Q$  (рис. 11). Получаем, что при  $\gamma = 5/3$  кривая имеет один и только один минимум, т.е. равновесие устойчиво.

Получим теорему вириала другим способом из уравнения равновесия, причем зависимость  $P(\rho)$  может быть произвольной. (Выше при выводе теоремы вириала из вариационного принципа зависимость  $P = K\rho^\gamma$  была существенна). Умножим уравнение равновесия (1.6) на  $r$ :

$$-\frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{Gm}{r}$$

и проинтегрируем по  $dm$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{Gm dm}{r} &= - \int \frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr} dm = - \int \frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr} 4\pi \rho r^2 dr = \\ &= -4\pi P r^3 \Big|_0^R + 3 \int P 4\pi r^2 dr = 3 \int P dV, \end{aligned}$$

т.е.

$$\int \frac{Gm dm}{r} = 3 \int P dV$$

теорема вириала при произвольном  $P(\rho)$ .

При степенном уравнении состояния, используя  $P = (\gamma - 1)E\rho$ , имеем уже известное соотношение  $U = -3(\gamma - 1)Q$ .

В действительности уравнение состояния не степенное, но для многих оценок полезно знать свойства звезд с таким уравнением состояния. Для степенного уравнения состояния имеется подобие, т.е. достаточно решить задачу при данном  $\gamma$  для одного значения  $\rho_c$ , чтобы найти функциональную зависимость  $M(\rho_c)$  и  $R(\rho_c)$ . В систему уравнений

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{Gm}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad P = K\rho^\gamma$$

входят размерные константы

$$[G] = \frac{\text{см}^3}{\Gamma \cdot \text{с}^2}, \quad [K] = \frac{\text{см}^2}{\text{с}^2} \left( \frac{\Gamma}{\text{см}^3} \right)^{-\gamma+1}, \quad [\rho_c] = \frac{\Gamma}{\text{см}^3}.$$

Поэтому, комбинируя  $G$ ,  $K$ ,  $\rho_c$  в различных степенях, можно получить массу, радиус и другие характеристики звезды. Эту задачу можно решить формально, составляя систему уравнений типа

$$[R] = \text{см}^1 = [G]^x [K]^y [\rho_c]^z = \text{см}^\alpha \Gamma^\beta \text{с}^\delta,$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \delta = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$3x + (3\gamma - 1)y - 3z = 1,$$

$$-x + (1 - \gamma)y + z = 0,$$

$$-2x - 2y = 0;$$

откуда  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ ,  $z = \frac{\gamma-2}{2}$ , т.е.  $R \sim (K/G)^{\frac{1}{2}} \rho_c^{\frac{\gamma-2}{2}}$ .

Более наглядно эта связь получается с помощью порядковых оценок:

$$P_c \simeq \frac{GM^2}{R^4}, \quad \rho_c \simeq \frac{M}{R^3}, \quad P_c = K\rho_c^\gamma.$$

Смысл первого соотношения легко понять, если вспомнить, что сила притяжения между двумя половинками звезды  $\sim \frac{GM^2}{R^2}$ , а давление (сила на единицу площади, пропорциональной  $R^2$ )  $\sim \frac{GM^2}{R^4}$ . Исключая из этих выражений  $M$ , имеем выражение для  $R$ , а исключая  $R$ , находим

$$\frac{P_c}{\rho_c^{4/3}} \sim GM^{2/3} \sim K\rho_c^{\gamma-4/3}, \quad \rho_c \sim \left( \frac{GM^{2/3}}{K} \right)^{\frac{1}{\gamma-4/3}}.$$

Подчеркнем, что вид кривых  $M(\rho_c)$  и  $R(\rho_c)$  зависит от безразмерной величины  $\gamma$ , т.е. кривые для разных  $\gamma$  не подобны.

## Глава 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛИТРОПНЫХ ШАРОВ (ТЕОРИЯ ЛЕЙНА–РИТТЕРА–ЭМДЕНА)

### § 2.1. Уравнение Эмдена

В этой главе мы будем изучать равновесные конфигурации звезд, подчиняющихся степенному (политропному) уравнению состояния

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+\frac{1}{n}},$$

где  $\gamma$  — показатель,  $n$  — индекс политропы. Интерес к этому уравнению состояния возник еще в прошлом веке, когда думали, что все звезды полностью конвективны. При этом можно предположить, что энтропия постоянна. Интегрируя термодинамические равенства

$$dE = -Pdv = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{\rho^2} d\rho = K\rho^{-1+\frac{1}{n}} d\rho,$$

получаем выражение для внутренней энергии

$$E = nK\rho^{\frac{1}{n}} = n\frac{P}{\rho}.$$

Отсюда энтальпия

$$H = E + Pv = E + \frac{P}{\rho} = (n+1) \frac{P}{\rho}.$$

В случае идеального газа известно, что ( $c_v$  — теплоемкость,  $\mathcal{R}$  — газовая постоянная)

$$E = \frac{c_v}{\mu} T, \quad P = \rho \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \quad \text{или} \quad \frac{P}{\rho} = \frac{\mathcal{R}T}{\mu}, \quad E = \frac{c_v}{\mathcal{R}} \frac{P}{\rho}.$$

Для одноатомного газа

$$c_v = \frac{3}{2}\mathcal{R} \quad \text{и} \quad n = \frac{3}{2}.$$

То же можно вычислить и для многоатомных газов, но этот случай неинтересен: сейчас мы знаем о звездах несколько больше, чем 100 лет назад.

Введем переменную  $\Theta$  таким образом, чтобы

$$\rho = \lambda\Theta^n, \quad P = K\lambda^{1+\frac{1}{n}} \Theta^{n+1},$$

$$\text{т.е. имеем } \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{\lambda\Theta^n}{\rho_c}, \quad \frac{P}{\rho} = K\lambda^{\frac{1}{n}}\Theta \quad \text{и} \quad H = (n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}}\Theta.$$

Для идеального газа с постоянной теплоемкостью величина  $\Theta$  пропорциональна температуре. Возьмем условие равновесия в виде

$$\varphi + H = \text{const}$$

и подействуем на него оператором  $\Delta$ . Лапласиан  $\varphi$  есть  $4\pi G \rho$ , т.е.  $\Delta\varphi = 4\pi G \lambda \Theta^n$ , а лапласиан  $H$  есть  $(n+1)K\lambda^{1/n}\Delta\Theta$ , и уравнение равновесия запишется в виде

$$4\pi G \lambda \Theta^n + (n+1)K\lambda^{1/n}\Delta\Theta = 0.$$

Будем упрощать полученное соотношение, изменяя масштаб, т.е. вводя переменную  $\xi$  через соотношение  $r = \alpha\xi$ ,

$$4\pi G \lambda \Theta^n + \frac{(n+1)K\lambda^{1/n}}{\alpha^2} \Delta_\xi \Theta = 0,$$

где  $\Delta_\xi = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi}$ .

Выберем  $\alpha$  так, чтобы  $4\pi G \lambda = (n+1)K\lambda^{1/n}/\alpha^2$ . Тогда уравнение равновесия запишется в виде

$$\Delta_\xi \Theta + \Theta^n = 0, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} + \Theta^n = 0.$$

Таким образом, при данном  $n$  уравнение равновесия одно и то же для звезд любой массы. Решая уравнение при граничных условиях  $\Theta(0) = 1$ ,  $\left. \frac{d\Theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0$  (т.е. положив  $\lambda = \rho_c$ ), получим монотонное убывание  $\Theta$  от единицы к нулю (рис. 12). Значение  $\xi_1$ , где  $\Theta(\xi_1) = 0$ , является границей звезды. Плотность  $\rho$ , пропорциональная  $\Theta^n$ , при  $n > 1$  спадает более круто, чем  $\Theta$ . Мы уже показывали в § 1.5, что при степенном уравнении состояния на краю звезды  $\rho \sim (R-r)^{1/(\gamma-1)}$ . Но  $\gamma = 1 + 1/n$ , т.е.  $\rho \sim (R-r)^n \sim \Theta^n$ . Поэтому  $\Theta \sim (\xi_1 - \xi)$  и вблизи  $\xi = \xi_1$  величина  $\Theta$  проходит нуль с конечной производной, хотя  $\Theta^n$  “стелется” (при  $n > 1$ ), т.е. подходит к нулю, касаясь оси абсцисс.

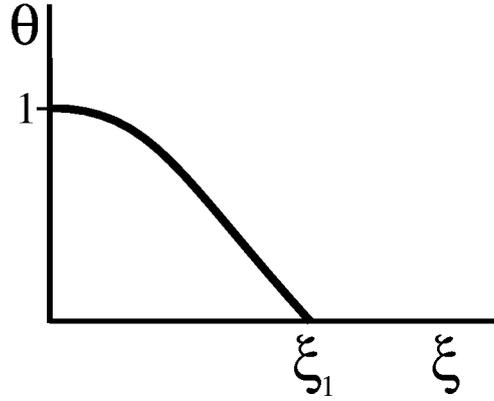


Рис. 12:

Ясно, что для звезд с различными  $\rho_c$  и  $K$  кривые с одинаковыми  $n$  подобны. Достаточно знать только одну функцию  $\Theta(\xi)$ . Подчеркнем важность конечного условия  $\left. \frac{d\Theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0$ . Обратное  $\left( \left. \frac{d\Theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} \neq 0 \right)$  означало бы конечный скачок ускорения в центре (т.е. особенность).

Несколько авторов в прошлом веке численно проинтегрировали уравнение для различных  $n$ . В частности, Эмден получил таблицы  $\Theta_n(\xi)$  с большой точностью. Значение этих вычислений теперь невелико, так как расчет реальных звезд проводится с учетом физических факторов, совершенно не учитываемых в политропной теории (нестепенное уравнение состояния; истинная связь  $P$  и  $\rho$  получается из рассмотрения всех процессов, включая перенос излучения, ядерные реакции). Однако для качественных исследований решение уравнений Эмдена весьма полезно. Например, с помощью политропной модели легко показать невозможность существования сверхмассивных звезд. Это важно для проблемы квазаров.

## § 2.2. Основные параметры политропы

При данном  $\xi_1$  радиус звезды  $R = \alpha\xi_1$ ,

$$\alpha = \left[ (n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n}-1}/4\pi G \right]^{1/2}.$$

Введем безразмерную величину  $\mu_1 = \int_0^{\xi_1} \Theta^n \xi^2 d\xi$ . Тогда масса звезды

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr = 4\pi\alpha^3 \rho_c \mu_1,$$

отсюда легко получить точную связь между центральной плотностью и массой звезды

$$\rho_c = \lambda = (4\pi)^{\frac{n}{3-n}} \left( \frac{M}{\mu_1} \right)^{\frac{2n}{3-n}} \left( \frac{G}{(n+1)K} \right)^{\frac{3n}{3-n}}.$$

Для давления звезды в центре имеем

$$P_c = p_1 G M^{2/3} \rho_c^{4/3}, \quad \text{где } p_1 = (4\pi)^{1/3} / (n+1) \mu_1^{2/3}.$$

Заметим, что  $P_c$  (при данных  $M$ ,  $\rho_c$ ) не зависит от  $K$ . Этот результат естественен, если вспомнить, что

$$P \sim \frac{GM^2}{R^4} \sim GM^{2/3} \rho_c^{4/3}.$$

Но распределение давления по звезде зависит от  $n$ , поэтому выражение для  $P_c$  содержит структурный множитель  $p_1(n)$ . Введем еще множитель  $R_1(n)$  таким образом, чтобы

$$R = R_1(n) [K^n G^{-n} M^{1-n}]^{1/(3-n)}.$$

Таблица 1:

$n$	$\xi_1$	$\mu_1$	$\rho_c/\rho_{cp}$	$p_1$	$I_1$	$R_1(n)$
0	2.45	4.90	1.00	0.806	0.400	0.602
0.5	2.75	3.79	1.84	0.638	—	0.832
1	3.14	3.14	3.29	0.542	0.261	1.253
1.5	3.65	2.71	5.99	0.478	0.205	2.35
2	4.35	2.41	11.4	0.431	0.155	7.53
2.5	5.36	2.19	23.4	0.394	0.112	186
3	6.90	2.02	54.2	0.364	0.075	—
4	14.97	1.80	622	0.315	—	0.0517
5	$\infty$	1.73	$\infty$	0.269	0	

В ряде случаев (например, в задачах вращения) важен момент инерции звезды, выражение для которого запишем в виде

$$I = I_1 M R^2.$$

В таблице 1 мы приводим значения введенных нами структурных величин для наиболее важных значений  $n$ . Выше (§ 1.7; 1.8) были введены выражения для полной, гравитационной и тепловой энергий звезды. Интегрируя эти выражения для политропных шаров, можно получить следующие соотношения:

$$\mathcal{E} = -\frac{3-n}{5-n} \frac{GM^2}{R}, \quad U = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R},$$

$$Q = \frac{n}{5-n} \frac{GM^2}{R}.$$

Однако есть более изящный способ вывода этих выражений с использованием соображений размерности и вариационного принципа.

Запишем выражение для полной энергии  $\mathcal{E}$  в виде  $\mathcal{E} = -aGM^2/R$ , где  $a$  заранее не известно, и подставим зависимость  $R(M)$ , тогда  $\mathcal{E} \sim GM^2 R^{-\frac{1-n}{3-n}} \sim GM^{\frac{5-n}{3-n}}$  или в дифференциальной форме  $d\mathcal{E} = \frac{5-n}{3-n} GM^{\frac{5-n}{3-n}-1} dM = \frac{5-n}{3-n} \frac{\mathcal{E}}{M} dM$ . Здесь  $d\mathcal{E}$  есть разность энергий двух равновесных звезд, массы которых различаются на  $dM$ .

Но мы можем изменить  $\mathcal{E}$ , добавляя массу  $dM$  на поверхность звезды (т.е. при  $P = 0$ ). Тогда  $d\mathcal{E} = -\frac{GM}{R} dM$ , так как внутренняя энергия куска равна нулю, и изменилась только гравитационная энергия. Полученная конфигурация  $M + dM$  не является равновесной. Тем не менее согласно вариационному принципу с точностью до  $(dM)^2$  изменение энергии звезды безразлично к тому, каким образом меняется масса звезды. Поэтому  $d\mathcal{E}_1 = d\mathcal{E}_2$ , откуда

$$\frac{5-n}{3-n} \frac{\mathcal{E}}{M} = -\frac{GM}{R} \quad \text{и} \quad \mathcal{E} = -\frac{3-n}{5-n} \frac{GM^2}{R}.$$

С другой стороны, по теореме вириала  $\frac{Q}{U} = -\frac{n}{3}$ ,

$$\mathcal{E} = Q + U = \frac{3-n}{3}U = \frac{n-3}{n}Q.$$

Таким образом,

$$Q = \frac{n}{5-n} \frac{GM^2}{R}, \quad U = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}.$$

### § 2.3. Частные случаи политропных моделей

1.  $n = 5$ . Как видно из выше приведенной таблицы, при  $n = 5$  безразмерный радиус  $\xi_1 \rightarrow \infty$ . Из формул для  $\mathcal{E}$ ,  $Q$ ,  $U$  видно, что конечные значения энергий звезды совместимы с конечной массой только при  $R \rightarrow \infty$ . Решения уравнения Эмдена с  $n > 5$  вообще теряют обычный физический смысл.

Случай  $n = 5$  имеет аналитическое решение вида

$$\Theta = (1 + \xi^2/3)^{-1/2}, \quad \xi_1 = \infty.$$

Легко проверить, что полная масса звезды конечна. В самом деле, при  $\xi \rightarrow \infty$   $\Theta \sim 1/\xi$ , а выражение для массы  $M \sim \mu_1 \sim \int_0^\infty \Theta^5 \xi^2 d\xi$  сходится на верхнем пределе. Полный момент инерции  $I \sim \int_0^\infty \Theta^5 \xi^4 d\xi \sim \ln \xi \rightarrow \infty$ , но  $I/MR^2 \rightarrow 0$ , так как основная часть массы сосредоточена в центре.

2.  $n = 1$ . Для давления в этом случае имеет место соотношение

$$P = K \rho^2$$

и, следовательно,  $\rho \sim \Theta$  и  $H \sim E \sim T \sim P/\rho \sim \Theta$ . Таким образом, получаем линейное уравнение

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} + \Theta = 0,$$

одно из решений которого, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\Theta = \frac{\sin \xi}{\xi}$$

и обращается в нуль при  $\xi_1 = \pi$ . В силу линейности задачи радиус звезды  $R$  не зависит от массы. При данном  $K$  величины  $E$  и  $H$  пропорциональны  $\rho$ , и в один объем можно вложить (равновесно!) разное

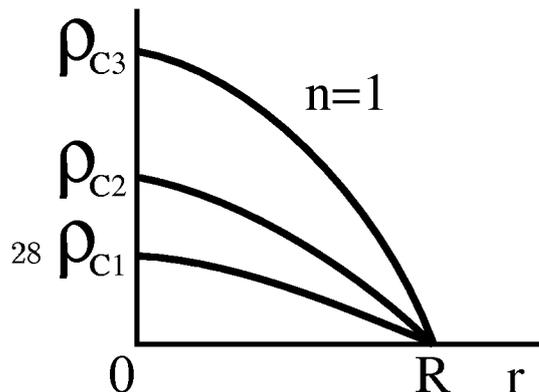


Рис. 13:

количество вещества. При увеличении массы растет только центральная плотность  $\rho_c$  (рис. 13).

Задача. Получите этот результат из размерностных соображений. Учтите при этом, что размерность  $K$  зависит от индекса  $n$ .

3.  $n = 0$  — несжимаемая жидкость. Формально при  $n \rightarrow 0$  из уравнения состояния  $P = K\rho^{1+1/n}$  следует, что малые изменения  $\rho$  дают большие изменения  $P$ . Это дает нам право отождествлять случай  $n = 0$  с несжимаемой однородной жидкостью  $\rho = \text{const} = \rho_c$ . Так как тепловая энергия  $E$  равна работе, затраченной на сжатие данного газового объема, в случае несжимаемой жидкости  $E = 0$  и, следовательно,  $Q = 0$ . Это видно и из формулы  $Q = \frac{n}{5-n} \frac{GM^2}{R}$  для  $n = 0$ . Полная энергия  $\mathcal{E}$ , очевидно, равна гравитационной  $U$ .

4.  $n = 3$ . Случай  $n = 3$  является наиболее интересным и физически важным. Как мы увидим ниже, он осуществляется и в белых карликах, и в больших горячих звездах, где  $P = \varepsilon/3$ ,  $P \sim \rho^{4/3}$  (здесь  $\varepsilon$  — плотность энергии [эрг/см<sup>3</sup>]). И даже для Солнца наиболее близки к реальности политропные модели с  $n = 3$ .

В чем особенность этого случая? Во-первых, теория политропных шаров при данном уравнении состояния (при данном  $K$ ) и данной массе  $M$  не позволяет вычислить радиус звезды. Кроме того, полная энергия звезды  $\mathcal{E} = 0$ , т.е.  $U = -Q$ .

Почему это происходит? Рассмотрим порядковые оценки. Тепловая энергия  $Q$  при  $n = 3$  по порядку равна  $Q \sim MP/\rho \sim MK\rho^{1/3}$ . Для гравитационной энергии всегда имеем  $U \sim -GM^2/R \sim -GM^2/(M/\rho)^{1/3}$ . Полная энергия  $\mathcal{E} = Q + U$ . Очевидно, что для разных  $M$  энергия  $\mathcal{E}$  по-разному зависит от  $\rho^{1/3}$  (рис. 14). В любом случае зависимость  $\mathcal{E}(\rho^{1/3})$  линейная. Очевидно, что при  $\mathcal{E} > 0$  система при малых возмущениях начнет разлетаться ( $\mathcal{E}$  стремится уменьшиться), а при  $\mathcal{E} < 0$  будет неограниченно сжиматься (коллапсировать). Равновесие возможно только при  $\mathcal{E} = 0$ , для этого случая имеется только одно определенное значение массы:

$$KM = GM^{5/3} \rightarrow M \sim \left(\frac{K}{G}\right)^{3/2}.$$

Точное выражение

$$M = \frac{4\mu_1}{\pi^{1/2}} \left(\frac{K}{G}\right)^{3/2}. \quad (2.1)$$

Таким образом, равновесная модель с  $n = 3$  имеет три важных свойства:

1) равновесие возможно только при одном определенном значении массы (если  $K$  фиксировано), 2) полная энергия  $\mathcal{E} = 0$ , 3) радиус звезды  $R$  может быть любым, т.е. равновесие безразличное.

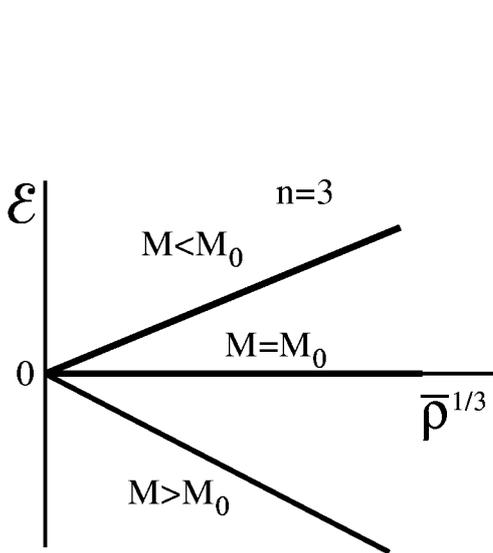


Рис. 14:

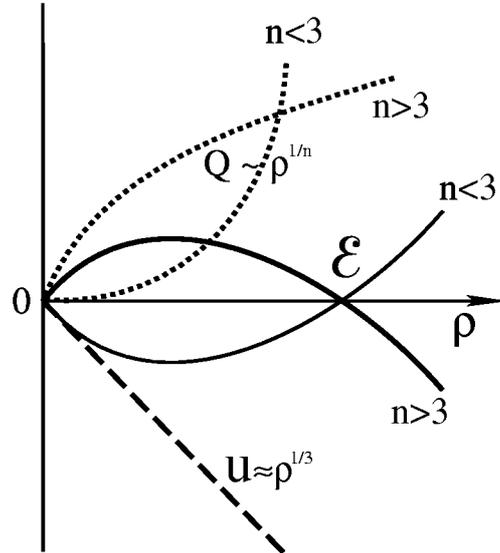


Рис. 15:

Рассмотрим кратко, как ведет себя полная энергия  $\mathcal{E}$  в зависимости от плотности при  $n \geq 3$  (рис. 15). В случае  $n < 3$  набор кривых для разных масс имеет минимум, а при  $n > 3$  максимум. Очевидно, что точки  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho^{1/3}} = 0$  являются положениями равновесия, но при  $n < 3$  это равновесие устойчиво, а при  $n > 3$  неустойчиво.

## § 2.4. Теория белых карликов

Из наблюдений известно, что массы белых карликов порядка солнечной, но размеры составляют лишь сотую часть солнечного радиуса (и даже меньше), т.е. белые карлики представляют собой звезды с чрезвычайно большой плотностью вещества  $\rho \sim 10^5 - 10^9$  г/см<sup>3</sup>. В таком состоянии обычные атомы разрушаются, а вещество состоит из ядер и свободных электронов, которые подчиняются статистике Ферми–Дирака.

Получим уравнение состояния для вещества белых карликов.

В импульсном пространстве число клеток (состояний) в 1 см<sup>3</sup> равно  $dn = d^3p / (2\pi\hbar)^3$ , где  $(2\pi\hbar)^3$  — объем одной клетки (фазовой ячейки). Согласно статике Ферми–Дирака в одном состоянии может находиться только один электрон, и полное число электронов  $N$ , заключенное в фазовом объеме  $V_p =$

$\int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{4\pi}{3} p_F^3$ , с учетом спина равно

$$N = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} V p_F^3.$$

Здесь  $p_F$  — граничный импульс Ферми, выше которого при  $T = 0$  все уровни свободны. Итак, число электронов в одном кубическом сантиметре

$$N = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3 = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3} p_F^3.$$

Удобно выражать  $p_F$  в единицах  $m_e c$ , вводя безразмерный параметр  $x = p_F/m_e c$ . Тогда  $N = \frac{(m_e c)^3}{3\pi^2\hbar^3} x^3$ . Параметр  $x$  является мерой релятивизма: при  $x \ll 1$  электроны нерелятивистские, при  $x \gg 1$  ультрарелятивистские. Какой плотности вещества соответствует данный  $x$ ? Обозначим через  $\mu_e$  молекулярный вес на один электрон, т.е. среднее число нуклонов на один электрон ( $\mu_e = 1$  для водорода,  $\mu_e = 2$  для  ${}^4\text{He}_2$  и  $\mu_e = 2,2$  для  ${}^{56}\text{Fe}_{26}$ ). Тогда  $\rho = \mu_e \cdot 1,6 \cdot 10^{-24} N = \mu_e \cdot 10^6 x^3 [\text{г/см}^3]$ . Отсюда следует, что при  $\rho < \mu_e \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$  имеем  $x < 1$ , т.е.  $p_F < m_e c$ , и электроны нерелятивистские. При  $\rho > \mu_e \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$ ,  $p_F > m_e c$ .

Для водорода  $x = 0,1$  осуществляется при плотности  $\rho = 1000 \text{ г/см}^3$  (для  ${}^{56}\text{Fe}_{26}$  это соответствует  $\rho = 2200 \text{ г/см}^3$ ). Ферми-энергия электронов в этих условиях  $E_F = p_F^2/2m_e = 5 \cdot 10^{-3} m_e c^2 = 2500 \text{ эВ}$ , что в десятки раз превышает энергию связи электронов атома водорода ( $E_{\text{св}} = 13,6 \text{ эВ}$ ). Таким образом, при  $x > 0,1$  уже можно пользоваться теорией вырожденного электронного газа.

Рассмотрим нерелятивистскую область  $0,1 < x < 1$ . Средняя энергия электронов в шаре с объемом  $\frac{4\pi}{3} p_F^3$  равна  $\bar{E} = \frac{3}{5} E_F = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m_e}$ , т.е.  $\bar{E} \sim x^2$ . Давление  $P \sim \rho \bar{E} \sim x^5 \sim \rho^{5/3}$ , т.е. холодное нерелятивистское вещество представляет собой газ, подчиняющийся уравнению состояния с  $\gamma = 5/3$ :

$$P = K \rho^{5/3}.$$

Статистика Ферми (принцип Паули) определяет константу. Для идеального (неквантового) газа  $K$  может быть любым. Если охлаждать горячий газ до температуры  $T = 0$ , то  $K$  идет не в нуль, а стремится к определенному пределу. Ферми-движение электронов играет роль температуры.

**З а д а ч а.** Получите точную формулу для давления вырожденного нерелятивистского газа  $P = 10^{23} x^5 \text{ эрг/см}^3$  и найдите выражение для  $K$  через фундаментальные константы.

Вспомяная общие формулы, выведенные для политропных конфигураций, имеем ( $n = 1, 5$ ):

$$M \sim x^{3/2}, R \sim x^{-1/2} \sim M^{-1/3}.$$

Приведем характеристики типичного белого карлика, состоящего из гелия ( $\mu_e = 2$ ) с массой  $M = 0,25 M_\odot = 0,5 \cdot 10^{33}$  г;  $\rho_c = 2,5 \cdot 10^5$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho = 4 \cdot 10^4$  г/см<sup>3</sup>,  $R = 1,4 \cdot 10^9$  см.

Строго говоря, полученные выше результаты относятся к абсолютно холодному веществу. Вещество белых карликов, которые мы наблюдаем, имеют отличную от нуля температуру (они светят!). Но температура даже в несколько миллионов градусов мала по сравнению с характерной ферми-энергией электронов ( $kT \ll E_F$ ). Поэтому тепловое движение плазмы не существенно при расчете равновесия и устойчивости белых карликов, хотя для расчета их охлаждения оно важно.

С увеличением массы белого карлика растет  $x$ , и при некоторой величине  $M$   $x$  оказывается больше единицы, электронный газ оказывается релятивистским. Импульс электрона связя со скоростью известным соотношением

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

а энергия электрона

$$E_1 = \sqrt{(m_e c^2)^2 + p^2 c^2} - m_e c^2 = m_e c^2 (\sqrt{1 + x^2} - 1).$$

При малых  $x$ , когда  $\sqrt{1 + x^2} \simeq 1 + \frac{x^2}{2}$ , получим уже известную формулу

$$E_1 = m_e c^2 \frac{x^2}{2} = \frac{p^2}{2m_e}.$$

При  $x \gg 1$  (оставляя только главный член в разложении) энергия одного электрона  $E = m_e c^2 x$ , следовательно, энергия единицы массы  $E \sim x \sim \rho^{1/3}$ , а давление  $P \sim \rho E \sim x^4 \sim \rho^{4/3}$ .

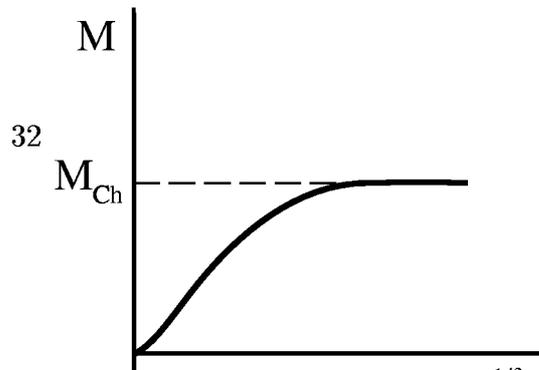
Таким образом, ультрарелятивистский вырожденный электронный газ подчиняется уравнению состояния с показателем  $\gamma = 4/3$  (индекс политропы  $n = 3$ ).

Нам уже известно (см. выше), что при  $n = 3$  равновесное состояние возможно только при одной определенной массе. Для вырожденного релятивистского вещества (2.1) дает это значение массы

$$M_{\text{Ch}} = \frac{5,75}{\mu_e^2} M_\odot.$$

Для  $\mu_e = 2$ ,  $M_{\text{Ch}} = 1,44 M_\odot$ . Для всех промежуточных случаев имеются точные численные расчеты (рис. 16).

Итак, для холодного вещества решение существует только при  $M <$



$M_{\text{Ch}}$  ( $M_{\text{Ch}}$  — называют чандрасекаровским пределом массы). Из наблюдений мы знаем, что есть горячие звезды с массой, большей  $M_{\text{Ch}}$ . В результате эволюции при остывании таких звезд должна происходить потеря устойчивости и коллапс (быстрое сжатие) звезды.

В ньютоновской теории более жесткое уравнение состояния (например, отталкивание ядер) могло бы спасти звезду от коллапса. Однако в ОТО при любом уравнении состояния релятивистские эффекты всегда приводят к неустойчивости и неограниченному коллапсу.

Получим, следуя Е.Солпитуеру, выражение для предельной массы белого карлика через фундаментальные физические величины  $m_p$ ,  $\hbar$ ,  $c$ ,  $G$ , или, другими словами, найдем предельное число нуклонов  $N_{\text{Ch}}$ , для которых гравитация уравновешивается давлением вырожденных электронов. Имеем  $M_{\text{Ch}} = m_p N_{\text{Ch}}$ .

Из констант  $G$ ,  $m_p$ ,  $\hbar$  и  $c$  можно составить только одно безразмерное число:  $Gm_p^2/\hbar c \simeq 0,7 \cdot 10^{-38}$  (аналог постоянной тонкой структуры  $e^2/\hbar c$ ). По определению  $N_{\text{Ch}}$  безразмерно и

$$M_{\text{Ch}} = m_p N_{\text{Ch}} = m_p \left( \frac{Gm_p^2}{\hbar c} \right)^\alpha.$$

Как найти  $\alpha$ ? Воспользуемся для этого уравнением состояния ультрарелятивистского вещества и найдем постоянную  $K$  (приближенно)

$$E_1 = cp = c\hbar n^{1/3}, \quad P = nE_1 = c\hbar n^{4/3}, \quad \rho = m_p n,$$

т.е.  $P = \frac{c\hbar}{m_p^{4/3}} \rho^{4/3}$  и  $K = \frac{c\hbar}{m_p^{4/3}}$ .

Для политропы  $n = 3$  выше мы получили  $M \sim (K/G)^{3/2}$ . Подставляя  $K$ , имеем

$$M = \frac{c^{3/2} \hbar^{3/2}}{G^{3/2} m_p^3} m_p = m_p \left( \frac{c\hbar}{Gm_p^2} \right)^{3/2}, \quad \text{т.е. } \alpha = -\frac{3}{2}.$$

Окончательно

$$M_{\text{Ch}} \sim m_p (10^{38})^{3/2}, \quad N_{\text{Ch}} \sim 10^{57}.$$

Такое большое число обусловлено тем, что константа гравитационного взаимодействия мала.

## § 2.5. Горячие звезды

Теперь рассмотрим другой предельный случай, в котором главную роль играет давление излучения.

Напомним уравнение состояния для идеального газа

$$P = \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \rho,$$

здесь  $\mu$  — молекулярный вес вещества, т.е. величина, которая показывает, сколько единиц атомного веса приходится на одну частицу (отличайте  $\mu$  от  $\mu_e$ !). Например,  $\mu_H = 1/2$ , но  $\mu_{eH} = 1$ , и  $\mu_{He_2} = 4/3$ ,  $\mu_{eHe} = 2$  и т.п. При высоких температурах, когда газ полностью ионизован и является одноатомным, тепловая энергия грамма вещества равна

$$E = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}T}{\mu}.$$

С другой стороны, при высоких температурах в термодинамике звезды все большую роль начинает играть давление излучения. Для излучения, находящегося в термодинамическом равновесии (планковского излучения), плотность энергии однозначно определяется температурой (см. ниже § 3.3)

$$\varepsilon_r = 7,56 \cdot 10^{-15} T^4 = aT^4 \text{ эрг/см}^3.$$

Давление при этом

$$P_r = \varepsilon_r/3 = 2,52 \cdot 10^{-15} T^4 \text{ эрг/см}^3.$$

В лабораторных условиях изменяют не плотность  $\varepsilon_r$ , а поток лучистой энергии  $q$  (Почему?), который связан с  $\varepsilon_r$  простой зависимостью

$$q = \varepsilon_r c/4.$$

(Получите коэффициент  $1/4$  в этой формуле.) Таким образом,  $q = 5,67 \cdot 10^{-5} T^4 = \sigma T^4$  (закон Стефана–Больцмана). По формуле Эйнштейна плотность массы излучения

$$\rho_r = \varepsilon_r/c^2 \text{ г/см}^3.$$

Имеется широкая область астрофизических условий, когда давление и энергия излучения и вещества сравнимы, но плотность массы излучения много меньше плотности массы вещества ( $\rho_r \ll \rho_m$ ). Выпишем теперь выражения для полного давления вещества и излучения

$$P = \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \rho + \frac{aT^4}{3} = \frac{8,3 \cdot 10^7 T \rho}{\mu} + 2,5 \cdot 10^{-15} T^4.$$

Рассмотрим модель звезды, в которой связь между плотностью и температурой дается формулой

$$T = \tau \rho^{1/3},$$

где  $\tau$  — постоянный множитель. Тогда давление вещества  $P_m \sim \rho T \sim \rho^{4/3}$  и давление излучения  $P_r \sim T^4 \sim \rho^{4/3}$ , т.е. в такой модели отношение давления излучения и вещества постоянно по звезде и

$$P = \frac{8,3 \cdot 10^7 \tau}{\mu} \rho^{4/3} (1 + 3 \cdot 10^{-23} \mu \tau^3).$$

Отметим, что в этом случае энтропия  $S$  меняется (Как? Растет или падает наружу?). Введем величину

$$y = \tau \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-23} \mu},$$

тогда

$$P = 2,7 \cdot 10^{15} \mu^{-4/3} y [1 + y^3] \rho^{4/3}.$$

Параметр  $y$  имеет простой смысл:  $y^3 = P_r/P_m$ .

Таким образом,  $P = K_1 \rho^{4/3}$ , и мы имеем уже знакомое нам уравнение политропы  $n = 3$ . Мы знаем, что в этом случае равновесие возможно только при одном значении массы. Подставляя  $K_1$  в формулу (2.1), получим

$$M = 19 M_\odot \mu^{-2} [y(1 + y^3)]^{3/2}.$$

Используя эту формулу, можно оценить роль давления излучения для звезды данной массы (см. табл. 2, в которой принято  $\mu = 0,5$ ).

Таблица 2: Рост давления в зависимости от массы звезды ( $\mu = 0.5$ )

$y$	0.05	0.1	0.7	1	2	10
$M/M_\odot$	0.85	2.4	70	215	5800	$7.6 \cdot 10^7$
$1 - \beta = P_r/(P_r + P_m)$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	0.25	0.5	0.89	0.999

Из таблицы 2 видно, что звезда с массой 215  $M_\odot$  является граничной ( $y = 1$ ). Как показал А.Эддингтон, для звезд с массой порядка 1  $M_\odot$  роль давления излучения пренебрежима, а для звезд с  $M \sim 100 M_\odot$  давление излучения является доминирующим.

Применим теорему вириала к построенной выше модели. С учетом излучения тепловая энергия звезды

$$Q = \int \left( \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}T\rho}{\mu} + 3P_r \right) dV.$$

По теореме вириала гравитационная энергия звезды

$$U = -3 \int P dV = - \int \left( 3 \frac{\mathcal{R}T\rho}{\mu} + 3P_r \right) dV.$$

Полная энергия звезды  $\mathcal{E} = Q + U$

$$\mathcal{E} = - \int \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \rho dV,$$

т.е. звезда гравитационно связана, но эта связь равна только той доле энергии, которая определяется веществом

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \beta U,$$

поэтому при  $\beta \rightarrow 0$   $\mathcal{E}$  — мало. В этой модели мы искусственно ввели политропу  $n = 3$ , но энтропия не постоянна по звезде (если  $S = \text{const}$  по звезде, то при  $n = 3$ ,  $\mathcal{E} = 0$ ). Подчеркнем разницу между показателем адиабаты  $\gamma$  и показателем политропы  $1 + 1/n$ . Возьмем одноатомный нерелятивистский газ ( $\gamma = 5/3$ ), для которого  $P \sim e^S \rho^{5/3}$ . Пусть распределение энтропии по звезде определяется зависимостью  $e^S \sim \rho^\alpha$ , тогда давление и плотность связаны соотношением

$$P \sim \rho^{\frac{5}{3} + \alpha}.$$

Структура звезды будет определяться показателем политропы (здесь  $5/3 + \alpha = 1 + 1/n$ ), а устойчивость зависит от показателя адиабаты, т.е. от упругости вещества (в нашей модели  $\gamma = 5/3$ ).

За счет распределения энтропии мы можем получить устойчивую звезду, например, с  $n = 4$ . В рассматриваемой выше модели  $n = 3$ , но полная энергия этой звезды не равнялась нулю, так как модель неизэнтропична. Устойчивость звезды определяется не распределением вещества, а тем, как оно ведет себя при сжатии (т.е. его упругостью!).

## Глава 3. ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ЗВЕЗДАХ

### § 3.1. Введение

В предыдущих главах изучалось механическое равновесие звезд без учета процессов выделения энергии в недрах звезды и переноса ее наружу. Сейчас, не рассматривая пока источники энергии, выделяющейся вблизи центра звезды, обратимся к процессам переноса энергии из недр звезды к ее поверхности. В зависимости от физических условий этот перенос осуществляется либо излучением (фотонами), либо электронной теплопроводностью, либо конвекцией. В большинстве случаев для нормальных звезд перенос энергии осуществляется лучистой теплопроводностью (длина свободного пробега фотонов много больше пробега электронов). Типичная звезда (например, Солнце) со светимостью  $4 \cdot 10^{33}$  эрг/с потеряла бы запас тепловой энергии  $Q$  за время порядка  $2 \cdot 10^7$  лет. С другой стороны, свободный фотон пролетает расстояние, равное радиусу Солнца за 2 с, т.е., если бы звезда была прозрачна

относительно излучения, она мгновенно бы потеряла запасы своей тепловой энергии.<sup>2</sup>

Таким образом, перенос тепловой энергии — это не движение фотонов по прямой, а медленное просачивание энергии наружу. Средняя скорость поступательного движения фотонов составляет ничтожную долю от скорости света  $c$ . Более того, фотоны не сохраняют свою “индивидуальность”, т.е. при столкновениях с веществом фотоны рождаются и уничтожаются.

Медленность процесса выхода энергии наружу облегчает решение задачи лучистого переноса. В таких условиях можно ввести понятие локального термодинамического равновесия.

В изолированном сосуде может осуществляться полное термодинамическое равновесие, т.е. такое состояние, при котором любой физический процесс строго уравновешен обратным. В условиях переноса энергии полное равновесие невозможно, так как поток энергии снизу вверх не равен потоку, идущему сверху вниз. На самой поверхности звезды фотоны летят только наружу, т.е. там термодинамическое равновесие сильно нарушается.

Внутри звезды потоки почти равны и условия мало отличаются от полного термодинамического равновесия. Поэтому мы будем считать далее, что в каждой точке осуществляется полное термодинамическое равновесие: 1) равновесие между излучением и веществом; 2) равновесие вещества (все распределения бoльцмановские и т.п.). Ниже будет дана оценка того, с какой точностью осуществляется это приближение.

### § 3.2. Основные понятия теории равновесного излучения

Пусть  $n$  — число фотонов в клетке фазового пространства, т.е. число заполнения, которое безразмерно. Для “ящика” данного объема можно говорить о числе состояний. Если состояний много, то число уровней в объеме  $V$  и в импульсном объеме  $d^3p$  есть

$$V d^3p / (2\pi\hbar)^3.$$

Тогда плотность числа фотонов

$$N = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty n d^3p [\text{см}^{-3}], \quad (3.1)$$

где коэффициент 2 учитывает два возможных состояния с разными поляризациями.

---

<sup>2</sup>На самом деле тепловая энергия большинства звезд сосредоточена в веществе, но в предположении абсолютной прозрачности отбор энергии излучением происходит за время  $\sim 10^{-10}$  с.

Известно, что импульс фотона  $\vec{p}$  связан с волновым вектором  $\vec{k}$  формулой Де Бройля

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}.$$

Подставляя это выражение в формулу (3.1), получим более наглядное выражение для плотности числа фотонов

$$N = 2 \int n d^3 k / (2\pi)^3.$$

Поскольку  $|k| = 2\pi/\lambda$ , очевидна размерность  $N \sim 1/\lambda^3 \sim \text{см}^{-3}$  и, кроме того, исчезает постоянная Планка  $\hbar$ , которая была важна только при подсчете числа состояний.

В сферической системе координат

$$d^3 p = p^2 dp d\Omega \quad (p = |\vec{p}|).$$

В случае сферической симметрии  $\int d\Omega = 4\pi$  и

$$N = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty n p^2 dp,$$

где  $n$  — функция только от  $p$ :  $n = n(p)$ .

Поскольку энергия одного фотона

$$E_{ph} = \hbar \omega = h \nu = cp,$$

то плотность энергии излучения (фотонного газа)

$$\varepsilon_r = \frac{c}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty n p^3 dp.$$

Кроме плотности энергии  $\varepsilon_r$  важной характеристикой является спектральная интенсивность излучения  $F_\nu$  ( $[F_\nu] = \text{эрг}/\text{см}^2 \text{ с Гц стер}$ ) — величина, которая при отсутствии поглощения или рассеивания не зависит от расстояния до источника. Из наблюдений всегда получается  $F_\nu$ , а в физику дела входит число заполнения  $n$ .

Получим связь между  $F_\nu$  и  $n$ :

$$F_\nu = \frac{2c}{(2\pi \hbar)^3} n p^2 \frac{dp}{d\nu} cp = \frac{2np^3 c}{(2\pi \hbar)^2} = \frac{2nh\nu}{\lambda^2}$$

(при этом мы использовали, что  $dp/d\nu = 2\pi\hbar/c$ ).  $F_\nu$  имеет смысл энергии, проходящей через площадку  $\lambda^2$  в единицу времени в единичном интервале частот, поэтому  $[F_\nu] = \text{эрг}/\text{см}^2 \text{ с Гц}$ .

В общем случае (и при отсутствии равновесия) связь между  $\varepsilon_r$  и  $F_\nu$  дается формулой

$$\varepsilon_r = \frac{1}{c} \int F_\nu d\nu d\Omega.$$

### § 3.3. Кинетика фотонов и формула Планка

Рассмотрим теперь, как меняется функция распределения фотонов с учетом их взаимодействия с веществом. Пусть имеется среда из атомов, которые могут находиться только в двух состояниях — в основном и возбужденном, и разность между этими уровнями равна  $h\nu$ , и пусть имеется  $N$  атомов/см<sup>3</sup> в основном состоянии и  $N^*$  — в возбужденном. Тогда кинетическое уравнение для числа заполнения можно записать в виде

$$\frac{dn}{dt} = N^*\omega - nN\sigma c, \quad (3.2)$$

где первый член в правой части учитывает увеличение числа квантов в результате их испускания возбужденными атомами с вероятностью  $\omega$ , а второй член — уменьшение  $n$  при поглощении их невозбужденными атомами,  $\sigma$  [см<sup>2</sup>] — сечение возбуждения. Из квантовой механики известно, что вероятность поглощения  $\sigma c$  тождественно равна вероятности испускания  $\omega$  (так как прямой и обратный процессы описываются одним матричным элементом). В кинетическом уравнении (3.2) испускание квантов определяется только свойствами вещества и его состоянием. Однако существует вынужденное, или индуцированное, испускание: вероятность испускания квантов в какое-то состояние пропорционально числу квантов, уже имеющих в этом состоянии. Как говорит теория (и опыт), полная вероятность испускания есть  $\omega(1+n)$ , и с учетом вынужденного излучения кинетическое уравнение запишется в виде

$$\frac{dp}{dt} = \omega[N^*(1+n) - Nn] = \omega[N^* - n(N - N^*)].$$

Отметим, что при  $N^* > N$  возможен экспоненциальный рост плотности излучения (мазерный эффект). А в астрофизических условиях такая неравновесная ситуация может встречаться только в газовых туманностях (источники ОН и т.п.).

В условиях локального термодинамического равновесия, которое осуществляется внутри звезд, ничего подобного быть не может, так как распределение атомов по энергиям описывается формулой Больцмана:

$$N^* = Ne^{-E/kT}.$$

Поскольку  $E = h\nu$

$$\frac{dn}{dt} = \omega N[e^{-h\nu/kT} - n(1 - e^{-h\nu/kT})].$$

В равновесии

$$\frac{dn}{dt} = 0 \text{ и}$$

$$n = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

это формула Планка.

Легко убедиться, что равновесие устойчиво. Запишем уравнение кинетики в виде

$$\frac{dx}{dt} = a - bx.$$

Введем  $y = x - a/b$ , тогда  $\frac{dy}{dt} = -by$ , и общее решение есть

$$x = \frac{a}{b} + ke^{-bt},$$

$x = a/b$  — это равновесное решение, а общее решение описывает приближение к нему, что и доказывает устойчивость.

Рассмотрим предельные случаи формулы Планка.

1. *Рэлей — Джинсовская область.*  $x = h\nu/kT \ll 1$ . Используя разложение  $e^x = 1 + x + \dots$ , получим для числа заполнения:  $n = \frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu} \gg 1$ , а для интенсивности  $F_\nu = \frac{2nh\nu}{\lambda^2} = \frac{2kT}{\lambda^2}$ . Как видим, в последнее выражение постоянная Планка не входит. Формула  $F_\nu = \frac{2kT}{\lambda^2}$  первоначально была получена в классической теории. Колебания электромагнитного поля можно представить набором осцилляторов, каждый из которых имеет энергию  $kT$ . Ясно, что формула Рэля — Джинса неприменима при малых  $\lambda$  из-за расходимости интеграла  $\int F_\nu d\nu$  (ультрафиолетовая катастрофа). Кроме того, при  $h\nu/kT > 1$  она не согласуется с опытом. Но при  $h\nu/kT > 1$  следует использовать другое предельное разложение формулы Планка.

2. *Винновская область:*  $h\nu/kT > 1$ ,  $n = e^{-h\nu/kT} \ll 1$ . Это распределение имеет вид формулы Больцмана. Ее мы получили бы, если бы пренебрегли в кинетическом уравнении индуцированным излучением (так как  $n \ll 1$ ). Точное выражение для плотности энергии

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{c}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty np^3 dp = \frac{c}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{\frac{cp}{kT}} - 1} = \\ &= \left(\frac{kT}{c}\right)^4 \frac{c}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 7,56 \cdot 10^{-15} T^4 \text{ эрг/см}^3. \end{aligned}$$

Здесь использован табличный интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \simeq 6,49.$$

Максимум функции распределения энергии по частоте приходится на  $x \simeq 2,7$ , т.е.  $h\nu = 2,7 kT$ .

Замечание. Отметим, что формула Вина очень удобна для приближенного вычисления интегральных величин в теории излучения. Например, при вычислении полной энергии точное выражение  $\int \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$  можно заменить приближенным интегралом  $\int e^{-x} x^3 dx$ . В этом случае  $x_{\max} = 3$ , а интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-x} x^3 dx = 3! = 6$  (сравните с точным значением  $\pi^4/15 = 6,49$ ). Виновское приближение является первым членом в разложении функции Планка:

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots$$

и

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{e^x - 1} &= \int e^{-x} x^3 dx + \int e^{-2x} x^3 dx + \dots = \\ &= 3! \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right). \end{aligned}$$

Это выражение наглядно демонстрирует роль остальных членов, которые дают вклад около 7%.

Используя виновское приближение, легко вычислить, какая доля энергии излучается в области частот больших некоторых. Например,

$$x > 3, \quad h\nu > 3kT \text{ — } 60\%$$

$$x > 4, \quad h\nu > 4kT \text{ — } 40\%$$

$$x > 10, \quad h\nu > 10kT \text{ — } 6\%.$$

Отметим, что несмотря на экспоненциальный множитель существенная доля энергии (6%) излучается при  $x > 10$ .

Ранее в кинетическом уравнении  $\frac{dn}{dt} = N^* \omega(1+n) - N \sigma c n$ ,  $\omega = \sigma c$ , мы предполагали, что  $\omega$  — вероятность перехода с одного уровня на другой. В действительности уровни имеют некоторую ширину (размыты), и полная вероятность перехода определяется интегралом (Размерность  $[W] = \text{с}^{-1}$  в отличие от  $[\omega] = \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ .)

$$W = \frac{c}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{r=1,2} \int \sigma(\nu, \Omega, r) p^2 dp d\Omega,$$

где  $\sum_{r=1,2}$  учитывает два возможных состояния поляризации. Расчет сечения  $\sigma$  (классический, либо квантовомеханический) дает формулу

$$\sigma = \sigma_{\max} \frac{(W/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (W/2)^2} \quad (\text{формула Лоренца}).$$

Подставляя это выражение в интеграл для  $W$ , который запишем в виде

$$W = \frac{1}{\lambda^2} \int \sigma(\nu) d\nu,$$

получим, что  $\sigma_{\max} = \lambda^2/\pi$ .

Рассмотрим причины размытости уровней. В нулевом приближении по квантовой теории возможны только строго определенные энергетические уровни. В следующем приближении появляется возможность переходов между энергетическими состояниями атома, и в силу нестационарности состояний уровни энергии оказываются размытыми — по принципу неопределенности на величину  $\Delta E \sim \hbar W$ . Испускаемые кванты будут иметь размытость порядка  $W$  по частоте.

Вероятности распада могут быть разными. Например: переход с уровня  $2P$  в основное состояние атома водорода происходит за  $1,6 \cdot 10^{-9}$  с, в то время как в линии в 21 см за  $10^6$  лет. Важно, что при этом изменяется только ширина  $\sigma$ , пропорциональная  $W$ , но всегда  $\sigma_{\max} = \lambda^2/\pi$  (рис. 17).

Все это верно для одного изолированного атома. В действительности атомы взаимодействуют. В реальном газе существует ряд причин, по которым спектральные линии расширяются: столкновения частиц, доплер-эффект, штарк-эффект. При этом может случиться, что  $\sigma_{\max}$  окажется меньше. Например, из-за доплер-эффекта должен сохраняться интеграл  $\int \sigma d\omega$  и  $\sigma_{\max}$  снижается.

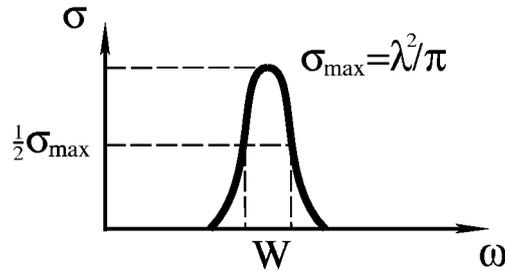


Рис. 17:

Следует помнить, что естественная высота сечения  $\sigma_{\max} = \lambda^2/\pi$  сохраняется, если нет размывающих его механизмов. В качестве примера можно рассмотреть эффект Мессбауэра. Если принять соответствующие меры (грубо говоря, закрепить атомы в кристаллической решетке), то можно наблюдать резонансные линии  $\gamma$ -излучения ядер, при этом сечение как раз равно  $\lambda^2/\pi$ .

### § 3.4. Тормозное излучение зарядов

Заряд (электрон), движущийся равномерно и прямолинейно, очевидно, ничего не излучает (чтобы в этом убедиться, достаточно перейти в систему отсчета, где он покоится). Из классической электродинамики известно, что количество энергии, излучаемой зарядом в единицу времени, определяется его ускорением:

$$Q = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} x^2.$$

Подчеркнем, что эта формула относится к одному заряду. Если ускоряются два жестко связанных электрона, то  $Q$  возрастает в 4 раза (так как  $Q \sim e^2$ ). Таким образом, нельзя просто суммировать  $Q$  от различных зарядов.

Ниже мы будем рассматривать излучение электрона при ускорении его во внешнем электрическом поле, скажем, в кулоновском поле иона. Вдали электрон движется практически с постоянной скоростью. Ускорение электрона максимально при пролете на минимальном расстоянии от иона. Очевидно, при этом максимально и излучение. Нас будет интересовать и спектральный состав излучения  $Q_\nu \simeq e^2 x_\nu^2 / c^3$ , где  $x_\nu$  — фурье-компонента ускорения.

Займемся излучением длинных волн. Фурье-компонента ускорения

$$\ddot{x}_\nu = \frac{1}{2} \int e^{i\omega t} \ddot{x}(t) dt.$$

Если  $|\omega t| < 1$  (длинные волны)

$$\ddot{x}_\nu = \int \ddot{x} dt = \Delta x,$$

т.е.  $\ddot{x}_\nu$  равно изменению скорости за время полета и не зависит от  $\nu$ . Тогда при одном столкновении в еденичном интервале частот излучается энергия

$$Q_\nu \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{Гц}} \right] = \frac{4}{3} e^2 \frac{(\Delta x)^2}{c^3}. \quad (3.3)$$

Подчеркнем еще раз, что это выражение справедливо только при  $\omega < 1/\tau$ , где  $\tau$  — длительность события (столкновения) (рассматриваем длинные волны). Заметим, что размерность  $Q_\nu$  в формуле (3.3) изменилась на  $c^2$  по сравнению с размерностью  $Q \left[ \frac{\text{эрг}}{c} \right]$ , так как мы перешли сначала на еденичный интервал частот и, кроме того, рассматриваем энергию, излученную не в секунду, а за все время полета.

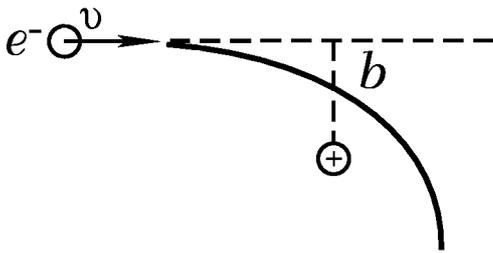


Рис. 18:

Легко подсчитать изменение импульса электрона, пролетающего в поле иона, первоначально имеющего скорость  $v$  и прицельный параметр  $b$  (рис. 18):

$$\frac{Ze^2}{b^2} \frac{b}{v} = \int F dt = \Delta(mv) = \Delta(mx),$$

откуда

$$\Delta x = \frac{Ze^2}{mbv}.$$

Пусть на ион с бесконечности падает пучок электронов со скоростью  $v$  и плотностью  $N_e$ . Через кольцо площадью  $2\pi b db$  около поля иона проходит  $N_e v 2\pi b db$  электронов в секунду. Каждый из них в еденичном интервале частот излучает  $Q_\nu$ . Если в  $1 \text{ см}^3$  находится  $N_Z$  ионов, то полный поток

энергии, излучаемый в единицу времени, очевидно, равен интегралу (логарифмический множитель опускаем)

$$J_\nu = \int_0^\infty \frac{e^2 (\Delta x)^2}{c^3} N_Z N_e v b db \simeq \frac{Z^2 e^6}{c^3} \frac{N_Z N_e}{m^2 v}.$$

Из квантовой механики известно, что квант частотой  $\nu$  может получить только электрон, имеющий энергию больше  $mv_{min}^2/2 = h\nu$ . Поэтому в полное выражение войдет множитель  $e^{-h\nu/kT}$

$$J_\nu = \frac{32\pi}{3} \left( \frac{2\pi m}{3kT} \right)^{1/2} \frac{N_Z N_e}{m^2} \frac{Z^2 e^6}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{сГц}} \right]$$

(формула тормозного или *ff*-излучения). В этой формуле учтено, что электроны имеют максвелловское распределение по скоростям с температурой  $T$ . Как видим, число квантов с  $h\nu > kT$  экспоненциально мало. Это связано с тем, что большие кванты излучаются электронами с большими энергиями, сосредоточенными в “хвосте” максвелловского распределения.

При данном объемном коэффициенте  $J_\nu$  изменение интенсивности  $F_\nu$  в прозрачной среде, очевидно, определяется уравнением

$$(n \nabla F_\nu) = \frac{dF_\nu}{dx} = \frac{J_\nu}{4\pi},$$

где  $x$  — координата вдоль произвольного направления  $n$ . Прозрачный источник (малы поглощение и индуцированное излучение) дает одну и ту же освещенность в любой точке сферы с радиусом много больше размеров источника независимо от формы источника. В общем случае с учетом индуцированного излучения и поглощения изменение интенсивности вдоль определенного направления выражается уравнением

$$\frac{dF_\nu}{dx} = \frac{J_\nu}{4\pi} + \frac{J_\nu}{4\pi} n - a_\nu F_\nu,$$

где  $a_\nu$  [см<sup>-1</sup>] — коэффициент поглощения.

При полном термодинамическом равновесии  $n = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ ,  $F_\nu = F_{\nu \text{ eq}} \sim \nu^3 / \left( e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)$ ,  $\frac{dF_\nu}{dx} = 0$ . Получаем, что отношение объемного коэффициента излучения вещества  $J_\nu$  к его коэффициенту поглощения  $a_\nu$  есть универсальная функция  $\nu$  и  $T$  (закон Кирхгофа):

$$J_\nu / a_\nu = 8\pi h \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}} / c^2.$$

Таким образом, если вычислено  $J_\nu$ , то  $a_\nu$  находится элементарно, и для свободно-свободных (*ff*)-переходов получаем

$$a_\nu = \frac{4}{3} \left( \frac{2\pi}{3kTm} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^6 Z^2 N_Z N_e}{hcm \nu^3} = \frac{3,7 \cdot 10^8 Z^2 N_Z N_e}{\nu^3 \sqrt{T}} \text{ [см}^{-1}\text{]}.$$

Объединим в правой части уравнения переноса члены, отвечающие индуцированному излучению и поглощению, так как оба они пропорциональны неизвестной функции координат — интенсивности излучения  $F_\nu$  (поскольку  $n \sim F_\nu$ ). В члене индуцированного испускания  $J_\nu n/4\pi$  выразим  $J_\nu$  через коэффициент поглощения  $a_\nu$ , тогда правая часть примет вид  $\frac{J_\nu}{4\pi} - a_\nu(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}) F_\nu$ .

Отсюда видно, что вынужденное испускание можно трактовать как некое уменьшение поглощения: часть квантов как бы поглощается и тут же испускается с той же частотой и в том же направлении с вероятностью  $e^{-h\nu/kT}$ . Физически такие акты никак себя не проявляют и их можно вообще исключить из рассмотрения, вводя

$$a'_\nu = a_\nu(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}).$$

Уравнение переноса принимает вид

$$\frac{dF_\nu}{dx} = \frac{J_\nu}{4\pi} - a'_\nu F_\nu,$$

и взаимодействие излучения с веществом можно представить так, как будто существует только спонтанное испускание и эффективное поглощение, описываемое коэффициентом  $a'_\nu$ .

Коэффициент истинного поглощения  $a_\nu \sim \nu^{-3}$ , но при  $h\nu < kT$  эффективное поглощение  $a'_\nu \sim \nu^{-2}$  и в равновесии это дает рэлей-джинсовскую формулу для интенсивности  $F_{\text{eq}} \sim \frac{J_\nu}{a'_\nu} \sim \nu^2$  (коэффициент излучения  $I_\nu$  при  $h\nu < kT$  фактически постоянен). Используя закон Кирхгофа  $\frac{J_\nu}{4\pi} = a'_\nu F_{\nu \text{ eq}}$ , запишем в общем случае уравнение переноса в виде

$$\frac{dF_\nu}{dx} = a'_\nu(F_{\nu \text{ eq}} - F_\nu).$$

Это уравнение записано для координаты, изменяющейся вдоль луча зрения. Из него видно, что, если при  $x = 0$   $F_\nu = 0$ , то сначала, при малых  $x < 1/a'_\nu$ ,  $F_\nu$  стремится к  $F_{\nu \text{ eq}}$  линейно:  $F_\nu = a'_\nu F_{\nu \text{ eq}} x$ , а затем при  $x > 1/a'_\nu$  быстро устанавливается равновесие, при котором  $F_\nu = F_{\nu \text{ eq}}$ . Если размеры излучающего облака (слоя)  $x_0$  меньше  $1/a'_\nu$ , то оно является оптически тонким и интенсивность его излучения всегда меньше равновесной в  $a'_\nu x_0$  раз. Полный поток энергии, излучаемой такими облаками, пропорционален  $F = \int F_\nu d\nu = x_0 \int a'_\nu F_{\nu \text{ eq}} d\nu$ . Введем средний коэффициент поглощения

$$a = \frac{\int a'_\nu F_{\nu \text{ eq}} d\nu}{\int F_{\nu \text{ eq}} d\nu},$$

тогда

$$F = ax_0 F_{\text{eq}}.$$

Средний коэффициент поглощения для тормозного механизма, очевидно, равен

$$a_{ff} = 6,5 \cdot 10^{-24} Z^2 \frac{N_e N_Z}{T^{7/2}} [\text{см}^{-1}].$$

Соответствующая средняя длина свободного пробега фотона

$$l_{ff} = \frac{1}{a_{ff}} = 1,5 \cdot 10^{23} \frac{T^{7/2}}{Z^2 N_e N_Z} \text{ [см]}.$$

Причем, если плазма содержит смесь ионов с зарядами  $Z_i$  и атомными массами  $A_i$ , то

$$N_e = 6 \cdot 10^{23} \rho \sum_i \frac{X_i Z_i}{A_i},$$

$$Z^2 N_Z = 6 \cdot 10^{23} \rho \sum_i \frac{X_i Z_i^2}{A_i},$$

где  $X_i$  — весовая доля данного иона.

Рассмотрим процесс установления равновесия между веществом и излучением для однородной неограниченной среды, в которой в начальный момент  $t = 0$  излучение отсутствовало, а вещество было мгновенно нагрето до температуры  $T_0$ . Очевидно, что прежде всего это равновесие установится на низких частотах, так как  $a'_\nu \sim 1/\nu^2$ . С течением времени равновесие будет устанавливаться при больших значениях  $\nu$  (см. рис. 19).

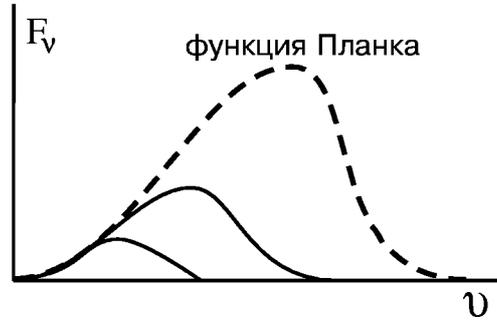


Рис. 19:

### § 3.5. Рассеяние излучения на свободных электронах

Рассмотрим движение электрона в плоской электромагнитной волне:  $E_x = E_0 \cos \omega t$ , распространяющейся вдоль оси  $z$ . Уравнение движения электрона:

$$m\ddot{x} = eE_0 \cos \omega t,$$

и энергия, излучаемая таким электроном,

$$Q = \frac{2}{3} \frac{e^2 \ddot{x}^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^4 E_0^2 \cos^2 \omega t}{m^2 c^3}.$$

Своих источников энергии у электрона нет. Фактически он переизлучает (рассеивает) энергию падающей электромагнитной волны в других направлениях, так что

$$Q = W\sigma_T \text{ [эрг/с]},$$

где  $W$  [эрг/см<sup>2</sup>] — поток падающей энергии:

$$W = c \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = c \frac{E_0^2 \cos^2 \omega t}{4\pi},$$

и сечение рассеяния

$$\sigma_T = \frac{Q}{W} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \text{ [см}^2\text{]}$$

знаменитая формула Томсона. Величина

$$r_0 = e^2/mc^2 = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

называется классическим радиусом электрона.

При преобладающей роли электронного рассеяния (процессы поглощения излучения несущественны) изменение интенсивности  $F_\nu$  в монохроматическом пучке фотонов, очевидно, равно

$$\frac{dF_\nu}{dx} = -\sigma_T N_e F_\nu.$$

Можно ввести коэффициент “поглощения” при томсоновском рассеянии (хотя реально поглощения энергии и нет):

$$a_T = \sigma_T N_e = \frac{1}{l_T} \text{ см}^{-1},$$

где длина пробега

$$l_T = \frac{1}{a_T} = \frac{2,5\mu_e}{\rho} \text{ [см]}.$$

Интегрируя уравнение для  $F_\nu$ , получаем

$$F_\nu = F_\nu e^{-\int \frac{\rho dx}{2,5\mu_e}},$$

т.е. 2,5 г/см<sup>2</sup> водородной плазмы ( $\mu_e = 1$ ) уменьшают  $F_\nu$  в  $e$  раз за счет электронного рассеяния.

В астрофизике обычно пользуются не коэффициентом поглощения  $a_T$ ,  $a_\nu$ , а так называемой непрозрачностью

$$\kappa_\nu = a_\nu/\rho \text{ [см}^2\text{/г]}.$$

Таким образом, непрозрачность за счет рассеяния

$$\kappa_T = 0,4\mu_e \text{ [см}^2\text{/г]}.$$

**З а д а ч и.** 1. Дана водородная ( $Z = 1$ ) плазма со значениями плотности  $\rho = 10^{-6}$ ,  $10^{-3}$ ,  $1$  г/см<sup>3</sup>, температурой  $T = 10^8$ ,  $3 \cdot 10^6$ ,  $10^5$  К. Для  $x =$

$h\nu/kT = 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 5, 20$  найти  $\nu, \lambda, \kappa_{ff}, \kappa_T$ . В переменных  $\lg T - \lg \rho$  найти кривую, на которой  $\kappa_{ff} = \kappa_T$ . Подсчитайте  $J_\nu$ .

2. Пусть в каждой точке звезды плотность и температура связаны соотношением  $\rho = \text{const} \cdot T^3$ , где const заранее не известна. (Тогда  $P \sim T^4 \sim \rho^{4/3}$ , т.е. индекс политропы  $n = 3$ .) Для чисто водородных моделей звезд с массами  $M = 1, 10, 100_\odot$  и центральных плотностей  $\rho_c = 100, 1$  и  $10^{-2}$  г/см<sup>3</sup> найти радиус  $R$ , температуру в центре  $T_c$  и полную энергию  $\mathcal{E}$ .

3. Пусть распределение плотности по звезде определяется зависимостью  $\rho = \rho_c [1 - (r/R)^2]^g$ , где  $g = 1, 2, 3$ . Найти гравитационную энергию звезды  $U = -\frac{GM^2}{R} K_g$ , т.е. найти  $K_g$ .

Пусть энергия единицы массы  $E$  связана с  $\rho$  соотношениями: а)  $E = A\rho^{1/3}$ , б)  $E = A\rho^{1/2}$ . (Какое при этом  $P = P(\rho)$ ?)

При тех же распределениях плотности найти связь между  $M$  и  $A$  из условия минимума полной энергии  $\mathcal{E}$ .

## Глава 4. ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

### § 4.1. Перенос излучения при рассеянии

В предыдущей главе было получено уравнение для изменения интенсивности при томсоновском рассеянии

$$\frac{dF_\nu}{dx} = -\kappa_T \rho F_\nu, \quad \kappa_T = 0,4/\mu_e \left[ \frac{\text{см}^2}{\text{г}} \right].$$

Таким образом, интенсивность излучения удаленного точечного источника при прохождении через рассеивающую среду уменьшается. Однако внутри звезд в условиях локального термодинамического равновесия (ЛТР) излучение идет со всех направлений, так что хотя часть лучей уходит с данного направления за счет рассеяния, за счет того же рассеяния приходят лучи с других направлений. Поэтому уравнение переноса можно записать в виде (поскольку частота при рассеянии не изменяется) (Сечение рассеяния считаем не зависящим от угла, так как томсоновское сечение рассеяния симметрично относительно рассеяния на углы  $\pi$  и  $\pi - \Theta$ :  $\sigma(\Theta) = \sigma(\pi - \Theta)$ . Поэтому в теории переноса его можно заменить на  $\sigma = \text{const}$ .)

$$\frac{dF_\nu}{dx} = -F_\nu \kappa_T \rho + \langle F_\nu(\Theta) \rangle \kappa_T \rho,$$

где  $\langle F_\nu(\Theta) \rangle$  — усредненная по углу интенсивность излучения.

Нас интересует поток энергии излучения. Поскольку полного термодинамического равновесия нет, в каждой точке должна быть зависимость  $F_\nu$  от направления (анизотропия). Однако эта анизотропия внутри звезды мала, и

при усреднении по всем направлениям мы получим величину, мало отличную от равновесной,

$$\langle F_\nu(\Theta) \rangle = F_{\nu \text{ eq}}.$$

В условиях ЛТР температура плазмы соответствует температуре  $F_{\nu \text{ eq}}$  и  $F_{\nu \text{ eq}}$  является в сферической звезде функцией только радиуса

$$F_{\nu \text{ eq}} = F_{\nu \text{ eq}}(r).$$

Поэтому при рассеянии уравнение переноса имеет тот же вид, что и при поглощении:

$$\frac{dF_\nu}{dx} = \rho \kappa_{\text{T}} (F_{\nu \text{ eq}} - F_\nu). \quad (4.1)$$

Разница заключается в области применимости. Для тормозных процессов достаточно только равновесия плазмы, а излучение может быть существенно неравновесным и уравнение  $dF_\nu/dx = \rho \kappa (F_{\nu \text{ eq}} - F_\nu)$  применимо даже вблизи края звезды. Для рассеяния излучение должно быть почти равновесным, поэтому у края звезды, где сильна анизотропия излучения, уравнение (4.1) неприменимо. Итак, внутри звезды

$$\frac{dF_\nu}{dx} = \rho \kappa_{\text{tot}} (F_{\nu \text{ eq}} - F_\nu), \quad (4.2)$$

где

$$\kappa_{\text{tot}} = \kappa_{\text{ff}} + \kappa_{\text{T}}.$$

В других условиях могут играть роль и другие механизмы непрозрачности, но эти остаются важными.

Как решать уравнение переноса (4.2)? В условиях ЛТР предлагается следующий метод последовательных приближений.

1-е приближение:  $F_\nu = F_{\nu \text{ eq}}(x)$  (в оптически тонкой плазме  $F_\nu \ll F_{\nu \text{ eq}}$ ).

2-е приближение: найдем малые отклонения от полного термодинамического равновесия. Подставляя  $F_{\nu \text{ eq}}(x)$  в левую часть (4.2), имеем вдоль луча с координатой  $x$

$$F_\nu = F_{\nu \text{ eq}} - \frac{1}{\rho \kappa} \frac{dF_{\nu \text{ eq}}}{dx}.$$

Величина  $l = 1/\kappa\rho$ , очевидно, есть длина свободного пробега кванта  $h\nu$ . Предполагая, что  $F_{\nu \text{ eq}} = F_{\nu \text{ eq}}(x)$ , имеем

$$F_{\nu \text{ eq}}(x + a) = F_{\nu \text{ eq}}(x) + a \frac{\partial F_{\nu \text{ eq}}}{\partial x}.$$

Сопоставляя эти две формулы, мы видим, что  $F_\nu(x)$  есть  $F_{\nu \text{ eq}}$  в точке, "отстающей" от  $x$  на длину свободного пробега фотона (см. рис. 20):

$$F_\nu = F_{\nu \text{ eq}}(x - l).$$

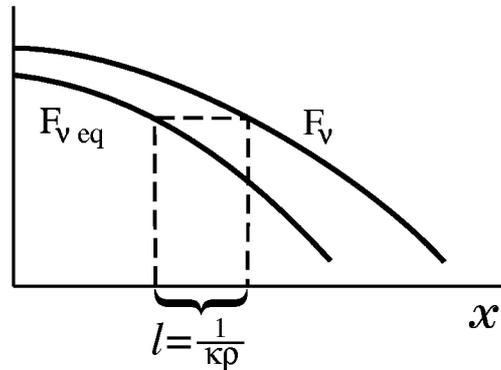


Рис. 20:

## § 4.2. Коэффициент теплопроводности. Росселандово среднее

Займемся важной для теории звезд задачей — определим коэффициент теплопроводности.

$F_{\nu \text{ eq}}$  является функцией только температуры. Пусть температура меняется вдоль координаты  $z$ ,  $T = T(z)$ ,  $x$  — любая ось в пространстве, и  $\Theta$  — угол между осями  $(z, x)$ . Тогда

$$\frac{dF_{\nu \text{ eq}}(x)}{dx} = \frac{dF_{\nu}}{dT} \frac{dT}{dx} = \frac{dF_{\nu}}{dT} \frac{dT}{dz} \cos \Theta,$$

т.е.  $dF_{\nu \text{ eq}}/dx$  зависит от угла  $\Theta$ , и для интенсивности имеем соотношение

$$F_{\nu}(\Theta, x) = F_{\nu \text{ eq}}(x) - l \frac{dT}{dz} \frac{dF_{\nu}}{dT} \cos \Theta.$$

Подсчитаем полный поток энергии, проинтегрированный по всем частотам. По соображениям симметрии поток направлен вдоль оси  $z$ :

$$H_z = \int F_{\nu} \cos \Theta d\Omega d\nu \text{ [эрг/с см}^2\text{]}.$$

Интеграл по  $d\Omega$  берется по всем углам, т.е. полный поток есть разность потоков слева направо и справа налево. Подставим  $F_{\nu}$  в выражение для  $H_z$ :

$$H_z = \int F_{\nu \text{ eq}} \cos \Theta d\Omega d\nu - \frac{dT}{dz} \int l_{\nu} \frac{dF_{\nu \text{ eq}}}{dT} \cos^2 \Theta d\Omega d\nu.$$

Везде ниже будем писать  $F_{\nu}$ , понимая под этим  $F_{\nu \text{ eq}}$ . Первый член в правой части уравнения после интегрирования по  $d\Omega$  обращается в ноль, а во втором зависимость  $\cos^2 \Theta$  даст  $4\pi/3$ . В итоге полный поток равен

$$H_z = -\frac{dT}{dz} \frac{4\pi}{3} \int l_{\nu} \frac{dF_{\nu}}{dT} d\nu,$$

где величина  $\frac{4\pi}{3} \int l_{\nu} \frac{dF_{\nu}}{dT} d\nu$  называется коэффициентом лучистой теплопроводности (напомним, что в общем случае коэффициентом теплопроводности называется величина, стоящая при  $\nabla T$ ). Запишем выражение для  $H_z$  в том же виде, что и в кинетической теории газов. Ранее мы определили плотность излучения в каждой точке как

$$\varepsilon_r = \frac{4\pi}{c} \int F_{\nu} d\nu.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dF_{\nu}}{dT} d\nu = \frac{d}{dT} \frac{c\varepsilon_r}{4\pi}.$$

Введем среднюю длину пробега

$$\langle l \rangle = l_{Ross} = \frac{\int l_\nu \frac{dF_\nu}{dT} d\nu}{\int \frac{dF_\nu}{dT} d\nu}.$$

Эта величина называется росселандовым средним. Тогда

$$H_z = -\frac{dT}{dz} l_{Ross} \frac{4\pi}{3} \frac{c}{4\pi} \frac{d\varepsilon_r}{dT} = -l_{Ross} \frac{c}{3} \frac{dT}{dz}.$$

Итак,  $\vec{H} = -D\nabla T$ , где  $D = cl/3$  — коэффициент диффузии такой же, как в кинетической теории газов. Главный вклад в росселандово среднее дают кванты с энергией  $h\nu \approx 4kT$ , т.е. основную роль в переносе энергии играют кванты с большой энергией.

В оптически толстом теле с источником тепла внутри возникает градиент температуры, и поток тепла определяется зонами прозрачности. Оптически тонкий горячий слой излучает (по закону Кирхгофа) то же, что он поглощал бы при внешнем облучении. Таким образом, больше всего такой слой излучает там, где велика непрозрачность, например в линиях.

**Примеры.** 1. Пусть имеется только томсоновское рассеяние, т.е.  $l = 1/\kappa_T \rho$ . Чему равно  $l_{Ross}$ ? Очевидно,  $l_{Ross} = l$ , так как  $l_T$  не зависит от  $\nu$ .

2. Пусть непрозрачность  $\kappa_\nu$  задана в виде гребенки (рис. 21) с длиной зубцов  $b - a$ ,  $b \gg a$  и шириной зубцов, равной расстоянию между ними. Тогда, очевидно,  $l_{Ross} \simeq 1/2a\rho$ , т.е. в задачах переноса излучения весь поток поступает в “окнах большей прозрачности” (ответ не зависит от  $b$ !). В задачах об излучении оптически тонкой плазмы все определяется верхушками гребенки, где велико поглощение и велико излучение.

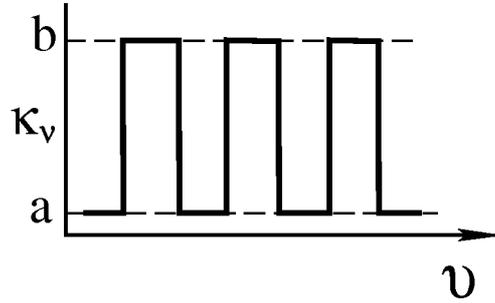


Рис. 21:

В первом приближении такая гребенка (только с различной шириной зубцов и промежутков) может имитировать учет поглощения в линиях при переносе излучения.

3. Найдем  $l_{Ross}$  для тормозного поглощения. Имеем

$$l_\nu \sim \sqrt{T} \frac{\nu^3}{1 - e^{-h\nu/kT}}.$$

Введем  $x = h\nu/kT$ , тогда

$$l_\nu \sim T^{7/2} x^3 \frac{e^x}{e^x - 1}, \quad F_\nu \sim \nu^3 \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\frac{dF_\nu}{dT} \sim \frac{\nu^4}{T^2} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \sim T^2 x^4 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Интегрируя и выписывая численные коэффициенты, получим

$$\kappa_{ff} = \frac{7 \cdot 10^{22} \rho}{T^{7/2}} \left( \sum \frac{X_i Z_i^2}{A_i} \right) \left( \sum \frac{X_i Z_i}{A_i} \right)$$

— формула Крамерса.

Как и раньше,

$$\vec{H} = -\frac{c}{3\kappa_{ff}\rho} \nabla \varepsilon_r.$$

Оказывается, что  $\kappa_{ff} = \kappa_\nu$  при  $h\nu/kT = 6$ , т.е. эффективный перенос тепла осуществляется квантами большой энергии. Это объясняется тем, что максимум весовой функции  $dF_\nu/dT$  приходится на  $x \approx 4$ , и, кроме того, тем, что усредняется  $1/a'_\nu$ , а  $a'_\nu$  убывает с частотой.

Заметим, что в формулу для непрозрачности входит отношение  $\rho/T^{7/2}$ . С другой стороны, как мы показали ранее,  $\rho/T^3 \sim P_g/P_r$ , причем это отношение определяется массой звезды. Таким образом, в первом приближении, пренебрегая различием  $T^{7/2}$  и  $T^3$ , получим, что  $\kappa$  пропорциональна  $P_g/P_r$  и тоже однозначно зависит от массы звезды.

Если в непрозрачности важны оба механизма, то  $\kappa_{Ross} \neq \kappa_{ff} + \kappa_\tau$  (не забывайте, что усредняем  $l_\nu = 1/(\kappa_\nu + \kappa_\tau)$ ). В качестве упражнения подсчитайте в этом случае  $\kappa_{Ross}$ . Можно показать, что

$$\kappa_{Ross} = \kappa_\tau f(\rho/T^{7/2}).$$

Не надо преувеличивать точность всех этих расчетов. Все, что мы говорили, справедливо для водородной плазмы, но для реального звездного вещества существенна роль тяжелых элементов. Например, для железа энергия связи последних  $K$ -электронов порядка 9 кэВ и степень ионизации его меняется с глубиной. Все оказывается гораздо сложнее. Необходимо учитывать многие процессы: свободно-связанные, связанно-связанные (линии) и др. В этой книге дается лишь общая физическая картина, общее представление, а не точные методы расчета. Один вопрос о теплопроводности, рассматриваемый в современных статьях, может быть предметом целого курса. Настоящий курс позволит начать чтение оригинальных статей, но никак не заменит их.

### § 4.3. Поведение $\rho$ и $T$ вблизи поверхности горячей звезды

Зависимость  $\rho$  и  $T$  от радиуса определяется уравнениями:

$$1) \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho \text{ — уравнение гидростатики,}$$

2)  $L(r) = -4\pi r^2 \frac{c}{3\kappa\rho} \frac{d\varepsilon_r}{dr}$  — уравнение теплопроводности, где  $L(r) = H_r 4\pi r^2$  — светимость, т.е. полный поток энергии через сферу радиуса  $r$ . Так как  $P_r = \varepsilon_r/3$ , перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{\kappa\rho L(r)}{c4\pi r^2}.$$

Если бы ядерная энергия каждой единицы массы звезды  $\varepsilon$  (эрг/г·с) выделялась одинаково, так что  $\varepsilon = \text{const}$  по звезде и  $L(r) = \varepsilon m(r)$ , то мы получили бы, что

$$\frac{dP_r}{dP} = \frac{\kappa\varepsilon}{cG4\pi}.$$

Поскольку приближенно

$$\kappa = \kappa(P_r/P), \quad (4.3)$$

мы получим решение, положив, например,

$$P_r/P = \text{const}.$$

Несколько десятков лет назад, когда мало знали об источниках ядерной энергии, астрофизики занимались задачами подобного рода, однако сейчас это представляет чисто исторический интерес.

Вблизи поверхности звезды  $m(r) = M$ ,  $L(r) = L$  — полная светимость звезды и

$$\frac{dP_r}{dP} = \frac{\kappa L}{cG4\pi M};$$

это хорошее приближение потому, что постоянно выделение энергии  $\varepsilon$ , а потому, что у поверхности  $M - m \ll M$ .

При  $r = R$   $P_r = 0$ ,  $P = 0$  и  $P_r = \text{const} \cdot P$ . Из (4.3) получим  $\kappa = \text{const}$ , а из уравнения гидростатики

$$\frac{dP}{dr} \sim \frac{d(\rho T)}{dr} = \text{const} \cdot \rho$$

имеем  $T = \text{const} \cdot (R - r)$ . Из  $P_r/P = \text{const}$  следует  $\rho \sim T^3 = \text{const}(R - r)^3$ . Таким образом, независимо от того, как распределены источники ядерной энергии вблизи центра звезды, следует асимптотическое распределение  $T$  и  $\rho$  вблизи поверхности. Заметим только, что на краю  $T \neq 0$ , а  $T \rightarrow T_{eff}$ . Поэтому наши асимптотики верны при  $T > T_{eff}$ , где  $T_{eff}$  определяется соотношением

$$L = 4\pi\sigma T_{eff}^4 R^2,$$

т.е. не в атмосфере и не в короне.

#### § 4.4. Критическая эддингтоновская светимость

Из условия  $P > P_r$  следует, что  $\left| \frac{dP}{dr} \right| > \left| \frac{dP_r}{dr} \right|$ . Вообще говоря, не всегда можно дифференцировать неравенства, но в данном случае нетрудно убедиться, что все в порядке. Теперь очевидно, что

$$L \leq \frac{4\pi GMc}{\kappa}.$$

Самая маленькая непрозрачность — это  $\kappa_T = 0,4 \text{ см}^2/\text{г}$ . Поэтому светимость звезды не может никогда превышать величину  $4\pi GMc/0,4$ , т.е.

$$L \leq 6,3 \cdot 10^4 M = 3 \cdot 10^4 L_\odot \left( \frac{M}{M_\odot} \right) = L_c,$$

$L_c$  — величина, называемая эддингтоновским пределом светимости.

Отметим, что для Солнца  $L_\odot/M_\odot = 2 \text{ эрг/г с}$ , т.е. выделяется энергии примерно столько же, сколько при гниении опавших листьев, и большая светимость определяется только большой массой, но все равно  $L_\odot \ll L_c$ .

Подсчитаем эддингтоновский предел еще одним простым способом. Пусть на некотором расстоянии от звезды со светимостью  $L$  имеется один электрон. Поток излучения  $H$  через  $1 \text{ см}^2$  равен

$$H = \frac{L}{4\pi r^2} = \int h\nu \cos \Theta \cdot \varphi(\nu, \Theta) d\Theta d\nu,$$

где  $\varphi$  — число квантов в единичном интервале частот, пролетающих через  $1 \text{ см}^2$  в направлении  $\Theta$  за одну секунду.

При столкновении с электроном один квант отдает импульс  $h\nu/c$ , и сила, действующая на электрон со стороны излучения (импульс, передаваемый в единицу времени),

$$f = \int \frac{h\nu}{c} \cos \Theta \cdot \varphi \sigma_T d\Theta d\nu.$$

Дальнейший расчет прост. Так как  $\sigma_T$  не зависит от частоты, а индикатрисса рассеяния хотя и зависит от угла, но такова, что вероятность рассеяния на угол  $\pi - \Theta$ , получим

$$f = \frac{\sigma}{c} H. \quad (4.4)$$

Таким образом, при подсчете не важно распределение функции  $\varphi$  по углу. Один и тот же результат (4.4) получится и внутри звезды, где  $\varphi$  почти симметрично, и вне звезды, где кванты летят в узком телесном угле. Приравнявая это выражение для  $f$  силе притяжения, действующей на один протон, получим

$$f = \frac{\sigma}{c} H = \frac{\sigma}{c} \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{GMm_p}{r^2}.$$

Мы подставили  $m_p$ , так как сила притяжения протонов много больше силы электронов. В стационарной картине возникает электростатическое поле, удерживающее электроны. Таким образом, у звезды возникает заряд. (Вычислите величину и знак этого заряда.)

Итак,

$$L \leq \frac{GMm_p c}{\sigma_T} = L_c.$$

#### § 4.5. Устойчивость теплового потока

Рассмотрим простую задачу. Пусть имеются две пластины с заданными температурами  $T_1$  и  $T_2$ , вещество между ними с теплопроводностью  $D$ , зависящей от  $T$  (см. рис. 22). В стационарных условиях установится поток типа

$$H = -D \frac{dT}{dx}.$$

Пусть в каком-то диапазоне температур  $D$  упадет до нуля. Как изменится  $H$ ?

Ответ “ $H = 0$ ” неверен. В стационарной картине  $H = \text{const}$

$$H = \frac{\int_{T_1}^{T_2} D dT}{x_1 - x_2}.$$

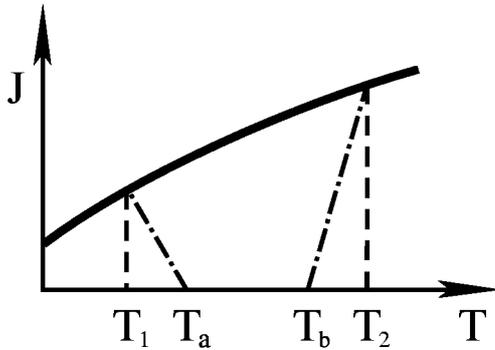


Рис. 22:

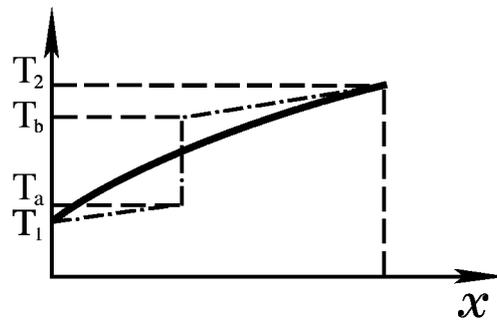


Рис. 23:

Поэтому, если при некоторых температурах  $D = 0$  (точнее, очень мало), то немного уменьшится  $\int_{T_1}^{T_2} D dT$ ,  $H$  соответственно упадет, но не обратится в нуль. Важно, что  $\nabla T$  подстроится так, что  $H = \text{const}$ , появится скачок  $T$  (см. рис. 23). Другое дело, если задать  $D$  как функцию  $x$ ; в этом случае поток мог бы и обратиться в нуль, так как в этом случае

$$H = \frac{T_1 - T_2}{\int \frac{1}{D} dx},$$

т.е. при  $D \rightarrow 0$  и  $H \rightarrow 0$ .

## § 4.6. Конвекция

Уравнения равновесия позволяют исследовать устойчивость звезды относительно сжатия или расширения без перестановки слоев. Из вариационного принципа мы знаем, что при  $\gamma > 4/3$  энергия имеет минимум, звезда устойчива относительно таких возмущений. Следующий вопрос — устойчива ли она относительно перестановки слоев. Сферически-симметричными движениями в пределах гидродинамики невозможно переставить слои вещества: появляются бесконечные  $P, \rho$ . Поэтому необходимы более сложные движения.

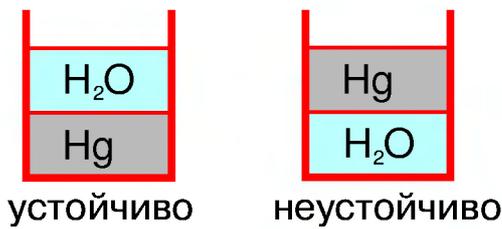


Рис. 24:

Рассмотрим, например, равновесие двух несжимаемых жидкостей с различной плотностью (вода и ртуть), рис. 24. Ситуация, в которой более тяжелая жидкость находится сверху, может быть устойчивой относительно плоских движений, но, рассматривая более широкий класс возмущений, например опрокидывание, получим выигрыш энергии. Та-

ким образом, картина устойчива только тогда, когда снизу находится более тяжелая жидкость.

**Задача 1.** Проверьте это методом малых возмущений.

**Задача 2.** Проверьте, что и в случае сферически-симметричного распределения несколько несжимаемых жидкостей разной плотности гравитационная энергия  $G \int mdm/r$  минимальна, когда внутри более плотная несжимаемая жидкость.

В звездах плотность падает с высотой. Это еще не значит, что они обязательно устойчивы относительно перестановок слоев. Для ответа на вопрос об устойчивости мы должны привести два разных элемента к одинаковому давлению и сравнить их плотности. Если при этом плотность поднятого элемента окажется меньше, то такое распределение плотности неустойчиво. Рассмотрим, например, одноатомный газ:

$$\rho = e^{-aS/\mathcal{R}} P^{3/5},$$

где  $S$  — энтропия,  $\mathcal{R}$  — универсальная газовая постоянная. Если два элемента привести к одинаковому давлению, то, очевидно, мерой плотности, а значит и величиной, от которой зависит критерий устойчивости, будет энтропия  $S$  этих элементов. При адиабатических смещениях энтропия сохраняется и распределение будет устойчивым, когда  $S$  растет с высотой, так как при этом поднявшийся элемент окажется тяжелее окружающего газа. Таким образом, при  $dS/dr > 0$  конфигурация устойчива, при  $dS/dr < 0$  — неустойчива. В частности, изотермическая атмосфера всегда устойчива, но

адиабатическое распределение ( $dS/dr = 0$ ) находится на грани устойчивости.

Обычно  $S = S(T, P)$ , т.е. для устойчивости необходимо

$$\frac{dS}{dr} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \frac{dT}{dr} + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dr} > 0.$$

Отсюда получаем условие на градиент температуры

$$\left|\frac{dT}{dr}\right| < \left|\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dr}}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P}\right| \equiv \left|\frac{dT}{dr}\right|_{\text{адиаб}}.$$

При данном уравнении состояния температура должна падать не слишком быстро, не быстрее адиабатического градиента  $|dT/dr|_{\text{адиаб}}$ . В противном случае замена слоев энергетически выгодна. Наименьшее значение адиабатический градиент достигает в области ионизации — вся энергия идет на ионизацию. Обычно эти области конвективно неустойчивы.

В области, где лучистое равновесие дает  $dS/dr < 0$ , возникает неустойчивость, поэтому задачу приходится решать в два приема. Сначала предположим, что конвекции нет, решим задачу о лучистом переносе и найдем равновесное распределение. В результате получим распределение энтропии  $S(r)$ . В областях, где  $S$  растет с радиусом, решение устойчиво, но там, где  $S$  падает,

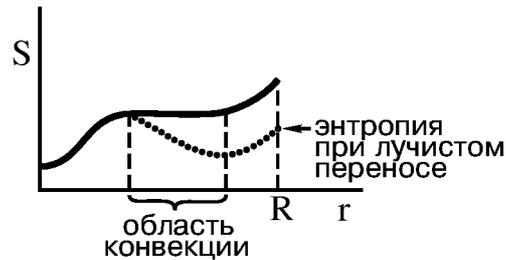


Рис. 25:

нужно сконструировать новое решение с конвективным переносом энергии (см. рис. 25). В области конвекции практически  $S = \text{const}$ .

Внешняя конвективная зона наблюдается на ближайшей к нам звезде — Солнце. Наличие этой зоны приводит к ряду замечательных явлений. Появляющийся в результате конвекции механический поток энергии нагревает корону до температуры порядка  $10^6$  К и приводит к истечению солнечного ветра. Взаимодействие конвекции и вращения приводит к генерации магнитного поля, образованию пятен и активности Солнца. Эти интересные явления составляют предмет отдельной науки — физики солнечной активности, которая выходит за рамки нашего курса. Нужно только помнить, что Солнце — самая обычная и очень спокойная звезда. На других звездах могут происходить подобные явления или еще более мощные. По-видимому, некоторые из них мы наблюдаем в виде вспышек карликовых звезд (аналогичных хромосферным вспышкам на Солнце), но большинство из них пока недоступны нашим приборам. Развитие наблюдений, например, рентгеновской астрономии скоро сделает эти проблемы насущными для физики звезд.

## Глава 5. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

### § 5.1. Свойства ядерных сил

В основе теории ядерных реакций лежат представления о ядерных силах, ядерных взаимодействиях. Ниже мы дадим тот необходимый минимум знаний о ядерных превращениях, который позволит дать представление о том, что же происходит в центральных областях звезды.

По сравнению с остальными известными в физике взаимодействиями ядерные являются наиболее сильными. Характерная энергия ядерных сил  $\sim 10\text{--}20$  МэВ/нуклон. Они больше гравитационных в  $10^{40}$  раз, электромагнитных в  $\sim 100$  раз. Ядерные силы являются короткодействующими, их потенциал пропорционален  $e^{-\mu r}/r$ , где  $\mu \simeq 10^{13}$  см $^{-1}$ , т.е. на больших расстояниях ( $r > 1/\mu \approx 10^{-13}$  см) они убывают экспоненциально быстро, но на малых радиусах преобладают над всеми остальными (см. рис. 26).

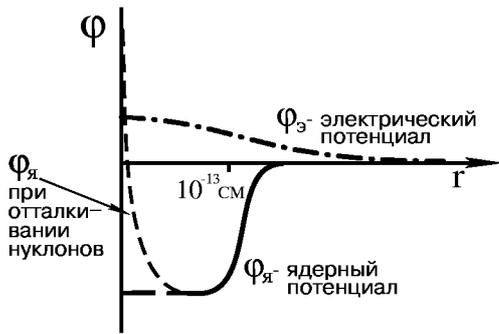


Рис. 26:

низкий) уровень имеет энергию связи всего 13,6 эВ. Более низких уровней (соответствующих меньшим расстояниям между электроном и протоном) нет в силу принципа неопределенности. Поэтому детали поведения потенциала на очень малых расстояниях неважны.

Ядерные силы одинаковым образом действуют как на протоны, так и на нейтроны. Это свойство ядерных сил называется изотопической инвариантностью. Изотопическая инвариантность относится к силам, но важно учитывать еще и принцип Паули, согласно которому две одинаковые частицы (два протона или два нейтрона) не могут находиться в одном и том же состоянии.

### § 5.2. Простейшие примеры

1. Ядро, состоящее из протона и нейтрона — дейтерий:

$$pn = {}^2\text{D} \quad E_{\text{связи}} = 2,2 \text{ МэВ.}$$

Орбитального движения нет ( $l = 0$ ), но спины  $p$  и  $n$  параллельны, спин ядра  $s = 1$  и полный момент  $J = 1$ . Энергия связи 2,2 МэВ относительно невелика, т.е. состояние очень мелкое,  ${}^2\text{D}$  — рыхлая система.

Могут ли быть в таком состоянии два протона He или два нейтрона (динейтрон)? В опытах таких ядер не нашли. И это неудивительно. В дейтроне  $l = 0$  и спины параллельны, т.е. две разные частицы ( $p$  и  $n$ ) находятся в одном и том же состоянии, но две тождественные частицы (два фермиона — два протона или два нейтрона) в такое состояние уложить нельзя. Можно было бы образовать ядро из двух тождественных частиц с  $l \neq 0$ . Но это означало бы пролет одной частицы около другой на некотором прицельном расстоянии. При этом среднее расстояние между нуклонами увеличивается и ядерные силы ослабевают. Есть еще одна возможность: взять ядро из двух нуклонов с  $l = 0$  и  $s = 0$ , т.е. с антипараллельными спинами. Однако зависимость ядерных сил от спинов такова, что они сильнее, когда спины параллельны и слабее в обратном случае. В случае двух нуклонов (когда энергия связи основного уровня при  $s = 1$  невелика — 2,2 МэВ) это приводит к тому, что связанных состояний с антипараллельными спинами вообще нет. Не надо думать, что это есть результат какого-нибудь отталкивания. На самом деле это еще одно проявление принципа неопределенности: для существования связанных состояний необходимо достаточно сильное взаимодействие. Исследование рассеяния нейтронов на протонах и протонов на протонах показывают, что в состоянии  $s = 0$  они притягиваются, но не достаточно сильно.

2. Тритий ( ${}^3\text{T}$ );  $pnn$ ,  $l = 0$ ,  $s = 1/2$ , причем спины нейтронов антипараллельны. Энергия связи  $E_{\text{св}} = 8,48$  МэВ, т.е. такую энергию нужно затратить, чтобы разбить ядро трития на три частицы.

3. Гелий-3 ( ${}^3\text{He}$ );  $ppn$ ,  $l = 0$ ,  $s = 1/2$ . Здесь антипараллельны спины протонов,  $E_{\text{св}} = 7,72$  МэВ. В приближении изотопической инвариантности энергии связи  ${}^3\text{T}$  и  ${}^3\text{He}$  были бы равны, но в следующем приближении влияет кулоновская энергия отталкивания между двумя протонами в  ${}^3\text{He}$ , поэтому  ${}^3\text{He}$  не так сильно связан.

4. Гелий-4 ( ${}^4\text{He}$ );  $ppnn$ ,  $l = 0$ ,  $s = 0$ ,  $E_{\text{св}} = 28,3$  МэВ.

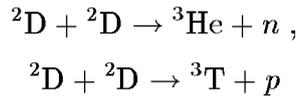
Если есть два сорта частиц, то максимально можно использовать 4 частицы, чтобы сконструировать ядро с  $l = 0$  и  $s = 0$ . Чтобы оторвать один нуклон, нужно затратить энергию порядка  $20 \text{ МэВ} = (28 - 8) \text{ МэВ}$ . Таким образом, эта система чрезвычайно сильно связана. Поскольку оболочка  $l = 0$  заполнена, ядро  ${}^4\text{He}$  аналогично химически благородным газам, инертность которых объясняется заполненностью электронных оболочек.

5. Образование ядер  ${}^5\text{He}$ ,  ${}^5\text{Li}$  в связанном состоянии невозможно. Однако есть  ${}^6\text{He}$  с  $E_{\text{св}} = 0,6$  МэВ и  ${}^8\text{He}$  с  $E_{\text{св}} = 3,0$  МэВ. (Существование  ${}^6\text{He}$  известно давно,  ${}^8\text{He}$  предсказан одним из авторов в 1960 г. и лишь после этого открыт на опыте (см. А.И.Базь, В.И.Гольданский, В.З.Гольдберг, Я.Б.Зельдович. Легкие и промежуточные ядра вблизи границ нуклонной ста-

бильности. М., “Наука”. 1972).) Эти ядра устойчивы относительно сильного взаимодействия (относительно распада на составные части).

Если нет специальных причин и если хватает энергии, то ядерные реакции, состоящие в перестановке  $n$  и  $p$ , идут с сечением  $\sigma \sim \pi r^2 \sim 10^{-26} \text{ — } 10^{-24} \text{ см}^2$ .

Например, реакции



сводятся к энергетически более выгодной перегруппировке нуклонов. При этом никакие другие взаимодействия не участвуют и задача фактически является классической задачей о столкновении шариков. Сечение такого процесса порядка квадрата радиуса “шариков” (в данном случае  $r \approx 10^{-13} \text{ см}$ ). В ядерной физике принята единица сечения 1 барн =  $10^{-24} \text{ см}^2$ .

Когда говорят, что ядро некоторого элемента, например  ${}^5\text{He}$ , не существует, то это означает, что время существования такого элемента не больше времени пролета частицы через ядро =  $10^{-13} \text{ см} / 10^9 \text{ см/с} = 10^{-22} \text{ с}$ . Скорость  $10^9 \text{ см/с}$  соответствует энергии в несколько МэВ, а получающееся время  $10^{-22} \text{ с}$  есть характерное время ядерного взаимодействия.

### § 5.3. Учет электромагнитного взаимодействия частиц

Электромагнитное взаимодействие играет роль поправки к ядерным силам — мы видели это на примере  ${}^3\text{He}$  и  ${}^3\text{T}$ . Другой более сильный пример: ядро  ${}^8\text{He}$  — связано, но с заменой двух нейтронов на два протона, не существует из-за кулоновского отталкивания. С учетом принципа Паули наиболее компактно можно уложить ядро с равным числом протонов и нейтронов, но из-за кулоновского отталкивания выгоднее брать несколько больше нейтронов. Например,  ${}^{238}_{92}\text{U}$  состоит из 146 нейтронов и 92 протонов, т.е. нейтронов в 1,5 раза больше. По этой же причине тяжелые ядра неустойчивы относительно деления.

Без кулоновского отталкивания две “ядерные капли” стремились бы слиться. Объемные энергии при этом просто складываются, а поверхностная — уменьшается, так как поверхность большой капли меньше суммы поверхностей двух малых. Однако, вследствие того что кулоновские силы спадают по степенному закону, а ядерные — по экспоненциальному, в крупных каплях (ядра с большим  $Z$ ) далекие протоны уже не притягиваются друг к другу за счет ядерных сил, а только отталкиваются за

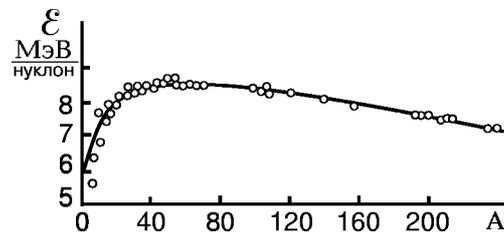
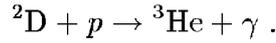
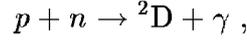


Рис. 27:

счет кулоновских. Таким образом, кулоновская энергия не очень существенна в легких ядрах и важна в тяжелых, вследствие чего ядра с промежуточными значениями  $Z$  (Fe) наиболее прочно связаны (см. рис. 27).

Количественные поправки к энергии — это одна сторона дела. Другой важный аспект учета электромагнитных взаимодействий — это процессы рождения и поглощения фотонов:



Реакция  ${}^2\text{D} + {}^2\text{D} \rightarrow {}^3\text{T} + p$  и подобные ей напоминают игру в кубики — они сводятся просто к перегруппировке нуклонов. Здесь же происходит нечто новое — рождение частиц (фотона не было, потом он родился). Из-за закона сохранения энергии реакция  $p + n \rightarrow {}^2\text{D} + \gamma$  не может идти без испускания фотона. Притяжение протона к нейтрону всегда есть, но если нуклоны сближаются и не рожают никакой частицы, то энергия сохраняется и они обязаны разлететься.

Теперь в сечение взаимодействия  $p + n = \text{D} + \gamma$  войдет вероятность рождения фотонов, т.е. появляется множитель  $e^2/\hbar c = 1/137$ . Рассмотрим процесс рождения фотонов на примере классического осциллятора. Для колеблющегося заряда  $e$  энергия, выделяющаяся в единицу времени,

$$Q \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{с}} \right] \simeq \frac{e^2}{c^3} \dot{x}^2 = \frac{e^2 r^2 \omega^4}{c^3} .$$

Время излучения одного кванта  $\hbar\omega$

$$t = \frac{\hbar\omega}{Q} ,$$

а вероятность этого процесса  $W \sim 1/t$ , таким образом, равна

$$W = \frac{1}{t} = \frac{Q}{\hbar\omega} = \omega \frac{e^2}{\hbar c} \frac{r^2}{\lambda^2}$$

(здесь  $\lambda = c/\omega$ ).

По порядку величины это выражение годится для любой системы и вероятность ядерных превращений с учетом электромагнитного взаимодействия

$$W \simeq \omega \frac{e^2}{\hbar c} \left( \frac{r}{\lambda} \right)^2 .$$

Для простой перегруппировки вероятность  $W \sim 1/t \sim \omega$ . Теперь входят безразмерные величины  $e^2/\hbar c$  — сила взаимодействия и  $(r/\lambda)^2$  — отношение площади “антенны” к квадрату длины волны. Это верно при дипольных колебаниях. Если колебания имеют другую мультипольность, то входят более высокие степени  $(r/\lambda)$ .

З а д а ч а. Известно сечение реакции  $n + p \rightarrow D + \gamma$ ,

$$\sigma = \frac{\text{const}}{v} = 0,3 \text{ барн}$$

при  $v = 2,7 \cdot 10^5$  см/с (такая скорость соответствует скорости нейтронов при комнатной температуре). При высокой температуре, когда есть фотоны с энергией больше 2,2 МэВ, очевидно, будет происходить и обратный процесс фотодиссоциации дейтерия, и изменение концентрации дейтерия со временем описывается уравнением

$$\frac{d[D]}{dt} = \sigma v [n] [p] - f(T) [D],$$

здесь  $[D]$  — концентрация D,  $f(T)$  — некоторая функция. В термодинамическом равновесии  $\frac{d[D]}{dt} = 0$  и

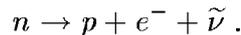
$$\frac{[n] [p]}{[D]} = F(T) \exp(-2,2 \text{ МэВ}/kT).$$

Найти функции  $f(T)$ ,  $F(T)$  и сечение фотодиссоциации дейтерия в зависимости от температуры.

(У к а з а н и е: пренебречь единицей в формуле Планка, т.е. считать  $(e^x - 1)^{-1} \simeq e^{-x}$ ).

## § 5.4. Слабое взаимодействие

Типичный пример слабого взаимодействия — превращение нейтрона в протон с испусканием электрона и антинейтрино  $\tilde{\nu}$ :



Взаимодействие называется слабым из-за малой скорости распада. Время жизни свободного нейтрона порядка 10 мин. Выше мы рассматривали реакции с характерными временами  $10^{-22}$  с для чисто ядерного взаимодействия и  $10^{-16}$  с с участием электромагнитного взаимодействия, т.е. с испусканием  $\gamma$ -квантов.

Подчеркнем, что при слабых взаимодействиях, как и при электромагнитных, реакции идут с рождением новых частиц, т.е. число частиц не сохраняется. Ни в коем случае нельзя считать, что  $e^-$  и  $\tilde{\nu}$  “сидят” в нейтроне, что нейтрон есть связанная система из протона и электрона. Нейтрон так же элементарен, как и протон<sup>3</sup>. Частицы действительно рождаются. Здесь можно провести аналогию со звуком: коснемся струны — рождаются фононы.

<sup>3</sup>Согласно современной теории нейтроны, протоны и все другие сильновзаимодействующие частицы состоят из кварков. Однако на физических процессах в звездах это не сказывается.

В реакциях такого рода можно переносить частицу справа налево и слева направо (с обязательной заменой частицы на античастицу):

$$\begin{aligned} e^+ + n &\rightleftharpoons p + \tilde{\nu}, \\ \nu + n &\rightleftharpoons p + e^-, \\ p &\rightleftharpoons n + e^+ + \nu. \end{aligned}$$

Чем отличается антинейтрино  $\tilde{\nu}$  от нейтрино  $\nu$ ? Для  $\nu$  и  $\tilde{\nu}$  масса покоя  $m = 0$ , заряд  $e = 0$  и, казалось бы, различий между ними нет. Отличаются они по типу реакций, в которых участвуют. Например, вблизи реактора экспериментально наблюдалась реакция  $\tilde{\nu} + p \rightarrow n + e^+$  и нет реакции  $\nu + n \rightarrow p + e^-$ , так как реактор дает только антинейтрино. Если бы эти частицы были тождественны (как фотон и антифотон), то ничто не мешало бы получить реакцию  $\nu + n \rightarrow p + e^-$ . Так же по типу реакций было открыто, что нейтрино бывают двух сортов: нейтрино электронное  $\nu_e$  и нейтрино мюонное  $\nu_\mu$ . Последние участвуют в реакциях типа

$$p + \mu^- \rightarrow n + \nu_\mu,$$

где  $\mu^-$  — мю-мезон<sup>4</sup>.

Следующий важный момент слабых взаимодействий: как понимать реакцию  $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ ? Ведь протон стабилен. Мы писали реакции только с учетом законов сохранения зарядов. Но нужно также удовлетворить еще и закону сохранения энергии. Однако сохранение заряда — абсолютно, а на энергию системы можно воздействовать извне.

Масса нейтрона равна

$$m_n = M_{\text{H}} + 0,78 \text{ МэВ} = m_p + m_e + 0,78 \text{ МэВ},$$

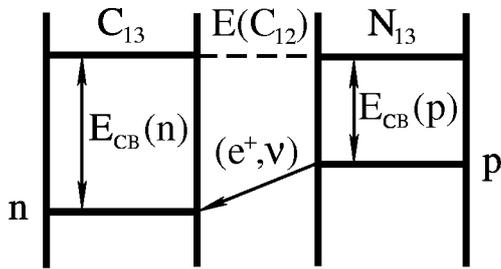
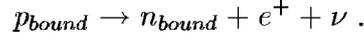


Рис. 28:

где  $M_{\text{H}}$  — масса атома водорода (ясно, что  $M_{\text{H}} = m_p + m_e$ , поскольку энергией связи электрона в атоме водорода  $\sim 13,6$  эВ можно пренебречь). Поэтому реакция  $p \rightarrow n + e^+ + \nu$  в свободном состоянии идти не может — не хватает энергии. Но возьмем связанные  $n$  и  $p$  в системах:  $^{13}\text{C} = ^{12}\text{C} + n$  и  $^{13}\text{N} = ^{12}\text{C} + p$  (см. рис.28). По ядерным силам  $^{12}\text{C}$  одинаково взаимодействует как с  $p$ , так

<sup>4</sup>В последние годы открыта еще более тяжелая частица, подобная  $e$  и  $\mu$  по своим свойствам  $-\tau^\pm$ . По-видимому, есть и еще один тип нейтрино  $\nu_\tau$ , отличающийся от  $\nu_e$  и  $\nu_\mu$  и соответствующее ему  $\tilde{\nu}_\tau$  (подобно  $\tilde{\nu}_e$  и  $\tilde{\nu}_\mu$ ). Подробнее см. § 7.4.

и с  $n$ , но кулоновское отталкивание уменьшает энергию связи протона. Связанный в ядре  $^{12}\text{C}$  протон  $p_{\text{bound}}$  оказался “тяжелее” связанного нейтрона, поэтому может идти реакция  $^{13}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu$ , т.е.



Стабильность протона и нестабильность нейтрона в некотором смысле условны, так как в связанном состоянии стабильным может оказаться нейтрон, а не протон.

Пойдет ли реакция  $p + e^+ \rightarrow n + \nu$ ? Ведь  $m_n > m_p + m_e$  и нейтрон должен распадаться. В силу этого неравенства реакция не пойдет ни в атоме водорода, ни в плазме малой плотности и температуры:  $\rho < 10^4 \text{ г/см}^3$ ,  $T < 10^9 \text{ К}$ . Однако реакция пойдет либо в случае, когда нейтрон сильно связан, либо когда электрон имеет большую энергию. Типичный пример:  $^7\text{Be} + e^- = ^7\text{Li} + \nu$ , нейтрон в  $\text{Li}$  крепко связан. Большая энергия электронов может быть обусловлена либо высокой температурой, либо их вырождением при большой плотности. Например, в вырожденном газе при высоком давлении реакция  $p + e^+ \rightarrow n + \nu$  идет при ферми-энергии электронов  $E_f > 0,78 \text{ МэВ}$ . В этом случае эта реакция носит название реакции нейтронизации вещества — главный момент в теории пульсаров и нейтронных звезд.

Такие реакции могли бы идти и в горячей плазме, когда энергия электронов достаточно высока: но там есть более эффективные реакции с испусканием  $\gamma$ -квантов, которые быстро отнимают энергию у электронов. Поэтому в разреженной плазме нейтронизация пренебрежима из-за слабости взаимодействия. К тому же нейтрон распадается обратно на протон и электрон (с образованием  $\tilde{\nu}$ ). Интересно заметить, что в той же горячей плазме, когда выход излучения из системы затруднен (большая непрозрачность вещества), процессы слабого взаимодействия с образованием нейтрона и их распадом мощно эффективно отводят энергию через испускание  $\nu$  и  $\tilde{\nu}$  (так называемые урка-процессы, см. § 7.4).

Слабые взаимодействия называются четырехфермионными, так как в реакциях участвуют 4 ферми-частицы со спином  $s = 1/2$ .

Вероятность взаимопревращения частиц за счет слабого взаимодействия по аналогии с теорией электромагнитного излучения записывается в виде

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |H'|^2 \frac{dN}{dE} [c^{-1}] ,$$

где  $dN/dE$  — число конечных состояний на единичный интервал энергии, а  $H'$  — матричный элемент гамильтониана взаимодействия, определяющий, таким образом, комплексную амплитуду вероятности процесса. В простейшей теории слабых взаимодействий полагают, что

$$H' = g \int \psi_p^* \psi_e^* \psi_\nu \psi_n dV ,$$

где  $g$  — постоянная слабого взаимодействия, а  $\psi_n, \psi_p, \psi_e, \psi_\nu$  — волновые функции частиц. В это выражение необходимо подставлять  $\psi$  или  $\psi^*$  (сопряженную волновую функцию) соответственно тому, уничтожается или рождается частица. Выражение  $H'$  написано для распада нейтрона  $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$ , поэтому мы пишем  $\psi_p^*, \psi_e^*$ . Волновая функция нейтрино  $\psi_\nu$  пишется без звездочки, так как рождение антинейтрино  $\tilde{\nu}_e$  эквивалентно уничтожению  $\nu_e$ . Важный момент — размерность  $g$ . Так как размерность  $[H] = \text{эрг}$ , а  $\int \psi^2 dV = 1$ , т.е.  $[\psi] = \text{см}^{-3/2}$ , то  $[g] = \text{эрг} \cdot \text{см}^3$ . Заметим, что константа электромагнитного взаимодействия  $e^2/\hbar c = 1/137$  безразмерна. В системе CGS численно  $g = 1,4 \cdot 10^{-49}$  эрг  $\cdot$  см<sup>3</sup>. Зная  $g$  (из опыта), можно определить вероятность распада  $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}$ . Пусть энергии выделилось много, тогда электрон  $e^-$  — релятивистский, и  $m_e$  не должна входить в ответ. Вероятность  $W$  пропорциональна квадрату матричного элемента, т.е. пропорциональна  $g^2$ . Необходимо подобрать такую комбинацию степеней  $E, \hbar$  и  $c$ , чтобы получить размерность  $[W] = \text{с}^{-1}$ :

$$W \sim g^2 E^n \hbar^m c^p,$$

т.е.

$$\begin{cases} 2 + n + m = 0 \\ 10 + 2n + 2m + p = 0 \\ -4 - 2n - 2m - p = -1, \end{cases}$$

откуда  $n = 5, m = -7, p = -6$ .

Точная формула имеет вид

$$W = \frac{1}{60\pi^3} \frac{g^2 E^5}{\hbar^7 c^6},$$

где коэффициент  $1/60\pi^3$  получен из конкретного расчета.

**З а д а ч а 1.** Рассмотрим реакцию

$$e^- + p \rightarrow n + \nu.$$

Пусть энергия электронов  $5 \text{ МэВ} < E_e < 100 \text{ МэВ}$ . Тогда протон и нейтрон можно считать покоящимися. Построить по размерности выражение для  $\sigma[\text{см}^2]$ :

$$\sigma(E) \sim g^2 E^n \hbar^m c^p.$$

**З а д а ч а 2.** Найти вероятность нейтронизации в вырожденном газе релятивистских электронов

$$W = c \int_{E_0}^{E_f} \sigma(E) \frac{dN}{dE} dE$$

( $E_0$  — пороговая энергия нейтронизации).

## § 5.5. Ядерные реакции в звездах

Эйнштейновское соотношение между массой и энергией вещества  $E = mc^2$  показывает, что ядерные реакции могут быть источником энергии звезд. В самом деле, масса четырех протонов больше массы ядра гелия:  $4m_p > m_{\text{He}}$ , и образование последнего в результате слияния четырех протонов должно происходить с огромным выделением энергии, равным разности массы — дефекту масс  $\Delta E = (4m_p - m_{\text{He}})c^2$ . Однако долгое время до появления квантовой механики казалось, что температура вещества в центре звезды,  $T \sim GM/(\mathcal{R}R) \sim 1$  кэВ, слишком низка. Для преодоления кулоновского отталкивания при столкновении двух протонов необходима энергия порядка 1 МэВ. При максвелловском распределении с температурой  $\sim 1$  кэВ энергией в 1 МэВ обладает доля частиц  $\sim \exp\left(-\frac{1 \text{ МэВ}}{1 \text{ кэВ}}\right) \simeq e^{-1000} \simeq 10^{-430}$  (отметим, что в Солнце всего  $10^{57}$  частиц, т.е. классическая вероятность взаимодействия двух протонов ничтожна). Тем не менее один из основателей теории внутреннего строения звезд А. Эдингтон, первый указавший на возможность реакции  $\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$ , не сдавался, когда ему указывали на малую вероятность из-за недостаточно высокой температуры, и говорил: “Поищите-ка место погорячее!”.

С развитием квантовой механики стало ясно, что Эдингтон прав! Вероятность ядерных реакций увеличивается благодаря подбарьерному переходу (туннельный эффект).

Оценим скорость ядерных реакций с учетом законов квантовой механики. Напомним известное соотношение Де Бройля, связывающее длину волны  $\lambda$  (волновое число  $k = 2\pi/\lambda$ ) и импульс частицы  $p$ :  $k = p/\hbar$ . Движению с импульсом  $p$  соответствует волновая функция  $e^{ikx} \rightarrow e^{\frac{ipx}{\hbar}}$  или  $e^{\frac{i}{\hbar} \int p dx}$ , если  $p$  является функцией координат. Для частиц с массой покоя  $m$  импульс  $p$  найдем из закона сохранения энергии

$$p^2/(2m) = E_{\text{кин}} = E_{\text{полн}} - U = E_0 - U .$$

Отсюда

$$p = \sqrt{2m(E_0 - U)} .$$

Для двух частиц с зарядами  $Z_1, Z_2$  энергия отталкивания

$$U = Z_1 Z_2 e^2 / r .$$

В классической механике частица с энергией  $E$  при достижении точки  $r_1$ , где  $p = 0$ , т.е.  $r_1 = Z_1 Z_2 / E$ , поворачивает и движется в обратную сторону. В квантовой теории при  $r < r_1$   $p = i\sqrt{2m(U - E_0)}$ , и в волновую функцию частицы, идущей с бесконечности, войдет множитель

$$e^{-\frac{1}{\hbar} \int_r^{r_1} \sqrt{U - E_0} dx} ,$$

т.е. существует конечная вероятность  $\psi^2 \sim e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{r_1} \sqrt{U-E_0} dx}$  прохождения частицы в область  $r < r_1$  (см. рис. 29).

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{r_1} \sqrt{U - E_0} dr &= 2 \int_0^{r_1} \sqrt{2m \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E_0 \right)} dr = \\ &= 2r_1 \sqrt{2m E_0} \int_0^{r_1} \sqrt{\frac{r_1}{r} - 1} \frac{dr}{r_1}. \end{aligned}$$

Пусть

$$x = r/r_1, \quad \int_0^{r_1} \sqrt{\frac{r_1}{r} - 1} \frac{dr}{r_1} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx.$$

При  $x \rightarrow 0$  подынтегральное выражение  $\rightarrow \infty$ , однако интеграл сходится:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что сходимость интеграла позволяет нам вести интегрирование от нуля, а не от радиуса ядерного взаимодействия  $r_2$ , который составляет  $\sim 10^{-3} r_1$ . Ясно, что такое приближение (замена  $r_2 \rightarrow 0$ ) даст лишь небольшой поправочный множитель.

При точном вычислении вероятности перед экспонентой есть еще степенные множители, которые мы не учитываем. Для нас сейчас важна только экспонента.

Итак,  $\psi^2(0) = e^{-\varphi}$ , где

$$\varphi = \frac{\sqrt{2\pi} Z_1 Z_2 e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{m c^2}{E_0}}.$$

Выше предполагалось, что одно из ядер покоится ( $m_2 = \infty$ ). На самом деле при расчете в системе центра масс вместо  $m$  следует, как обычно, подставить приведенную массу  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Тогда

$$\varphi = \frac{\sqrt{2\pi} Z_1 Z_2 e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{\mu c^2}{E_0}} = \frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v_0},$$

где  $v_0$  — относительная скорость частиц на бесконечности. В таком виде видна безразмерность  $\varphi$  (аналогично  $e^2/(\hbar c)$ ).

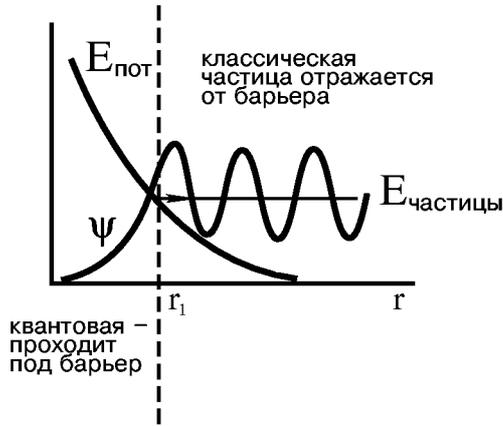


Рис. 29:

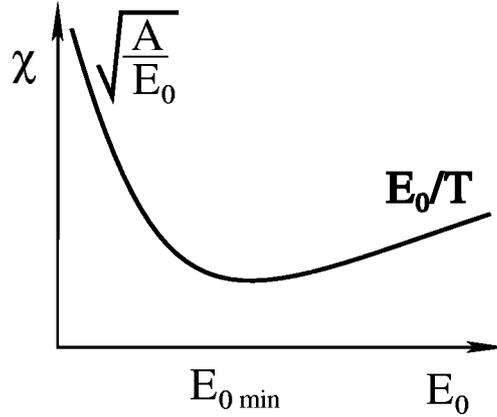


Рис. 30:

Мы получили вероятность подбарьерного сближения частиц с данной энергией  $E_0$ :  $\sim e^{-\sqrt{\frac{A}{E_0}}}$ , где  $A = \frac{2\pi^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\hbar^2} \cdot \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m_p$  ( $A_1, A_2$  — атомные массы ядер). В тепловом равновесии (при температуре  $T$ ) количество частиц с энергией  $E_0$  пропорционально  $e^{-\frac{E_0}{T}}$  и полная вероятность

$$\omega \sim \int e^{-\chi} dE_0, \text{ где } \chi = \sqrt{\frac{A}{E_0}} + \frac{E_0}{T}.$$

Функция  $\chi(E_0)$  имеет минимум при некотором значении  $E_{0 \min}$  (см. рис.30). Очевидно, что область минимума даст главный вклад в интеграл, так как  $e^{-\chi}$  в этой точке имеет острый максимум. Вычисление таких интегралов проводится методом перевала. Сначала находим экстремум:

$$\frac{d\chi}{dE_0} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{A}}{E_0^{3/2}} + \frac{1}{T} = 0, \quad E_{0 \min} = \left( \frac{T\sqrt{A}}{2} \right)^{2/3},$$

$$\chi_{\min} = 3 \cdot 2^{-2/3} \left( \frac{A_1}{T} \right)^{1/3} = \left( \frac{\alpha}{T} \right)^{1/3},$$

$$\alpha = \frac{27\pi^2}{2} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{(\hbar c)^2} \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m_p c^2,$$

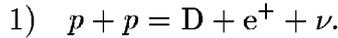
$$\left( \frac{\alpha}{T} \right)^{1/3} = 4,25 \cdot T_9^{-1/3} \left( \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} Z_1^2 Z_2^2 \right)^{1/3}.$$

Здесь  $T_9 = T/10^9$  К — температура в млрд. градусов. Теперь можно разложить  $\chi(E_0)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $E_{0 \min}$ :

$$\chi = \chi_{\min} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial E_0^2} (E_0 - E_{0 \min})^2, \quad \left( \frac{\partial \chi}{\partial E_0} = 0 \right).$$

Итак,  $\omega = e^{-\chi_{\min}^2}$  с некоторым множителем, получающимся от интегрирования второго члена, которое сводится к интегралу вида  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  (проведите это интегрирование!). Так мы нашли только вероятность сближения ядер. Полная вероятность реакции получится после умножения на вероятность соответствующего взаимодействия.

Перейдем к конкретным реакциям.



Выделение энергии в этой реакции  $Q = 1,442$  МэВ, в том числе  $\sim 0,25$  МэВ уносят нейтрино.

Число ядер дейтерия D, рождающихся в  $1 \text{ см}^3$  на  $1 \text{ с}$ , равно

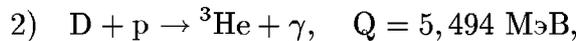
$$\frac{d[D]}{dt} = \frac{1}{2} \frac{n_p^2}{6 \cdot 10^{23}} \cdot 4,2 \cdot 10^{-15} T_9^{-2/3} e^{-3,38/T_9^{1/3}} [\text{с}^{-1} \text{ см}^3].$$

Вводя весовые доли для химических элементов

$$X_i = \frac{m_H n_i A_i}{\rho} = \frac{n_i A_i}{6 \cdot 10^{23} \rho},$$

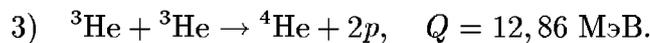
получим

$$\frac{dX_D}{dt} = 4,2 \cdot 10^{-15} \rho X_H^2 T_9^{-2/3} e^{-3,38/T_9^{1/3}} [\text{с}^{-1}].$$



$$\frac{dX_{{}^3\text{He}}}{dt} = 3,98 \cdot 10^3 \cdot X_H X_D \rho T_9^{-2/3} e^{-3,72/T_9^{1/3}} [\text{с}^{-1}].$$

Укажем на большую разницу ( $10^{18}$  раз) в отношении коэффициентов в первой и во второй реакции. Это объясняется тем, что первая реакция идет со слабым взаимодействием на лету, а во второй все определяется электромагнитным взаимодействием. Отметим также, что вторая реакция в условиях земных морей и океанов “зарезается” экспонентой, несмотря на большой множитель, стоящий перед ней.



Скорость реакции:

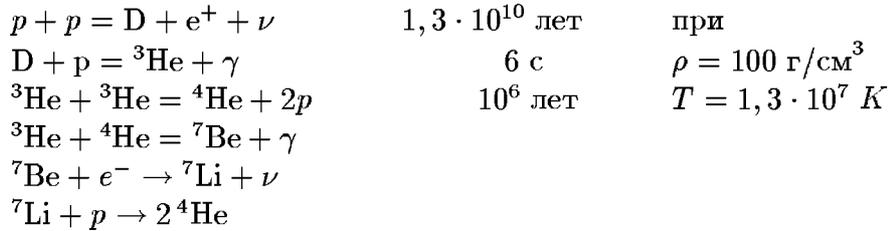
$$\frac{dX_{{}^4\text{He}}}{dt} = 1,3 \cdot 10^{10} \rho X_{{}^3\text{He}}^2 T_9^{-2/3} e^{-\frac{12,28}{T_9^{1/3}}} [\text{с}^{-1}].$$

Здесь множитель еще больше, так как реакция идет по сильному взаимодействию.

Итак, мы видим, что благодаря цепочке реакций 1), 2), 3) возможно превращение четырех ядер водорода в ядро гелия с выделением энергии

$(m_{\text{He}}^4 - 4m_{\text{H}})c^2$ . Эта цепочка реакций может идти при достаточно высокой температуре в абсолютно чистом водороде и называется протон-протонным (или  $pp$ -) циклом. Возможны и другие цепочки протон-протонного цикла.

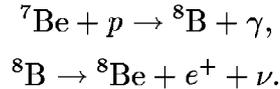
Расчет показывает, что при низких температура ( $T < 2 \cdot 10^7$  К реакции идут в основном по двум следующим схемам:



Справа указано характерное время реакций (как оно вычислено?).

Ясно, что без участия слабого взаимодействия водород в He не превратится, так как из протонов надо получить нейтроны. свободный протон в нейтрон не превращается — это возможно только в поле другого протона, который его подхватывает. На одно ядро  ${}^4\text{He}$  должно пройти две реакции  $p + p \rightarrow \text{D} + e^+ + \nu$ . На каждую реакцию  $p + p$  во всем  $pp$ -цикле выделяется 13,086 МэВ энергии.

Вторая цепочка интересна потому, что дает побочные продукты:



Последний распад замечателен тем, что он дает нейтрино высокой энергией, в среднем  $E = 8-9$  МэВ, которые можно детектировать на Земле (см. ниже).

Очевидно, что скорость выделения энергии в  $pp$ -цикле равна скорости, с которой идет первая реакция:



Дейтерий тут же вступает в реакцию с протоном. Поэтому он не накапливается и стационарная концентрация

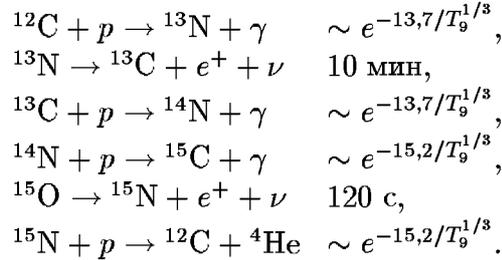
$$X_{\text{D}} = \frac{6\text{с}}{1,3 \cdot 10^{10} \text{ лет}} X_{\text{H}} = 10^{-17} X_{\text{H}}.$$

Выпишем полную скорость энерговыделения в  $pp$ -цикле:

$$\varepsilon_{pp} = \rho X_{\text{H}}^2 \varepsilon_0 (T/T_0)^n \text{ [эрг/(г} \cdot \text{с)]}$$

$T_0/10^6$	$\varepsilon_0$	$n$
1	$4 \cdot 10^9$	10,6
5	$1,8 \cdot 10^{-3}$	5,95
10	$6,8 \cdot 10^{-2}$	4,60
15	0,377	3,95
20	1,09	3,64
30	4,01	3,03

При температурах более высоких, чем солнечные (в более массивных звездах), идет CNO-цикл (он возможен только в присутствии катализатора углерода)



Обратите внимание на то, что в последней реакции снова образуется ядро  ${}^{12}\text{C}$ , с которого начиналась первая реакция. Отметим, что в отличие от  $pp$ -цикла здесь слабое взаимодействие идет на лету, т.е. слабое взаимодействие и подбарьерный переход разделены. Поскольку в CNO-цикле участвуют ядра с более высоким зарядами, он идет при более высокой температуре, причем зависимость от температуры более крутая, чем в  $pp$ -цикле. Энерговыведение во всем CNO-цикле в расчете на одну реакцию  ${}^{14}\text{N} + p$  (самую медленную) равно 24,97 МэВ. Выпишем полную скорость энерговыведения в CNO-цикле:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \rho X_{\text{H}} X_{\text{CNO}} (T/T_0)^n \text{ [эрг/г с]}$$

$T_0/10^6$	$\varepsilon_0$	$n$
6	$9 \cdot 10^{-10}$	27,3
10	$3,4 \cdot 10^{-4}$	22,9
15	1,94	19,9
20	$4,5 \cdot 10^2$	18,0
30	$4,1 \cdot 10^5$	15,6
50	$6,2 \cdot 10^8$	13,6
100	$1,9 \cdot 10^{12}$	10,2

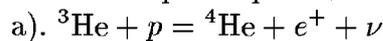
**З а д а ч и.**

1. Подсчитать, при какой температуре D выгорает за  $10^6$  лет. То же для  ${}^3\text{He}$ .

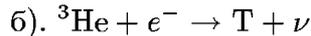
2. Найти условия, при которых энерговыведение

$$\varepsilon_{\text{CNO}} = \varepsilon_{pp}.$$

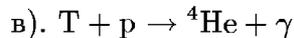
3. Вычислить скорость реакций:



(в этой реакции выделяются высокоэнергичные нейтрино),



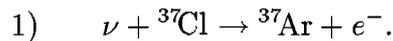
(указание: использовать экспериментальные данные по распаду  $\text{T} + 3\text{He} + e^- + \tilde{\nu}$ : энергия (не включая  $m_e c^2$ ) 0,0186 МэВ, время жизни 12,26 лет. Рассмотреть равновесие с невырожденными электронами при высокой температуре),



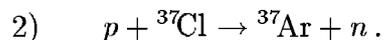
## § 5.6. Поиски солнечных нейтрино

Когда Р. Дэвис приступал к проведению своего эксперимента по регистрации нейтрино от Солнца, астрофизики не ожидали ничего сенсационного. Считалось, что этот опыт позволит просто уточнить параметры модели Солнца, так как благодаря нейтрино мы можем “заглянуть” в самые недра нашего светила. Однако результаты опыта оказали столь опешеломляющими, что многие горячие головы стали указывать на них как на доказательство отсутствия ядерных реакций на Солнце. На самом деле приходится к таким радикальным выводам на основе единственного, очень трудного и тонкого эксперимента, конечно, преждевременно. Но понимать сущность проблемы солнечных нейтрино необходимо каждому, кто хочет изучать физику и эволюцию звезд.

Для регистрации нейтрино в опыте Дэвиса применяется хлор-аргонный метод, предложенный еще в 1946 г. Б. Понтекорво. Под действием нейтрино происходит реакция

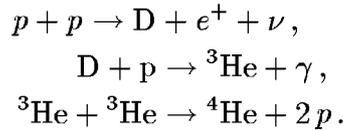


Порог этой реакции 0,814 МэВ. Бак, содержащий свыше 600 т перхлорэтилена ( $\text{C}_2\text{Cl}_4$ ), помещен на глубине около 1,5 км в шахте. Это сделано для того, чтобы избавиться от фона космических лучей, рождающих протоны, которые тоже приводят к образованию  ${}^{37}\text{Ar}$ :

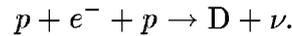


Образующийся в процессе 1) аргон — это инертный газ, он не вступает в химические реакции. Чтобы его извлечь, в бак добавлено очень немного ( $3 \cdot 10^{19}$  атомов) изотопически чистого  ${}^{36}\text{Ar}$ . При продувании бака гелием пузырьки газа захватывают аргон (как  ${}^{36}\text{Ar}$ , так и  ${}^{37}\text{Ar}$ ), который затем отделяют от паров гелия и паров  $\text{C}_2\text{Cl}_4$  в сложной системе низкотемпературных конденсаторных ловушек, фильтров и т.п. В результате удается извлечь около 90% аргона, который помещают в миниатюрный пропорциональный счетчик (прибор типа счетчика Гейгера) с камерой меньше  $1 \text{ см}^3$ . Этот счетчик и позволяет зарегистрировать присутствие  ${}^{37}\text{Ar}$ , так как этот изотоп аргона нестабилен: он захватывает  $K$ -электрон, превращаясь снова в  ${}^{37}\text{Cl}$ , согласно реакции 1), где стрелочку следует повернуть в обратную сторону. Период полураспада  ${}^{37}\text{Ar}$  составляет 35 дней. Регистрация  $K$ -захвата возможна потому, что в освободившееся состояние в  $K$ -оболочке переходит электрон с верхнего уровня. Лишь в 7% случаев энергия этого электрона уносится фотоном, а в 93% — еще одним электроном, покидающим атом (эффект Оже). Именно эти Оже-электроны и позволяют отождествить отсчеты, связанные с распадом  ${}^{37}\text{Ar}$ , так как они имеют характерную энергию 2,8 кэВ. Такой метод позволяет обнаружить  ${}^{37}\text{Ar}$ , если его во всем огромном баке с перхлорэтиленом всего 10 атомов.

Разберемся теперь, что же ожидали получить от этой установки. Превращение водорода в гелий не может обойтись без слабого взаимодействия, так как при образовании ядра гелия 2 протона должны превратиться в нейтроны. Таким образом на каждое ядро гелия должно выделиться 2 нейтрино. Какие из них могут в принципе наблюдаться в опыте Дэвиса? Рассмотрим основную цепочку протон-протонного цикла:

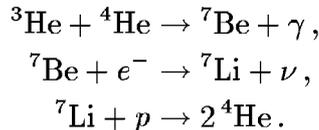


В стандартной модели Солнца (масса =  $M_{\odot}$ , светимость =  $L_{\odot}$ , радиус =  $R_{\odot}$ , доля тяжелых элементов  $Z/X = 0,019$ , возраст =  $4,7 \cdot 10^9$  лет) по этой цепочке образуется 86% из всех вновь создаваемых ядер гелия. Однако максимальная энергия нейтрино в первой реакции всего 0,420 МэВ. Правда с вероятностью 0,0025 вместо первой реакции может пойти процесс:



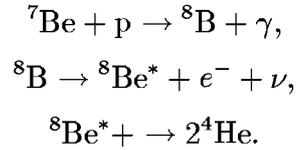
Здесь  $\nu$  выделяется фактически с постоянной энергией 1,44 МэВ, равной разности масс покоя  $D$  и  $2p + e^-$ , которая уже превосходит порог реакции 1). При данной светимости Солнца поток этих нейтрино практически не зависит от модели (конечно, в предположении, что светимость Солнца обусловлена термоядерным горением водорода). Благодаря потоку этих нейтрино на каждый атом  ${}^{37}\text{Cl}$  на Земле должно происходить  $0,3 \cdot 10^{-36}$  реакций 1) в секунду. Величину  $10^{-36}$  захватов на атом мишени в секунду стали называть единицей солнечных нейтрино (SNU). Чувствительность установки Дэвиса недостаточна для измерения потоков порядка 0,3 SNU. Если бы поток оказался меньше 0,3 SNU, можно было бы поставить под сомнение термоядерное горение, или источник светимости Солнца. На самом же деле по данным 1978 г. зарегистрирован поток  $1,2 \pm 0,3$  SNU. Что же неожиданного оказалось в результатах Дэвиса? Все дело в том, что полученный поток слишком низок по сравнению со стандартной моделью Солнца.

В 14% случаев в этой модели вместо слияния с  ${}^3\text{He}$  ядро  ${}^3\text{He}$  сливается с  ${}^4\text{He}$  и идет цепочка



Из получаемых здесь “бериллиевых” нейтрино 90% имеют энергию 0,861 МэВ и тоже могут быть зарегистрированы (у 10% энергия 0,383 МэВ), давая в сумме с *реп*-нейтрино около 1,2 SNU. Еще примерно 0,1 SNU дают  $\nu$  от CNO-цикла, который должен играть совсем незначительную роль внутри Солнца. Все это еще не противоречит опыту Дэвиса.

Противоречие наступает в третьей цепочке  $pp$ -цикла, которая протекает всего в 0,02% случаев:



Эта цепочка важна для опыта Дэвиса из-за большой энергии “борных” нейтрино: максимум непрерывного спектра этих  $\nu$  составляет 14,06 МэВ. Из-за более высокой энергии сечение взаимодействия борных нейтрино в среднем на три порядка выше, чем у  $pp$ -нейтрино. По расчетам, проведенным до начала опыта Дэвиса, получали, что борные нейтрино дадут 30÷70 SNU, и только после первых результатов Дэвиса удалось “ужать” этот поток до 4,3 SNU (т. е. вся стандартная модель дает 5,6 SNU). Почему же возможен такой разброс в предсказаниях? Дело в том, что поток борных нейтрино очень резко зависит от температуры: для температур центра Солнца примерно  $T^{18}$  (это вызвано, главным образом, большим кулоновским барьером реакции  ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$ ). Поэтому небольшие вариации в непрозрачности, уравнении состояния, в описании конвективного переноса могут слегка изменить температуру в центре, что может сильно оказаться на потоке нейтрино от распада  ${}^8\text{B}$ . Но никаким способом в рамках обычных представлений об эволюции Солнца не удастся объяснить наблюдаемый низкий поток.

Результаты Дэвиса породили огромный поток работ, пытающихся свести концы с концами в этой проблеме. Рассматривалась возможность перемешивания Солнца, его неоднородность по первичному химическому составу, распад нейтрино и т. д. Нам представляется, что разумно не спешить с выводами, дождаться результатов других наблюдений.

Принципиальное значение имело бы использование галлиевого детектора для регистрации реакции (предложенное В.А.Кузьминым)



Порог этой реакции всего 0,233 МэВ, время полураспада  ${}^{71}\text{Ge}$  11 дней, таким образом, эта реакция чувствительна к самым главным процессам  $pp$ -цикла. Здесь в стандартной модели ожидается 90 SNU (галлиевых), причем 63 SNU от первой  $pp$ -реакции. Трудность технического осуществления этого эксперимента связана, в частности, с ценой галлия. Чтобы иметь 1 событие в сутки, необходимо около 50 т галлия. Это будет стоить десятки миллионов долларов (или рублей). Но научное значение этого опыта очень велико и его проведение планируется как в США, так и в СССР. А галлий в конце концов не пропадет и не испортится. По окончании эксперимента его можно будет пустить на нужды промышленности.

## Глава 6. СТРОЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЗВЕЗД

### § 6.1. Уравнения звездной структуры

В самой общей постановке расчет внутреннего строения звезд сводится к интегрированию четырех дифференциальных уравнений, каждое из которых мы подробно рассматривали в предыдущих главах. Выпишем сейчас их вместе.

1. Уравнение массы:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \text{или}$$

$$M_r = \int_0^r 4\pi \rho r^2 dr.$$

2. Уравнение гидростатического равновесия:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho.$$

3. Уравнение переноса энергии в диффузионном приближении:

$$L_r = -4\pi r^2 D \frac{d\varepsilon_r}{dr},$$

где  $\varepsilon_r = aT^4$  — плотность лучистой энергии и  $D = cl/3 = c/(3\kappa\rho)$  — ее коэффициент диффузии.

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa\rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}.$$

4. Уравнение энергетического баланса:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  [эрг/сг] — скорость выделения энергии.

Эти дифференциальные уравнения следует дополнить уравнением состояния

$$P = P(\rho, T, X, Y, Z)$$

и выражениями для непрозрачности и скорости выделения энергии

$$\kappa = \kappa(\rho, T, X, Y, Z),$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, X, Y, Z).$$

Величины  $X, Y, Z$  — весовые доли элементов: водорода ( $X$ ), гелия ( $Y$ ) и других ( $Z$ ). Отметим, что в современных расчетах выражение для  $\kappa$  используется в виде таблиц, хранящихся в памяти машины. Уравнение (3) справедливо только для лучистой теплопроводности. В области конвективного переноса энергии необходимо использовать условие изэнтропичности ( $dS/dr = 0$ ), которое через температуру записывается следующим образом:

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}.$$

При расчетах обычно принимают следующий переходный химический состав звезды:  $X \simeq 0,7$ ;  $Y \simeq 0,28$ ;  $Z = 0,02$  для звезд галактической плоскости и  $Z = 10^{-3}$  для звезд шаровых скоплений.

Только что обособившуюся в результате конденсации межзвездного газа звезду разумно считать химически однородной. Как показывают расчет, эволюция звезды идет различными путями в зависимости от того, остается ли звезда химически однородной или же изменения химического состава происходят только там, где протекают ядерные реакции, т. е. в ее центральных областях. У маломассивных звезд ( $M < 0,5M_{\odot}$ ) конвекцией может быть охвачена большая часть звезды, поэтому здесь перемешивание приводит к тому, что химический состав меняется у всей звезды в целом. У более массивных звезд конвекция отсутствует вообще либо происходит в небольшой центральной части, где выделяется энергия, и для них изменение химического состава является функцией только лагранжевой координаты и пропорционально скорости выделения ядерной энергии:

$$\left. \frac{\partial X}{\partial t} \right|_{M_r} = -A\varepsilon.$$

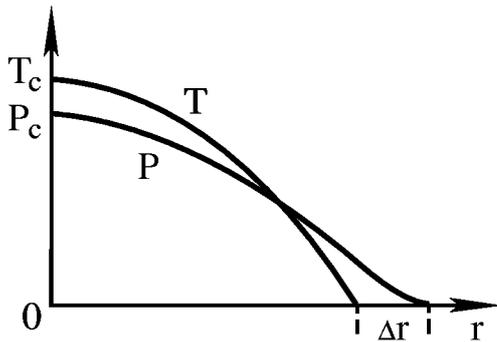


Рис. 31:

Если теперь мы будем интегрировать эти уравнения с фиксированными начальными параметрами, то не всегда  $P$  и  $T$  обратятся в нуль одновременно на поверхности (рис. 31). Это условие ( $T_0 = 0$ ,  $P_0 = 0$ ) накладывает дополнительное ограничение на  $P_c$  и  $T_c$ . Поэтому семейство решений будет однопараметрическим (по  $P_c$  или  $T_c$ ). При данном  $P_c$  есть одно  $T_c$ , такое

В дальнейшем будем рассматривать модели без конвекции. Итак, имеем четыре дифференциальных уравнения для величин  $M_r$ ,  $P$ ,  $T$  и  $L_r$  с граничными условиями:

$$\begin{aligned} M_r = 0, L_r = 0 & \quad \text{при } r = 0, \\ P = 0, T = 0 & \quad \text{на поверхности.} \end{aligned}$$

В центре можно варьировать два параметра  $P_c$  и  $T_c$ .

Если теперь мы будем интегрировать эти уравнения с фиксированными начальными параметрами, то не всегда  $P$  и  $T$  обратятся в нуль одновременно на поверхности (рис. 31). Это условие ( $T_0 = 0$ ,  $P_0 = 0$ ) накладывает дополнительное ограничение на  $P_c$  и  $T_c$ . Поэтому семейство решений будет однопараметрическим (по  $P_c$  или  $T_c$ ). При данном  $P_c$  есть одно  $T_c$ , такое

что  $P_0 = 0$ ,  $T_0 = 0$ . Итак, при учете этого условия  $T_c = T_c(P_c)$ ,  $M = M(P_c)$ . Если бы мы рассматривали только механическое равновесие, то можно было бы варьировать два параметра (скажем  $M$  и  $S$ ). Но еще необходимо, чтобы выделение энергии и ее отвод компенсировали друг друга (условие теплового баланса). Это дополнительное условие ограничивает количество решений: для данного  $P_c$  есть единственная модель с одним значением массы, следовательно, для данной массы есть определенное значение  $P_c$  и определенная светимость<sup>5</sup>.

## § 6.2. Соотношение масса-светимость

Вид уравнений позволяет найти ряд соотношений для интегральных характеристик звезд (масса, светимость, радиус), не решая численно систему. Это можно сделать в том случае, когда непрозрачность  $\kappa$  и энерговыделение  $\epsilon$  степенным образом зависят от плотности и температуры. На самом деле эти зависимости различны для различных слоев, и, более того, в некоторых случаях вообще нельзя применять степенную аппроксимацию. Тем не менее для широкого класса “гладких” моделей получающиеся соотношения подтверждаются прямым численным расчетом.

В выражениях для непрозрачности будем пользоваться при низких температурах законом Крамерса:

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-7/2},$$

а при высоких — томпсоновской непрозрачностью:

$$\kappa = \kappa_T = 0,4 \text{ см}^2/\text{г}.$$

При оценках будем производные заменять на отношения типа:

$$\frac{dM}{dr} \sim \frac{M}{R}, \quad \frac{dP}{dr} \sim \frac{P}{R} \quad \text{и т. д.}$$

Тогда первые три уравнения дают следующие три соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{dM_r}{dr} &= 4\pi r^2 \rho \rightarrow M = R^3 \rho_c, \\ \frac{dP}{dr} &= -\frac{GM_r}{r^2} \rho \rightarrow P = \frac{GM}{R} \rho = GM^{2/3} \rho^{4/3}, \\ L_r &= -4\pi r^2 D \frac{d(aT^4)}{dr} \rightarrow L \sim R \frac{T^4}{\kappa \rho} \sim RT^{15/2} \rho^{-2}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>В принципе при данной массе могло бы быть несколько решений, но фактически это не так (формально, впрочем, можно было бы говорить о холодном решении как равноправном). Напомним, что мы имеем дело с заданным химическим составом, таким, что при высокой температуре идут ядерные реакции с выделением энергии.

При таких оценках численные коэффициенты опускаются. Используя первое соотношение, получим для светимости

$$L \sim M^{1/3} T^{15/2} \rho^{-7/3},$$

а уравнение состояния идеального газа  $P = \mathfrak{R} \rho T$  дает

$$T \sim GM^{2/3} \rho^{1/3}.$$

Таким образом,

$$L \sim G^{15/2} M^{16/3} \rho^{1/6}.$$

Аналогично заменяем уравнение для энергии:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon \rightarrow L = R^3 \rho \varepsilon = M \varepsilon.$$

Для энерговыделения имеем выражение (аппроксимирующие точные формулы 5.5):

$$\varepsilon = \rho T^{\nu},$$

где  $\nu = 4$  при  $T \sim 13 \cdot 10^6$  К (в случае pp-цикла) и  $\nu = 15 \div 20$  при  $T \sim 20 \cdot 10^6$  К (CNO-цикл). Дальше ограничимся случаем pp-цикла ( $\nu = 4$ ). Тогда

$$L \sim M \rho T^4 \sim G^4 M^{11/3} \rho^{7/3}.$$

Исключая плотность из двух выражений для  $L$  окончательно получим

$$L \sim G^{7,8} M^{5,5},$$

$$R \sim M^{0,07},$$

$$T_{\text{эф}} \sim M^{1,3}.$$

Отметим, что численные расчеты дают  $L \sim M^4$  (для звезд с массой порядка  $1 M_{\odot}$ ). Следует обратить внимание на сильную зависимость светимости от постоянной тяготения  $L \sim G^{7,8}$ . Из геологии известно, что светимость Солнца не менялась, по крайней мере на протяжении последних трех миллиардов лет. Это говорит о том, что постоянная тяготения не могла сильно меняться с возрастом Вселенной.

В случае томпсоновской непрозрачности (высокие температуры)

$$\kappa = \kappa_T,$$

$$L \sim RT^4 \rho^{-1} \kappa^{-1} \sim M^{1/3} T^4 \rho^{4/3} \sim M^{1/3} (T/\rho^{1/3})^4 \sim G^4 M^{11/3},$$

т. е. энергоотвод не зависит от  $\rho$ . Для энерговыделения при больших температурах имеем

$$L = M \rho T^{15} \quad (\text{CNO-цикл}),$$

что дает

$$\rho \sim M^{-4/3} G^{-11/6},$$

$$R \sim M^{7/9}.$$

Приведем таблицу 3, полученную путем численных расчетов для верхней части главной последовательности ( $M > M_{\odot}$ ,  $Z = 0,02$ ).

**Таблица.**

Модели звезд главной последовательности

$M/M_{\odot}$	2,5	5	10
$L/L_{\odot}$	20	300	3000
$R/R_{\odot}$	1,6	2,4	3,6
$\rho_c [\text{г см}^{-3}]$	48	20	8

### § 6.3. Тепловая устойчивость звезд

Раньше мы рассматривали вопросы механического равновесия звезд. Теперь нас будет интересовать их тепловая устойчивость, т. е. мы попытаемся понять, почему Солнце и другие звезды, обладая огромными запасами взрывоопасного вещества, весьма “разумно” расходует его на протяжении миллионов и даже миллиардов лет.

Тепловое равновесие вообще определяется равенством скоростей процессов энерговыделения и энергоотвода. Система устойчива в тепловом отношении в том случае, когда при небольшом возмущении температуры эти процессы меняются так, чтобы ликвидировать начальное возмущение.

Пусть в центре звезды “горит” водород и выделяющаяся энергия отводится теплопроводностью. Что произойдет при небольшом изменении температуры?

Из уравнения диффузии излучения получаем, что отвод тепла (светимость звезды) следующим образом зависит от физических величин:

$$L_{ff}^- \sim R \frac{T^{7,5}}{\rho^2}$$

при крамеровском законе непрозрачности и

$$L_c^- \sim R \frac{T^4}{\rho}$$

при комптоновском рассеянии. В эти формулы входит  $R$ , а не  $R^2$ , из-за градиента плотности лучистой энергии, входящего в уравнение диффузии:

$$\nabla T^4 = \frac{dT^4}{dr} \sim \frac{T^4}{R} \quad L \sim R^2 \nabla T^4 \sim RT^4.$$

Радиус  $R$ , средние значения температуры  $T$  и плотности  $\rho$  для звезды данной массы не являются независимыми:

$$M \sim R^3 \rho, \quad T \sim GM/R$$

(в дальнейшем  $G$  считаем постоянной и не вписываем в формулы). С учетом этих соотношений имеем следующие зависимости для отвода тепла:

$$L_{ff}^- \sim M^{a_1} \rho^{1/6} \sim M^{a_2} \sqrt{T},$$

$$L_c^- \sim M^{b_1} \rho_0 \sim M^{b_2} T^0$$

(в качестве упражнения найдите показатели  $a_i, b_i$ ). Таким образом, в случае крамеровской непрозрачности энергоотвод от температуры зависит слабо, а при комптоновском рассеянии не зависит от температуры вообще.

Как обстоит дело с подводом тепла  $L^+$ ? Из полученных в предыдущем параграфе соотношений имеем:

$$L_{pp}^+ \sim M \rho T^4 \sim M^c T^7 \quad (pp\text{-цикл}),$$

$$L_{\text{CNO}}^+ \sim M \rho T^{15} \sim M^d T^{18} \quad (\text{CNO-цикл})$$

(аналогично проделанному выше найдите показатели  $c$  и  $d$ ). В выражениях для теплоотвода  $\rho$  и  $T$  входят как в числитель, так и знаменатель, поэтому они почти (или совсем) сокращаются. В формулу для  $L^+$  и плотность и температура входят с одной стороны.

Почему в  $L^+$  плотность  $\rho$  входит в первой степени? Вероятность процесса на атом пропорциональна  $\rho$ , на единицу объема  $\sim \rho^2$ . Следовательно, по всей массе звезды  $L^+ \sim M\rho$ .

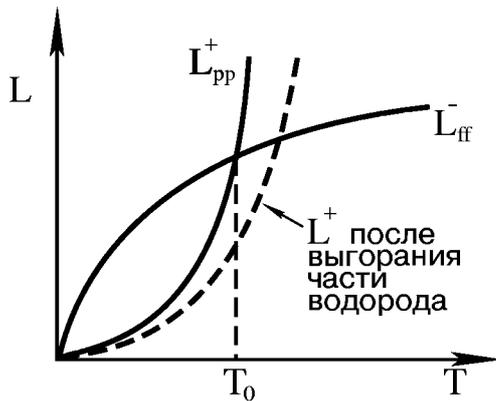


Рис. 32:

В CNO-цикле есть процессы типа  $^{12}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu$ , вероятность которых не зависит от  $\rho$ , но они быстры (см. 5.5), а процессы типа столкновений (в которые  $\rho$  входит) медленны. Именно последние и лимитируют выделение энергии, т. е. они определяют скорость подвода тепла.

Итак, в равновесии  $L^+ = L^-$  при некотором фиксированном значении температуры (см. рис. 32).

Является это равновесие устойчивым? На первый взгляд кажется, что небольшое увеличение темпера-

туры приведет к возрастанию энерговыделения, что в свою очередь поднимает температуру дальше и ведет к взрыву звезды. При уменьшении температуры отвод энергии становится больше, чем ее выделение, и, казалось

бы, звезда должна остыть. Подобная ситуация возникает при неустойчивости горения обычных веществ на Земле.

Однако звезды устойчивы. Где ошибка в наших рассуждениях? Мы не учли факт, что звезда имеет отрицательную теплоемкость. В общем случае изменение температуры со временем определяется уравнением

$$c \frac{dT}{dt} = L^+ - L^- ,$$

где  $c$  — теплоемкость системы. При малых возмущениях относительно точки равновесия  $T_0$  разложим выражения  $L^+$  и  $L^-$  в ряд по степеням  $T - T_0$ , ограничиваясь линейными членами:

$$c \frac{d(T - T_0)}{dt} = L^+(T_0) + \frac{dL^+}{dT}(T - T_0) - L^-(T_0) - \frac{dL^-}{dT}(T - T_0),$$

откуда (поскольку  $L^+(T_0) = L^-(T_0)$ )

$$c \frac{d}{dt}(T - T_0) = \left( \frac{dL^+}{dT} - \frac{dL^-}{dT} \right) (T - T_0).$$

Ясно, что при  $dL^+/dT > dL^-/dT$  и  $c > 0$  малые возмущения приведут к неустойчивости:

$$T - T_0 = \text{const} \cdot \exp \left[ \left( \frac{dL^+}{dT} - \frac{dL^-}{dT} \right) t / c \right]. \quad (6.1)$$

Для звезды полная энергия  $\mathcal{E}$ , которая является суммой гравитационной энергии  $U$  и тепловой  $W = c_v M T$ , отрицательна:

$$U = -2W \quad (\text{теорема вириала; см. 1.8})$$

$$\mathcal{E} = U + W = -W < 0.$$

Таким образом, теплоемкость звезды  $c = d\mathcal{E}/dT = -c_v M < 0$ , т.е. формула (6.1) показывает, что возмущения затухают, поэтому звезда и находится в устойчивом тепловом равновесии.

Следует помнить, что эти рассуждения справедливы только в тех случаях, когда, во-первых, при малых возмущениях звезда расширяется (или сжимается) как целое и, во-вторых, тепловая энергия  $W$  пропорциональна температуре  $T$ , т. е. когда звезда невырождена. Когда эти условия не выполняются, то может возникнуть неустойчивость.

Рассмотрим теперь, как изменяется со временем положение теплового равновесия по мере выгорания водорода. Ясно, что с уменьшением общего количества водорода в центре кривая  $L^+$  будет со временем понижаться (см. рис. 32). Как видно, температура в центре постепенно растет, увеличивается центральная плотность звезды, растет светимость. Как показывают расчеты, радиус звезды изменяется в ту или другую сторону в зависимости от

наличия перемешивания. В отсутствие конвекции, когда звезда со временем становится химически неоднородной, размеры ее увеличиваются, т. е. звезда постепенно “разбухает”. Однако до тех пор, пока водород не выгорит в центре, все эти изменения столь медленны и незначительны, что в первом приближении можно считать звезду почти неизменной. Поскольку калорийность водорода велика, звезда долго находится в состоянии горения водорода в ее центральных частях. В этом состоянии проходит большая часть ее жизни, именно поэтому преобладающее большинство звезд сконцентрировано на главной последовательности диаграммы Гершпрунга–Рессела. Приведем время жизни в годах на главной последовательности для нескольких значений масс звезд:  $M = M_{\odot}$ ,  $T = 10^{10}$ ;  $M = 3M_{\odot}$ ,  $T = 2 \cdot 10^8$ ;  $M = 15M_{\odot}$ ,  $T = 10^7$ .

#### § 6.4. Эволюция звезд главной последовательности

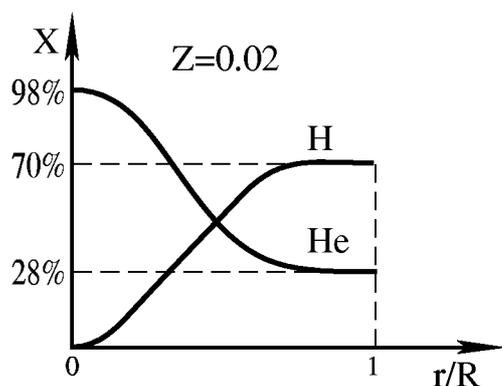


Рис. 33:

При достаточно больших массах ( $M > 0,5M_{\odot}$ ) нет глобального перемешивания, поэтому водород в центре постепенно истощается (рис. 33). Со временем в ядре водород исчезает полностью и звезда вступает в качественно новую фазу своей эволюции — появляется слоевой источник энергии. Поскольку в центральных областях энергия больше не выделяется, температура там выравнивается — звезда приобретает изотермическое гелиевое ядро (рис. 34). С появлением слоевого источника

звезда начинает быстро разбухать. Очень быстро происходит перестройка звезды, при которой ее радиус увеличивается в десятки раз. На расширение внешних частей звезды затрачивается энергия, что приводит даже к некоторому понижению ее светимости. На диаграмме Гершпрунга–Рессела звезда переходит в область красных гигантов.

Посмотрим на результаты численных расчетов для звезды  $5M_{\odot}$  (рис. 35). Практически невозможно качественно объяснить полный трек звезды на диаграмме Гершпрунга–Рессела. На стадии слоевого горения возникает конвекция, происходит сжатие гелиевого ядра и расширение оболочки. При сжатии ядра температура повышается до того момента, пока не станет возможным загорание гелия. У звезд определенной массы  $M < 2M_{\odot}$  конвекция не возникает, т. е. ядро долго остается изотермическим, и по мере горения водорода медленно нарастает его масса (причем температура и плотность почти не меняются). Однако это не может продолжаться слишком долго, так

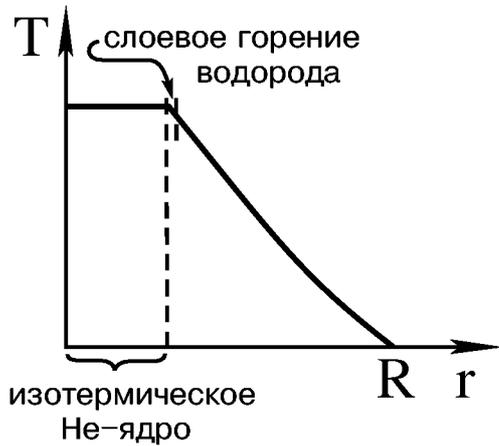


Рис. 34:

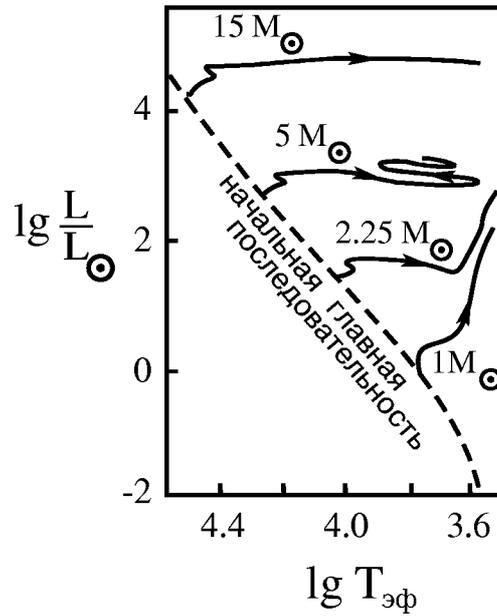
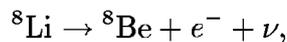


Рис. 35:

как при достижении определенной доли массы звезды ( $M_{\text{я}}/M \sim 10 - 15\%$ ) изотермическое ядро уже не может находиться в равновесии (так называемый предел Шенберга-Чандрасекара, не путать с Чандрасекаровским пределом белых карликов). После достижения этого предела ядро начинает сжиматься и разогреваться за счет выделения гравитационной энергии до тех пор, пока не загорится гелий.

### § 6.5. Горение гелия: $3\alpha$ -реакция

Горение гелия затруднено тем обстоятельством, что отсутствуют устойчивые ядра с атомным весом  $A = 5$  и  $A = 8$  (если бы они существовали, то были бы возможны реакции  ${}^4\text{He} + {}^1\text{H}$  и  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ ). Однако слияние трех ядер гелия дает устойчивое ядро с атомным весом 12:  $3{}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}$ . Поэтому дальнейшая эволюция звезды определяется этой так называемой  $3\alpha$ -реакцией. Ядра  ${}^8\text{Li}$  и  ${}^8\text{Be}$  неустойчивы и быстро распадаются. Например,



Тем не менее тот факт, что ядро  ${}^8\text{Be}$  хотя и неустойчиво, но все же существует в течение времени порядка  $10^{-16}\text{c}$ , оказывается существенным. Вероятность реакции при тройном столкновении  $\alpha$ -частиц с произвольными энергиями намного меньше вероятности того, что две  $\alpha$ -частицы имеют энергию как раз такую, что они (хотя и ненадолго) образуют систему  ${}^8\text{Be}$ . Такая система — ядро  ${}^8\text{Be}$  в подавляющем большинстве случаев распадается обратно

на две  $\alpha$ -частицы, но все же изредка происходит столкновение  ${}^8\text{Be}$  с третьей  $\alpha$ -частицей, приводящее к образованию  ${}^{12}\text{C}$ . При больших температурах в термодинамическом равновесии имеется некоторая концентрация ядер  ${}^8\text{Be}$ , определяемая формулой Саха:

$$[{}^8\text{Be}] \sim [{}^4\text{He}]^2 e^{-0,3\text{МэВ}/kT}.$$

Столкновение ядер  ${}^4\text{He}$  с  ${}^8\text{Be}$  приводит к образованию ядра  ${}^{12}\text{C}$ . Так как вероятность процесса пропорциональна произведению концентраций  ${}^4\text{He}$  и  ${}^8\text{Be}$

$$[{}^4\text{He}] [{}^8\text{Be}] \sim [{}^4\text{He}]^3 e^{-0,3\text{МэВ}/kT},$$

то скорость реакции  $\sim \rho^3$ , если рассчитывать ее на единицу объема, или  $\rho^2$  — на единицу массы. Однако ни столкновение  $3\alpha$ , ни столкновение  ${}^8\text{Be}$  с  $\alpha$  само по себе не приводит к образованию стабильного ядра  ${}^{12}\text{C}$ , пока система не избавится от лишней энергии. Избыток энергии трех покоящихся  $\alpha$ -частиц над энергией  ${}^{12}\text{C}$  равен 7,28 МэВ, для горячих  $\alpha$ -частиц он еще больше. При этом энергию не может унести нейтрон или протон — на это энергии не хватает, да и получился бы  ${}^{11}\text{B}$  или  ${}^{11}\text{C}$ , а не  ${}^{12}\text{C}$ . Значит энергию уносят фотоны или пары  $e^+, e^-$  (см. ниже). Снова вероятность процесса увеличивается, если система долго живет в данном состоянии, т. е. если мы имеем дело с определенным возбужденным состоянием ядра  ${}^{12}\text{C}$ , а не системой, состоящей из 6 протонов и 6 нейтронов (или 3  $\alpha$ -частиц) с произвольной энергией, не равной энергии какого-либо возбужденного состояния  ${}^{12}\text{C}$ .

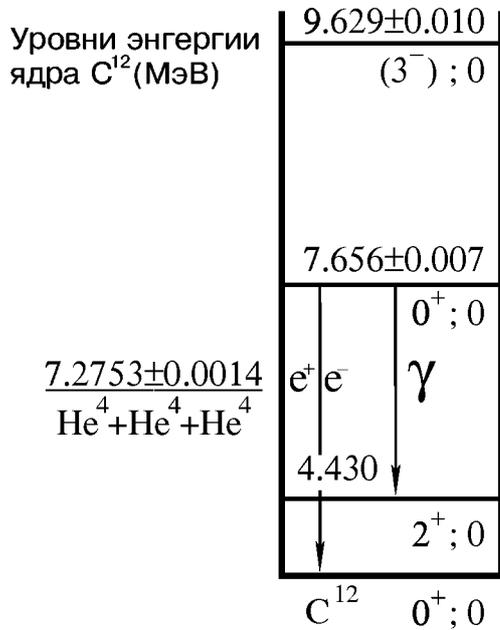


Рис. 36:

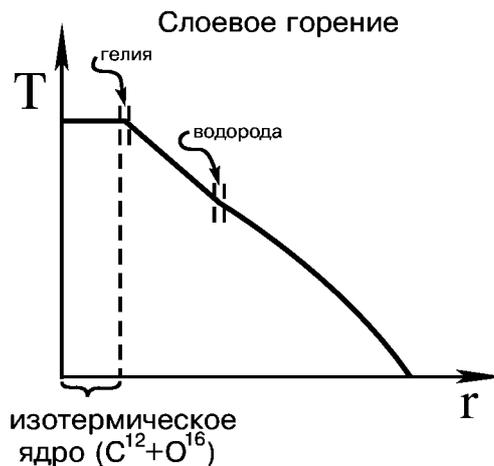
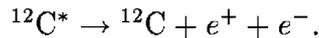
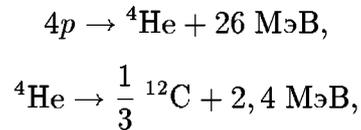


Рис. 37:

Ядро  $^{12}\text{C}$  обладает большим количеством уровней (рис. 36). Один из уровней с энергией  $E = 7,66$  МэВ находится в резонансе с тремя ядрами гелия —  $3\ ^4\text{He}$ , обладающими избытком кинетической энергии ( $7,66 - 6,28 = 0,38$ ) МэВ. Это возбужденное состояние, так же как и основное, имеет спин  $s = 0$ . Поэтому переход с уровня 7,66 МэВ в основное состояние  $^{12}\text{C}$  не может идти с испусканием одного  $\gamma$ -кванта (спин которого равен 1). Наиболее вероятным является переход с испусканием электронно-позитронной пары



Снятие возбуждения может происходить также с испусканием квантов через промежуточный уровень  $E = 4,43$  МэВ. Полная вероятность реакции на единицу массы пропорциональна  $\rho^2 e^{-\Delta E/kT} \simeq \rho^2 e^{-4,4/T_9}$ . Сравним калорийность  $3\alpha$ -реакции с  $pp$ -циклом:



т.е. выделение энергии на грамм в  $3\alpha$ -реакции на порядок меньше.

Постепенно гелий в центре тоже выгорает — возникает гелиевый слоевой источник, а водород при этом продолжает гореть во внешнем слоевом источнике (рис. 37). На стадии гелиевого слоевого источника сильно возрастает светимость звезды, увеличивается ее радиус, и на диаграмме ГР звезда попадает в область красных сверхгигантов (рис. 35). В дальнейшем (в достаточно массивных звездах) загорается углерод. Должно идти образование более тяжелых элементов O, Mg, Ne и т. д. во все уюыстриющемся темпе. И наконец, такая звезда должна достичь состояния, при котором теряется ее устойчивость. Однако пока не существует хороших расчетов, доведенных до конца. Положение дел усложняется наличием большого числа слоевых источников и ядерных реакций, скорости которых плохо изучены. Кроме того, возникают тепловые неустойчивости, вспышки и т.п. Все это затрудняет проведение детальных расчетов.

Ниже мы обсудим ряд характерных моментов, которые возникают при расчетах эволюции звезд и имеют достаточно простое физическое истолкование.

## § 6.6. Определение возраста скоплений

Остановимся вкратце на одном из результатов теории внутреннего строения звезд, ставшим классическим — определение возраста шаровых скоплений. Диаграмма ГР шаровых скоплений имеет характерный вид (рис. 38). От главной последовательности в так называемой “точке поворота” отходит ветвь красных гигантов. Можно предположить, что все звезды шарового скопления образовались одновременно. Тогда наблюдаемую диаграмму

ГР получают следующим способом. Возьмем набор звезд разных масс и построим для них эволюционные кривые (рис. 39). Звезды большой массы (т. е. большой светимости) эволюционируют быстрее и становятся красными гигантами, пока звезды малой массы еще остаются на главной последовательности. Соединив точки равного возраста (жирная кривая на рис. 39), получим наблюдаемую диаграмму ГР. Этот метод позволяет определить не только возраст скоплений, но и начальный химический состав их звезд, так как от него зависит вид получаемой диаграммы ГР. Получение начального содержания гелия очень важно для космологии. Во фридмановской космологии в теории горячей Вселенной должно быть около 25–30% He.

Сходным образом определяют и возраст рассеянных скоплений. Существенная разница — это практически полное отсутствие ветви гигантов в молодых рассеянных скоплениях. Объясняется это просто — в стадии красного гиганта звезда живет очень недолго в рассеянных скоплениях общее число звезд в сотни раз меньше, чем в шаровых, а “предгиганты” в них массивнее (так как рассеянные скопления гораздо моложе) и эволюционируют быстрее. По этим причинам вероятность застать звезду в стадии гиганта очень мала. Но “точка поворота” и здесь видна — это то место, где главная последовательность резко обрывается.

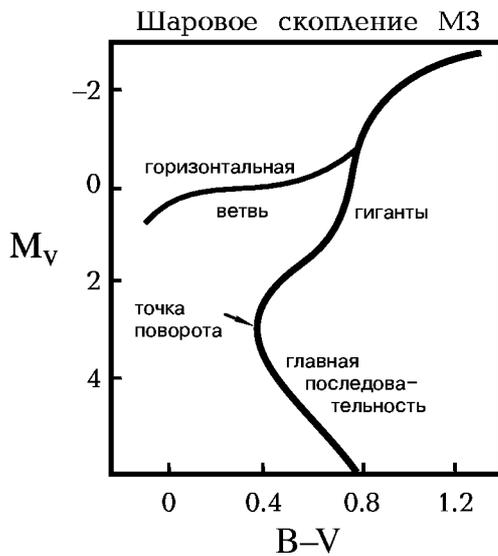


Рис. 38:

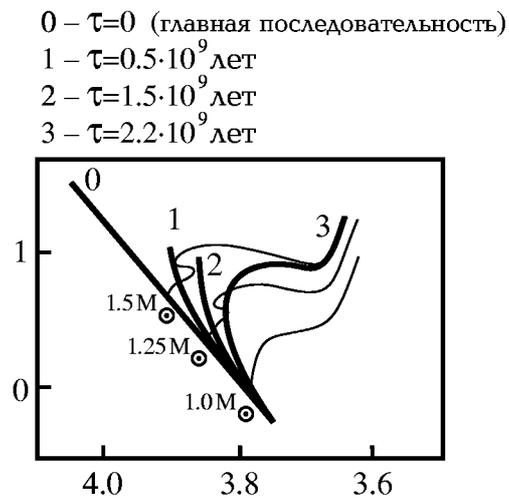


Рис. 39:

Интересно заметить, что в рассеянных скоплениях видны белые карлики. Их массы заведомо меньше чандрасекаровского предела ( $1,4 M_{\odot}$ ). Наблюдаются белые карлики около  $0,7 M_{\odot}$ , хотя звезды более массивные сидят еще на главной последовательности. Например, в Гиадах есть больше десятка белых карликов, а точка поворота  $\sim 2 M_{\odot}$ . В Плеядах найден один белый карлик, хотя на главной последовательности еще есть звезды с массой 4–6  $M_{\odot}$ ! Эти

факты говорят об интенсивной потере массы звездами после главной последовательности и перед концом жизни.

### § 6.7. Качественная картина эволюции звезды

Эволюция звезд с массой больше и меньше  $2,5 M_{\odot}$  идет по-разному. При  $M > 2,5 M_{\odot}$  в изотермическом гелиевом ядре растет температура и в дальнейшем возможно зажигание и спокойное горение гелия. Для звезд с меньшей массой в изотермическом ядре наступает вырождение, при котором сила тяжести уравнивается давлением вырожденных электронов. Если в таком ядре начнутся ядерные реакции, то при его достаточно большой массе может произойти термоядерный взрыв, так как повышение температуры почти не будет сопровождаться одновременным повышением давления. При массах  $4 M_{\odot} < M < 8 M_{\odot}$  наступает вырождение углерода в центре. Возможны условия, когда углеродное ядро звезды сгорает почти мгновенно и может быть достигнута светимость  $\sim 10^{10} L_{\odot}$ . Такой взрыв может быть отождествлен со вспышкой сверхновой.

В этом разделе мы хотим на простых формулах (хотя и приближенных) показать, как в результате эволюции, из-за вырождения в центре, теплоемкость звезды может стать положительной, и возникает тепловая неустойчивость.

Вся суть в том, что мы рассматриваем эволюцию звезды с данной массой, причем  $P$  и  $\rho$  связаны между собой условиями гидростатического равновесия. Эволюция постепенно меняет связь между  $P$  и  $\rho$ . При этом нельзя забывать, что звезда является протяженной, неоднородной системой, поэтому необходимо говорить либо о средних значениях  $\langle P \rangle$  и  $\langle \rho \rangle$ , либо о значениях в центре  $P_c$  и  $\rho_c$ . Ниже для определенности будем рассматривать  $P_c$  и  $\rho_c$ .

Структуру звезды можно приближенно описать политропой. Пусть индекс политропы  $n = 3$ . Тогда

$$P(r) = P_c (\rho/\rho_c)^{4/3},$$

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{54} \rho_c, \quad P_c = \underbrace{P_1 GM^{2/3}}_a \rho_c^{4/3}.$$

Ниже индекс  $c$  будем опускать. Итак,

$$P = a \rho^{4/3}$$

где  $a \sim M^{2/3}$ .

Рассмотрим сначала предельный случай вырожденного электронного газа с  $T = 0$ . Тогда давление связано с плотностью по формуле

$$P = \text{const} \cdot \rho \left[ \underbrace{((m_e c^2)^2 + p_F^2 c^2)^{1/2}}_{E_F} - m_e c^2 \right],$$

где  $p_F = m_e c x$ ,  $x = (\rho/\mu_e \cdot 10^6)^{1/3}$ . (Эта формула не точная! Но она правильно передает асимптотики уравнения состояния вырожденного газа.) Видим, что при  $x = 1$ ,  $p_F = m_e c$ , следовательно,  $x = 1$  отмечает границу релятивизма (см. 2.4). Итак,

$$P \sim \rho \left[ ((m_e c^2)^2 + b\rho^{2/3})^{1/2} - m_e c^2 \right].$$

Учтем теперь вклад давления теплового движения частиц, вводя функцию  $f(T)$ , такую что

$$P \sim \rho \left[ ((m_e c^2)^2 + b\rho^{2/3} + f(T))^{1/2} - m_e c^2 \right] = a\rho^{4/3}. \quad (6.2)$$

Здесь  $f(T)$  — растущая функция температуры, причем в не релятивистской области  $f \sim T$ , а в ультрарелятивистской  $\sim T^2$ . Перепишем соотношение (2) в виде

$$((m_e c^2)^2 + b\rho^{2/3} + f(T))^{1/2} = y\rho^{1/3} + m_e c^2,$$

где  $y \sim a$  — некоторая новая константа, и возведем последнее соотношение в квадрат. Тогда  $(m_e c^2)^2$  сократится, и мы получим

$$f(T) = 2y\rho^{1/3}m_e c^2 + (y^2 - b)\rho^{2/3}.$$

При  $\rho \rightarrow 0$  (нерелятивистская область)  $f(T) \sim T$  и отсюда

$$T \sim \rho^{1/3} M^{2/3},$$

поскольку  $y \sim a \sim M^{2/3}$ . Итак, мы получили один из вариантов теоремы вириала.

При больших плотностях поведение температуры зависит от того, положительна или  $\rho^{2/3}$ . Если  $y^2 < b$  (т. е. масса мала,  $y \sim M^{2/3}$  и скобка отрицательна), то легко увидеть, что существует равновесие при  $T = 0$ ,  $\rho \neq 0$ , и кроме этого есть максимум температуры (рис. 40). Легко найти соотношение между максимальной плотностью ( $T = 0$ ) и полтностью, соответствующей максимуму температуры:  $\rho_{T \max} \simeq \frac{1}{8}\rho|_{T=0}$  (так как  $\rho_{T \max}^{1/3} = \frac{1}{2}\rho^{1/3}|_{T=0}$ ). Таким образом, мы видим, что при постепенном сжатии температура растет, достигает максимума, а затем убывает. Найдем асимптотику  $T_{\max}$  для малых масс. Имеем

$$\rho|_{T=0} \sim (y/b)^3 \sim M^2,$$

отсюда

$$T_{\max} \sim \rho^{1/3} \sim M^{2/3}.$$

Конкретные расчеты показывают, что для масс, меньших чем  $0,08 \div 0,10 M_\odot$ , максимально возможная температура ниже значения, при котором начинает гореть водород. Этот предел слабо зависит от химического состава звезды, так как он получается из общих термодинамических соотношений. Можно

также найти, что для масс  $M < 0,35 M_{\odot}$  не загорается гелий, т. е. не идет  $3\alpha$ -реакция  $3^4\text{He} \rightleftharpoons \text{C}$ , а при  $M < 0,8 M_{\odot}$  не горит углерод (в реакции  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightleftharpoons ^{24}\text{Mg}$ ). Наличие максимума температуры важно и в другом отношении. Именно благодаря замедлению роста температуры в маломассивных звездах с ростом центральной плотности звезда попадает в область вырождения (см. рис. 40). Если это происходит при достаточно высокой температуре, то взрыв неизбежен.

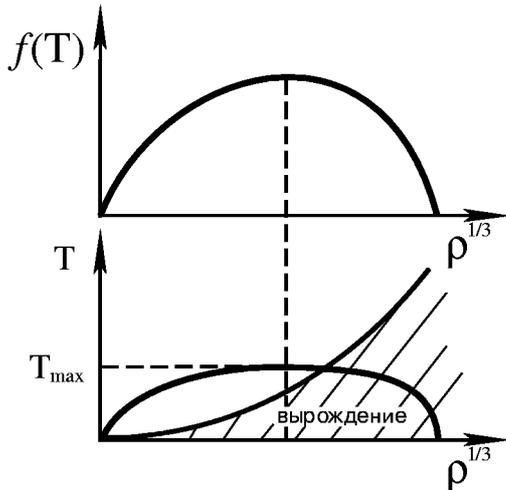


Рис. 40:

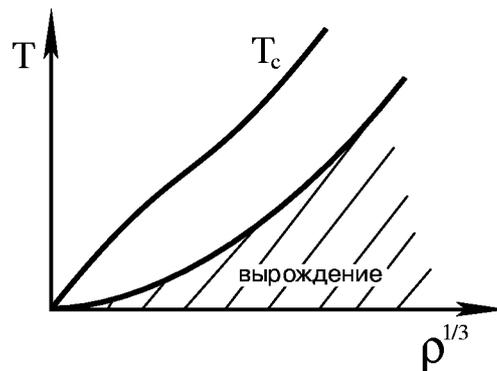
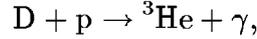


Рис. 41:

При  $y^2 < b$  ( $M < M_{Ch} = 1,4 M_{\odot}$ ) образуются белые карлики. Массы наблюдаемых белых карликов  $\sim 0,6 M_{\odot}$ . Но звезда с массой  $\sim 0,6 M_{\odot}$  живет на главной последовательности около  $3 \cdot 10^{10}$  лет, т.е. больше возраста Вселенной. Это еще один аргумент в пользу того, что наблюдаемые сейчас белые карлики произошли из более массивных звезд, которые в процессе эволюции потеряли значительную часть своей массы. Кроме того, имеются двойные звездные системы, состоящие из белого карлика с массой порядка  $0,6 M_{\odot}$ , и звезды главной последовательности с массой порядка  $2 M_{\odot}$ . Такое сочетание объектов возможно только лишь в том случае, если на месте белого карлика ранее была более массивная звезда, потерявшая на стадии красного гиганта большую часть своей массы. Почти вся утерянная масса может быть захвачена вторым компонентом.

Теперь рассмотрим случай больших масс ( $y^2 > b$ ,  $M > 1,4 M_{\odot}$  — чандрасекаровский предел). Для этих масс в рамках наших приближенных расчетов нет ограничений на рост плотности и температуры (рис. 41). Загорание тяжелых элементов (C, O, Mg) начинается в вырожденных условиях. Но следует помнить, что мы предполагали постоянство числа электронов, неизменность химического состава, не учли эффекты ОТО. На самом деле из-за этих эффектов при достижении некоторой критической плотности начнутся катастрофические события.

Задача. Расчет космологических моделей дает содержание дейтерия относительно водорода  $10^{-3}$ – $10^{-4}$ . Найти значение массы звезды, при которой пойдет реакция



(т. е. нужно проверить не только, сможет ли начаться реакция, но и успеет ли она пройти по сравнению со временем остывания, задержит ли она остывание).

## Глава 7. НОВЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ФАКТОРЫ. МЕХАНИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗВЕЗД

### § 7.1. Общая теория относительности — ОТО

Везде выше мы пользовались ньютоновской теорией тяготения, условие применимости которой  $|\varphi| \ll c^2$ . Введем пока формально понятие гравитационного радиуса  $r_g$  — величины, при которой параболическая скорость убегания с поверхности становится равной  $c$  в рамках ньютоновской теории:

$$\frac{GM}{r_g} = \frac{c^2}{2} \text{ откуда } r_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Численно  $r_g = 3 \cdot 10^5 (M/M_\odot)$ .

Качественно эффекты ОТО можно учесть следующим образом: там, где в ньютоновской теории сила тяжести пропорциональна  $GM/R^2$ , в ОТО эта сила  $\sim GM/(R(R - r_g))$ , т.е. сила тяготения обращается в бесконечность на  $r_g$ . Найдем теперь величину средней плотности, при которой эффекты ОТО становятся важными:

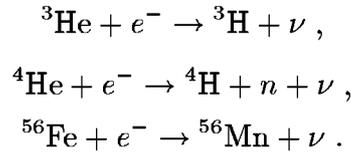
$$\bar{\rho}_{\text{cr}} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} < \frac{M}{\frac{4\pi}{3}r_g^3} = 2 \cdot 10^{16} \left( \frac{M_\odot}{M} \right)^2 \text{ г/см}^3.$$

Отсюда вывод: чем больше масса, тем при меньшей плотности достигаются релятивистские эффекты. Например, для квазаров  $M \sim 10^8 M_\odot$  они становятся важны при  $\bar{\rho}_{\text{cr}} \sim 1 \text{ г/см}^3$ , т.е. вещество локально находится в обычном состоянии, а релятивистские эффекты появляются просто из-за того, что его много. Для обычных звезд  $\bar{\rho}_{\text{cr}} \sim 10^{16} \text{ г/см}^3$ , и здесь сначала будут проявлять себя специфические эффекты вещества (нейтронизация, диссоциация ядер и пр.).

### § 7.2. Нейтронизация

Возьмем область, где  $kT < m_e c^2$  и  $\rho \gg 10^6 \mu_e$ , т.е. температура низка, а плотность велика. При этом тепловые движения нерелятивистские, а принцип Паули из-за высокой плотности заставляет электроны двигаться с релятивистскими скоростями. С точки зрения излучения это вещество холодное,

так как нижние состояния заняты, но с точки зрения ядерных реакций это вещество горячее, так как частицы могут исчезать и отдавать свою энергию в процессах следующего типа:



Такие процессы называют нейтронизацией вещества (см. § 5.4). Нейтронизация — пороговый процесс и для разных элементов происходит при разных энергиях электронов. Например, для первой реакции порог нейтронизации 18 МэВ, для второй — 20 МэВ, для третьей — 4 МэВ. Так как граничная энергия Ферми однозначно связана с плотностью, то соответственно нейтронизация вещества для различных элементов начинается при разных плотностях. Например, первая реакция может идти и при  $\rho < 10^6$  г/см<sup>3</sup>, а вторая идет только при  $\rho > 10^{11}$  г/см<sup>3</sup>.

К чему ведет нейтронизация? Мы видим, что в этих реакциях уменьшается количество электронов, сохраняется число ядер, но их заряд убывает. Здесь мы имеем дело с очень тонким равновесием.

На графике  $\lg P - \lg \rho$  кривая уравнения состояния вещества в нерелятивистской области имеет наклон 5/3, а в релятивистской 4/3 (см. рис. 42). Будем на этом же графике наносить прямые  $P_c = P_1 G M^{2/3} \rho_c^{4/3}$ , которые получаются из условия гидростатического равновесия. Точки их пересечения с предыдущей кривой дадут положения равновесия для различных масс. Очевидно, в начале точка пересечения движется медленно с увеличением массы, а затем — очень быстро. В идеальном случае (т.е. без учета эффектов ОТО и нейтронизации)  $\rho \rightarrow \infty$  при  $M \rightarrow M_{ch}$  (чандрасекаровский предел).

Из-за нейтронизации на кривой  $\lg P - \lg \rho$  появляются изломы, так как электроны, которые обеспечивают упругость вещества, “вдавливаются” в ядра.

Нейтронизация — это фазовый переход первого рода, при котором давление зависит от плотности так, как это изображено на рис. 43. Мы видим,

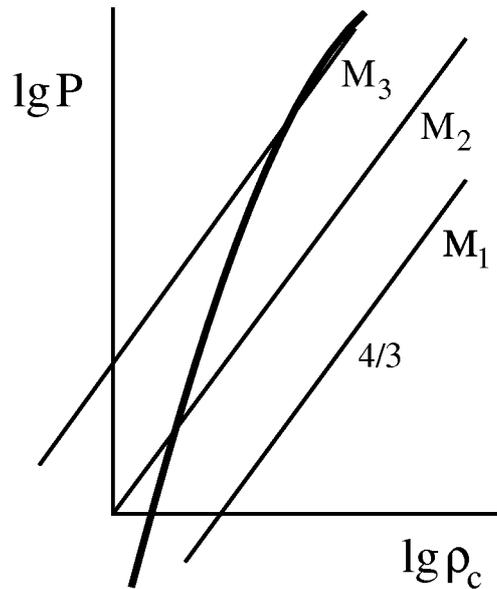


Рис. 42:

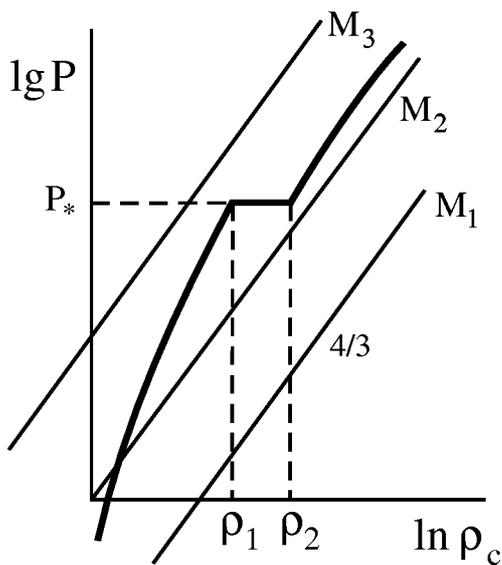


Рис. 43:

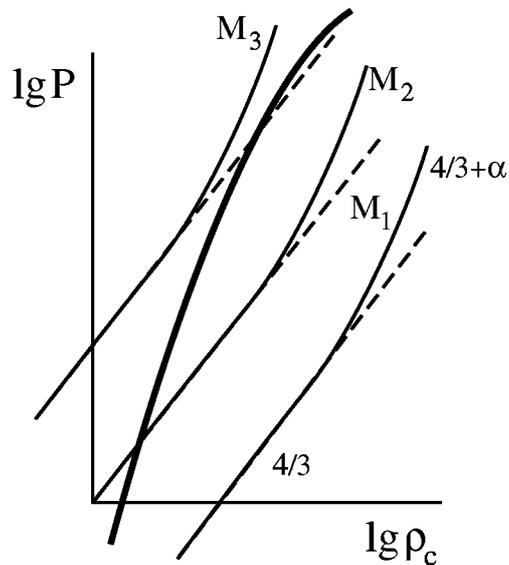


Рис. 44:

что если раньше равновесие массы еще было возможно, то теперь это не так, т.е. при  $M_{кр} < M_{ch}$  происходит потеря устойчивости.

С другой стороны, эффекты ОТО из-за того, что давление имеет “вес”, изменяют условия гидростатического равновесия. Так как теперь сила тяжести пропорциональна  $GM/R(R - r_g)$ , условие равновесия теперь запишется в виде  $P = \alpha \rho^{4/3+\alpha}$ , где  $\alpha > 0$ , т.е. наклон прямых  $M_1, M_2, M_3$  нарастает с увеличением  $\alpha$  (рис. 44).

Чандрасекар ограничил значение массы  $M$ , а  $\rho$  могло быть бесконечным. Теперь мы видим, что есть и предельное значение  $\rho$ .

Все эти эффекты приводят к изгибам кривой  $M(\rho_c)$ , что в конечном итоге приводит к потере устойчивости (рис. 45). Формальный расчет с разными значениями  $\rho_c$  дает максимальное значение массы  $M_{max}$  и при  $M < M_{max}$  два решения с различными значениями  $\rho_c$ . Решение с большей плотностью ( $\rho_2 > \rho_{кр}$  на рис. 45) оказывается неустойчивым. Как это можно показать?

Мы видим, что для одной массы  $M_0$  существует два решения. Можно считать, что одно из этих решений (скажем с  $\rho_c = \rho_2$ ) является возмущением другого ( $\rho_c = \rho_1$ ). Это значит, что

$$r_2(m) = r_1(m) + \delta r(m), \quad 0 \leq m \leq M.$$

В общем случае собственные функции уравнения для малых возмуще-

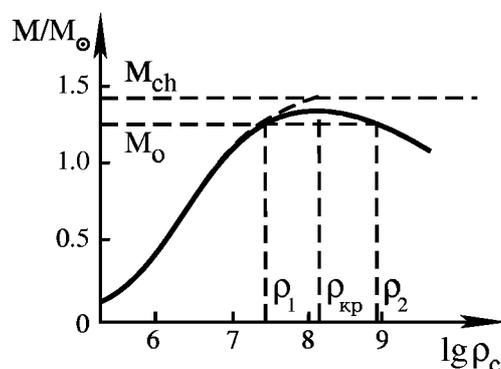


Рис. 45:

ний должны иметь вид

$$\delta r(m, t) = e^{i\omega t} \delta r(m).$$

Такая запись возмущения является вполне естественной. Это следствие того, что в решении не должно быть выделенного момента, т.е. сдвиг по времени должен приводить к решению. Кроме того, задача линейна, т.е. решение, умноженное на константу, тоже является решением. Эти условия определяют зависимость возмущения от времени. Они дают экспоненту, так как только для нее сдвиг по времени эквивалентен умножению на константу, т.е.  $E^{i\omega(t+t_0)} = A e^{i\omega t}$ , где  $A = e^{i\omega t_0}$ .

В нашем случае  $\delta r$  от  $t$  не зависит, т.е.  $\omega = 0$  в общем решении. Поскольку мы знаем, что при  $\rho < \rho_{\text{кр}}$  модели были устойчивыми, для них было  $\omega_k^2 > 0$ . При  $\rho = \rho_{\text{кр}}$  мы получили, что  $\omega_k^2 = 0$  для некоторого  $k$ . Для физика этого уже достаточно, чтобы утверждать, что при  $\rho > \rho_{\text{кр}}$   $\omega_k^2 < 0$ , т.е.  $\delta r \sim e^{\lambda t}$ , а это и означает неустойчивость. Конечно, можно убедиться в этом и более строго, например, если исследовать форму экстремума энергии. При  $\rho < \rho_{\text{кр}}$  экстремум, соответствующий равновесию, является минимумом, а при  $\rho > \rho_{\text{кр}}$  — максимумом.

При остывании звезды с  $M > M_{\text{ch}}$  при некоторой температуре происходит срыв. До этого момента эволюция определяется скоростью остывания, затем происходит потеря устойчивости с характерным гидродинамическим временем.

### § 7.3. Два типа энергетических потерь

Обычная звезда находится в гидростатическом равновесии, при котором силы тяготения уравновешены градиентом давления. Если нет вырождения, то давление тепловое. Потери энергии звездой приводят к тому, что состояние равновесия все время изменяется. При этом надо различать два принципиально разных типа энергетических потерь — обратимые и необратимые.

1. Процессы, при которых происходят однократные потери энергии, т.е. процессы типа ионизации, диссоциации, рождение пар  $e^+$ ,  $e^-$  и т.п. являются обратимыми. После того как произошло превращение, потери энергии прекращаются. Такие процессы можно характеризовать величиной  $E$  [эрг/г], т.е. количеством энергии, которую нужно затратить, чтобы перевести вещество в новое состояние.

2. Процессы, при которых образуются частицы, способные уходить из системы и уносить энергию, являются необратимыми. Типичными примерами является рождение пар  $\gamma$ -квантов и особенно пар нейтрино-антинейтрино. Звезды почти всегда практически прозрачны для нейтрино. На конечных стадиях эволюции потери энергии через нейтринные процессы являются преобладающими. Процессы такого типа характеризуются величиной  $Q$  [эрг/г·с], т.е. энергией, теряемой граммом вещества в секунду.

Рассмотрим более подробно обратимые потери. Этот тип потерь лучше назвать не потерями, а особенностями уравнения состояния. Рассмотрим уравнение состояния  $P(\rho, S)$ , где  $S$  — удельная энтропия для идеального газа, состоящего из атомарного водорода.

При низкой температуре ( $T < T_{\text{иониз}}$ )

$$S = -\mathcal{R} \ln \rho + \frac{3}{2} \mathcal{R} \ln T + K_{\text{H}},$$

$\mathcal{R}$  — универсальная газовая постоянная, а  $K_{\text{H}}$  — так называемая химическая константа водорода.

При высокой температуре, когда весь водород ионизован, газ состоит из двух компонент — протонной и электронной. Поскольку энтропия адитивна, получаем

$$S = -\mathcal{R} \ln \rho_e + \frac{3}{2} \mathcal{R} \ln T_e + K_e - \mathcal{R} \ln \rho_p + \frac{3}{2} \mathcal{R} \ln T_p + K_p,$$

где  $K_e$  и  $K_p$  — химические константы электронного и протонного газов. Так как статические и атомные веса  $\text{H}$  и  $p$  почти равны, имеем  $K_p \simeq K_{\text{H}}$ .

Из первого соотношения мы видим, что

$$T = e^{K_{\text{H}}/\mathcal{R}} e^{2S/3\mathcal{R}} \rho^{2/3}.$$

Таким образом, при постоянной энтропии  $T \sim \rho^{2/3}$ , а давление

$$P = \frac{\mathcal{R} \rho T}{\mu} = B_1 \rho^{5/3}, \quad B_1 \sim e^{\frac{2}{3} \frac{S}{\mathcal{R}}}. \quad (7.1)$$

С другой стороны, при  $T \gg T_{\text{иониз}}$

$$P = B_2 \rho^{5/3}, \quad B_2 \sim e^{\frac{1}{3} \frac{S}{\mathcal{R}}},$$

т.е. есть и до и после ионизации наклон прямой в переменных  $\lg P - \lg \rho$  один и тот же и равен  $5/3$ . Но в промежуточной области мы имеем почти изотермический участок, где  $P \sim \rho$  (рис. 46). Ионизация происходит в узком интервале температур, поскольку по Саха

$$[p][e^-]/[\text{H}] \sim e^{-J/kT},$$

где  $J$  — потенциал ионизации.

По другому это можно понять, если вспомнить, что в неионизованном газе  $C_V dT = -P dV$ ,  $E = C_V T$ , откуда

$$P = \frac{2}{3 \rho C_V T}.$$

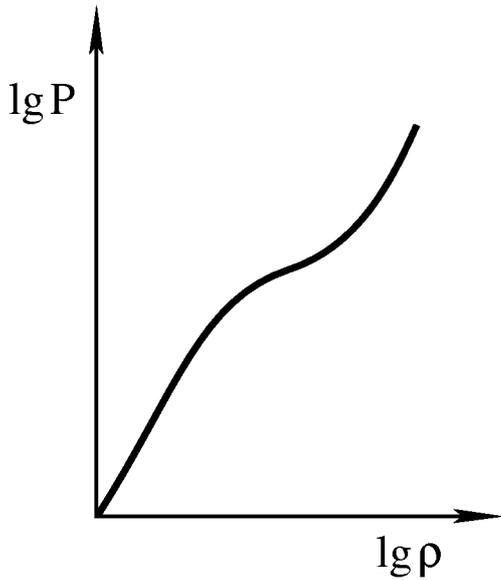


Рис. 46:

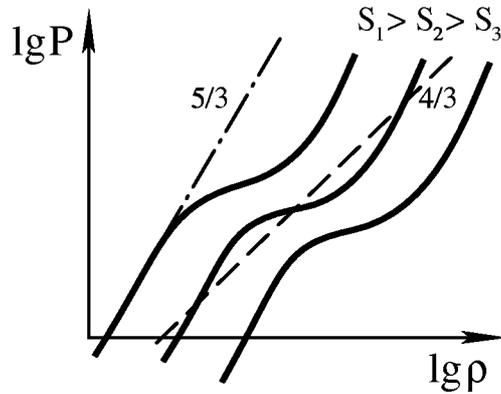


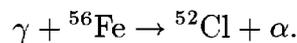
Рис. 47:

После ионизации  $E = C_V T + J/m_p$ . Из-за того, что часть работы уходит на ионизацию, давление оказывается ниже, чем по формуле (7.1).

Теперь займемся фигурами равновесия. Рассмотрим водородную самогравитирующую конфигурацию, когда ионизация еще не произошла (модель протозвезды). Ясно, что при этом происходит сжатие, и на графике  $\lg P - \lg \rho$  появляются три равновесных решения, два из которых устойчивы, а одно неустойчиво (см. рис. 47)<sup>6</sup>. При еще более низких энтропиях (меньших  $S_3$ ) остается одно устойчиво состояние. Ясно, что переход из одного устойчивого состояния в другое происходит скачком.

Все это происходит при температурах  $\sim 10^4 \text{K} \sim 1 \text{ эВ}$ , т.е. при температурах, гораздо меньших потенциала ионизации ( $J \sim 13,6 \text{ эВ}$ ). В формуле Саха экспонента мала, но велик предэкспоненциальный множитель.

Теперь рассмотрим другой механизм потери устойчивости, который важен при температурах  $\sim 0,5 \text{ МэВ}$ . Это механизм фотодиссоциации железа, впервые рассмотренный Хойлом и Фаулером:



Если уж началась диссоциация железа, то разваливаются и другие элементы, вплоть до гелия. На частицу при этом поглощается энергия  $\sim 7 \text{ МэВ}$ . Всего получается 17 частиц ( $13 {}^4\text{He} + 4n$ ). Таким образом полная энергия диссоциации составляет  $J = 1 \times 7 = 120 \text{ МэВ}$  на ядро  ${}^{56}\text{Fe}$ . Однако фотодиссоциация начинается при температурах  $kT \ll J$  опять же из-за большой величины

<sup>6</sup>Среднее решение неустойчиво, так как сжатие звезды (т.е. рост плотности) приводит к давлению, меньшему равновесного.

предэкспоненциального множителя в формуле Саха. Этот множитель, который описывает статистический вес диссоциированного состояния, велик, так как образуется много частиц.

В качестве примера приведем два значения  $T_{\text{дис}}$  при разных плотностях:

$\rho$ (г/см <sup>3</sup> )	$10^3$	$10^4$
$T_{\text{дис}}$ (К)	$4 \cdot 10^9$	$5,8 \cdot 10^9$
$T_{\text{дис}}$ (МэВ)	0,3	0,5

В результате фотодиссоциации железа происходит потеря устойчивости и звезда начинает быстро (за гидродинамическое время) сжиматься. Этот процесс подобен взрыву, но движение вещества направлено внутрь, поэтому он называется имплозией (в отличие от обычного взрыва “explosion”). Кривые на плоскости  $\lg P - \lg \rho$  при этом подобны изображенным на рис. 47.

Поскольку во внешних слоях звезды могут оставаться несгоревшие элементы (С, О и пр.), а при имплозии происходит сильный нагрев вещества, то возможно выделение ядерной энергии, при котором имплозия сменяется обычным взрывом, направленным наружу. Раньше думали, что этот механизм может объяснить взрыв звезд с массой  $M > 10 M_{\odot}$  как сверхновых, однако самые последние расчеты показывают, что имплозия не сменяется взрывом. Энергия уходит из звезды в виде нейтрино (см. § 7.4).

В заключении рассмотрим случай, когда в термодинамическом равновесии может находиться большое количество электронно-позитронных пар. Пусть давление излучения  $\sim aT^4$  много больше давления вещества  $\mathcal{R}\rho T$ , но плотность вещества все еще больше плотности излучения:

$$\rho > aT^4/c^2.$$

Из термодинамического соотношения

$$TdS = \frac{4aT^3 dT}{\rho} \Big|_{\rho} + \frac{4aT^4}{3} d\left(\frac{1}{\rho}\right) \Big|_T$$

Найдем удельную энтропию

$$S = \frac{4aT^3}{3\rho}.$$

Итак,

$$T = \left(\frac{4S\rho}{3a}\right)^{1/3},$$

$$P = \frac{1}{3}aT^4 = \frac{a}{3} \left(\frac{4S\rho}{3a}\right)^{4/3},$$

т.е. для чистого излучения при постоянной энтропии  $P \sim \rho^{4/3}$ .

При температурах  $kT > m_e c^2$  начинается интенсивное рождение пар ( $e^+e^-$ ). В предельном случае  $kT \gg m_e c^2$  кроме излучения имеется равновесный релятивистский электронно-позитронный газ. Полная плотность энергии при этом

$$E = aT^4 + \frac{7}{4}aT^4 = \frac{11}{4}aT^4.$$

Давление

$$P = \frac{11}{12}aT^4,$$

и энтропия

$$S = \frac{11}{3} \frac{aT^3}{\rho}.$$

Таким образом, при  $kT \gg m_e c^2$  снова  $P \sim \rho^{4/3}$ , но в промежуточном случае наклон кривой на графике  $\lg P - \lg \rho$  должен быть меньше  $4/3$  (см. рис. 48). При относительно небольших плотностях, когда давление определялось фотонным газом, звезда уже была на границе устойчивости ( $P \sim \rho^{4/3}$ ). Поэтому при подходе к области рождения электрон-позитронных пар уже нет состояния равновесия. Поэтому нет сверхмассивных звезд.

#### § 7.4. Роль нейтрино в эволюции звезд

Выше мы уже отмечали качественное отличие процессов с рождением нейтрино от других механизмов потерь энергии. Рождаясь нейтрино практически беспрепятственно уходят из звезды и навсегда уносят с собой энергию. Как и остальные процессы (диссоциация ядер, рождение пар и пр.), нейтринные процессы сопровождаются затратой энергии и понижением давления. Однако если раньше мы имели только изменение состояния равновесия из-за рождения новых частиц, то теперь вследствие энергетических потерь полного равновесного состояния вообще нет:  $\partial S/\partial t \neq 0$  ( $S$  — энтропия). Энтропия иногда падает! В этом нет противоречия: падает энтропия вещества в центре ядра, но возникает энтропия нейтрино, улетающих от звезды.

Но неполное равновесие тоже можно излучать. Например, гремучий газ:  $\text{H}_2 + \text{O}_2$  — мы можем рассматривать его расширение, сжатие и прочее, причем все эти процессы будут равновесными, кроме одного — процесса сгорания. То же можно сказать и о любой смеси веществ (например,  $\text{H} + \text{He}$ , если иметь в виду ядерные реакции), так как полное равновесие — это ядра железа.

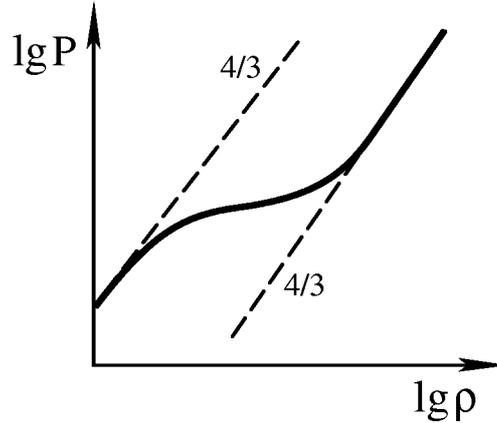
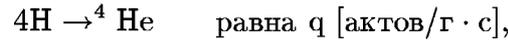


Рис. 48:

В состоянии полного термодинамического равновесия концентрация нейтрино пропорциональна  $T^3$ . Плотность энергии и давление  $\sim T^4$ . Однако в звездах нейтрино рождаются и уходят, поэтому их истинная концентрация гораздо меньше равновесной.

При рассмотрении горения водорода мы уже учитывали рождение нейтрино. Но тогда учет нейтрион сводился просто к эффективному уменьшению калорийности ядерного топлива. Например, если скорость реакции



то нагрев

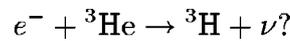
$$T \frac{dS}{dt} = q \Delta m c^2 (1 - \alpha),$$

где  $\Delta m = 4m_{\text{H}} - m_{\text{He}}$  — дефект масс, а  $\alpha$  — доля энергии, уносимой нейтрино ( $\alpha \sim 0,05 \div 0,1$ ). Но есть и другой путь рождения нейтрино — урка-процесс, впервые рассмотренный Гамовым и Шенбергом.

Пусть имеется стабильное ядро  ${}^3\text{He}$ . Ядро с тем же ядерным весом — ядро трития — неустойчиво и распадается по схеме  $\beta$ -распада,



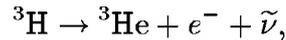
с периодом полураспада (время жизни) 12 лет. При этом выделяется энергия  $\sim 18$  кэВ. Когда может идти обратный процесс



Ясно, что энергия электрона должна быть больше 18 кэВ. Скорость этого процесса  $q$  пропорциональна  $E_\nu^2 = (E - 18 \text{ кэВ})^2$ :

$$q = \int_{18 \text{ кэВ}}^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} (E - 18 \text{ кэВ})^2 dE.$$

Главную роль играет экспоненциальный множитель  $\exp(-18 \text{ кэВ}/kT)$ , т.е. при комнатной температуре в скорость этого процесса входит число  $e^{-10^6}$ . Но при температуре порядка 10 кэВ ( $\sim 10^8$  К) процесс может идти. Однако одновременно в таком веществе тритий опять распадается:



и опять образуются  $\tilde{\nu}$ . Таким образом, и при прямом и при обратном процессе происходят необратимые потери энергии за счет  $\nu$  и  $\tilde{\nu}$ , т.е. независимо от того, выделяется энергия или нет (в каждом отдельном процессе), нейтрино и антинейтрино уходят. Процессы такого рода Гамов и назвал урка-процессами. Поскольку скорость реакции образования трития есть  $q(T)$ , в

стационарных условиях должно быть (концентрации обозначаем квадратными скобками):

$$q(T)[^3\text{He}] = \frac{1}{\tau} [^3\text{H}],$$

где  $\tau$  — время жизни трития  $^3\text{H}$ . Пусть в начале вещество состояло только из ядер  $^3\text{He}$  с концентрацией  $[^3\text{He}]_0$ . Тогда при некоторой температуре  $T$  установится следующая стационарная концентрация трития:

$$[^3\text{H}] = \frac{q(T)}{q(T) + 1/\tau} [^3\text{He}]_0.$$

Вероятность распада  $W$  ( $1/\text{см}^3 \cdot \text{с}$ )

$$W = \frac{1}{\tau} [^3\text{H}] = \frac{1}{\tau} [^3\text{He}]_0 \frac{1}{1 + 1/\tau q}.$$

На первый взгляд кажется, что скорость урка-процесса выходит на константу (плато) при  $T \rightarrow \infty$  ( $q \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow \infty$ ) из-за ограничения периодом полураспада трития (рис. 49).

При высоких температурах, когда уже нет ядер, урка-процесс идет таким образом:

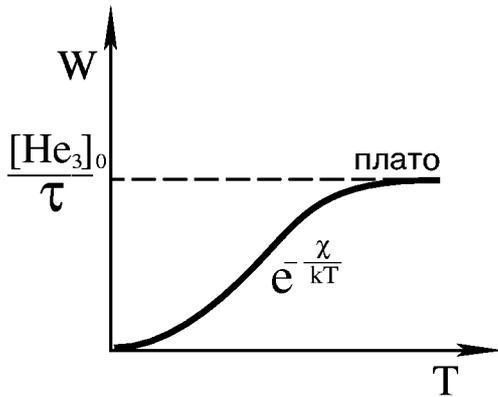
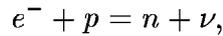
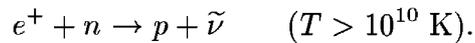


Рис. 49:

Нейтрон тяжелее протона на 0,8 МэВ. Поэтому плато  $W = [n + p]/10^3$  с достигалось бы при  $T > 0,8$  МэВ. Однако Пинаев заметил, что при таких температурах появляются позитроны  $e^+$  и начинает эффективно идти процесс



Вследствие этого число нейтронов приблизительно равно числу протонов (без учета позитронов были бы только нейтроны). Ясно, что при этом плато исчезает и кривая  $W(T)$

идет вверх.

Выпишем без расчета величину энергопотерь, связанных с обсуждаемыми процессами:

$$Q \simeq 8 \cdot 10^{11} \rho T_9^6 = 8 \cdot 10^{-43} \rho T^6 \text{ [эрг/см} \cdot \text{см}^3].$$

В плотность вещества  $\rho$  при высокой температуре главный вклад дают нейтроны и протоны<sup>7</sup>. Объясним теперь, почему скорость энергетических потерь пропорциональна  $T^6$ . Во-первых, при  $kT \gg m_e c^2$  концентрации электронов и позитронов примерно равны и пропорциональны  $T^3$  (поскольку массой  $e^-$  и  $e^+$  можно пренебречь, их импульс  $p = E/c \sim kT/c \sim T$ , а концентрация  $n \sim p^3 \sim T^3$ ). Во-вторых, сечение реакций  $\sigma_{e-p} = \sigma_{e+n} \sim T^2$ . В общей теории (см. § 5.4)  $\sigma \sim (H')^2 dN/dE$ , где  $H'$  — матричный элемент, который постоянен, так как это точечное взаимодействие, а  $N = 4/3\pi P^3/(2\pi\hbar)^3$  — число возможных состояний с импульсом меньше  $p$  в единице объема. Используя соотношение

$$E^2 = (m_e c^2)^2 + c^2 p^2,$$

имеем

$$E dE = c^2 p dp$$

и

$$dN \sim p^2 dp \sim p E dE,$$

т.е.

$$\frac{dN}{dE} \sim p E \sim E^2 \sim T^2.$$

Каждое нейтрино уносит с собой энергию  $E_\nu \sim T$ . Поэтому окончательно

$$Q \sim n\sigma E_\nu \sim T^3 T^2 T = T^6.$$

У некоторых ядер может наступить насыщение, а затем уже степенной рост (рис. 50). Существование урка-процессов несомненно. Кроме этого есть еще процессы другого типа с участием нейтрино, связанные с гипотезами, которые пока не проверены экспериментально.

Для объяснения всех экспериментальных проявлений слабых взаимодействий до недавнего времени достаточно было считать, что все частицы взаимодействуют в одной точке (причем взаимодействуют — это значит и рождаются). Например:

$$e^- + p = n + \nu_e.$$

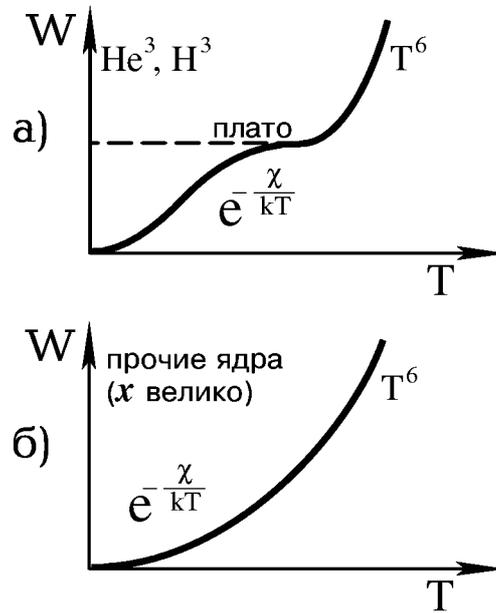


Рис. 50:

<sup>7</sup>Мы рассматриваем такую температуру и плотность, при которой число  $e^-$  и  $e^+$  больше числа протонов и нейтронов в единице объема, но общая плотность все еще определяется протонами и нейтронами.

Можно считать, что в этом процессе в одну точку приходят две частицы, из той же точки вылетают две новые частицы. Вероятность этого процесса описывается матричным элементом гамильтониана (см. §5.4)

$$H' = g \int \psi_n^* \psi_p^* \psi_e \psi_p dV,$$

где  $g = 1,4 \cdot 10^{-49}$  эрг · см<sup>3</sup> — постоянная слабого взаимодействия. Мы запишем самую существенную часть гамильтониана символически следующим образом:

$$H = (\tilde{p}n) (\tilde{e}\nu_e) + (p\tilde{n}) (e\tilde{\nu}_e). \quad (7.2)$$

Здесь знак  $\sim$  (тильда) обозначает античастицу, а скобки объединяют частицы, входящие в реакцию всегда по одну сторону от стрелочки. Запись (2) расшифровывается так: если встречается символ некоторой частицы, то это обозначает гибель данной частицы, либо рождение ее античастицы. Например, первый член в (2) символизирует реакцию

$$\tilde{p} + n \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e$$

(аннигиляция нуклонов), а также:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e \quad (\beta\text{-распад нейтрона}),$$

а второй, сопряженный член, символизирует обратные процессы

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e \quad (\text{нейтронизация}),$$

$$p + \tilde{n} \rightarrow e^+ + \nu_e \quad (\text{аннигиляция}).$$

В действительности есть еще реакции с мюоном  $\mu$  и мюонным нейтрино  $\nu_\mu$ , например, распады

$$\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu,$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu,$$

или захват мюона нуклоном:

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu$$

и т.д. Все эти процессы можно описать гамильтонианом  $H = g [(\tilde{p}n) (\tilde{e}\nu_e) + (\tilde{p}n)(\tilde{\mu}\nu_\mu) + (\tilde{\mu}\nu_\mu)(\tilde{e}\nu_e) + \text{сопряженные члены}]$ . Все они характеризуются константой  $g = 1,4 \cdot 10^{-49}$  эрг · см<sup>3</sup>. Тот факт, что эта константа размерна, представляется удивительным. Он может означать, что процесс слабого взаимодействия не является элементарным и на самом деле протекает в два этапа с образованием промежуточной частицы, которую пока не наблюдали:

$$n \rightarrow p + W^-, \quad W^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e.$$

Из сохранения момента ясно, что эта частица должна иметь спин  $s = 1$ , т.е. должна быть бозоном. Процессы с  $W$ -бозоном аналогичны электромагнитным процессам с фотоном:

$$p \rightarrow p + \gamma, \quad \gamma \rightarrow e^- + e^+.$$

Теория  $W$ -бозона предполагает, что он во всем, кроме большой массы, похож на фотон. В этом случае элементарные взаимодействия с  $W$ -бозоном характеризуются той же безразмерной константой, что и электромагнитное взаимодействие (постоянной тонкой структуры):

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137},$$

а “слабость” слабого взаимодействия объясняется тем, что при обычных энергиях  $W$ -бозон появляется только виртуально из-за своей большой массы. Значение массы  $W$ -бозона  $M_W$  можно оценить из экспериментального значения постоянной слабого взаимодействия  $g$  и размерных соображений:

$$g = \alpha \cdot \text{энергия} \cdot (\text{длина})^3 = \alpha (M_W c^2) \left( \frac{\hbar}{M_W c} \right)^2,$$

откуда

$$M_W = \left( \frac{\alpha \hbar^3}{g c} \right)^{1/2} \simeq 30 \text{ ГэВ} \simeq 30 m_p.$$

Расстояние, которое проходит  $W$ -бозон до распада, можно оценить из соотношения неопределенностей

$$x \sim \hbar / M_W c \simeq 10^{-15} \text{ см.}$$

Малость этого расстояния (на два порядка меньше радиуса ядерных сил!) и позволяла старой теории считать слабое взаимодействие точечным.

Квантовомеханическая амплитуда процессов с рождением  $W$ -бозона должна иметь вид

$$J = (\tilde{p}n)\tilde{W} + (e\tilde{\nu}_e)\tilde{W} + (\tilde{\mu}\nu_\mu)\tilde{W}.$$

По общим принципам квантовой механики полная амплитуда процессов, идущих через виртуальный  $W$ -бозон, равна произведению амплитуды образования,  $J$ , на амплитуду распада  $W$ , которая, очевидно, равна  $J^*$ , т.е. сопряжена  $J$ :

$$J^* = W(p\tilde{n}) + W(\tilde{e}\nu_e) + W(\tilde{\mu}\nu_\mu).$$

Гамильтониан наблюдаемых процессов тогда выглядит следующим образом:

$$H_{\text{набл}} = JJ^* = (\tilde{p}n)(p\tilde{n}) + (p\tilde{n})(\tilde{e}\nu_e) + \\ + (e\tilde{\nu}_e)(\tilde{e}\nu_e) + (\tilde{p}n)(\tilde{\mu}\nu_\mu) + \\ + (\mu\tilde{\nu}_\mu)(\tilde{\mu}\nu_\mu) + (e\tilde{\nu}_e)(\tilde{\mu}\nu_\mu) + \text{сопряженные члены.}$$

Произведение  $\widetilde{W}W$ , обозначающее рождение и гибель  $W$ , войдет просто в константу слабого взаимодействия  $g$ , которую мы опускаем в символической записи гамильтониана. Процессы, стоящие в правом столбце этого выражения, давно уже наблюдались в лаборатории. В последнее время обнаружены и процессы, записанные в левом столбце.

Процесс  $(\tilde{p}n)(p\tilde{n})$ , т.е.  $p+n \rightleftharpoons p+n$  — это рассеяние нуклонов за счет слабого взаимодействия. Его наблюдать трудно, так как есть рассеяние за счет сильного взаимодействия. Но слабое взаимодействие приводит к несохранению четности, и в этих процессах, например, должны появляться  $\gamma$ -кванты с круговой поляризацией.

Процесс  $(e\tilde{\nu}_e)(\tilde{e}\nu_e)$  — рассеяние нейтрино на электронах:

$$e^- + \nu_e \rightleftharpoons e^- + \nu_e.$$

Мы можем переставлять частицы справа налево с заменой их на античастицы:

$$e^- + e^+ \rightleftharpoons \nu_e + \tilde{\nu}_e, \\ e^+ \rightleftharpoons e^- + \nu_e + \tilde{\nu}_e.$$

Процесс

$$e^- + \nu_e \rightleftharpoons e^- + \nu_e$$

наблюдать очень трудно, гораздо сложнее процесса  $\nu_e + p \rightleftharpoons n + e^+$ , который уже наблюдался.

Интересно, что Райнес в свое время дал для процесса  $(e\tilde{\nu}_e)(\tilde{e}\nu_e)$  экспериментальное значение сечения  $\sigma_{\text{эксп}} = 500 \sigma_{\text{теор}}$ , но это оказалось с ошибкой. Сейчас

$$\sigma_{\text{эксп}} = (1 \pm 1) \sigma_{\text{теор}}.$$

Если бы было  $\sigma_{\text{эксп}} = 500 \sigma_{\text{теор}}$ , то этого не допустила бы астрофизика.

Процесс

$$e^- \rightarrow e^- + \nu + \tilde{\nu}$$

не идет на свободном электроны по законам сохранения. Он идет в поле ядра:

$$e^- + Z \rightarrow Z + e^- + \nu + \tilde{\nu}$$

и уносит энергию, так как  $\nu\tilde{\nu}$  улетают.

Если “раскачивать” кусок вещества, то электромагнитные волны он излучать не будет, так как вещество электронейтрально, но данный нейтринны

йпроцесс может идти, так как он не компенсируется протонами, т.е. при колебании вещества возникает нейтринное излучение.

Данный вид взаимодействия приводит к тому, что между любыми двумя телами есть дальнедействующая сила, потенциал которой пропорционален  $\varphi = 1/r^5$ .

В гамильтониане есть член

$$g(e\tilde{\nu}_e)(\tilde{e}\nu_e),$$

где  $g = 1,4 \cdot 10^{-49}$  эрг·см<sup>3</sup> — константа слабого взаимодействия, т.е. энергия нейтрино зависит от плотности электрона в данном месте. Потенциальная яма, рассчитанная на одно нейтрино, составит (для свинца)

$$U = gn_e = 1,4 \cdot 10^{-49} [\text{эрг} \cdot \text{см}^3] \cdot 5 \cdot 10^{24} [\text{см}^{-3}] \simeq \\ \simeq 10^{-24} \text{ эрг} \simeq 10^{-12} \text{ эВ},$$

т.е. появляется коэффициент преломления вещества для нейтрино.

Есть и другие процессы с излучением нейтрино. Это плазменные колебания с испусканием нейтринно-антинейтринных пар. На стадии горения углерода нейтринное излучение может быть равно фотонному.

Наконец, при высокой температуре ( $T > 10^{10}$  К) самым главным становится процесс  $e^+ + e^- \rightarrow \nu + \tilde{\nu}$  (он остается сравнимым с урка-процессом Пинаева).

Пары  $\nu\tilde{\nu}$  в этом процессе рождаются с вероятностью гораздо меньшей, чем пары  $\gamma$ -квантов в процессе

$$e^+e^- \rightarrow \gamma + \gamma,$$

но последний процесс идет в прямую и обратную стороны и не влияет на вероятность первого. При очень высоких температурах скорость энергопотерь определяется выражением

$$Q \sim 4 \cdot 10^{15} \cdot T_9^9 [\text{эрг}/\text{с} \cdot \text{см}^3].$$

Легко понять, откуда появилась высокая — девятая степень температуры:

$$Q \sim n_e - n_{e^+} \sigma E \sim T^3 T^3 T^2 T = T^9.$$

При низкой температуре

$$n_e - n_{e^+} \equiv [e^+][e^-] \sim \exp(-2m_e c^2/kT) \sim e^{-12/T_9}.$$

Отметим принципиально новые результаты семидесятых годов в области слабого взаимодействия и их астрофизическое значение.

В 1974 г. был открыт третий член ряда, первые два которого представляют собой электрон и мюон. Эта частица обозначается  $\tau$  и называется тау-лептон. Физика вступает в противоречие с филологией: лептон по-гречески

значит “легкий”, и это было правильно применительно к  $e^\pm$  и  $\mu^\pm$ . Масса  $\tau$  равна 1780 МэВ, т.е. он в 1,9 раза тяжелее протона, легким его назвать нельзя. Но свойства  $\tau$  подобны свойствам  $e$  и  $\mu$ . Поэтому, придавая слову “лептон” новый смысл — “фермион, обладающий слабым и электромагнитным, но не сильным, взаимодействиями”, мы называем  $\tau$  лептоном. Предполагается, что существует и соответствующее этому лептону нейтрино,  $\nu_\tau$ , а также его античастица  $\tilde{\nu}_\tau$ , подобно тому как мюону соответствует  $\nu_\mu$  и  $\tilde{\nu}_\mu$ . Следовательно, распады  $\tau$  идут так:  $\tau^- = \mu^- + \nu_\tau + \tilde{\nu}_\mu$  или  $\tau^+ = \pi^+ + \nu_\tau$ . Распад с образованием пионов и других адронов невозможен для мюона, но возможен для тау-лептона благодаря большой массе этой частицы.

Второе открытие — существование нейтрального тока. Процессы, протекающие через посредство промежуточных бозонов  $W^\pm$ , называют зависимыми от заряженного тока. Феноменологически эти процессы записаны так, что каждый член в выражении для тока (в наших обозначениях для амплитуды  $J$ ) меняет заряд на единицу, а общий заряд сохраняется, потому что гамильтониан содержит произведение двух токов, одного уменьшающего и другого увеличивающего заряд. Но в теории Салама–Вейнберга предполагается, что наряду с  $W^\pm$  существует аналогичный тяжелый векторный (спин 1) промежуточный (в слабом взаимодействии) и притом нейтральный  $Z^0$  бозон. Будучи нейтральным, он должен распадаться на пары нейтрино–антинейтрино или пары заряженных частиц или античастиц:  $Z^0 \rightleftharpoons \nu_e + \tilde{\nu}_e$ ,  $Z^0 \rightleftharpoons e^+ + e^- \dots$ . Аналогично этому происходит и взаимодействие с адронами<sup>8</sup>. Как всегда в таких формулах можно перенести античастицу справа налево, превращая ее в частицу. У самого  $Z^0$ -бозона нет античастицы, или точнее он сам является своей античастицей, так как  $Z^0$  истинно нейтрален, также как фотон.

На опыте при энергиях, недостаточных для реального рождения  $Z^0$ -бозона (такая ситуация продлится вероятно до 1985 г.), наблюдаются процессы типа рассеяния:  $\nu_\mu + p \rightarrow Z^0 \rightarrow \nu_\mu + p$ . Предсказывается также слабое взаимодействие электронов с ядрами, которое обнаруживается при рассеянии релятивистских электронов, а также в оптическом поведении атомов. Это взаимодействие качественно было предсказано одним из авторов (Я. Б. Зельдовичем) еще в 1958 г. В настоящее время его можно считать доказанным.

Каковы астрофизические следствия существования нейтрального тока?

С одной стороны, расширяются возможности производства пар нейтрино–антинейтрино. Теперь возможны процессы

$$e^- + e^+ \rightarrow Z^0 \rightarrow \nu_\mu + \tilde{\nu}_\mu,$$

$$e^- + e^+ \rightarrow Z^0 \rightarrow \nu_\tau + \tilde{\nu}_\tau.$$

<sup>8</sup>Его можно рассматривать как взаимодействие с кварками, из которых состоят адроны, но это не повлияет на дальнейшее.

Возможно также рождение пар  $\nu, \bar{\nu}$  при столкновении адронов или возбужденными состояниями ядер  $A^* \rightarrow A + Z^0 \rightarrow A + \nu + \bar{\nu}$  ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  — с одинаковой вероятностью). С другой стороны, появляется новый канал рассеяния нейтрино на электронах и , главное, новый процесс рассеяния нейтрино на ядрах. В этом процессе рассеяние на всех нуклонах может происходить когерентно, при этом амплитуда рассеянной волны пропорциональна числу нуклонов, а сечение рассеяния оказывается пропорционально квадрату числа нуклонов. Таким образом увеличивается непрозрачность плотного вещества, состоящего из тяжелых и средних ядер по отношению к нейтрино всех сортов. Этот факт играет большую роль в теории взрыва сверхновых звезд.

Какова роль нейтринных процессов в эволюции звезд вообще? На стадии главной последовательности нейтринное излучение, казалось бы, мало существенно. Однако нельзя забывать, что, во-первых, без слабого взаимодействия, а значит и без излучения нейтрино, вообще не возможно горение водорода. А, во-вторых, нейтрино позволяет в принципе заглянуть в самые центральные области звезд и проверить наши теории. Для Солнца это уже делается (опыты Дэвиса).

На поздних стадиях эволюции нейтринное излучение может играть решающую роль, поскольку достигаются высокие температуры, и нейтрино эффективно отводит тепло. Без нейтрино трудно объяснить образование планетарных туманностей, взрывы сверхновых. Нейтринное излучение сильно ускоряет остывание горячих белых карликов и нейтронных звезд. Поэтому, сравнивая предсказания теории эволюции звезд, рассчитанные с учетом и без учета нейтрино, с наблюдениями реальных объектов, можно проверить теорию слабых взаимодействий, т.е. установить наличие в природе тех процессов, которые в лаборатории пока не наблюдались.

## Глава 8. ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

После открытия квазаров, пульсаров и компактных рентгеновских источников нельзя изучать эволюцию звезд, не ознакомившись с теорией сильного гравитационного поля. С созданием специальной теории относительности стало ясно, что теория тяготения Ньютона с мгновенным дальновидием нуждается в перестройке и что необходима новая релятивистская теория тяготения, притом такая, которая содержала бы теорию Ньютона как предельный случай. Возникло много попыток построить такую теорию; эти попытки продолжаются до сегодняшнего времени. Однако наиболее привлекательной остается теория тяготения А.Эйнштейна — общая теория относительности (кратко ОТО) — она прекрасно удовлетворяет всем экспериментальным данным и, кроме того, в сущности является самой простой. В нашем

курсе мы познакомимся с физикой общей теории относительности. Однако, для того чтобы в полной мере овладеть материалом последующих лекций, необходимо проработать полный курс теории Эйнштейна — лучше всего “Теорию поля” — Л. Д. Ландау и Е. М. Лившица.

### § 8.1. Идея искривленного пространства–времени

Все тела независимо от их массы падают с одинаковым ускорением — это было известно со времен Галилея. Но именно этот факт стал определяющим для Эйнштейна при создании общей теории относительности (ОТО). Закон тяготения Ньютона очень похож на закон Кулона. Однако в закон Ньютона в качестве гравитационного заряда входит величина, пропорциональная инертной массе. Почему же тяготения связано с инертной массой? С точки зрения ньютоновской теории это некоторая случайность. Однако именно от этого оттолкнулся Эйнштейн, когда ему пришла в голову идея искривленного пространства.

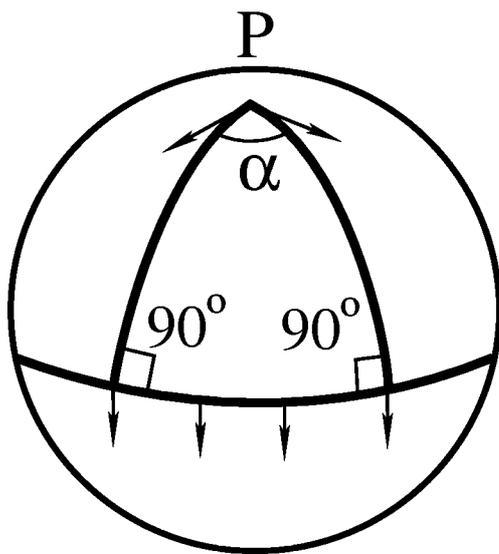


Рис. 51:

В плоском четырехмерном пространстве  $(x, y, z, t)$  движению по прямой соответствует равномерное прямолинейное движение. В плоском пространстве прямая — это кратчайшее расстояние между двумя точками, т. е. экстремаль. Идея Эйнштейна заключается в том, что и в поле тяготения все тела движутся по экстремальным (геодезическим) линиям в пространстве-времени, которое, однако, уже не плоское, а искривленное. Пространство-время искривляют массы, создающие поле тяжести. Если пространство искривлено, и все тела движутся по геодезическим, то это означает, что тела разной природы будут двигаться по одинаковым траекториям, т. е. естественно объясняется независимость ускорения свободного падения от природы тела.

Что такое искривленное пространство? Проще всего это понять на примере двумерного случая. Рассмотрим поверхность шара  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . “Прямыми” на этой поверхности будут дуги большого круга, так как им соответствуют кратчайшие расстояния на поверхности. Сумма углов треугольника уже не равна  $\pi$ . Рассмотрим треугольник с вершиной в полюсе и двумя вершинами на экваторе (рис. 51). Сумма углов в этом треугольнике

равна  $\pi + \alpha$ , где  $\alpha$  — угол при вершине в полюсе. Если пространство искривлено, то это означает, что тела разной природы будут двигаться по одинаковым траекториям, т. е. естественно объясняется независимость ускорения свободного падения от природы тела.

равна  $\pi + \alpha$ . Площадь треугольника равна  $\alpha R^2$ .

В двумерном случае можно представить кривое пространство вложенным в трехмерное пространство. Однако пространство данной размерности можно изучать и непосредственно, по внутренним свойствам, не обращаясь к идее вложения. Например, точки поверхности шара можно характеризовать двумя независимыми координатами  $\theta$  и  $\varphi$  (широтой и долготой). Можно найти выражение для элемента длины на поверхности шара

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta \varphi^2).$$

Далее мы задаемся условием, что  $\varphi$  и  $(2\pi - \varphi)$  при данном  $\theta$  описывают одну и ту же точку, а  $\theta$  меняется от 0 до  $\pi$ . (Здесь мы не вдаемся в вопрос о том, как связаны эти по существу топологические условия с видом выражения для  $ds^2$ ). Все свойства сферы этим заданы.

Для элемента длины в плоском двумерном пространстве можно записать

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = R^2(d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2)$$

( $R$  — масштабный фактор). Здесь координата  $\theta$  может меняться от 0 до  $\infty$  в отличие от сферы, где  $\theta$  меняется от 0 до  $\pi$  (так как  $\sin \theta = 0$  при  $\theta = \pi$ ).

Итак, отличие кривой поверхности от плоской можно обнаружить, исследуя геометрию самой двумерной поверхности, без вложения.

Обратимся к трехмерному случаю.

В плоском пространстве квадрат элемента длины  $ds$  между двумя бесконечно близкими точками записывается в виде ( $dx, dy, dz$  — соответствующие разности координат)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Введем новые координаты,  $\xi, \eta, \zeta$  следующим образом:

$$x = x(\xi, \eta, \zeta),$$

$$y = y(\xi, \eta, \zeta),$$

$$z = z(\xi, \eta, \zeta).$$

Тогда

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta.$$

Квадрат элемента длины в новых координатах записывается в виде

$$ds^2 = g_{11}d\xi^2 + g_{12}d\xi d\eta + \dots ,$$

где

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 ,$$

$$g_{12} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) ,$$

и т.д.

Пока мы только лишь в новом виде описали плоское пространство. Имеем 9 величин  $g_{ik}$ , из которых только 6 независимы, так как  $g_{ik} = g_{ki}$ . Можно показать, что в плоском пространстве сами величины  $g_{ik}$ , их первые и вторые производные определенным образом связаны. Уместен вопрос, что будет, если выбрать  $g_{ik}$ , чтобы эти связи не выполнялись? Тогда окажется, что такая метрика описывает искривленное пространство, которое уже трудно представить наглядно. При этом  $g_{ik}$  определяют как координатную сетку, так и кривизну пространства.

Здесь уместно сделать историческое замечание: Лобачевский и Больяи рассматривали пространство, кривизна которого везде постоянна. Не выражая этой мысли в явном виде, они исходили из идеи, что существуют абсолютно жесткие тела. Такое тело может перемещаться в пространстве постоянной кривизны.

Характеризуя пространство метрическими коэффициентами  $g_{ik}$ , являющимися произвольными функциями координат, Риман ввел в рассмотрение пространство, кривизна которого меняется от точки к точке. В этот же период возникают первые идеи о том, что кривизна пространства может быть связана с физическими факторами. Отказ от идеи абсолютно жесткого тела стал вполне естественным позже, с развитием электронной теории и открытием лоренцева сокращения тел.

В искривленном пространстве можно определять кривую, дающую минимум расстояния между двумя точками:

$$l_{12} = \int_{\xi_1 \eta_1 \zeta_1}^{\xi_2 \eta_2 \zeta_2} ds = \min (\text{по всем путям из 1 в 2}).$$

В плоском случае сразу получается

$$x = a_1 + b_1 t,$$

$$y = a_2 + b_2 t,$$

$$z = a_3 + b_3 t,$$

т. е. параметрическое выражение прямой.

В общем случае искривленного пространства такой простой зависимости не будет; можно написать только дифференциальные уравнения — уравнения геодезической.

Наконец, следующий шаг заключается в том, что рассматривается как исходное, четырехмерное пространство Минковского, или, другими словами, комплекс, состоящий из времени и трехмерного пространства (в узком смысле слова).

Это четырехмерное многообразие преобразуется по Лоренцу, а не по Галилею, т. е. так, что остается инвариантным

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

или в малом

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

При переходе от одной системы координат к другой, движущейся относительно первой со скоростью  $v$ , меняется также время  $t' = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ , где  $\beta = v/c$ .

Такую метрику — не евклидову, а псевдоевклидову (вследствие разного знака у  $dt$  и  $dx, dy, dz$ ) надо сделать “кривой”, вводя  $g_{ik}$  функции координат и времени.

## § 8.2. Параллельный перенос векторов

Что такое параллельный перенос в евклидовом пространстве, всем понятно: при переносе должны оставаться постоянными компоненты вектора в декартовых координатах. Однако уже в плоском пространстве, но в криволинейных координатах, например, в полярных, это не так просто определить.

При параллельном переносе в плоском пространстве сохраняется направление вектора. В частности, сохраняются углы, образуемые вектором с прямой (т. е. геодезической), соединяющей исходную и конечную точки переноса. При обходе замкнутого контура положение вектора совпадает с исходным. В искривленном пространстве это не так. Легче всего это понять на примере сферы<sup>9</sup> (см. рис. 51). Выйдем из полюса с вектором, направленным по меридиану. Дойдем до экватора и перенесем вектор параллельно самому себе вдоль экватора, после чего вернемся по другому меридиану на полюс. Очевидно, что конечное положение вектора не совпадает с исходным и угол поворота  $\alpha$  равен как раз избытку углов треугольника над  $180^\circ$ . При малых  $\alpha$

$$|\Delta \vec{A}| = |\vec{A}| \alpha = |\vec{A}| S / R^2,$$

<sup>9</sup>В общем случае кривого пространства не так просто освоить понятие параллельного переноса. Дирак пользуется для этого представлением кривого пространства как гиперповерхности в плоском пространстве большого числа измерений. После очевидной операции переноса на малое расстояние  $ds$  производится проектирование вектора на гиперповерхность, и так малыми шагами производится параллельный перенос на конечные расстояния.

где  $S$  — площадь треугольника.

Приращение вектора  $\Delta \vec{A} \perp \vec{A}$ , так как длина вектора не меняется.

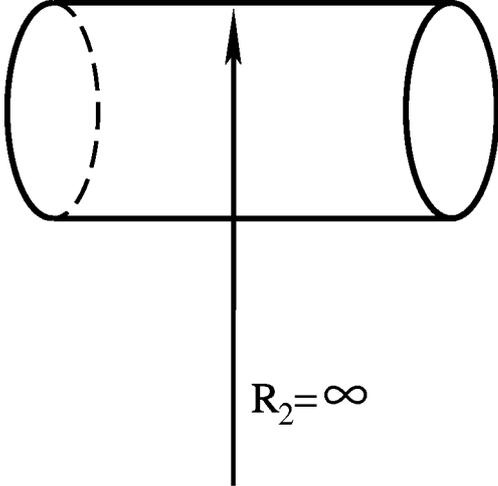


Рис. 52:

Кривизна двумерной поверхности характеризуется только одним числом (например, радиусом кривизны  $R$ ). Надо понимать, что эта кривизна не обусловлена рассмотрением ее из трехмерного мира. Это число характеризует внутреннюю геометрию двумерной поверхности.

Например, поверхность цилиндра с точки зрения трехмерного наблюдателя искривлена. Ее внешняя геометрия характеризуется двумя радиусами кривизны: одним конечным  $R_1$  и другим  $R_\infty$  (рис. 52). Но с точки зрения двумерного существа все геометрические фигуры на этой

поверхности имеют те же свойства, что и фигуры на плоском листе (сумма углов треугольника равна  $\pi$  и т. п.). Таким образом, цилиндр является примером плоской поверхности (от обычной плоскости он отличается только топологией).

Другой пример — конус. Коническая поверхность везде плоская, кроме одной точки, но в этой точке кривизна ведет себя подобно  $\delta$ -функции. Поэтому там, где входят интегралы от кривизны, мы получаем конечный вклад от этой одной точки.

Приращение компонент вектора  $\vec{A} = (A_1, A_2)$  при параллельном переносе по бесконечно малому контуру площади  $\Delta f$  на поверхности в некоторой системе координат  $x_1, x_2$  можно записать в виде:

$$\Delta A_1 = \kappa A_2 \Delta f,$$

$$\Delta A_2 = -\kappa A_1 \Delta f,$$

т. е. матрица этого преобразования имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}$ . Здесь  $\kappa$  — внутренняя кривизна поверхности (на сфере  $\kappa = 1/R$ ). Такой вид матрицы преобразования связан с условием сохранения длины вектора.

В трехмерном (и более общем) случае изменение компонент вектора при параллельном переносе зависит также от ориентации элементарных площадок, определяемых контуром пути переноса. Поэтому изменение компонент вектора при параллельном переносе по контуру, ограничивающему малую

двумерную поверхность  $\Delta f^{lm}$ , описывается формулой

$$\Delta A^i = \frac{1}{2} R_{klm}^i A^k \Delta f^{lm},$$

где  $R_{klm}^i$  — так называемый тензор кривизны. Как это принято, здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. В силу свойств симметрии в четырехмерном случае  $R_{klm}^i$  имеет 20 независимых компонент.

Тензор  $R_{klm}^i$  выражается через метрику  $g_{ik}$ , точнее говоря через  $g_{ik}$ ,  $\partial g_{ik}/\partial x^l$  и  $\partial^2 g_{ik}/\partial x^l \partial x^m$ .

Поэтому, если известна метрика  $g_{ik}$ , то известна и кривизна в каждой точке. И наоборот, если известен тензор кривизны  $R_{klm}^i$ , то геометрия пространства полностью известна. Заметим, что если  $R_{klm}^i = 0$ , то пространство плоское, и существует такое преобразование координат, которое преобразует выражение  $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$  к псевдоевклидову виду:  $ds^2 = \delta^{ik} dx^i dx^k$ .

### § 8.3. Физика искривленного пространства–времени

В отсутствие гравитационного поля физика разворачивается в псевдоевклидовом пространстве Минковского с метрикой

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

При наличии гравитации, т. е. в ОТО, будем считать, что пространство искривлено:

$$ds^2 = g_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad g_{ik} = g_{ki} \quad (8.1)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование).

Если задан метрический тензор  $g_{ik}$  (для краткости будем говорить “метрика”  $g_{ik}$ ), то можно найти геодезические в пространстве–времени, т. е. определить движение частиц в гравитационном поле.

В данной точке квадратичную форму (1) можно диагонализировать и привести ее к метрике Минковского<sup>10</sup>.

В общем случае можно разложить  $g_{ik}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0$

$$g_{ik}(x) = g_{ik}(x_0) + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots$$

Преобразованием системы координат в данной точке всегда можно обратиться в нуль первые производные  $g_{ik}$ . Для этого достаточно перейти в свободно падающую систему отсчета. Но произвольную совокупность всех вторых производных  $g_{ik}$  никакими преобразованиями системы координат уничтожить нельзя.

<sup>10</sup>Это условие накладывает определенные ограничения на те  $g_{ik}$ , которые реализуются в природе. Например, невозможно, чтобы где-то было  $ds^2 = -c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ .

Если рассматривать квадратичные эффекты, например, относительные ускорения удаленных частиц, то можно заметить приливные силы. Невесомость существует лишь если ограничиться первым порядком по  $\Delta x$ . Таким образом, одна частица “не чувствует” гравитационного поля, но система с разнесенными массами “чувствует”. Глобально гравитационное поле всегда можно обнаружить.

Таким образом, в членах первого порядка по  $\Delta x$  эффект гравитации компенсируется ускорением свободного падения — в этом и состоит точная формулировка принципа эквивалентности. (Более грубая формулировка: “Силы инерции эквивалентны некоторому полю тяготения”.)

Итак, кривизна пространства характеризуется двадцатью независимыми числами  $R_{iklm}^i$ . Естественно связать  $R_{iklm}^i$  с веществом.

В ньютоновской теории потенциал гравитационного поля определяется плотностью вещества  $\rho$  [г/см<sup>3</sup>]. Можно перевести плотность вещества  $\rho$  в плотность энергии  $\varepsilon = \rho c^2$ . В специальной теории относительности  $\varepsilon$  является 00-компонентой тензора энергии-импульса

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ j_2 & \cdot & T_{\alpha\beta} & \\ j_3 & \cdot & & \end{pmatrix}.$$

Тензор  $T_{ik}$  состоит из величин, которые по отношению к трехмерным, чисто пространственным поворотам ведут себя как скаляр  $\varepsilon$ , вектор  $\vec{j}$  (поток энергии-импульса на единицу объема) и трехмерный тензор натяжений  $T_{\alpha\beta}$ , диагональные члены которого характеризуют давление, а недиагональные — вязкость.

Мы видим, что вещество характеризуется тензором второго ранга.

Эйнштейн получил уравнения поля в виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{1}{c^2}\kappa T_{ik}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^2},$$

где  $R_{ik} = g^{lm}R_{limk}$ ,  $R = g^{ik}R_{ik}$ . Из этих уравнений следует (в случае слабых полей) закон тяготения Ньютона и, кроме того, автоматически выполняются законы сохранения<sup>11</sup>.

В электромагнитной теории заряд сохраняется, но движение заряда произвольно. В ОТО  $T_{ik}$  не может быть любым — движение должно соответствовать законам механики, т.е. законам сохранения энергии и импульса. Нет метрики, где вещество сначала покоилось, а потом все в целом самопроизвольно начало бы двигаться. Кроме того, оказалось, что из уравнений

<sup>11</sup>Знаменитый математик Гильберт получил правильный вид уравнений практически одновременно с Эйнштейном. Статья Гильберта датирована неделей раньше, но в этой статье есть примечание Гильберта, что правильный вид уравнений поля он узнал от Эйнштейна. При этом Гильберт вывел уравнения из вариационного принципа.

ОТО получают не только законы движения материальных точек (т. е. законы механики), но и (с небольшим произволом) законы свободного электромагнитного поля (уравнения Максвелла). Это породило в свое время массу надежд. Казалось, что всю физику можно вывести из ОТО. Однако попытки создать единую теорию поля к успеху не привели.

Число уравнений Эйнштейна равно числу компонент тензора второго ранга, а полное описание пространства задается тензором четвертого ранга  $R_{klm}^i$ . В двумерном и трехмерном пространстве-времени задание  $R_{ik}$  однозначно определяет  $R_{klm}^i$ , в четырехмерном мире это не так: условие  $R_{ik} = 0$  совместимо с  $R_{klm}^i \neq 0$ . Это означает, что гравитационное поле может существовать и без источников — это, например, гравитационные волны.

Еще английский математик Клиффорд высказал идею, что у пространства должна быть собственная упругость. В некотором смысле ОТО является развитием этой идеи. В лагранжиан  $L$  входит кривизна  $R = g^{ik} R_{ik}$ :

$$L = \frac{c^3}{16\pi G} \int R dV,$$

где  $V$  — четырехмерный объем. (Если задаться таким лагранжианом и лагранжианом других полей и частиц, то при варьировании метрики можно получить уравнения ОТО, что и сделал Гильберт.) Можно наглядно представить себе, что  $L$  описывает упругость пространства, “стремление” пространства оставаться плоским. Константа  $c^3/16\pi G$ , характеризующая упругость вакуума, велика, и пространство искривлено слабо, из-за того, что велика его упругость.

Может смутить то обстоятельство, что константа  $c^3/16\pi G$  размерна, поэтому непонятно, относительно чего она является большой. В безразмерном виде силу гравитационного взаимодействия характеризует константа  $Gm^2/\hbar c$ , аналогичная константе электромагнитного взаимодействия  $e^2/\hbar c = 1/137$ . Из вида константы сразу получаем массу, характерную для гравитационного взаимодействия (так называемая планковская масса, сравните аналогичные рассуждения о слабом взаимодействии и о массе  $W$ -бозона в § 7.4):

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 10^{-5} \text{ г.}$$

Характерная квантовая длина этой массы:

$$l_{pl} = \frac{\hbar}{m_{pl}c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 10^{-33} \text{ см.}$$

Легко убедиться, что  $l_{pl}$  совпадает как раз с гравитационным радиусом  $r_g$  для планковской массы. Таким образом, искривление пространства велико на расстоянии  $l_{pl}$  от массы  $m_{pl}$ . Для известных элементарных частиц  $m \sim 10^{-24} \text{ г} \ll m_{pl}$ ,  $l \sim 10^{-13} \text{ см} \ll l_{pl}$ , т. е. эффекты гравитации и искривления

пространства в объеме известных элементарных частиц чрезвычайно малы. Это и доказывает большую упругость вакуума.

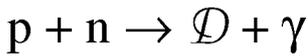
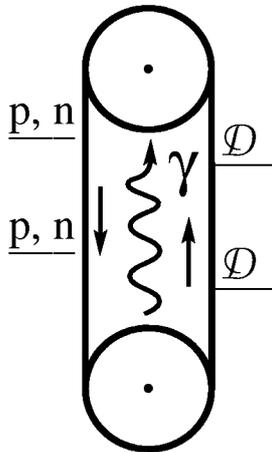
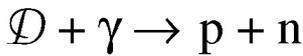
Нельзя ли получить упругость пространства из каких-то более общих соображений? Из квантовой теории мы знаем, что вакуум обладает нулевыми колебаниями, которые, в частности, дают поправки в уровнях атома водорода (Лэмбовский сдвиг). Может быть такие эффекты приводят и к упругости вакуума? Такой подход удалось сформулировать, но при этом оказалось, что в теорию необходимо вводить частицы с массой  $m_{pl}$ .

Таким образом, есть два принципиально различных направления:

- 1) из теории тяготения вывести существование частиц с  $m_{pl}$ .
- 2) из теории частиц получить константу  $G$ . (Подробнее см. книги Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова “Релятивистская астрофизика” и “Теория тяготения и эволюция звезд”).

#### § 8.4. Гравитационное красное смещение. Замедление времени

В предыдущих разделах мы увидели, что основная идея ОТО о движении тел в искривленном пространстве-времени по геодезическим означает, что все тела падают в гравитационном поле по одинаковым траекториям с одинаковым ускорением.



Покажем сейчас с помощью ОТО и квантовой механики, что в гравитационном поле происходит замедление времени. Для этого рассмотрим один проект вечного двигателя. На установке из двух блоков (рис. 53) будем поднимать ядра дейтерия, а опускать протоны и нейтроны.

Пусть внизу протоны реагируют с нейтронами, а образующиеся  $\gamma$ -кванты используются наверху для диссоциации дейтерия. Масса  $D$  на 2,2 МэВ меньше  $m_p + m_n$ , поэтому под действием большей тяжести  $p$ - $n$  система будет отдавать энергию, совершать вечное движение.

Ошибка этого проекта в том, что в действительности  $\gamma$ -квант не поглотится, так как часть его энергии уйдет на преодоление силы тяжести:

$$E'_\gamma = E_\gamma - \frac{gh}{c^2} E_\gamma = E_\gamma + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{c^2} E_\gamma.$$

Рис. 53:

Энергия  $\gamma$ -кванта  $E_\gamma = \hbar\omega$ . Поскольку  $E'_\gamma < E_\gamma$ , то  $\omega' < \omega$ , т. е. частота фотонов испытывает красное смещение в гравитационном поле. Этот эффект уже наблюдался на Земле с помощью эффекта Мессбауэра (опыт Паунда и Ребки).

В общем случае можно написать

$$\omega_{\text{прин}} = \omega_{\text{исп}} \left( 1 + \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right),$$

где  $\Delta\varphi$  — различие гравитационного потенциала в местах испускания и приема. Это соотношение верно для фотонов любых частот. В данном месте частота фотонов зависит только от свойств испускающих их атомов (или ядер). На этих же свойствах основано и измерение времени в данном месте (атомные часы). Поэтому наблюдатель, находящийся в точке с другим гравитационным потенциалом, будет интерпретировать сдвиг частот как изменение хода времени:

$$\Delta\tau_{\text{прин}} = \Delta\tau_{\text{исп}} \left( 1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right). \quad (8.2)$$

Раньше мы говорили об изменении в гравитационном поле метрики вообще, а теперь видим более конкретно, что изменяется течение времени в разных точках. Это можно интерпретировать как изменение коэффициента  $g_{00}$  при временной координате в метрике. Рассмотрев как изменяется  $g_{00}$  в слабом поле (т. е. ньютоновском случае), мы увидим, что  $g_{00}$  играет роль ньютоновского потенциала для медленных частиц.

Рассмотрим статическое гравитационное поле. По определению это значит, что метрику можно написать в виде

$$ds^2 = g_{00}(dx_0)^2 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

причем ни  $g_{00}$ , ни  $g_{0\alpha}$  не зависят от временной координаты  $x^0$ . Пусть в некоторой точке  $r_1$  испускаются два световых сигнала с запаздыванием  $\Delta x^0$  и принимаются в точке  $r_2$  (см. рис. 54). Поскольку  $g_{ik}$  от  $x^0$  не зависит, мировая линия второго сигнала отличается от первой только сдвигом по координате  $x^0$  на  $\Delta x^0$ , т. е. запаздывание сигналов в точке приема по координатному времени тоже будет  $\Delta x^0$ . Однако наблюдатель пользуется не координатным, а собственным временем  $\tau$ . Это соответствует тому, что он в своей окрестности пользуется метрикой

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2.$$

Интервал между двумя событиями — приходом сигналов в точку  $r_2$  — инвариантен (не зависит от выбора метрики), т. е.

$$\sqrt{g_{00}(2)} \Delta x^0 = c \Delta\tau_2.$$

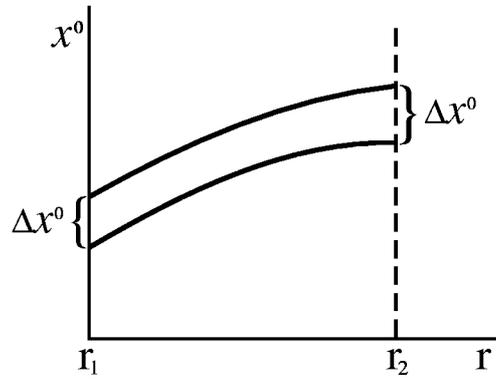


Рис. 54:

Отсюда и из (8.2) получаем связь  $g_{00}$  и ньютоновского потенциала  $\varphi$ :

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right).$$

## Глава 9. СИЛЬНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ И СТРОЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗВЕЗД

### § 9.1. Решение Шварцшильда

Рассмотрим сферически-симметричное и статическое решение уравнений Эйнштейна. Введем сферические координаты, записав выражение для интервала в виде

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - g_{11} dr^2 - g_{22}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Вид угловой части метрики  $(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$  следует из требования сферической симметрии. Из требования статичности находим, что  $g_{00}$ ,  $g_{11}$  и  $g_{22}$  должны быть функциями только  $r$ . Кроме того, должно быть  $g_{01} = 0$ , иначе не будет обратимости во времени. Отсутствуют также члены типа  $g_{r\varphi}$  из-за сферической симметрии.

Определим радиальную координату  $r$  так, чтобы  $g_{22} = r^2$ . При таком определении радиуса площадь сферы равна  $4\pi r^2$ , а длина окружности с центром в начале координат равна  $2\pi r$ . Однако это не значит, что точка, имеющая координату  $r$ , удалена от центра на расстояние  $r$ , так как геометрия теперь неевклидова.

Введем функции  $\nu(r)$  и  $\lambda(r)$  так, что

$$g_{00} = e^{\nu(r)}, \quad g_{11} = e^{\lambda(r)},$$

т. е. метрика приобретает вид

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Из уравнений Эйнштейна

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^k = \frac{\varkappa}{c^2} T_i^k$$

после довольно долгих вычислений получим

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{\varkappa}{c^2} T_1^1, \quad (9.1)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) = \frac{\varkappa}{c^2} T_2^2 = \frac{\varkappa}{c^2} T_3^3, \quad (9.2)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{\kappa}{c^2} T_0^0. \quad (9.3)$$

Все остальные уравнения обращаются в тождества  $0=0$ . Не диагональные компоненты тензора энергии-импульса (типа  $T_r^{\varphi}$  и т. п.) обращаются в нуль вследствие сферической симметрии (это означает, что нет склавающих напряжений). Отсутствует также компонента  $T_0^1$ , так как этот член соответствует потоку энергии по радиусу, а мы рассматриваем статические решения.

Мы использовали смешанные компоненты тензора  $T_i^k$ . В выражение  $T_{11}$  и  $T^{11}$  входят метрические коэффициенты. Пусть у нас есть метрика

$$dl^2 = a^2 dx^2 + b^2 dy^2 + c^2 dz^2, \quad (9.4)$$

которая эквивалентна метрике

$$dl^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2, \quad (9.5)$$

где  $a dx = x'$ ,  $b dy = dy'$ ,  $c dz = dz'$ . Оказывается, что выражения для  $T_{11}$ , например, разные в (9.4) и (9.5). В смешанные компоненты вида  $T_1^1$  коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не входят, поэтому они одинаковы в исходной системе и локально-лоренцевой (если исходная система уже диагональна).

Начнем с того, что будем искать решение уравнений (9.1), (9.2), (9.3) в пустоте вокруг звезды (т. е. положим  $T_i^k = 0$ ). Введем  $f = e^{-\lambda}$ . Тогда

$$-\lambda' e^{-\lambda} = f'$$

$$\lambda' = -f'/f.$$

Теперь для уравнения (3) имеем

$$f \left( \frac{1}{r^2} - \frac{f'}{fr} \right) - \frac{1}{r^2} = 0,$$

$f = 1 - a/r$ ,  $a = \text{const}$ , т. е.  $g_{11} = e^{\lambda} = f^{-1} = 1/(1-a/r)$ . Вычитая из уравнения (1) уравнение (3), получим

$$\nu' + \lambda' = 0 \Rightarrow \nu + \lambda = \text{const}.$$

Выбор  $\text{const}$  просто определяет масштаб времени. Поэтому зададимся условием, что вдали от тела, где  $\lambda = 0$ , также и  $\nu = 0$ , т. е. переменная  $t$  есть время изменения далеким покоящимся наблюдателем. Тогда получим

$$\nu + \lambda = 0$$

Отсюда

$$e^{\nu} = g_{00} = 1 - a/r.$$

Мы получили известное решение Шварцшильда для пустого пространства вокруг сферического симметричного тела:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (9.6)$$

При  $r \rightarrow \infty$  эта метрика переходит в метрику Минковского.

Из выражения (6) видно, что при  $r = a$  коэффициент при  $dt^2$  обращается в нуль, а при  $dr^2$  — в бесконечность.

Наблюдатель на некотором радиусе  $r$  пользуется локально-лоренцевой системой отсчета:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + dl^2.$$

Для покоящегося наблюдателя в обеих системах  $dr, d\varphi, d\theta = 0$  и  $dl = 0$ . Поскольку  $ds^2$  — инвариант, получим

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2.$$

Вдали, при  $r \rightarrow \infty$

$$d\tau = \left(1 - \frac{a}{2r}\right) dt.$$

Так как мы уже выяснили связь потенциала с замедлением времени (§ 8.4), мы видим, что

$$-\frac{a}{2r} = \frac{\varphi}{c^2},$$

где  $\varphi$  — ньютоновский потенциал (мы убедимся в этом еще раз ниже, рассматривая движение частиц), но

$$\varphi = -\frac{GM}{r}, \text{ т. е. } a = \frac{2GM}{c^2} = r_g.$$

Величину  $r_g = a$  называют гравитационным радиусом (или радиусом Шварцшильда). Для звезды солнечной массы  $M = M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$  г;  $r_g = 3 \cdot 10^5$  см = 3 км (полезно запомнить!). Для Солнца метрику Шварцшильда можно применять до поверхности  $r_s = 7 \cdot 10^{10}$  см, т. е.  $r_g/r$  всюду мало. Для нейтронных звезд  $r_g/r$  достигает  $0,1 \div 0,2$ . Для черной (невращающейся!) дыры метрика Шварцшильда применима ко всей наблюдаемой области пространства, т. е. вплоть до  $r = r_g$ . Почему область  $r < r_g$  не наблюдаема (издали) будет объяснено позднее.

## § 9.2. Движение частиц в поле Шварцшильда

Теперь рассмотрим движение частиц в этом поле. По ньютоновской теории для частиц, покоящихся на бесконечности, используя закон сохранения энергии, имеем

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{mv^2}{2} = 0,$$

т. е.

$$v^2 = GM/r.$$

Определим наивно  $r_g$  как радиус, где  $v = c$ . Тогда (ср. § 1.7)

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

Этот результат получил еще Лаплас. Подчеркнем, однако, что это не больше чем мнемонический прием. Очевидно, что Ньютоновская механика неприменима при  $v \sim c$ .

Теперь напишем строго уравнение движения частиц в поле Шварцшильда. В метрике, не зависящей от времени, сохраняется энергия, т. е. компонента  $p_0$  (именно с нижним индексом) 4-вектора импульса частицы:

$$p_0 = -mc^2 g_{00} \frac{dx^0}{ds}.$$

В статическом поле

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - dl^2$$

или

$$ds = dt \sqrt{g_{00}} \sqrt{1 - \frac{dl^2}{g_{00} dt^2}}.$$

Величина

$$\frac{dl}{\sqrt{g_{00}} dt} = \frac{v}{c}$$

это скорость, измеренная локальным наблюдателем. Тогда имеем

$$p_0 = \frac{mc^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \text{const}$$

(это соотношение не зависит от направления  $v$ ).

Пусть при  $r \rightarrow \infty$  ( $g_{00} \rightarrow 1$ )  $v \rightarrow 0$ , т.е.  $p_0 = mc^2$ . В этом случае всегда

$$1 - v^2/c^2 = g_{00} = 1 - r_g/r, \quad v^2 = c^2 r_g/r,$$

т.е. в ОТО имеет место связь между  $v$  и  $r$  в точности такая, как в ньютоновской механике и теории тяготения. В частности,  $r_g$  — это как раз тот радиус, где  $v = c$ , если при  $r = \infty$ ,  $v = 0$  в такой теории. Если  $v \neq 0$  на бесконечности, то

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}\right).$$

Таким образом, в точной теории в ОТО  $v = c$  только на  $r_g$  независимо<sup>12</sup> от значения  $v = v_\infty$  при  $r = \infty$ .

<sup>12</sup>В ньютоновской теории в этом случае  $v$  было бы равно  $c$  при  $r = r_g$ .

Еще раз подчеркнем, что  $v$  — это скорость, измеренная локальным наблюдателем.

В дальнейшем положим  $c = 1$ . При движении по радиусу в случае  $v = 0$  при  $r \rightarrow \infty$

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{r_g}{r}}.$$

Тогда, используя выражение для  $g_{00}$  и  $g_{11}$ ,

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{r_g}{r}} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right),$$

$$t = \int_R^{r_g} \sqrt{\frac{r}{r_g}} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr.$$

При падении с конечного  $R$  этот интеграл логарифмически расходится при  $r \rightarrow r_g$ . Отметим, что  $dr/dt$  проходит через максимум и стремится к нулю при  $r \rightarrow r_g$ . Конечно, в шварцшильдовском поле нет отталкивания, хотя  $dr/dt \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow r_g$ , так как  $dr/dt$  — это не скорость.

Существует хорошее сравнение. Если мы будем бросать частицы на черную дыру, то мы увидим, что они замедляют движение и сгущаются вблизи  $r_g$ . Эта остановка не соответствует положению равновесия. Представим себе, что снимается на кинолентку прыгун, а потом при просмотре замедляется скорость движения пленки, так что в некоторый момент он остановится. То же самое при движении частиц. Если установить часы на частицах, которые действительно останавливаются в положении равновесия, то часы все равно идут. В случае дыры частицы останавливаются, но останавливаются и часы на них. По собственному времени никаких остановок не происходит. Просто с точки зрения удаленного наблюдателя часы замедляются из-за доплер-эффекта и из-за влияния гравитационного потенциала.

Представим себе падение газа, состоящего из отдельных частиц с точки зрения далекого наблюдателя. Оказывается, что газ скапливается вблизи  $r_g$ , но не отдает свою кинетическую энергию. Несмотря на то, что количество скопившегося газа неограниченно возрастает с течением времени, его плотность, измеренная в собственной системе (наблюдателя, движущегося вместе с газом), остается конечной в каждой точке пространства, в частности вблизи  $r_g$ .

Задача. Рассчитать радиальное движение для света (фотонов) в метрике Шварцшильда.

### § 9.3. Сферически-симметричное поле внутри звезды

Займемся теперь уравнениями в веществе. Начнем с уравнения (3) § 9.1. Оно содержит только  $\lambda$ . Пусть задано  $T_0^0(r)$ .

Известный метод решения неоднородных уравнений — метод вариации констант. Мы знаем, что  $f = 1 - a/r$  удовлетворяет однородному уравнению. Будем теперь считать, что  $a$  не является константой. Тогда после подстановки  $f$  в неоднородное уравнение все члены, не содержащие  $da/dr$ , сократятся, а мы получим

$$-\frac{1}{r^2} \frac{da}{dr} = \kappa T_0^0.$$

По определению

$$T_0^0 = -\rho c^2 = -\varepsilon.$$

Тогда

$$a(r) = \frac{8\pi G}{c^4} \int_0^r \varepsilon r^2 dr.$$

Введем величину  $m(r)$ , такую, что

$$a(r) = \frac{2Gm(r)}{c^2},$$

т. е.

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr.$$

Результат получился вроде бы тривиальный. Но на самом деле это не так. Элемент объема вовсе не равен  $4\pi r^2 dr$ . Поскольку метрика неевклидова, расстояние между равно не  $dr$ , а  $e^{\lambda/2} dr$ , т. е.  $dr/\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}$ , так что

$$dV = \frac{4\pi r^2 dr}{\left(1 - \frac{a(r)}{r}\right)^{1/2}}.$$

Таким образом,

$$m(r) < \int_0^r \rho dV.$$

Полная масса есть значение  $m$  на краю звезды

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr < \int_0^R \rho dV.$$

Полная масса меньше суммы масс отдельных частей звезды, так как она складывается из масс, которые взаимодействуют гравитационно.

Если отдельные куски вещества (так же сжатые, как в звезде) разнести далеко друг от друга, то их полная масса была бы равна

$$M' = \int_0^R \rho dV = 4\pi \int_0^R \frac{\rho r^2 dr}{1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}}.$$

Вычислим полное число барионов в звезде

$$N = \int_0^R n(r) \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - \frac{a(r)}{r}}}.$$

Здесь  $n$  — плотность числа барионов. Теперь определим массу  $M_0$ , равную

$$M_0 = m_0 N,$$

где  $m_0$  — масса ядра железа  $^{56}\text{Fe}$ , деленная на 56, т. е. это масса бариона, связанного в наиболее устойчивом ядре.

$(M_0 - M')c^2$  — это минимальная энергия, необходимая для того, чтобы “распылить” звезду на бесконечность.

Плотность вещества

$$\rho > n \cdot m_0,$$

так как при сжатии приходится затратить энергию. Сразу нельзя сказать, что больше

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr$$

или

$$M_0 = 4\pi \int_0^R \frac{m_0 n r^2 dr}{\sqrt{1 - a(r)/r}},$$

так как  $\rho > m_0 n / (1 - a/r)^{1/2} > 1$ .

Поэтому в принципе энергия связи звезды

$$\mathcal{E} = (M - M_0)c^2$$

может быть положительной даже<sup>13</sup> в локально-равновесной системе и в разных моделях может иметь разный знак. С этим связан и вопрос о том, сколько

---

<sup>13</sup>При отсутствии локального равновесия возможность  $\mathcal{E} > 0$  тривиальна: такова, например, ситуация для Солнца. Это означает лишь, что энергия ядерной реакции превращения водорода и гелия в железо превышает отрицательную энергию гравитационного взаимодействия. Солнце не взрывается потому, что ядерная реакция идет медленно и тепло отводится излучением.

выделяется энергии при образовании звезды. Мы получили, что масса такой звезды

$$M = 4\pi \int \rho r^2 dr,$$

и полная масса барионов того же вещества на бесконечности

$$M = 4\pi \int m_0 n \sqrt{g_{11}} r^2 dr$$

где  $m_0$  — масса бариона в ядре железа. Как уже говорилось, в принципе могут быть решения с  $M > M_0$ , хотя их трудно получить в природе, так как для их образования необходимо затратить энергию. Эти решения неустойчивы относительно разлета на бесконечность. Устойчивы ли они относительно малых возмущений — сказать нельзя без подробных расчетов. По-видимому, ветвь нейтронных звезд малой массы  $M < 0,2M_\odot$  имеет  $\mathcal{E} > 0$ , но устойчива относительно малых возмущений (см. ниже). Решения с отрицательной энергией связи ( $M < M_0$ ) могут получиться в результате естественной эволюции. Мы увидим позже, однако, что все решения неустойчивы относительно образования черной дыры, но по отношению к большим возмущениям.

Запишем выражение для массы звезды в виде

$$M = M_0 + 4\pi \int \rho r^2 dr - 4\pi \int n m_0 \sqrt{g_{11}} r^2 dr.$$

Обозначим через

$$4\pi n \sqrt{g_{11}} r^2 dr = dN$$

число барионов в слое  $(r, r + dr)$ .

Введем

$$m = \rho/n = m_0 + E/c^2,$$

где  $E$  — добавочная энергия, затраченная при сжатии. С этими обозначениями

$$\begin{aligned} M &= M_0 + \underbrace{4\pi \int \rho r^2 dr}_{\text{дефект массы}} - \underbrace{\int m dN + \int m_0 dN}_{\text{внутренняя энергия}} = \\ &= M_0 + \int 4\pi \rho (1 - \sqrt{g_{11}}) r^2 dr + \int (E/c^2) dN. \end{aligned}$$

С точностью до величин первого порядка

$$\sqrt{g_{11}} = 1 + \frac{Gm(r)}{c^2 r} + \dots,$$

т. е.

$$M = M_0 - \int \frac{Gm dm}{c^2 r} + \frac{1}{c^2} \int E dN + \dots$$

Полученное соотношение было точным выражением для полной энергии звезды в ньютоновской теории. По порядку величины

$$M = M_0 - K_1 \frac{GM_0^2}{c^2 R} = M_0 - K_2 M_0 \frac{r_g}{R},$$

т.е. можно сказать, что точные для ньютоновской теории соотношения являются лишь первыми членами разложения по степеням  $r_g/R$  для энергии звезды в ОТО (по теореме вириала тепловая энергия имеет тот же порядок величины, что и гравитационная).

В следующем порядке появляется член  $\sim (r_g/R)^2$ . Мы уже знаем, что при  $\gamma \rightarrow 4/3$   $|\mathcal{E}_{\text{грав}}| = \mathcal{E}_{\text{тепл}}$ , т.е. член  $r_g/R$  исчезает, и для расчета устойчивости становятся важны поправки  $\sim (r_g/R)^2$ . Эффекты ОТО приводят к тому, что при центральной плотности звезды больше некоторой, массы белых карликов начинают убывать (см. рис. 45). Важен также учет ОТО для случая сверхмассивных горячих звезд, где из-за роли давления излучения показатель адиабаты также стремится к  $4/3$ .

Не решая пока уравнения Эйнштейна до конца, попробуем уже сейчас выяснить некоторые свойства метрики внутри звезды. Из-за сферической симметрии достаточно рассмотреть геометрию одной “плоскости”, проходящей через центр, чтобы охарактеризовать все трехмерие. Метрика такой поверхности такая же, как в плоском трехмерном пространстве на изогнутой поверхности вращения (“тарелке”, см. рис. 55а). Для такой поверхности

$$dl^2 = r^2 d\varphi^2 + g_{11} dr^2,$$

где

$$g_{11} = \cos^{-2} \alpha.$$

Выясним асимптотику при  $r \rightarrow 0$ , т. е. в центре. Пусть центральная плотность  $\rho_c$  конечна. Тогда  $m(r) \sim r^3$  и, используя

$$g_{11} = \left[ 1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} \right]^{-1},$$

получим

$$g_{11} = 1 + \text{const} \cdot r^2.$$

С другой стороны,

$$g_{11} = 1 + \alpha^2$$

т. е.

$$\alpha \sim r.$$

Поэтому в центре имеем обыкновенную точку (касательная горизонтальна). В принципе может быть особое решение

$$\rho \sim b/r^2, \quad m \sim r, \quad g_{11} \rightarrow \text{const} \neq 1,$$

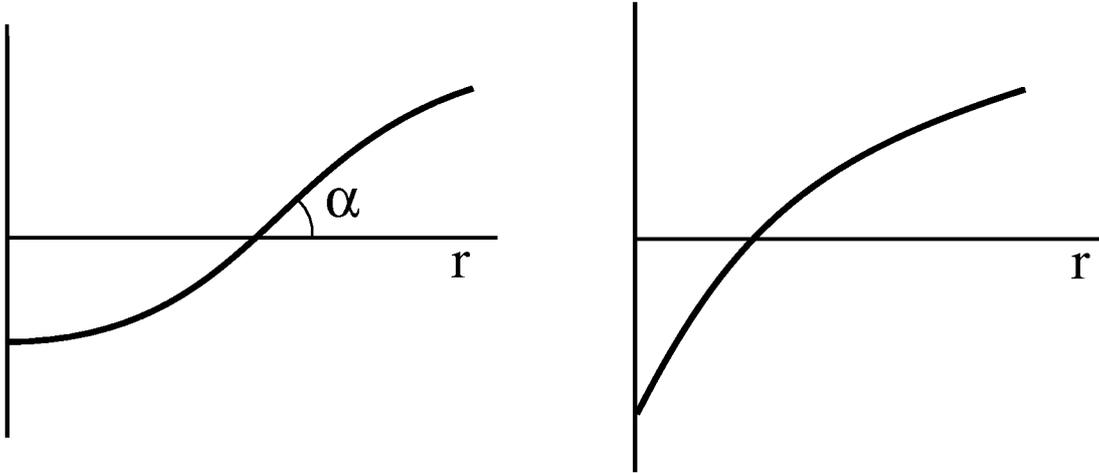


Рис. 55:

т.е. в центре появляется коническая точка с бесконечной кривизной (рис. 55b) — это решение является асимптотической серией несингулярных решений при  $\rho_i \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим теперь асимптотику при  $r \rightarrow \infty$ ,

$$m = M = \text{const.}$$

Имеем

$$g_{11} = 1 + \text{const}/r = 1 + \alpha^2,$$

$$\alpha \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \rightarrow 0,$$

т.е. на бесконечности пространство опять плоское (хотя высота “тарелки” и бесконечна).

Продолжим решение уравнений. До сих пор мы использовали только одно уравнение ОТО, куда входит слева  $g_{11}$  (и не входит  $g_{00}$ ), а в правую часть  $T_0^0 \sim \rho$ .

Очень важно заметить, что до сих пор не подразумевалось, что распределение плотности равномерно. Необходимо только покой ( $\lambda, \nu = 0$ ). Скорости равны нулю, а ускорения могут быть любыми. Условие равновесия мы нигде не использовали. Поэтому полученное выражение для  $M$  удобно в дальнейшем использовать для исследования устойчивости звезды.

Вернемся к равновесным звездам. Следующие уравнения (вместе с условиями стационарности  $\lambda, \nu = 0$ ), куда входит давление, дадут условие равновесия. Ограничимся случаем паскалевой жидкости

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = P.$$

В уравнении (1) § 9.1 входит только  $d\nu/dr$ , а в (9.2) еще  $d^2\nu/dr^2$ . Дифференцируя первое уравнение, исключая  $d^2\nu/dr^2$ ,  $d\nu/dr$ ,  $d\lambda/dr$ ,  $\nu$  и  $\lambda$ , после

алгебраических преобразований получаем уравнение гидростатического равновесия

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \left( m + 4\pi P \frac{r^3}{c^2} \right)}{r^2 \left( 1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right)}.$$

Напомним, что в ньютоновской теории

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G\rho m}{r^2}.$$

Отличия ОТО от ньютоновской теории таковы: 1) вместо  $\rho$  входит  $\rho + P/c^2$ , т. е. давление “весит”; 2) сила притяжения зависит не только от  $m$ , но и от  $P$ :

$$m \longrightarrow m + 4\pi P r^3 / c^2$$

(ясно, что эти поправки существенны, когда  $P/c^2$  сравнимо с  $\rho$ , т.е. для релятивистского вещества); 3) при  $r \longrightarrow r_g(r)$  имеем  $dP/dr \longrightarrow \infty$ , ускорение  $g \longrightarrow \infty$ , так как в знаменателе уравнения равновесия в ОТО стоит  $r(r - r_g)$  вместо ньютоновского  $r^2$ .

Надо иметь в виду, что физический градиент давления равен

$$\frac{dP}{dl} = \frac{dP}{\sqrt{g_{11}} dr} \sim \frac{1}{\sqrt{1 - r_g/r}},$$

поэтому ускорение растет не как  $(1 - r_g/r)^{-1}$ , а по закону  $(1 - r_g/r)^{1/2}$ . На нашей двумерной поверхности, “изображающей” метрику, при  $r = r_g$  стенки “тарелки” становятся вертикальными (рис. 56).

Задавшись уравнением состояния  $P(\rho)$ , можно интегрировать уравнение равновесия и уравнение непрерывности

$$dm = 4\pi \rho r^2 dr$$

при произвольно выбранном значении в центре  $\rho_c$  и соответствующим  $P_c$ . При любом разумном уравнении состояния мы получим падающее решение, идущее в нуль на краю звезды.

Что будет, если центральная плотность очень велика ( $\rho_c \longrightarrow \infty$ ), не получится ли бесконечная масса?

Возьмем степенное уравнение состояния. Пусть  $n$  — плотность барионов,

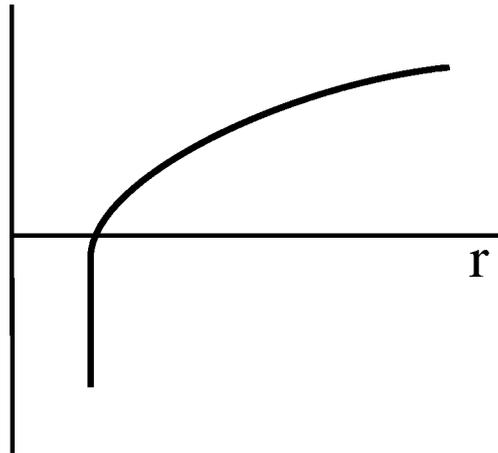


Рис. 56:

$v = 1/n$ ,  $E$  — энергия на барион. В изэнтропическом случае  $dE = -Pdv$ . Поскольку  $E = \rho c^2/n$ ,

$$c^2 d\left(\frac{\rho}{n}\right) = -P d\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{P}{n^2} dn.$$

Отсюда

$$d\rho = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \frac{dn}{n}.$$

Если  $\rho = An^k$ , то

$$P = c^2(k-1)\rho = (k-1)\varepsilon.$$

Здесь мы выписали общее степенное уравнение ( $k = 4/3$  — ультрарелятивистский газ,  $k = 2$  — предельно жесткое уравнение состояния, так как в этом случае скорость звука  $(\partial P/\partial \rho)^{1/2} = c$ ).

Пусть  $\rho = b/r^2$ ,

$$P = c^2(k-1)b/r^2.$$

Тогда

$$\frac{2Gm}{c^2 r} = \text{const} \equiv \alpha = \frac{8\pi b G}{c^2}.$$

Подставляя  $\rho$ ,  $P$  и  $m$  в уравнение равновесия, получим

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{k^2}{4(k-1)},$$

т.е. существует решение, где “тарелка” идет на конус, но для каждого показателя  $k$  конус имеет свой наклон.

Текущая масса  $m \sim r$ , но это справедливо только в области больших плотностей, затем  $\rho$  спадает быстрее, чем  $1/r^2$ , и  $m$  становится конечным. Таким образом, даже при  $\rho_c \rightarrow \infty$  масса остается конечной!

При этом общая масса звезды зависит от того значения плотности  $\rho_1$ , при котором уравнение состояния перестает быть степенным, т.е. где нарушается пропорциональность  $P$  и  $\rho$ .

Аналитическое исследование для степенных уравнений состояния и численные расчеты показывают, что зависимость  $M(\rho_c)$  ведет себя как на рис. 57, т.е. после первого максимума возникают колебания кривой  $M(\rho_c)$ . Анализ показывает, что все решения за первым максимумом неустойчивы. Значение максимальной массы  $M_{\text{max}}$  получается разным при разных уравнениях

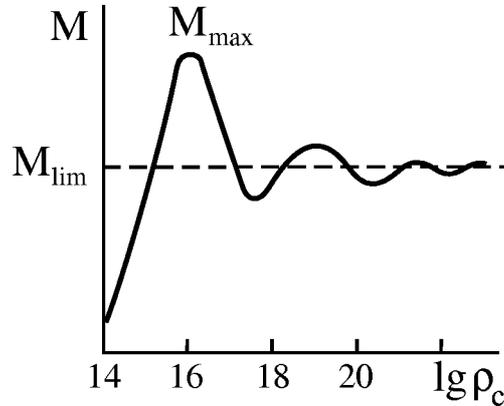


Рис. 57:

состояния. Для газа свободных нейтронов Оппенгеймер и Волков получили  $M_{\max} = 0,7 M_{\odot}$ <sup>14</sup>. Современные расчеты, учитывающие межнуклонные взаимодействия, дают для нейтронных звезд  $M_{\max} = 1,8 \div 2,4 M_{\odot}$ . Еще раз напомним, что масса здесь понимается как источник гравитационного поля для внешнего наблюдателя. Масса того же числа барионов существенно больше  $M_{0 \max} \sim (2,2 \div 3,2) M_{\odot}$ , так что энергия связи отрицательная. Нейтронные звезды большой массы устойчивы относительно разлета на бесконечность, при их образовании выделяется энергия  $\sim 20\%$  начальной энергии покоя, т.е. величина, во много раз превышающая ядерную энергию.

Задача. Известно, что предельно жестком уравнении состояния  $P = \rho c^2 = \text{const} \cdot n^2$  (Я. Б. Зельдович) в ньютоновской теории масса звезды  $M \rightarrow \infty$  при  $P_c \rightarrow \infty$ . С помощью уравнения гидростатики показать, что в ОТО даже в случае несжимаемой жидкости ( $P \rightarrow \infty, n = n_0 = \text{const}$ ) масса остается конечной при  $P_c \rightarrow \infty$ .

#### § 9.4. Общие свойства равновесия релятивистских звезд

Рассмотрим некоторые общие свойства этих решений для равновесных релятивистских звезд. Механическое равновесие соответствует минимуму энергии (т. е. массы) — в общем случае экстремуму при данном количестве барионов и данном распределении энтропии по барионам. В частном случае холодного вещества энтропия везде равна нулю. Решение, устойчивое относительно радиальных перемещений, при этом всегда безразлично относительно конвекций.

1. Пусть дано некоторое распределение энтропии  $S$ . В сферически-симметричном случае  $S$  является функцией текущего числа барионов:

$$F = \int_0^r n \sqrt{-g_{11}} 4\pi r^2 dr, \quad F(R) = N.$$

$F$  — лагранжева координата, поэтому при всех вариациях  $S(F)$ , в отличие от  $S(r)$ , всегда фиксирована. Состояние равновесия соответствует минимуму  $M$  при данном  $S(F)$  при вариациях  $n(F)$  (или  $r(F)$ ). (Вопрос о конвективной устойчивости здесь не ставится.)

2. Пусть звезда изэнтропична:  $S = \text{const}$ . Можно и в этом случае действовать по-прежнему, т. е. находить минимум  $M$  при вариациях  $n(F)$  и фиксированном  $N$ , но теперь проявляется еще одна степень свободы: мы можем переставлять частицы между любыми слоями. При перестановке энергия не должна меняться (в первом порядке). Отсюда сразу получается условие на

<sup>14</sup>При этом учитывается, что нейтроны являются фермионами, и рассматривается холодный вырожденный нейтронный газ. В центральной области нейтроны умеренно релятивистские.

химический потенциал вещества  $\mu$ :

$$\mu e^{\nu/2} = \text{const} \quad (9.7)$$

по звезде. Химпотенциал определяется как приращение энергии системы при добавлении единицы массы покоя:

$$\mu = c^2 \left( \frac{d\rho}{d\rho_0} \right)_S = \frac{\rho c^2 + P}{m_0 n}.$$

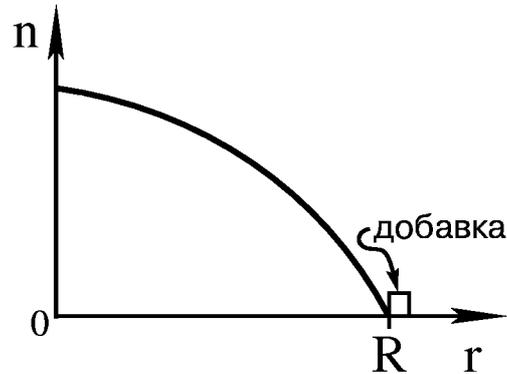
Такой вид выражения для  $\mu$  объясняется тем, что если внутри звезды поместить элемент массы  $\Delta m_0$ , то работа  $\Delta m \sim \Delta m_0 \rho / \rho_0 +$  (работа по раздвиганию окружающего вещества)  $\sim \Delta m_0 P / \rho_0$ . Множитель  $e^{\nu/2}$  играет роль гравитационного потенциала (работа по перенесению барионов из бесконечности равна  $\Delta M_0 e^{\nu(R)/2}$ ). Константу в (9.7) легко найти из условий на поверхности. Там  $P = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\mu = c^2$ ,

$$e^{\frac{\nu(R)}{2}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}.$$

Итак,

$$\mu e^{\nu/2} = c^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right)^{1/2}.$$

Предположим, что мы хотим подсчитать, как изменится масса звезды  $M$  при изменении числа барионов, т. е. при изменении  $M_0$ . Для этого нам нужно сравнить два близких, но разных решения. Эти два решения различаются во всех точках. Но из принципа экстремума ясно, что можно сначала добавить барионы на поверхности (см. рис. 58). При этом, во-первых, изменится масса



$$M_1 = M_0 + \Delta M_0 e^{\frac{\nu(R)}{2}}.$$

Рис. 58:

Во-вторых, это решение не равнолвесно. Поэтому звезда перестроится. Но изменение массы при перестройке около равновесия имеет высший порядок малости, поэтому в первом порядке масса и после перестройки та же (ср. § 1.7, 1.8). В результате имеем

$$\frac{dM}{dM_0} = e^{\frac{\nu(R)}{2}} = \left( 1 - \frac{r_g}{R} \right)^{1/2} < 1.$$

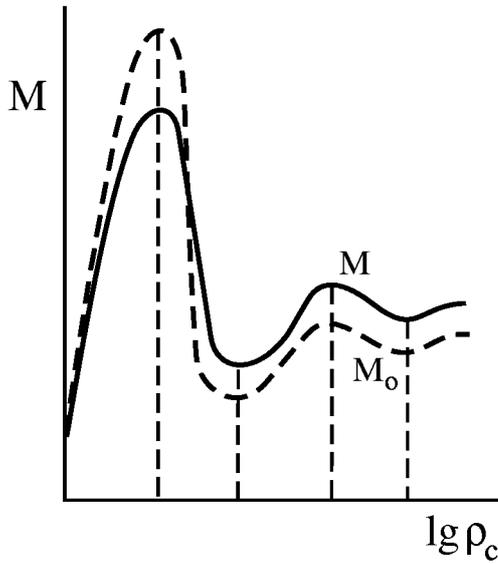


Рис. 59:

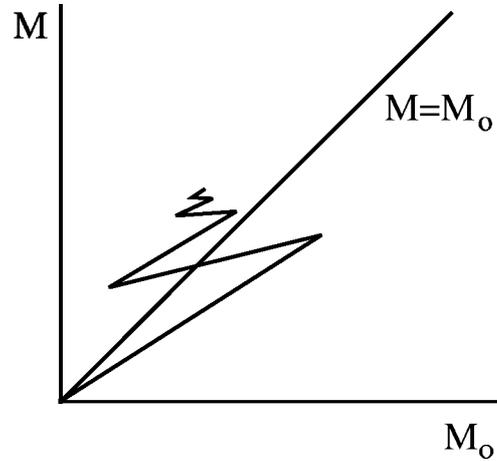


Рис. 60:

Следовательно,

$$\frac{dM}{d\rho_c} = \frac{dM_0}{d\rho_c} e^{\nu/2},$$

т. е. экстремумы кривых  $M(\rho_c)$  и  $M_0(\rho_c)$  совпадают (рис. 59). Интересно, что при некоторой  $\rho_c$  величина  $M$  становится больше  $M_0$ . Как это может получиться, если  $dM/dM_0$  всегда меньше единицы? Все объясняется просто: кривая  $M(M_0)$  не гладкая (рис. 60), поэтому она может пересечь биссектрису  $M = M_0$ .

### § 9.5. Устойчивость релятивистских звезд

Точно также, как и в случае белых карликов, можно показать, что первый максимум на кривой  $M(\rho_c)$  соответствует устойчивости (см. § 7.2). Однако появление минимума  $M(\rho_c)$  здесь уже не означает возврата к устойчивому состоянию. Оказывается, что в  $n$ -ом экстремуме кривой  $M(\rho_c)$  теряет устойчивость  $n$ -я собственная мода радиальных колебаний.

Устойчивыми оказываются только звезды с  $\rho_c < \rho_{c \max}$ . Однако они устойчивы только относительно малых возмущений. Сейчас мы докажем, что относительно достаточно больших возмущений неустойчиво любое равновесие (теорема Зельдовича).

Когда мы говорим, что при некотором  $\rho_{c0}$  равновесие звезды устойчиво, то это значит, что любые неравновесные конфигурации с тем же числом барионов (т. е. с тем же  $M_0$ ) имеют в окрестности нашего решения  $M(\rho_c) > M(\rho_{c0})$ . Покажем, что при больших  $\rho_c$  есть конфигурации с очень малой массой:  $M \ll M(\rho_{c0})$  (при той же  $M_0$ ), т. е. относительно больших возмущений всегда есть неустойчивость.

Напишем выражение для массы звезды, которое, как мы уже говорили, верно и для неравновесных конфигураций:

$$M = \int_0^R 4\pi\rho r^2 dr.$$

Число барионов

$$4\pi \int_0^R n(r) \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g(r)}{r}}}.$$

Считаем, что для барионов справедливо уравнение состояния ультрарелятивистского газа:

$$\rho \sim n^{4/3}.$$

Пусть

$$\rho = A/r^2, \text{ следовательно, } r_g(r)/r = 8\pi AG/c^2.$$

Теперь получим, что

$$M = \text{const} \cdot N^{3/2} A^{1/2} (1 - 8\pi AG/c^2).$$

Видно, что всегда можно выбрать  $A$  так, что  $M$  сколь угодно мало:  $M \rightarrow 0$  при  $\rho_c \rightarrow \infty$ . Но ясно, что при конечных  $\rho_c$  должны быть точки с малым  $M$ , что и доказывает неустойчивость любого состояния.

Оценим величину барьера, который надо преодолеть, чтобы звезда потеряла устойчивость. Будем работать в системе единиц  $\hbar = c = 1$  ( $G \neq 1$ ). В этих единицах размерность длины совпадает с размерностью обратной массы:

$$[px] = [h] = [mcx], \quad [x] = [h/mc] = [1/m].$$

$$[\text{Энергия}] = [E] = [mc^2] = [m] = [1/x], \quad [Gm^2] = [e^2] = [Ex] = [x^0],$$

т. е.  $Gm^2$  в этих единицах безразмерно.

В ультрарелятивистском газе энергия частицы  $E = cp_F = n^{1/3}$ , следовательно, энергия звезды (масса)

$$M = EN = Nn^{1/3},$$

а радиус

$$R \sim (N/n)^{1/3}.$$

Теперь мы хотим, чтобы радиус конфигурации, состоящей из данного числа барионов, равнялся гравитационному радиусу звезды

$$r_g = GM = GN(n)^{1/3} = N^{1/3}n^{-1/3} = R,$$

т. е.

$$n = N^{-1} G^{-3/2}.$$

Чтобы сжать вещество до такой плотности, надо затратить энергию

$$\Delta M = N^{2/3} G^{-1/2} - Nm.$$

Отсюда видно, что при  $N = N_{\text{крит}}(Gm^2)^{-3/2}$  барьера вообще нет. Это критическое число барионов соответствует максимальной равновесной массе, так как она может сколлапсировать без барьера (ср. § 2.4). Для малых  $N < N_{\text{крит}}$  относительная величина барьера растет:

$$\frac{\Delta M}{M_0} = \left( \frac{N_{\text{крит}}}{N} \right)^{1/3} - 1.$$

Пример Земли:  $M_{\oplus} = 3 \cdot 10^{-6} M_{\odot}$ . Для того, чтобы перейти барьер, необходимо затратить энергию около  $100 M_{\oplus} c^2$ .

Однако в действительности эта оценка барьера не имеет смысла. Мы определили величину барьера из соображений подобия, т. е. считали, что звезда сжимается гомологически. А это вовсе не обязательно. Экономнее сжать в центре малую часть и заставить ее сколлапсировать. Потом на образовавшуюся черную дыру упадет все вещество. Беря все меньшее количество вещества, необходимо затрачивать все меньшее количество энергии, чтобы заставить его сколлапсировать.

Хотя для малых масс энергия мала, этот результат нельзя найти методом малых возмущений, так как  $\delta E/E$  становится все больше и больше. Еще раз повторим, что плотность, до которой надо сжать вещество, с уменьшением массы возрастает (ср. § 7.1):

$$\rho = 2 \cdot 10^{16} (M_{\odot}/M)^2 [\text{г}/\text{см}^3].$$

Таким образом, в классической ОТО барьер сводится к нулю. Однако, как обычно считают, квантовые эффекты становятся важными при  $r_g < 10^{-33}$  см, т. е.  $m \sim 10^{-5}$  г. Здесь барьер  $\sim mc^2 = 10^{16}$  эрг =  $10^9$  Дж (это не так мало). Однако трудность здесь не в энергии, а в том, чтобы создать столь малый радиус. Надо различать явления необходимые (т. е. неизбежные) и возможные, по крайней мере, в принципе. Коллапс холодного вещества с массой  $M > 2 M_{\odot}$  необходим, т. е. массивные звезды должны коллапсировать после исчерпания ядерного горючего. Можно сомневаться, сколько их в нашей Галактике:  $10^8$  или  $10^3$ . Но в принципе они должны существовать.

Те маломассивные черные дыры, о которых мы выше говорили, не обязательно существуют, так как они не пролучаются в результате эволюции звезд. Однако они могут в принципе образоваться на самых ранних стадиях расширения Вселенной из первичного вещества и приводить к интересным

космологическим следствиям. Как показал Хокинг, такие черные дыры за счет квантовых процессов испускают тепловое излучение с эффективной длиной волны  $r_g$ . При этом черная дыра, теряя массу, “испаряется”.

Для черных дыр звездного происхождения  $M \sim M_\odot$  эффект испарения ничтожен, увеличение массы в результате процессов аккреции окружающего газа гораздо сильнее. Для малых черных дыр, в особенности первичных, эффект велик, возникает множество интересных вопросов, которые однако, лежат за пределами данной книги.

### § 9.6. Несферические поля тяготения

Наиболее характерное свойство поля Шварцшильда — то, что на некотором расстоянии ( $r < r_g$ ) невозможен покой частиц. Сфера Шварцшильда касательна световому конусу (см. рис. 61), поэтому никакие частицы (в том числе и ультрарелятивистские) не могут выйти из-под радиуса  $r_g$ , т. е. сферу Шварцшильда можно пересечь только снаружи внутрь. Решение Шварцшильда относится к случаю сферически-симметричного распределения вещества. Мы знаем, что идеальных сферически-симметричных объектов не существует. Поэтому возникает естественный вопрос — насколько свойства этого решения устойчивы относительно возмущений сферической симметрии?

Устойчивость шварцшильдовской сингулярности относительно малых возмущений метрики исследовали Редже и Уилер. Они пришли к выводу, что для стационарных возмущений есть полдюжины типов — с особенностью или на поверхности Шварцшильда или на бесконечности. Сразу возникает подозрение, что поверхность Шварцшильда может быть неустойчива.

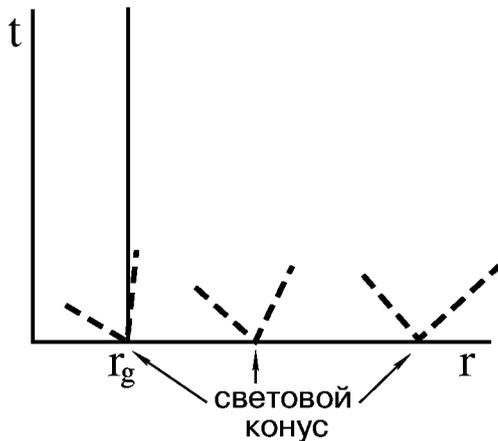


Рис. 61:

Методом Редже–Уилера можно исследовать устойчивость только относительно малых возмущений. Другой путь (позволяющий исследовать большие возмущения) — это получение точных решений уравнений ОТО, в которых снято требование сферической симметрии. Статические решения для осесимметричного распределения масс очень давно получил Вейль. В этом решении источник поля (т. е. некоторое тело) предполагается ограниченным. Поэтому на бесконечности метрика должна переходить в евклидову. Решение Вейля в частном случае совпадает с решением Шварцшильда (строго говоря, его можно перевести

в частном случае совпадает с решением Шварцшильда (строго говоря, его можно перевести

в решение Шварцшильда некоторым преобразованием координат).

А в общем случае существует квадрупольный момент гравитационного поля. В этом решении поверхность  $g_{00} = 0$  обладает совсем другими свойствами, чем сфера Шварцшильда (где  $g_{00} = 1 - r_g/r = 0$  при  $r = r_g$ ). В частности, на поверхности  $g_{00} = 0$  есть истинная особенность пространства-времени. В метрике Шварцшильда инвариант

$$C = R_{iklm}R^{iklm} = 12/r_g^2 \quad \text{при } r = r_g,$$

т. е. истинной особенности нет (хотя  $g_{11} = (1 - r_g/r)^{-1} \rightarrow \infty$ , однако в действительности пространство гладко — есть системы отсчета, где все  $g_{ik}$  — гладкие до центра; это значит просто, что метрика Шварцшильда в обычной записи не годится для описания пространства при  $r < r_g$ ). В решении Вейля  $C$  имеет особенность на поверхности  $g_{00} = 0$ :

$$C = Aq^2 g_{00}^{-1} + 12/r_g^4 + \dots,$$

где  $q$  — квадрупольный момент. Кроме того, в отличие от поля Шварцшильда, свет достигает этой поверхности за конечное время. Это отражает свойства, найденные Редже и Уилером: те возмущения, которые конечны на бесконечности, имеют особенность на поверхности  $g_{00} = 0$ .

Эти выводы не являются свойством специально квадрупольного отклонения от сферической симметрии. Можно показать, что они являются общими для любого статического аксиально-симметричного решения.

Могут ли реальные тела создать поле Вейля во всей области  $g_{00} > 0$ ? Как уже говорилось, на бесконечности, в евклидовой области, поле Вейля соответствует гравитационному полю статического тела с неравным нулю квадрупольным моментом. Однако статическое тело не может дать такое поле вплоть до поверхности  $g_{00} = 0$  уже потому, что тогда обращается в бесконечность гравитационная сила. Это было верно и в поле Шварцшильда, но мы знаем, что его можно реализовать нестатическими телами, движущимися сферически-симметричным образом (коллапсар).

Нельзя ли реализовать решение Вейля нестатическими телами? Оказывается и это невозможно. Можно показать, что при коллапсе в сопутствующей системе отсчета момент перехода границе тела поверхности  $g_{00} = 0$  ничем не выделен: в этот момент на поверхности тела нет истинных особенностей пространства-времени ( $C \neq \infty$ ), а в решении Вейля они есть. Итак, появление истинной особенности в этом решении означает, что такое распределение масс реализовано быть не может. Это связано с тем, что уравнения поля одновременно являются уравнениями движения.

Совершенно так же можно убедиться, что рассмотрение статически малых возмущений решения Шварцшильда, проведенное Редже и Уилером, говорит не о неустойчивости этого решения, а о физической невозможности реализовать такие возмущения. Точнее говоря, статические возмущения поля Шварцшильда можно получить, только поместив сферу Шварцшильда во внешнее

возмущающее поле. В решении Редже-Уилера это соответствует возмущениям конечным на  $r_g$  и расходящимся на бесконечности.

Имеются осесимметричные решения уравнений ОТО в вакууме ( $R_{ik} = 0$ ) и другого типа — это решения Керра. Приведем метрику Керра в виде, данном Боейром и Линдквистом:

$$ds^2 = dt^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dt + a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left( \frac{dr^2}{r^2 - 2mr + a^2} + d\theta^2 \right). \quad (9.8)$$

Мы записали выражение для  $ds^2$  в таких единицах, что  $c = 1$ ,  $G = 1$ . Смысл символов  $m$  и  $a$ , как всегда, находим исследованием предельных случаев. Сразу видно, что при  $a \rightarrow 0$  метрика Керра переходит в решение Шварцшильда, т. е.  $m$  можно интерпретировать как массу тела (в наших единицах  $r_g = 2m$ ). Смысл символа  $a$  выясняется при переходе к бесконечности  $r \rightarrow \infty$ . Очевидно, тогда

$$g_{00} = -g_{11}^{-1} = 1 - r_g/r,$$

так же как для поля Шварцшильда. Но есть и одно существенное отличие:

$$g_{03} = g_{t\varphi} = -\frac{2am}{r} \sin^2 \theta \quad (\text{при } r \rightarrow \infty),$$

т. е. недиагональная компонента метрики  $g_{03}$  отлична от нуля. В ОТО показывают (см., например, “Теорию поля” Ландау и Лившица), что в слабом поле (т. е. при  $r \rightarrow \infty$ ) у вращающегося тела с моментом вращения  $K$  появляется компонента  $g_{03}$  именно такого вида:

$$g_{03} = \frac{2K}{r} \sin^2 \theta.$$

Это позволяет считать, что метрика Керра описывает внешнее поле тела, вращающегося с моментом

$$K = -am.$$

При получении выражения для  $g_{03}$  в случае  $r \rightarrow \infty$  мы по существу вели разложение по степеням  $a/r$ , поэтому это выражение остается справедливым и в сильном поле вплоть до  $r \rightarrow r_g$ , если  $a \rightarrow 0$ . Метрика, записанная в виде (9.8), имеет смысл только при  $0 \leq a \leq m$ , т. е.  $a = m$  соответствует максимально возможному моменту центрального тела (т. е.  $K_{\max} = m^2$  или в обычных единицах  $K_{\max} = Mcr_g/2 = GM^2/c$ ).

Если подсчитать скаляр кривизны  $C$ , то окажется, что метрика имеет особенность только при  $r = 0$ . Это наталкивает на мысль, что метрика Керра в отличие от метрики Вейля может быть реализована реальными телами.

Рассмотрим, во что переходит поверхность Шварцшильда в метрике Керра. В шварцшильдовском случае сфера  $r = r_g$  обладала двумя главными свойствами: на ней  $g_{00} = 0$  и, кроме того, ее касался световой конус. Из-за второго свойства сфера Шварцшильда являлась как бы “клапаном”: никакие частицы не могли пересечь ее изнутри наружу. Этот клапан, т. е. поверхность, касательную световому конусу, называют “горизонтом событий”. В метрике Керра оказывается, что поверхность  $g_{00} = 0$  и горизонт событий не совпадают. Можно найти, что поверхность  $g_{00} = 0$  определяется выражением

$$r_{\text{ш}} = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta},$$

а горизонт событий

$$r_{\text{гор}} = m + \sqrt{m^2 - a^2}.$$

Очевидно, что  $r_{\text{ш}} \geq r_{\text{гор}}$ . Так же как в поле Шварцшильда условие  $g_{00} \geq 0$  ограничивает область, где можно покоиться. Однако в метрике Шварцшильда  $r_{\text{ш}} = r_{\text{гор}}$ . Поэтому частицы с  $r < r_{\text{ш}}$  могли двигаться только к центру. Теперь частицы с  $r < r_{\text{ш}}$ , но  $r > r_{\text{гор}}$  могут двигаться по радиусу в любую сторону, в частности, может быть  $r = \text{const}$  (хотя для них невозможно  $\varphi = \text{const}$ , они обязаны двигаться по  $\varphi$  в ту же сторону, что вращается тело). Область  $r_{\text{гор}} \leq r \leq r_{\text{ш}}$  называют эргосферой.

Как будет меняться метрика в присутствии свободно падающих частиц? Частицы, которые движутся навстречу вращению тела, захватываются раньше. Поэтому, если на центральное тело падают частицы, имеющие изотропное распределение по скоростям на бесконечности, то метрика Керра теряет момент и переходит в метрику Шварцшильда, а облако частиц приобретает момент (так как частицы захватываются выборочно).

Приведем выражение для прицельного параметра гравитационного захвата частицы, движущейся в экваториальной плоскости:

а) при  $v_{\infty} \ll c$ :

$$l = \frac{c}{v_{\infty}} \left[ 1 + \left( 1 \pm \frac{|a|}{m} \right)^{1/2} \right] r_{\text{ш}}$$

(выбор знака зависит от направления момента частицы относительно момента центрального тела). При  $a = 0$ ,  $l = (2c/v_{\infty})r_g$ : б) при  $v_{\infty} = c$  (здесь тоже важен знак момента частицы):

$$l_+ = 4 \cos^3 \left[ \frac{1}{3} (\pi - \arccos |a/m|) \right] r_{\text{ш}},$$

$$l_- = 4 \cos^3 \left[ \frac{1}{3} \arccos |a/m| \right] r_{\text{ш}}.$$

Зависимость параметров захвата в метрике Керра от знака момента интересно проявляется в случае дисковой аккреции. Торн показал, что при  $a \ll m$  свет, излучаемый веществом при аккреции, поглощается черной дырой так, что  $a \rightarrow m$ . Однако, если  $a$  почти равно  $m$ , то момент отбирается. Устойчивое значение  $a = 0,948 m$ .

Пенроуз показал, что есть возможность извлекать энергию из поля Керра. Бросим частицу так, чтобы она в эргосфере ( $r_{\text{гор}} \leq r \leq r_{\text{ш}}$ ) распадалась на две частицы. Пусть одна из новых частиц уйдет под горизонт, а вторая вылетит из под  $r_{\text{ш}}$  (рис. 62). Можно осуществить этот процесс так, что вернувшаяся частица принесет энергии больше, чем отправленная. Ясно, что при этом уменьшается энергия центрального тела.

Возникает задача: сколько энергии можно отнять у черной дыры? Хокинг показал, что есть некоторая инвариантная масса, которую процессами такого рода нельзя уменьшить. В метрике Шварцшильда площадь сферы  $r = r_g$  равна

$$S = 4\pi r_g^2 = 16\pi m^2.$$

В метрике Керра можно подсчитать площадь горизонта событий:

$$S = \int \sqrt{g_{22}g_{33}} d\theta d\varphi = 4\pi(r_{\text{гор}} + a^2) = 4\pi[(m + (m^2 - a^2)^{1/2})^2 + a^2] = 8\pi m[m + (m^2 - a^2)^{1/2}].$$

Теорема Хокинга состоит в том, что  $S$  не может уменьшаться. Это позволяет определить инвариантную массу черной дыры

$$S \equiv 16\pi m_{\text{inv}}^2.$$

Подобные исследования показали, что при очень общих предположениях единственным точным осесимметричным решением с отсутствием сингулярности на горизонте событий является решение Керра. Можно показать, что при коллапсе под  $r_{\text{гор}}$  любого вращающегося тела метрика Керра возникает как предельная при  $t \rightarrow \infty$  для всей области вне  $r_{\text{гор}}$ . Все это позволяет считать, что метрика Керра описывает поле любой вращающейся черной дыры. Отметим, что реальная черная дыра должна иметь момент вращения

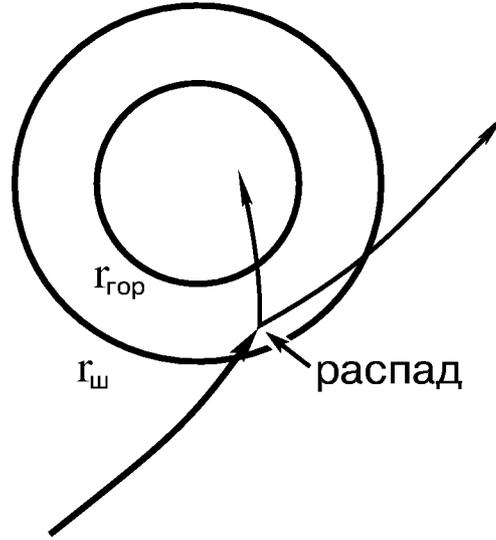


Рис. 62:

$a$  скорее ближе к  $a = t$ , чем к  $a = 0$ . В размерных единицах  $a = t$  соответствует моменту  $K = GM^2/c$ . Для  $M = 1 M_\odot$  это дает значение порядка момента вращения Солнца. Но Солнце — это очень медленно вращающаяся звезда. У массивных звезд удельный момент вращения может быть на два порядка больше.

## Глава 10. НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗВЕЗД

### § 10.1. Пульсары

Первые наблюдательные сведения о пульсарах были получены по их импульсному строго периодическому излучению. Для первого открытого пульсара CP 1919 период следования импульсов составлял 1,33 с. Сейчас известно около 150 пульсаров с периодами от 0,03 с до 3,8 с, причем точность определения периода составляет  $10^{-8}$ – $10^{-9}$ . Первые же наблюдения пульсаров на различных частотах обнаружили сдвиг по частоте времени прихода отдельных импульсов (рис. 63). Строгая периодичность и наблюдаемый сдвиг были настолько впечатляющими, что вначале эти сигналы приписывали деятельности разумных существ (little green men — определение, данное открывателями пульсаров). Но с увеличением числа наблюдаемых пульсаров и особенно с открытием пульсара в Крабовидной туманности, где после грандиозного взрыва Сверхновой 1054 всякая разумная жизнь была похоронена, гипотеза интеллектуальной деятельности была отброшена.

Эффект запаздывания сигналов легко объясняется распространением радиоволн в плазме. При наличии в межзвездной среде свободных электронов групповая скорость распространения становится равной

$$c' = c[1 - (\nu_0/\nu)^2],$$

где  $\nu_0 = (4\pi ne^2/m_e)^{1/2}$  — собственная частота колебаний электронов в плазме (ленгмюровская частота). Полное время запаздывания прихода сигнала для первого пульсара оказалось около 80 с. Как видно, обсуждаемый эффект пропорционален полному числу электронов на луче зрения. Физически запаздывание объясняется интерференцией бегущей и рассеянной волн. Благодаря этому эффекту пульсары позволили уточнить среднюю концентрацию электронов в Галактике:  $n_e \simeq 0,05 - 0,1 \text{ см}^{-3}$ .

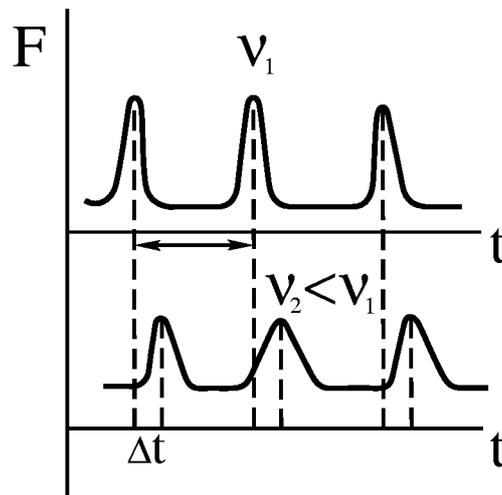


Рис. 63:

Периоды пульсаров малы. Они явно не характерны для больших звезд. сразу были высказаны предположения, что это или белые карлики или вращающиеся нейтронные звезды. Односекундные периоды малы для пульсаций белых карликов на основной частоте (и тем более не подходит вращение белых карликов), поэтому вначале рассчитывались модели белых карликов, колеблющихся на более высоких гармониках. Но после открытия пульсара в Крабе с периодом 0,033 с выжила только гипотеза вращающихся нейтронных звезд.

Наблюдаемый поток радиоизлучения при известном расстоянии до источника и предполагаемых его размерах дает возможность вычислить так называемую яркостную температуру излучения:  $T_b$ . Если принимаемый поток  $F_\nu$ , то при  $h\nu < kT_b$  имеем

$$kT_b = \frac{c^2 F_\nu}{2\pi\nu^2} \left( \frac{R}{r} \right)^2.$$

Эта температура оказалась необычайно высокой: так, для пульсара в Крабе  $T_b = 10^{26} \text{ K}$ , что соответствует энергиям  $10^{22} \text{ эВ}$ .



Рис. 64:

Если взять хаотически движущиеся электроны, то при малом количестве электронов (малой оптической толщине) интенсивность выходящего излучения растет пропорционально толщине. Затем наступает самопоглощение, которое дает предел зависимости интенсивности от температуры (рис. 64). Таким образом, интенсивность ограничена равновесным планковским излучением, зависящим от температуры электронов. Важно, что при этом распределение электронов по энергиям — максвелловское. Если бы наблюдаемое радиоизлучение имело тепловую природу, то должны быть электроны с энергией  $10^{22} \text{ эВ}$ . Такие электроны невозможно удержать никаким магнитным полем, кроме того, должно присутствовать мощное жесткое рентгеновское и гамма излучение. Ясно, что наблюдаемое радиоизлучение имеет нетепловую природу, о чем дополнительно свидетельствует и его степенной спектр. Все это указывает на коллективные механизмы возбуждения радиоволн.

В настоящее время известны два типа окгерентных механизмов излучения, которые могут дать большую яркостную температуру (интенсивность) излучения при умеренном времени жизни излучающих электронов. Первый — лазерный механизм, работающий при инверсной заселенности энергетических уровней системы атомов. Второй — антенный механизм, при котором

излучают не отдельные атомы, а целые группы, так что все атомы группы излучают в фазе и поланя интенсивность пропорциональна квадрату числа частиц в группе. При этом нет полного термодинамического равновесия между макроскопическим и микроскопическим движением частиц.

Распределение частиц в пространстве около пульсара, их плотность в сильной степени определяются электромагнитными полями, которые генерирует вращающаяся замагниченная нейтронная звезда. Поэтому наше рассмотрение пульсаров начнем с изучения этих полей.

## § 10.2. Электродинамика пульсаров

Какого порядка магнитное поле можно ожидать на поверхности пульсара и его окрестности? У обычных звезд наблюдаются поля порядка 1–100 Гс. Нейтронная звезда рождается в результате катастрофического сжатия обычной звезды (вспышки сверхновой) после потери гидростатической устойчивости. Из-за вмороженности поля при сжатии сохраняется магнитный поток через поверхность:

$$\Phi = HS \sim HR^2 = \text{const.}$$

Типичные размеры обычных звезд  $\sim 10^6$  км  $\sim 10^{11}$  см, нейтронных — 10 км. Таким образом, для нейтронных звезд следует ожидать  $H \sim 10^{12}$  Гс. Отметим, что сейчас уже из данных о пульсарах получают такие поля.

Какова конфигурация поля вокруг пульсара? Для статического невращающегося магнитного диполя с моментом  $\mu$  в сферических координатах имеем

$$H_r = \frac{2\mu}{r^3} \cos \theta, \quad H_\theta = \frac{\mu}{r^3} \sin \theta, \quad \mu = \frac{H_s R^3}{2}.$$

Рассмотрим вращающийся диполь с магнитным моментом, перпендикулярным оси вращения. Такой диполь теряет энергию со скоростью

$$Q(\text{эрг/с}) = \frac{2}{3} \frac{(\ddot{\vec{\mu}})^2}{c^3}; \quad \frac{d\vec{\mu}}{dt} = [\vec{\Omega}\vec{\mu}];$$

$$\frac{d^2\vec{\mu}}{dt^2} = -\Omega^2\vec{\mu},$$

где  $\Omega$  — циклическая частота,  $\Omega = 2\pi\nu = 2\pi/P$ ,  $P$  — период вращения. Подставляя  $H \sim 10^{12}$  Гс, получим

$$Q \sim 3 \cdot 10^{31} P^{-4}.$$

То излучение, интенсивность которого сейчас была вычислена, не является излучением, которое мы наблюдаем. Такие волны не проходят через звездную плазму, так как  $\nu \ll \nu_0 \sim 10^4$  с<sup>-1</sup>. Наши формулы дают хорошую оценку энергетических потерь пульсара, но нужно еще подумать о том, как это излучение перерабатывается в радио, оптику и рентген.

Введем характерный радиус светового цилиндра, т. е. расстояние от пульсара, на котором при твердотельном вращении достигается скорость света  $c$ :

$$v = r\Omega = 2\pi r/P = c;$$

$$r_l = cP/2\pi = c/\Omega.$$

При  $P = 1$  с,  $r_l = 5 \cdot 10^9$  см. Величина  $r_l$  называется световым радиусом. В ближайшей зоне  $r < r_l$  существует статическое дипольное поле. На больших расстояниях имеем поле распространяющихся волн:

$$|E| = |H| = H_l r_l / r,$$

с потоком энергии порядка  $q = (E^2 + H^2)c/8\pi$ . Сшивая поля на световом радиусе  $r = r_l$ , можно получить формулу для потерь энергии  $Q$  (получите эту формулу). Вблизи в первом приближении  $E = 0$ , но в точном расчете наряду с магнитным полем есть также и электрическое поле, величину которого можно оценить из условий равенства момента электромагнитной силы на различных расстояниях:

$$H \cdot E' r = \text{const.}$$

Ясно, что при поле существенно меньше магнитного:

$$E' \sim Hr/r_l \quad (\text{при } r < r_l).$$

Кроме того, есть еще и дополнительное магнитное поле  $H'$ . Дипольное поле является бессильным, поэтому при расчете сил нужно добавлять еще  $H'$ .

Получим теперь закон убывания частоты вращения пульсара. Запас энергии пульсара содержится в энергии вращения:

$$E_k = \frac{1}{2} I \Omega^2.$$

Можно считать, что момент инерции звезды  $I$  не меняется со временем. Тогда

$$E_k = 2\pi^2 I \nu \frac{d\nu}{dt} = -\frac{2\mu^2}{3c^3} (2\pi)^4 \nu^4,$$

или

$$\frac{1}{\nu^3} \frac{d\nu}{dt} = -A.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu_0^2} \right) = At,$$

$$\nu^2 = \frac{1}{2At + 1/\nu_0^2},$$

где  $\nu_0$  — начальная частота вращения. Если бы закон был экспоненциальный  $d\nu/dt = -A\nu$ , то  $\nu = \nu_0 \exp(-At)$  и всегда остается зависимость от  $\nu_0$ . В нашем случае закон убывания нелинейный, и, как видно, достаточно быстро можно пренебречь  $\nu_0$ :

$$\nu^2 \simeq 1/(2At).$$

Эта формула дает возможность проверить теорию. Для пульсара в Крабе известен его возраст  $t$ , кроме того, мы знаем величину  $A \sim \mu^2/I$ . При  $I \sim 10^{45}$  г·см<sup>2</sup> получаем  $P = 1,4 \cdot 10^{-2}$  с. В действительности же наблюдается  $3 \cdot 10^{-2}$  с, т. е. согласие неплохое. Для пульсаров можно очень точно мерить не только частоту (период), но и скорость, с которой пульсар замедляется:

$$\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dt} = -\frac{1}{2t}.$$

Для Краба

$$\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{2 \cdot 1250 \text{ лет}}.$$

Истинный возраст пульсара, согласно китайским летописям, около 1000 лет (сверхновая на месте Крабовидной туманности вспыхнула в 1054 г.), так что согласие неплохое.

Благодаря большой точности удастся наблюдать многие детали. Одним из интересных феноменов являются быстрые скачки (срывы) периодов вращения (рис. 65), которые наблюдаются у двух пульсаров — в Крабе и в Парусе. Сначала, после срыва, пульсар вращается быстрее, однако за время порядка месяца он опять выходит на прежний темп замедления. Эти явления связывают с наличием в нейтронной звезде твердой кристаллической и жидкой фаз. Для полностью жидкого пульсара при замедлении вращения его фигура постепенно подстраивается под новое равновесное состояние. В кристалле перестройка происходит лишь тогда, когда постепенно растущие при замедлении натяжения превосходят предел прочности. Перестройка происходит практически мгновенно (“звездотрясение”), и момент инерции кристалла меняется скачком. Далее, из-за вязкости между кристаллической и жидкой фазами происходит выравнивание их угловых скоростей. Следует помнить, что нейтронная жидкость может находиться в сверхтекучем состоянии, и вязкость там не совсем обычная.

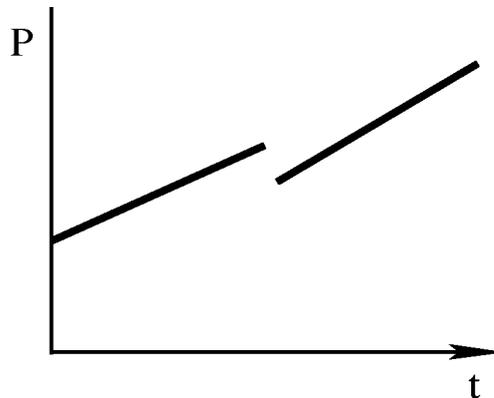


Рис. 65:

Дальше нас будут интересовать явления, происходящие снаружи пульсара. Как будут взаимодействовать низкочастотные магнитодипольные электромагнитные поля с окружающей плазмой? Электромагнитные волны, частота которых меньше частоты ленгмюровских колебаний плазмы, будут отражаться от плазмы. Электронам при этом передается импульс и плазма выталкивается.

Рассмотрим, что происходит, когда частота мала и можно изучать движение каждого электрона в отдельности, независимо от других. Уравнение движения электрона в поле плоской электрической волны запишется в виде

$$m dv/dt = eE = eE_0 \cos \omega t.$$

Откуда скорость

$$v = \frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t.$$

Таким образом, амплитуда  $v$  зависит от  $\omega$ . При малой частоте поле долго тянет электрон в одну сторону, и амплитуда растет. Очевидно, движение электрона становится релятивистским при

$$eE_0 = m\omega c.$$

Теперь вместо  $m dv/dt$  нужно писать  $dp/dt$ . Кроме того, нельзя пренебрегать магнитным полем. Найдем границу области релятивизма. Перепишем условие в виде

$$\frac{eE_0 c}{\omega m c^2} = \frac{eE_0 \lambda / 2\pi}{m c^2} = 1.$$

Отметим, что эта комбинация оказывается лоренц-инвариантной. При движении в другой системе отсчета  $\lambda$  и  $E$  изменяются так, что их произведение  $E_0 \lambda$  оказывается постоянным (это видно для плоской волны). Для пульсара с периодом вращения  $P = 1$  с  $\lambda = 3 \cdot 10^{10}$  см и  $eE_0 = 10^{-4}$  эВ/см, т. е.  $E_0 = 10^{-4}$  В/см =  $3 \cdot 10^{-7}$  СГСЭ, или, что то же,  $H_l = 10^{12}$  Гс, а на световом цилиндре  $H_l \simeq 10^5$  Гс. Таким образом, далеко за световым цилиндром волна сильная.

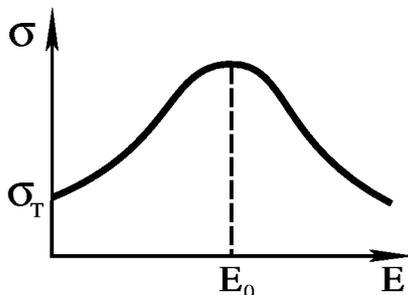


Рис. 66: Результаты таковы, что в основном релятивистский

Задача легко решается для электромагнитной волны, поляризованной по кругу, когда движение электрона круговое. Следует заметить, что релятивистская задача нелинейна и не сводится к сумме двух плоскополяризованных решений. Общая методика решения следующая: учитывается реакция излучения и пишется, что излучение равно работе электромагнитных сил. Задача об излучении релятивистских электронов, движущихся по кругу, решена в теории синхротронного излучения.

электрон излучает в плоскости вращения на частоте  $\nu_{\max} = \nu_{\text{вр}}\gamma^2$ , где  $\gamma = E/m_0c^2$  — фактор Лоренца. Сечение рассеяния сначала растет по закону  $\sigma = \sigma_T[1 + (E/E_0)^2]$ , а затем падает (рис. 66). Такое поведение сечения обусловлено изменением работы сил электрического поля волны, которая зависит от относительной ориентации векторов скорости  $\vec{v}$  и электрического поля  $\vec{E}$ . Подобную задачу можно также решить при наличии продольного магнитного поля.

### § 10.3. Магнитосфера пульсара

Итак, рассматривая магнитодипольное излучение наклонного ротатора, мы показали, что такой подход дает правильную энергетику, закон затухания вращения, приток энергии в окружающую туманность, но все это еще далеко от наблюдаемой картины пульсара. Во-первых, низкочастотное излучение не проходит через межзвездную среду. Но самое главное — магнитный диполь не может вращаться в вакууме не из-за окружающей среды (ее он выталкивает), а за счет того, что индуцированные электрические поля вытягивают с поверхности звезды электрически заряженные частицы, которые затем ускоряются и инжектируются в окружающее пространство.

Рассмотрим вращающийся магнитный диполь (шарик) с осевой симметрией:  $\vec{\mu} \parallel \vec{\Omega}$  (рис. 67). Для дипольного магнитного поля компоненты поля в сферических координатах имеет вид:

$$H_r = \frac{2\mu}{r^3} \cos \theta, \quad H_\theta = \frac{\mu}{r^3} \sin \theta. \quad (10.1)$$

Такое поле, естественно, бессиповое:  $\text{rot } H = 0$ . Спрашивается, что будет, если вращающийся шарик металлический. Нас инетресует внутренность шарика. Поверхность шарика — это контур, движущийся в магнитном поле со скоростью  $v_\varphi = \Omega R \sin \theta$  ( $v_r = v_\theta = 0$ ). В таком случае появляется лоренцева сила  $\sim \vec{v} \times \vec{H}$ , действующая на электрические заряды. Это приводит к разделению зарядов и к появлению дополнительного электрического поля. Заряды

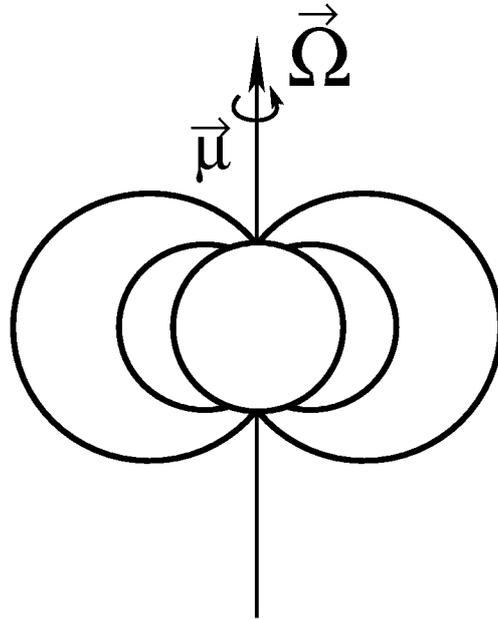


Рис. 67:

перестанут двигаться по поверхности лишь тогда, когда во вращающейся системе координат суммарная сила, действующая на заряды, окажется равной нулю, т. е. потребуем, чтобы равнялась нулю э.д.с. в этой системе координат.

Чтобы найти окончательное распределение зарядов, определим поле во внешнем пространстве, при котором на поверхности

$$E_{\theta} = (v_{\varphi}/c)H_r + E_{\theta \text{ внешн}} = 0.$$

Пока считаем, что снаружи вакуум и поле  $H$  дипольное. Тогда (1) дает

$$E_{\theta \text{ внешн}} = -\frac{2\mu\Omega}{R^2} \sin \theta \cos \theta.$$

Характерно, что в это выражение вошло произведение  $\sin \theta \times \cos \theta$ , т. е. квадрат функции  $\theta$ . Таким образом, мы имеем дело со второй гармоникой, т. е. индуцированное электрическое поле должно иметь квадрупольный характер:

$$E_{\theta} = \frac{6g}{r^4} \cos \theta \sin \theta, \quad E_r = \frac{9g}{r^4} \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right),$$

где квадрупольный момент

$$q = \frac{1}{3} \frac{\mu R^2 \Omega}{c} = \frac{1}{3} \frac{\mu R^2}{r_l}.$$

Рассмотренное явление называется униполярной индукцией. Вольтметр, присоединенный скользящими контактами к полюсу и экватору (рис. 68), покажет разность потенциалов

$$\varphi \sim H \omega/c.$$

Радиальная компонента индуцированного электрического поля на поверхности не скомпенсирована, что приводит к появлению поверхностного заряда. Заметим, что, добавляя электрический заряд  $Q$ , можно менять полный заряд шарика и радиальное поле во внешнем пространстве  $E'_r \sim Q/r$ . Но разность зарядов в двух точках для поверхности шарика остается всегда постоянной. В лаборатории можно достичь полей  $H \sim 20000$  Гс. Для шарика с радиусом  $R = 1$  см максимальная скорость вращения на поверхности  $v = 3$  км/с соответствует теоретическому пределу прочности. В этом случае максимально возможное электрическое поле

$$E \simeq H (v/c) = 60 \text{ В/см.}$$

Такая величина поля в лаборатории не вызовет эмиссии электронов из холодного металла, и приближение униполярной индукции является хорошим приближением.

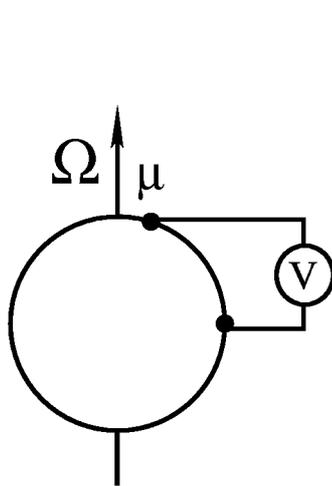


Рис. 68:

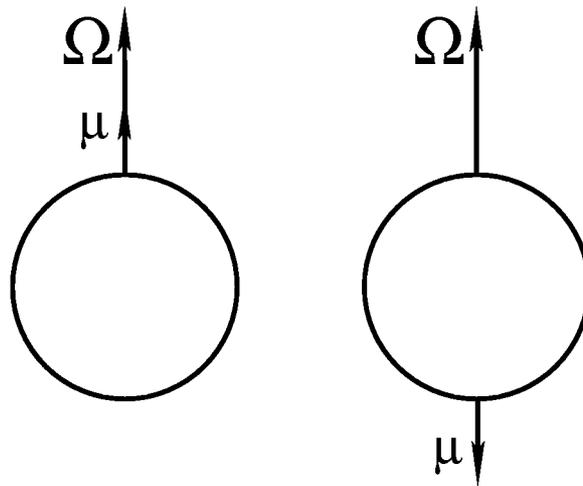


Рис. 69:

Иная ситуация для замагниченной нейтронной звезды:

$$H \simeq 10^{12} \text{ Гс}, \quad P = 0,03 \text{ с}^{-1}, \quad R = 10^6 \text{ см.}$$

Подставляя эти значения, получим  $E = 0,6 \cdot 10^{10} \text{ СГСЭ} = 2 \cdot 10^{12} \text{ В/см!}$  Такое поле мгновенно ионизует вещество (в атоме водорода  $E = 13 \text{ В}/10^{-8} \text{ см} = 10^9 \text{ В/см}$ ). И самое главное, электрическая сила  $eE$  в сотни раз и более превышает силу притяжения протонов к звезде. Таким образом, должна происходить инжекция частиц. Укажем на две различные ситуации: в зависимости от отношения направлений магнитного поля  $\vec{\mu}$  и угловой скорости  $\vec{\Omega}$  с полюсов могут вырываться либо протоны, либо электроны (рис. 69). Знаки  $\vec{\mu}$  или  $\vec{\Omega}$  в отдельности не имеют физического смысла, так как зависят от того, в системе какой ориентации мы наблюдаем: правой или левой ( $\vec{\mu}$  и  $\vec{\Omega}$  — псевдовекторы). Однако произведение  $(\vec{\mu}\vec{\Omega})$  уже имеет инвариантный смысл. Магнитный момент  $\vec{\mu}$  создается токами (движением электронов). Вещество звезды при вращении может двигаться в ту же сторону, что и электроны, или в другую. Интересно было бы выяснить, как должны различаться в наблюдениях эти два типа пульсаров.

Максимально возможная энергия частиц, ускоряемых электрическим полем пульсара, велика. Для Краба  $\varphi \sim ER \sim 10^{18} \text{ эВ}$ , т. е. могут получаться космические лучи, в более молодых пульсарах можно ожидать энергий порядка  $10^{21} \text{ эВ}$ .

Появление электрических зарядов вокруг пульсара приводит к появлению дополнительных полей, и в общем случае должна решаться самосогласованная задача с учетом этих полей. Пока разработана лишь приближенная модель Юиана-Голдрейха, в которой предполагается, что вокруг пульсара существует вращающаяся твердотельно магнитосфера с электрическим по-

лем, удовлетворяющим уравнению

$$\vec{E} = (\vec{v} \times \vec{H})/c.$$

Плотность заряда найдем из уравнения

$$\rho = \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{2H_\theta\Omega}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2} \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) r^{-3}.$$

Таким образом, имеются зоны (конуса) с различными знаками зарядов (уравнение разделяющей поверхности  $\cos \theta = \pm 1/3$ ). Для дипольного поля плотность расходится на световом цилиндре. На самом деле вблизи светового цилиндра вращающиеся заряды искажают исходное магнитное поле:

$$\operatorname{rot} H = j_\varphi = \rho v_\varphi.$$

Действуя последовательными приближениями, можно показать, что добавки в поле по порядку величины

$$H_1 \simeq H_0(r/r_l)^2.$$

Есть еще одно важное ограничение на описываемую картину. Для силовых полей, не выходящих за световой цилиндр, возможно статическое равновесие. Однако вдоль силовых линий, пересекающих цилиндр, такое равновесие невозможно — частицы должны уходить на бесконечность. Звезда с таким истечением будет терять энергии примерно столько же, сколько диполь в вакууме, но ясно, что механизм потерь здесь совсем иной.

К сожалению, пока очень мало разработаны картины распределения электромагнитных полей с учетом истечения для наклонного диполя. Имеется несколько моделей, предполагающих, что вещество накапливается на замкнутых силовых линиях вблизи светового цилиндра и вращается со скоростью порядка 0,8–0,9 с. В такой картине возможно направленное импульсное излучение сгустков плазмы, направленность которого обусловлена абберацией света, аналогично тому как это происходит при вращении электрона в магнитном поле.

#### § 10.4. Аккреция на релятивистские звезды

В начале 70-х годов интенсивные заатмосферные исследования в рентгеновском диапазоне электромагнитного спектра, которые проводились с помощью ракет и специализированных спутников, привели к открытию нового класса астрономических объектов — компактных рентгеновских источников в составе тесных двойных систем. Среди них встречаются как рентгеновские пульсары, т. е. источники, излучение которых периодически промодулировано во времени, так и источники, для которых характерны хаотические вариации наблюдаемого потока излучения. Анализ динамики двойных систем,

включающих рентгеновские источники, показал, что их массы типично звездные. Компактность рентгеновских источников дает основание считать, что они представляют собой нейтронные звезды и, возможно в некоторых случаях, черные дыры. Для большинства отождествленных оптических компонентов этих систем установлено, что они интенсивно теряют вещество со своей поверхности. Очевидным источником энергии для рентгеновских источников в таких условиях является аккреция — физический процесс захвата и падения вещества в гравитационном поле тяготеющей массы, сопровождающееся выделением гравитационной энергии.

Свободное падение холодного вещества на черную дыру происходит без выделения энергии, так как у черной дыры отсутствует поверхность, ударяясь о которую падающее вещество могло бы остановиться и выделить энергию. Однако в двойной системе вещество, истекающее с поверхности нормальной звезды и падающее на черную дыру, обладает относительно последней моментом вращения, препятствующим свободному падению вещества. Наиболее вероятной является картина аккреции с образованием диска вокруг черной дыры. Вещество в диске в первом приближении вращается по круговым кеплеровским орбитам. Благодаря трению между соседними слоями вещество каждого слоя отдает свой момент вращения внешним по отношению к себе слоям и приближается к черной дыре. При этом выделяется гравитационная энергия, часть которой идет на увеличение кинетической энергии вращения, а другая часть, превращаясь в теплоту, излучается с поверхности диска. Внутренняя граница диска  $R_i$  совпадает с последней устойчивой круговой орбитой. В метрике Шварцшильда  $R_i = 3R_g$ , в метрике Керра с максимально возможным моментом вращения черной дыры  $R_i = R_g/2$ . Максимум излучаемого потока энергии достигается во внутренних областях диска на расстояниях  $(10-20) R_g$  от черной дыры, где выделяется максимальная гравитационная энергия. Общее энерговыделение, а также вид спектрального распределения выходящего излучения прежде всего определяется скоростью аккреции, т. е. темпом поступления вещества в диск. Характерным параметром является критический поток вещества  $\dot{M}_c$ , при котором полная светимость диска  $L = \eta \dot{M}_c^2$  равна предельной эддингтоновской светимости  $L_c = 10^{38} (M/M_\odot)$  эрг/с, где  $\eta$  — эффективность переработки гравитационной энергии (для невращающейся черной дыры, которая описывается метрикой Шварцшильда,  $\eta=0,057$ , в метрике Керра с максимально возможным моментом вращения  $\eta = 0,42$ ).

При существенно докритических потоках  $\dot{M} \approx 10^{-12}-10^{-10} M_\odot/\text{год}$  светимость диска  $L \simeq 10^{34}-10^{36}$  эрг/с. Максимальная температура диска в области максимального энерговыделения  $T_{ef} \simeq 3 \cdot 10^5 - 10^6$  К, и энергия излучается главным образом в недоступных для прямых наблюдений ультрафиолетовом и мягком рентгеновском диапазонах. С увеличением аккреции линейно растет светимость, поднимается эффективная температура излучения, и при

потоках  $\dot{M} \simeq 10^{-9}-10^{-8} M_{\odot}/\text{год}$  черна ядыра оказывається мощной рентгеновской звездой со светимостью  $L \simeq 10^{37}-10^{39}$  эрг/с и эффективной температурой излучения  $T_{ef} \simeq 10^7-10^8$  К. Если же поток вещества, втекающего в диск, превышает критическое значение, то из внутренних областей диск под действием давления излучения начинается отток газа перпендикулярно поверхности диска. Рентгеновское излучение центральных областей диска поглощается в оттекающем газеи перерабатывается в более мягкие кванты, и при  $\dot{M} > \dot{M}_c$  черна дыра будет наблюдаться как яркая оптическая звезда, светимость которой близка к  $L_c$ .

Среди известных двойных систем, содержащих рентгеновские источники, наиболее интересным является источник Лебедь X-1. По имеющимся данным масса рентгеновского источника с этой системе превышает  $6M_{\odot}$ , т. е. в несколько раз больше критической массы нейтронной звезды. Предполагается, что этот объект — черна дыра.

Аккреция на нейтронную звезду сопровождается выделением энергии, равной гравитационному потенциалу  $GM/R_0$  на поверхности звезды. Наблюдаемые проявления в двойных системах аккрецирующих нейтронных звезд без магнитных полей практически не отличается от описанной выше картины дисковой аккреции на черные дыры. Однако аккреция на вращающуюся нейтронную звезду с магнитным полем, направление которого не совпадает с осью вращения, может привести к феномену рентгеновского пульсара. Картина дисковой аккреции при наличии у звезды мощного магнитного поля нарушается на расстоянии, где плотность энергии магнитного поля сравнивается с плотностью кинетической энергии аккрецирующего потока вещества. На более близких от нейтронной звезды расстояниях магнитное поле канализирует аккрецию, направляя падающее вещество в область магнитных полюсов. Падение газа на поверхность звезды приводит к появлению ударной волны и излучению энергии компактными зонами вблизи полюсов. Если магнитная ось нейтронной звезды не совпадает с ее осью вращения, то это приведет к пульсациям наблюдаемого излучения. Такая звезда наблюдается как пульсар. Падающее в область магнитных полюсов вещество приносит с собой вращательный момент, который оно имело на внутренней границе диска. Результатом является увеличение момента вращения звезды и ускорения ее вращения. Этот эффект наблюдается у рентгеновских пульсаров в двойных звездных системах. Напомним, что для одиночных радиопулсаров источником энергии является кинетическая энергия вращения нейтронной звезды, поэтому у таких пульсаров наблюдается замедление вращения. Это указывает на принципиальное отличие природы рентгеновских пульсаров в двойных системах от одиночных пульсаров и является сильным аргументом в пользу аккреции как определяющего источника энергии излучения рентгеновских источников в двойных системах.