

Д. И. Н А Г И Р Н Е Р

Электродинамика для математиков

Лекции по курсу “Физика”

для студентов 4 курса специальности «математика»

математико-механического факультета СПбГУ

2009

Раздел 1. Классическая электродинамика

Глава 1. Уравнения Максвелла

§ 1. Уравнения Максвелла для свободного пространства

1. *Заряды и токи в свободном пространстве.* Свободное или, как иногда говорят, пустое пространство означает, что в пространстве нет распределенного вещества, то есть твердых тел, жидкостей или газов (плазмы), а имеются только отдельные заряженные тела (заряды), которые можно считать точечными и которые движутся некоторым известным образом за счет неэлектромагнитных сил. Плотность каждого такого заряда задается дельта-функцией:

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad (1)$$

где q — величина заряда. Она всегда пропорциональна заряду электрона, но обычно число отрицательных электронов или положительных протонов очень велико.

Движение заряда порождает ток. Так как заряд точечный, то плотность тока есть просто произведение плотности заряда на его скорость:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \vec{v}(t). \quad (2)$$

Если зарядов несколько, то плотность заряда и плотность тока будут представлять собой суммы по всем имеющимся зарядам. Если распределение зарядов можно считать непрерывным, то надо взять интеграл.

Легко проверить, что приведенные плотности заряда и тока удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (3)$$

Это соотношение называется уравнением неразрывности (или непрерывности). Оно включает в себя закон сохранения заряда, так как если проинтегрировать его по пространственному объему \mathcal{V} , содержащему заряд, то получится

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad q = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t) d^3 r, \quad (4)$$

ибо интеграл от дивергенции преобразуется в поверхностный, а зарядов на поверхности достаточно большого объема нет. Но уравнение неразрывности утверждает несколько больше, чем просто сохранение заряда q . Из него следует, что если в одном месте количество заряда (распределенного или точечного) убывает, а в другом месте возрастает, то так может происходить только путем перетекания зарядов.

Заряды и токи порождают электромагнитное поле, которое характеризуется двумя напряженностями. Изложение ведется по учебникам [1, 3].

2. *Характеристики электромагнитного поля.* Электромагнитное поле в свободном пространстве описывается двумя векторами: напряженности электрического поля \vec{E} и напряженности магнитного поля \vec{H} . Они определяются следующим образом.

Если в стационарное электрическое поле (не изменяющееся со временем) помещен пробный заряд величиной q_0 , то на него в таком поле согласно опытным данным действует некоторая сила \vec{F}_e . Если силу разделить на величину заряда, то получится величина, называемая напряженностью электрического поля, то есть

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}, \quad (5)$$

так что напряженность — это сила, действующая на единичный заряд.

В частном случае для поля точечного заряда q Ш.Кулоном (1785) было установлено, что сила, действующая на пробный заряд q_0 , при определенном выборе единиц измерения (система CGSE) может быть записана в виде, аналогичном закону всемирного тяготения Ньютона:

$$\vec{F}_e = \frac{q_0 q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{E} = \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (6)$$

где \vec{r} — радиус-вектор, соединяющий заряды, а $r = |\vec{r}|$ — расстояние между зарядами. Если $qq_0 < 0$, то есть заряды разных знаков, то они притягиваются, если знаки одинаковые, $qq_0 > 0$, — отталкиваются.

Единичными два равных заряда называются, если каждый из них на расстоянии в 1 см действует на другой с силой в 1 дину $\text{дин} = \text{г}\cdot\text{см}/\text{с}^2$. Из приведенной записи закона Кулона вытекает, что электрический заряд в системе CGSE имеет размерность (размерность величины выражается обозначением той же величины, заключенном в

квадратные скобки) $[q] = [r] \cdot [F]^{1/2} = c\mu(\epsilon \cdot c\mu/c^2)^{1/2} = \epsilon^{1/2} c\mu^{3/2} c^{-1}$. Заряд электрона отрицателен и по величине равен $4.8 \cdot 10^{-10}$ таких единиц.

Аналогично, если заряд q_0 движется в стационарном магнитном поле со скоростью \vec{v} , то на него поле также оказывает действие с силой \vec{F}_m , причем, и это тоже установлено на опыте, сила перпендикулярна скорости заряда и полю. Силу можно представить формулой

$$\vec{F}_m = \frac{q_0}{c} \vec{v} \times \vec{H}, \quad (7)$$

где здесь и далее $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с — скорость света в пустом пространстве.

Из формул (5) и (7) видно, что обе напряженности имеют одинаковую размерность (и таковы единичные напряженности в принятой системе), а именно, $[\vec{E}] = [\vec{H}] = \epsilon^{1/2} c\mu^{-1/2} c^{-1}$.

Если имеются и электрическое и магнитное поля, то на движущийся заряд действуют обе силы, которые объединяются и называются силой Лоренца:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} + \frac{q_0}{c} \vec{v} \times \vec{H}. \quad (8)$$

Если заряды изменяются, текут, то изменяются и токи, а тогда изменяются и напряженности. Законы их изменения описываются уравнениями Максвелла.

3. Уравнения Максвелла. Напряженности поля подчиняются следующим уравнениям.

$$\text{I. } \operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (9)$$

$$\text{II. } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (10)$$

$$\text{III. } \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (11)$$

$$\text{IV. } \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (12)$$

4. Физический смысл уравнений. Начнем с уравнения III. Проинтегрируем это уравнение по некоторому объему \mathcal{V} , ограниченному поверхностью Σ :

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} d^3r = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} d^2\Sigma = 4\pi \int_{\mathcal{V}} \rho d^3r = 4\pi Q. \quad (13)$$

Здесь \vec{n} — орт внешней нормали к поверхности, а Q — полный заряд, находящийся внутри объема \mathcal{V} . Это теорема Гаусса (1840).

Пусть имеется только один заряд. Если в качестве объема взят шар с центром в заряде, то поверхностный интеграл по сфере оказывается равен величине этого заряда и не зависит и от радиуса сферы, то есть $Q = q$. Поскольку площадь поверхности сферы равна $4\pi R^2$, то напряженность электрического поля заряда равна

$$\vec{E} = \frac{q}{R^2} \frac{\vec{R}}{R}. \quad (14)$$

Это равенство выражает закон Кулона, который является следствием уравнения III и его обоснованием.

Поскольку в правой части уравнения I стоит нуль, то это уравнение выражает тот простой факт, что напряженность магнитного поля есть вектор соленоидальный, то есть не имеет ни источников, ни стоков. Источниками электрического поля являются заряды, но магнитных зарядов нет. У магнитов всегда два полюса. Существование монополей, то есть однополюсных частиц, рассматривалось в теории, но в природе они не обнаружены.

Обратимся к уравнениям с роторами. Проинтегрируем уравнение II по некоторой поверхности Σ , натянутой на замкнутую кривую \mathcal{L} , и применим формулу Стокса:

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} d^2\Sigma = \int_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot \vec{l} ds = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int_{\Sigma} \vec{H} \cdot \vec{n} d^2\Sigma. \quad (15)$$

Здесь \vec{l} — орт касательной к кривой, \vec{n} — нормаль к поверхности, направление которой согласовано с направлением касательной, Φ — магнитный поток через поверхность. Соотношение (15) является обобщением закона Фарадея (1831): сумма электродвижущих сил в контуре равна изменению потока напряженности магнитного поля, протекающего через контур. Обобщение заключается в том, что электрическое поле возникает и тогда, когда никакого реального контура нет.

Отбросим на время первое слагаемое в последней сумме уравнения IV (оно обычно мало по сравнению со вторым) и проинтегрируем опять по поверхности Σ с границей \mathcal{L} :

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{H} \vec{n} d^2 \Sigma = \oint_{\mathcal{L}} \vec{H} \vec{l} ds = \frac{4\pi}{c} \int_{\Sigma} \vec{j} \vec{n} d^2 \Sigma. \quad (16)$$

Если ток постоянен и течет вдоль прямой, то напряженность \vec{H} также постоянна и, так как она должна быть ортогональна току и радиусу-вектору точки, то по симметрии она будет направлена по касательным к окружностям в плоскости, перпендикулярной указанной прямой, с центрами на ней. Тогда выбрав в качестве прямой ось z , а в качестве поверхности круг с центром в начале координат и радиусом R , найдем, что $s = R\phi$, $\vec{l} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$, $\vec{n} = \vec{e}_z = (0, 0, 1)$,

$$\vec{j}(\vec{r}) = I\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z, \quad \vec{H}(\vec{r}) = H\vec{l}, \quad H = \frac{2I}{cR}. \quad (17)$$

Это равенство выражает закон Эрстеда (1826).

В более общем случае постоянный ток, текущий в некотором объеме \mathcal{V} , создает магнитное поле напряженностью

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \int_{\mathcal{V}} \vec{j}(\vec{r}') \frac{d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'. \quad (18)$$

Это соотношение является формулировкой закона Био—Савара (1820).

5. *Об уравнениях Максвелла.* Итак, четыре уравнения Максвелла, если отвлечься от отброшенного слагаемого в последнем уравнении, равносильны законам, которые были известны до Максвелла из экспериментов. Максвелл сделал две вещи: он объединил уравнения, выражающие эти законы, в систему, оторвавшись от условий экспериментов, и добавил одно слагаемое. Последнее было сделано, исходя из формальных соображений, причем физическая интерпретация добавленного слагаемого, данная Максвеллом, оказалась несостоятельной, так как он исходил из теории эфира, впоследствии отвергнутой.

При введении упомянутого слагаемого Максвелл предположил симметрию в свойствах двух полей: изменение потока одного должно порождать другое. Кроме того, отсутствие такого слагаемого нарушило бы приведенное выше соотношение (3). Это соотношение следует из второй пары уравнений. Если к уравнению IV применить операцию div , а затем воспользоваться уравнением III, то получится

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{div} \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right), \quad (19)$$

то есть уравнение неразрывности. Поскольку уравнение неразрывности выполняется для точечных зарядов, оно должно выполняться и для любого распределения зарядов. Слагаемое, не следовавшее из опыта (не замеченное экспериментаторами ввиду его малости, а в случае магнитостатики оно просто отсутствует), было добавлено для того, чтобы из системы следовало уравнение неразрывности. При этом получается, что подобно закону Фарадея изменение электрического поля порождает магнитное.

Уравнения Максвелла линейны по зарядам и токам и по искомым напряженностям электромагнитного поля. Поэтому поле суммы движущихся зарядов получается как сумма полей слагаемых.

Уравнения Максвелла позволяют по известным зарядам (и токам) находить напряженности электромагнитного поля. Неизвестных функций в них 6. Это составляющие двух векторов напряженностей: электрического и магнитного полей. Уравнений же 8: два векторных и два скалярных. То обстоятельство, что число уравнений превосходит число неизвестных, отражает структуру этих уравнений. Они определяют ротор и дивергенцию каждого из искомых векторов. Но имеется теорема векторного анализа, согласно которой вектор может быть восстановлен, если известны его ротор и дивергенция. Конечно, по дифференциальным величинам вектор восстанавливается с точностью до постоянной, но постоянные могут быть определены из начальных и граничных условий, которые необходимо добавить к уравнениям в частных производных при решении конкретных задач.

Как известно, все векторы делятся на полярные и аксиальные. Полярные (обычные) векторы изменяют знак при отражении системы координат, то есть изменении направлений всех ее осей, что приводит к изменению знака всех координат вектора. Однако если вектор является векторным произведением двух полярных векторов, то его координаты квадратичны по координатам векторов-сомножителей и при отражении системы координат вектор не меняется. Такие векторы называются аксиальными. Вектор электрической напряженности полярный, так как согласно уравнению III при отражении системы и дивергенция и \vec{E} изменяют знак, а вектор напряженности магнитной — аксиальный, что видно, из уравнений II и IV, а также из выражения (18).

Система уравнений, описывающих электромагнитное поле, была написана в 60-е годы 19 столетия. Выдающийся физик двадцатого века Р. Фейнман считал это главным событием в мировой истории той эпохи. Хотя

законы, выражаемые уравнениями, были известны до Максвелла и носят имена других физиков, объединение их в систему уже было бы заслугой. Однако Дж. К. Максвелл обобщил их и внес существенное уточнение в один из законов, причем из чисто формальных соображений. Впоследствии были созданы теория относительности, квантовая механика и квантовая электродинамика. Однако уравнения Максвелла остались неизменными по форме и справедливыми в рамках всех этих теорий.

Следует однако заметить, что уравнения для свободного пространства были записаны Х. Лоренцем.

§ 2. Уравнения Максвелла для среды

1. *Усреднение зарядов и токов в среде.* Если электромагнитное поле распространяется не в пустоте (вакууме), а в некоторой среде, то уравнения Максвелла необходимо модифицировать. В рамках классической (неквантовой) электродинамики распределенное вещество (твердое, жидкое или газообразное) представляет набор большого числа атомов или молекул, состоящих из зарядов — ядер и вращающихся вокруг них электронов. Каждое ядро и каждый электрон представляют определенный заряд. Все такие заряды считаются точечными, так что их плотности представляются дельта-функциями. Движение зарядов порождает токи, плотность которых задается так же, как в предыдущем параграфе.

Заряды в веществе движутся очень быстро, так что плотность их чрезвычайно сложная функция времени и пространственных координат. Между тем приборы, измеряющие напряженности поля, являются макроскопическими объектами с постоянными временем измерения, гораздо большими, чем характерное время изменения плотности движущихся зарядов, и с усреднением по пространству. Поэтому для получения доступных измерительным приборам характеристик полей необходимо произвести усреднение по времени и пространству. В результате из микроскопических величин (*micro*) получаются макроскопические. Уравнения для микроскопических величин остаются теми же, что и в предыдущем параграфе, но их надо усреднить вместе с входящими в них величинами [2, 4].

Начнем усреднение с плотностей заряда и тока. При усреднении необходимо учесть, что в веществе образуется несколько типов зарядов и токов. Могут присутствовать заряды, движимые внешними силами, не связанными с электромагнитным полем. Такие заряды и соответствующие токи называются внешними или сторонними (*ex*). Но могут возникать и другие заряды и токи, которые определяются самими полями. К ним относятся заряды и токи поляризации (*pol*). Например, если на какой-то поверхности уже имеются заряды, то в веществе другие заряды (противоположного знака) притягиваются к ним и создаются дополнительные заряды. Напротив, заряды того же знака отталкиваются. Так происходит в диэлектриках (например, в конденсаторах). В проводниках имеются свободные заряды, которые не создают объемного заряда, так что плотность таких зарядов равна нулю, но возникает ток проводимости (*c*). Наконец, в средах с магнитными свойствами молекулы в магнитном поле начинают определенным образом вращаться, в результате чего течет ток намагничения (*m*) также без зарядов.

Запишем результат усреднения плотностей заряда и тока в виде

$$\overline{\rho_{\text{micro}}} = \rho_{\text{ex}} + \rho_{\text{pol}}, \quad \overline{\vec{j}_{\text{micro}}} = \vec{j}_{\text{ex}} + \vec{j}_{\text{pol}} + \vec{j}_{\text{c}} + \vec{j}_{\text{m}}. \quad (20)$$

Каждые плотности зарядов и токов удовлетворяют соотношениям неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_{\text{ex}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{ex}} = 0, \quad \frac{\partial \rho_{\text{pol}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{pol}} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{j}_{\text{c}} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{j}_{\text{m}} = 0. \quad (21)$$

Два последних равенства содержат только плотности тока ввиду отсутствия соответствующих зарядов. Отметим еще раз, что только плотности внешних зарядов и токов являются известными функциями.

Теперь усредним и напряженности.

2. *Усреднение напряженностей и уравнений.* Отмечая напряженности, определяемые исходными уравнениями Максвелла, индексом “*micro*” и обозначая процесс усреднения чертой сверху, вводим традиционные обозначения:

$$\overline{\vec{E}_{\text{micro}}} = \vec{E}, \quad \overline{\vec{H}_{\text{micro}}} = \vec{B}. \quad (22)$$

Первый из усредненных векторов называется, как и исходный, вектором напряженности электрического поля, второй по историческим причинам — вектором магнитной индукции.

Первая пара уравнений Максвелла усредняется очень просто:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (23)$$

Усреднение второй пары включает усреднение зарядов и токов:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho_{\text{ex}} + \rho_{\text{pol}}), \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_{\text{ex}} + \vec{j}_{\text{pol}} + \vec{j}_{\text{c}} + \vec{j}_{\text{m}}). \quad (24)$$

В то время как уравнения Максвелла для свободного пространства основаны непосредственно на опыте и справедливы всегда, приведенные усредненные уравнения не обладают такой степенью общности, что видно и из способа их получения. Строго говоря, и масштаб дифференцирования в микроскопических (9), (10), (11), (12) и макроскопических (23)–(24) уравнениях различен. Если в первых приращения пространственных координат и времени при вычислении производных могут быть произвольными, то при выполнении таких же действий во вторых эти приращения должны быть существенно больше масштабов, по которым произведено усреднение.

3. Альтернативная форма уравнений. Часто наряду с векторами \vec{E} и \vec{B} используют и некоторые другие, связанные с дополнительными зарядами и токами (поляризации и намагничения).

Вместо зарядов и токов поляризации вводят вектор поляризации, определяя его равенствами

$$\vec{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad \rho_{\text{pol}} = -\operatorname{div} \vec{P}. \quad (25)$$

При таком определении уравнение неразрывности выполняется. Подставив второе равенство из (25) в первое уравнение (24), содержащее плотность заряда, и введя еще одно обозначение

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad (26)$$

перепишем это уравнение так:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho_{\text{ex}}. \quad (27)$$

Вектор \vec{D} называется вектором электрической индукции и определяется только внешними зарядами.

Аналогично вводится вектор намагничения. Так как плотность тока намагничения соленоидальна, то полагают

$$\vec{j}_{\text{m}} = c \operatorname{rot} \vec{M}. \quad (28)$$

Подставив выражения для плотностей тока поляризации и намагничения в последнее уравнение (24) и введя еще один вектор — магнитной напряженности

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}, \quad (29)$$

— перепишем указанное уравнение в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_{\text{ex}} + \vec{j}_{\text{c}}). \quad (30)$$

В это уравнение входят токи внешние и проводимости, вместе называемые свободными.

Все напряженности и индукции в системе CGSE имеют одну размерность. Электрические величины не носят особых названий, но единица магнитной напряженности называется эрстед и обозначается \mathcal{E} , а единица магнитной индукции — гаусс, обозначение G_s .

С точки зрения количества искомых функций все равно, какие использовать пары векторов: \vec{j}_{pol} и \vec{j}_{m} , \vec{P} и \vec{M} , \vec{D} и \vec{H} . Однако на практике более удобной оказывается последняя пара.

§ 3. Материальные уравнения

Число неизвестных функций в уравнениях Максвелла для вещества существенно превосходит число уравнений, так что решить их нельзя. Необходимы дополнительные соотношения для замыкания уравнений. Такие соотношения пишутся между векторами индукции и напряженности (отдельно электрическими и магнитными) и между током проводимости и электрической напряженностью на основании опытных данных, по-разному для разных веществ.

Мы перечислим самые жесткие требования к указанным соотношениям и средам, при выполнении которых в совокупности эти соотношения выглядят наиболее просто. Таких требований 7.

- 1) Линейность соотношений.
- 2) Однородность соотношений.
- 3) Мгновенность связи.
- 4) Локальность связи.
- 5) Изотропность среды.
- 6) Стационарность среды.
- 7) Однородность среды.

Если все эти требования выполняются, то упомянутые соотношения, называемые материальными уравнениями, имеют вид

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j}_{\text{c}} = \sigma \vec{E}, \quad (31)$$

где коэффициенты связи ϵ , μ и σ — постоянные. Первые два из них безразмерны, последний имеет размерность обратного времени.

Коэффициент ϵ называется диэлектрической проницаемостью или диэлектрической постоянной. Он всегда больше 1. Соответственно коэффициент μ называют магнитной проницаемостью. Она должна быть положительна. Вещества, у которых $\mu < 1$, называют диамагнетиками, в противоположном случае парамагнетиками.

Особый класс составляют ферромагнетики. Коэффициент проводимости $\sigma \geq 0$, пропорциональность тока проводимости электрической напряженности отражает закон Ома.

В случае отсутствия вещества индукции совпадают с напряженностями, то есть $\vec{D} = \vec{E}$, $\vec{B} = \vec{H}$, а проводимости нет ($\vec{j}_c = 0$), поэтому в пустом пространстве $\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$.

Теперь обсудим случаи, когда одно из перечисленных требований нарушается. Начнем с последнего и будем двигаться к первому.

Нарушение пунктов 7 и 6 означает соответственно, что коэффициенты зависят от пространственных координат или от времени. Так может быть, если, например, плотность среды изменяется в пространстве или со временем.

Неизотропные среды, например кристаллы, имеют разные свойства в различных направлениях. Поэтому для них нет единой зависимости между разными проекциями индукций и напряженностей. Материальные уравнения в этом случае имеют матричный вид:

$$D_x = \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z \quad (32)$$

и так далее. Вместо одного числа или функции надо определять матрицу. В зависимости от количества осей симметрии кристала эта матрица может иметь различное количество характерных чисел (или функций).

Нарушение свойств 3 и 4 называется дисперсией (дисперсия — разброс), соответственно временной и пространственной. Дисперсия означает, что значение индукции определяется не одним значением напряженности в один момент времени или в одной точке пространства, а некоторой совокупностью таких значений. Тогда связывающие индукцию и напряженность величины являются функциями, вообще говоря, зависящими от двух моментов времени или двух точек пространства. Обычно более важна временная дисперсия. Среды с дисперсией называют диспергирующими.

Наконец, свойства 1 и 2 означают, что связи между величинами линейны, а если одна равна нулю, то и другая. Они нарушаются у некоторых кристаллов по отношению к электрическим величинам и у ферромагнетиков по отношению к магнитным. В некоторых случаях их нарушение приводит к неоднозначности связей. Примером является явление гистерезиса, когда при окончании воздействия магнитной напряженности на ферромагнетик, его индукция (то есть намагничение) не исчезает. В случае электрических величин подобные явления называются электрострикцией.

§ 4. Энергетическое соотношение

В этом пункте считаем, что диэлектрическая и магнитная проницаемости не зависят от времени.

Запишем два уравненияMaxвелла с роторами:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_c + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{ex}}. \quad (33)$$

Умножим эти уравнения скалярно соответственно на \vec{H} и \vec{E} и вычтем из первого второе. Тогда получим

$$\vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} = -\frac{1}{c} \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j}_c - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{ex}} \right). \quad (34)$$

Воспользуемся материальными уравнениями и подставим их в полученное соотношение. Кроме того, введем две величины

$$w = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2), \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}. \quad (35)$$

Тогда, принимая во внимание тождество

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}(\text{rot } \vec{A}) - \vec{A}(\text{rot } \vec{B}), \quad (36)$$

соотношение (34) после умножения на $c/4\pi$ можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{ex}} - \sigma E^2. \quad (37)$$

Левая часть равенства имеет вид такой же, как в уравнении неразрывности. Поэтому w и \vec{S} интерпретируются как плотность энергии и плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) электромагнитного поля. Если нет внешнего поля и проводимости, то уравнение неразрывности для энергии выполняется. Наличие проводимости всегда приводит к потерям энергии, так как выделяется так называемое джоулево тепло. Первое слагаемое в правой части (37) описывает взаимодействие внешнего поля с порождаемым зарядами и токами. Оно может давать положительный или отрицательный вклад в энергию поля в зависимости от того, направлена плотность

тока внешнего поля в ту же сторону, что и напряженность создаваемого поля, или в противоположную, то есть определяется работой внешних сил.

Возьмем какой-нибудь объем \mathcal{V} и проинтегрируем равенство (37) по этому объему:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} w d^3 r = - \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{S} d^3 r - \int_{\mathcal{V}} (\vec{E} \vec{j}_{\text{ex}} + \sigma E^2) d^3 r. \quad (38)$$

Обозначив полную энергию поля в объеме \mathcal{V} через W , получим для ее изменения со временем

$$\frac{dW}{dt} = - \oint_{\Sigma} \vec{n} \cdot \vec{S} d^2 \Sigma - \int_{\mathcal{V}} (\vec{E} \vec{j}_{\text{ex}} + \sigma E^2) d^3 r. \quad (39)$$

Равенство (39) выражает закон сохранения энергии. Физический смысл двух последних слагаемых очевиден: это потери энергии поля на работу против внешних сил и на джоулево тепло. Первое же слагаемое справа представляет собой поток вектора Пойнтинга через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем, то есть энергию, выходящую из объема. Джоулево слагаемое всегда отрицательно, остальные могут иметь любой знак, то есть могут описывать как потери, так и увеличение энергии.

Первое слагаемое в (39) справа, которое в подавляющем большинстве случаев описывает потери энергии, так как механизмы концентрации энергии редки, позволяет сделать еще один важный вывод. Пусть для простоты нет проводимости и внешнего поля. Если увеличивать размер области, по которой производится интегрирование, то есть устремить объем к бесконечности, то и площадь поверхности его будет неограниченно возрастать. Считая эту поверхность сферой радиуса R , можно сделать оценку интеграла: $\sim 4\pi R^2 S$. Интеграл будет стремиться к нулю, если величина вектора Пойнтинга S убывает при больших R быстрее, чем $1/R^2$. Если же $S \sim 1/R^2$, то интеграл потока остается конечным и конечная энергия поля проходит через сферу произвольно большого радиуса, то есть уходит на бесконечность. Это поле, уносящее энергию бесконечно далеко от ее источника, называется излучением, а уносимая им энергия — лучистой энергией. Впоследствии будет показано, что такая ситуация осуществляется.

§ 5. Потенциалы

1. *Определение потенциалов.* Пусть среда непроводящая, то есть $\sigma = 0$, а проницаемости диэлектрическая и магнитная постоянны, то есть не зависят ни от координат, ни от времени. В этом случае можно сократить число искомых функций с шести до четырех.

Выпишем уравнения Максвелла. Так как тока проводимости нет, то у плотностей внешних зарядов и токов можно не писать индексов.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (40)$$

Воспользуемся материальными уравнениями

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (41)$$

причем в качестве основных примем векторы \vec{E} и \vec{B} . Для них уравнения (40) перепишутся так:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}. \quad (42)$$

Поскольку вектор магнитной индукции соленоидальный, то можно положить

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (43)$$

Тогда первое уравнение удовлетворяется тождественно. Подставим это выражение для \vec{B} во второе уравнение и перенесем слагаемое с ним налево:

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (44)$$

Стоящий под знаком ротора вектор потенциальный, так что можно положить

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (45)$$

После этого и второе уравнение будет выполняться тождественно.

Введенные величины называются векторным и скалярным потенциалами. Если известны потенциалы, то напряженности и индукции находятся легко. Обратное неверно.

2. *Калибровочная инвариантность.* Неоднозначность потенциалов связана не только с тем, что характеристики поля выражаются через их производные и, следовательно, к потенциалам можно добавлять любые константы. Легко проверить, что выражения (43) и (45) не изменятся, если потенциалы заменить на штрихованные, связанные с исходными добавлением градиентов некоторой функции:

$$\vec{A}' = \vec{A} - \text{grad } \chi, \quad \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (46)$$

Это свойство электромагнитного поля называется градиентной или калибровочной (gauge) инвариантностью. Выбор определенной функции χ и тем самым определенных потенциалов называется калибровкой.

Покажем, что можно выбрать такую калибровку, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0. \quad (47)$$

Действительно, пусть это соотношение для штрихованных потенциалов не выполняется, так что

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \text{div } \vec{A}' = b(\vec{r}, t) \neq 0. \quad (48)$$

Подставив выражения (46) в (48) и выбрав такую функцию χ , чтобы

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \Delta \chi = b(\vec{r}, t), \quad (49)$$

убедимся, что для нештрихованных потенциалов соотношение (47) выполняется. Нам нужна всего лишь одна функция χ . Так как при любых функциях $b(\vec{r}, t)$ (как мы увидим в дальнейшем) можно найти функцию, удовлетворяющую уравнению (49), то к соотношению (47) можно перейти всегда. Калибровка потенциалов этим соотношением называется калибровкой Лоренца, а само это соотношение условием Лоренца.

Не следует думать, что калибровка (47) полностью определяет потенциалы. В качестве функции χ можно взять и любую другую, отличающуюся от какой-либо определенной на решение однородного уравнения, соответствующего (49).

3. *Уравнения для потенциалов.* Переходим теперь к решению двух оставшихся уравнений. Подставляя в них выражения (43)–(45) и принимая во внимание соотношение (47), находим, что потенциалы определяются уравнениями

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}. \quad (50)$$

Введем обозначение

$$v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (51)$$

Эта величина имеет размерность скорости. Введем также оператор

$$\square = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (52)$$

называемый волновым оператором или оператором Даламбера. Тогда уравнения для потенциалов запишутся коротко

$$\square \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad \square \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}. \quad (53)$$

Итак, уравнения Максвелла свелись к решению четырех однотипных уравнений для четырех потенциалов, подчиненных дополнительному условию Лоренца (47).

Заметим, что если под знаком оператора Даламбера применить к потенциалам условие Лоренца, то справа получится выражение, пропорциональное уравнению неразрывности. Поэтому можно считать, что условие Лоренца является отражением этого уравнения.

4. *Функция Грина волнового уравнения и ее преобразование Фурье.* Получим частные решения уравнений (53), которые называются неоднородными волновыми уравнениями. Поскольку все четыре уравнения имеют один вид, рассмотрим уравнение

$$\square \varphi = 4\pi f(\vec{r}, t). \quad (54)$$

Представим его решение так:

$$\varphi(t, \vec{r}) = 4\pi v \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3 r_1 f(t_1, \vec{r}_1) G(t - t_1, \vec{r} - \vec{r}_1). \quad (55)$$

Функция $G(t - t_1, \vec{r} - \vec{r}_1)$ определяется уравнением (это доказывается прямой подстановкой (55) в (54))

$$\square G(t - t_1, \vec{r} - \vec{r}_1) = \frac{1}{v} \delta(t - t_1) \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \quad (56)$$

и называется функцией Грина волнового уравнения (Даламбера). Множитель v здесь и далее вводится для того, чтобы время входило только в виде произведения vt , имеющего размерность длины, как и координаты. Поскольку всюду в уравнении входит только разность аргументов, можно положить $t_1 = 0, \vec{r}_1 = 0$, и решать уравнение

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) G(t, \vec{r}) = \frac{1}{v} \delta(t) \delta(\vec{r}). \quad (57)$$

Представим искомую функцию в виде разложения в интеграл Фурье:

$$G(t, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{G}(\alpha_0, \vec{\alpha}) e^{-i(\alpha_0 vt - \vec{\alpha} \cdot \vec{r})} d\alpha_0 d^3 \alpha, \quad (58)$$

где

$$\tilde{G}(\alpha_0, \vec{\alpha}) = v \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3 r e^{i(\alpha_0 vt - \vec{\alpha} \cdot \vec{r})} G(t, \vec{r}). \quad (59)$$

Разложим и делта-функции в интегралы Фурье:

$$\delta(t) = \frac{v}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha_0 vt} d\alpha_0, \quad \delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \alpha e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}. \quad (60)$$

Подставив разложения в уравнение (57), получим уравнение для преобразования функции Грина:

$$(\alpha^2 - \alpha_0^2) \tilde{G}(\alpha_0, \vec{\alpha}) = 1. \quad (61)$$

5. *Обращение преобразования Фурье.* Нельзя просто поделить на множитель $\alpha^2 - \alpha_0^2$, так как он обращается в нуль. Для обращения преобразования следует вещественную величину α_0 превратить в комплексную и рассматривать на комплексной плоскости. Для получения определенного решения необходимо регуляризовать дробь. Разные способы регуляризации дают различные решения. Чтобы получить нужные нам потенциалы, добавим к α_0 малую мнимую величину, то есть обойдем полюса дроби сверху от вещественной оси (рис. 1а). Перепишем функцию Грина (58) в виде

$$G(t, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 \alpha e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_0}{\alpha^2 - (\alpha_0 + i0)^2} e^{-i\alpha_0 vt} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 \alpha e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{r}} I_0(\alpha, t) \quad (62)$$

и рассмотрим интеграл

$$I_0(\alpha, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_0}{\alpha^2 - (\alpha_0 + i0)^2} e^{-i\alpha_0 vt}. \quad (63)$$

Для значений $t > 0$, которые нас только и интересуют, контурный интеграл по вещественной оси должен быть преобразован путем замыкания его полуокружностью (см. рис. 1б) в нижней полуплоскости комплексной плоскости α_0 (так как при $t > 0$ экспонента стремится к нулю при $\alpha_0 \rightarrow -i\infty$) и взятия вычетов в расположенных в этой полуплоскости полюсах $\alpha_0 = \pm\alpha$. Для $t < 0$ он равен нулю, так как тогда интеграл должен замыкаться в верхней полуплоскости, а там подинтегральная функция особенностей не имеет. В обоих случаях интеграл по полуокружности радиуса R при $R \rightarrow \infty$ по лемме Жордана стремится к нулю, и интеграл сводится к вычетам в полюсах. В результате при $t > 0$ найдем

$$I_0(\alpha, t) = (-2\pi i) \left(-\frac{1}{2\alpha_0} e^{-i\alpha_0 vt} \Big|_{\alpha_0=-\alpha} - \frac{1}{2\alpha_0} e^{-i\alpha_0 vt} \Big|_{\alpha_0=\alpha} \right) = \frac{2\pi}{\alpha} \sin(\alpha vt). \quad (64)$$

Для любого знака времени можно написать

$$I_0(\alpha, t) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(t)}{2} 2\pi \frac{\sin(\alpha vt)}{\alpha}. \quad (65)$$

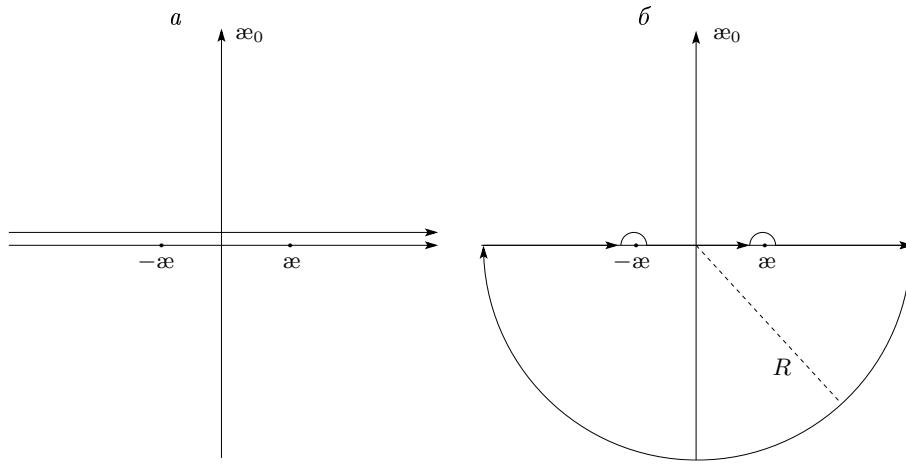


Рис. 1. Преобразование контура интегрирования.

Теперь четверной интеграл в выражении (62) для функции Грина с интегралом (64) примет вид

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\alpha}{\alpha} e^{i\alpha\vec{r}} \sin(\alpha v t) &= 2\pi \int_0^\infty \alpha d\alpha \sin(\alpha v t) \int_{-1}^1 e^{i\alpha r \eta} d\eta = 2\pi \int_0^\infty \alpha d\alpha \sin(\alpha v t) \frac{e^{i\alpha r} - e^{-i\alpha r}}{i\alpha r} = \\ &= \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty d\alpha 2 \sin(\alpha v t) \sin(\alpha r) = \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty d\alpha [\cos \alpha (v t - r) - \cos \alpha (v t + r)] = \frac{2\pi^2}{r} [\delta(v t - r) - \delta(v t + r)]. \end{aligned} \quad (66)$$

Поскольку вторая дельта-функция существенна только при отрицательных t , то она исчезает после подстановки. Окончательно выражение для функции Грина содержит только одну дельта-функцию:

$$G(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^4} 2\pi \frac{2\pi^2}{r} \delta(v t - r) = \frac{1}{4\pi r} \delta(v t - r). \quad (67)$$

6. Запаздывающие потенциалы. Теперь несложно получить решение уравнения (54), подставив функцию Грина в (55)

$$\varphi(\underline{r}) = 4\pi v \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3 r_1 f(t_1, \vec{r}_1) \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_1|} \delta(v(t - t_1) - |\vec{r} - \vec{r}_1|). \quad (68)$$

Взяв интеграл от дельта-функции, найдем выражение для решения неоднородного волнового уравнения:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \rho(\underline{r}_1). \quad (69)$$

Поясним приведенную формулу, считая f плотностью заряда. Произведение плотности заряда на элемент объема равно заряду этого объема. Так как элемент объема бесконечно мал, заряд можно считать точечным. Как уже отмечалось, неподвижный точечный заряд q создает поле напряженности согласно закону Кулона (14). Этой напряженности соответствует кулоновский потенциал

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r}, \quad (70)$$

то есть потенциал точечного заряда равен величине этого заряда, деленной на расстояние от него до точки измерения (положения пробного заряда).

Чтобы найти полный потенциал, надо просуммировать по всем зарядам, то есть взять интеграл по распределению зарядов. Особого пояснения требует лишь момент времени t_1 , в который надо вычислять плотность заряда, чтобы наблюдатель смог почувствовать его влияние в точке \vec{r} в момент времени t . Будем называть t_1 моментом влияния. Этот момент определяется равенством

$$v(t - t_1) = |\vec{r} - \vec{r}_1|. \quad (71)$$

Равенство (71) интерпретируется следующим образом. Плотность заряда надо вычислять в такой момент времени, чтобы сигнал, вышедший в этот момент и движущийся со скоростью v , дошел до наблюдателя в момент наблюдения. Такие решения волнового уравнения называются запаздывающими потенциалами.

Конечно, в решения могут входить решения однородных уравнений, которые мы рассмотрим в Главе 3. Однако сначала обратимся к теории относительности.

Глава 2. Основы теории относительности

§ 1. Основные положения

1. *Принцип относительности.* В 1905 году Альберт Эйнштейн опубликовал статью, в которой сформулировал основные принципы теории относительности, названной впоследствии специальной (или частной) теорией в отличие от созданной в 1916 году тем же Эйнштейном общей теории относительности, которая по существу является теорией гравитации.

Следует отметить, что создателем теории относительности нельзя признать одного Эйнштейна. Заметный вклад в нее внесли Х.Лоренц, Г.Минковский, А.Пуанкаре и другие. Эйнштейн, можно сказать, завершил построение теории, придав ей наиболее четкую форму.

Основной принцип теории относительности заключается в том, что все физические явления происходят одинаково в так называемых инерциальных системах отсчета. Инерциальными же системами называются такие системы координат, которые движутся относительно друг друга прямолинейно и равномерно, то есть с постоянной скоростью, понимаемой в обычном смысле.

Ускоренные системы исключаются, так как постулируется, что ускорение любой наблюдатель всегда непременно заметит. Мы всегда ощущаем включение ускорения в транспорте. Даже если ускорение мало, оно рано или поздно обнаружится. Например, вращение Земли непосредственно нами не ощущается, однако оно проявляется в пассатах, вращении циклонов и антициклонов, а за длительный промежуток времени — в так называемом явлении Бэра: в северном полушарии у рек правый берег крутой, а левый отлогий.

В рамках основного принципа накладывается условие существования предельной скорости передачи сигналов, которая оказывается совпадающей со скоростью света в пустоте.

Однаковость протекания явления означает и то, что уравнения, описывающие это явление, во всех системах отсчета должны иметь один и тот же вид, а переход в записи уравнений от одной системы к другой производится посредством замены координат, включая и время, которое в разных системах может течь по-разному. Как говорят, все величины, соотношения и формулы должны быть ковариантны по отношению к таким преобразованиям.

Переход от одной системы отсчета к другой производился и в классической механике, но там преобразовывались только пространственные координаты, а время во всех системах текло одинаково (ньютоновская механика, преобразования Галилея). Впервые с необходимостью преобразования времени при переходе в другую систему отсчета столкнулся Лоренц, когда пытался найти преобразования, которые оставляют неизменным вид уравнений Максвелла. Совершенно ясно, что эти уравнения требовали именно релятивистских преобразований, так как электромагнитное поле и электромагнитные волны являются релятивистскими объектами.

Принцип ковариантности позволяет получать релятивистские обобщения нерелятивистских величин. Для такого обобщения нужно написать величину в явно релятивистском виде, а затем проверить, что в нерелятивистском пределе она принимает правильное значение. Такой же подход применим к соотношениям, формулам, уравнениям и т.п. и мы много раз будем им пользоваться.

2. *События и интервал.* Каждое явление или событие, происходящее в пространстве и во времени (в частности, объект: тело, материальная точка и т.п.), характеризуется в некоторой системе отсчета четырьмя числами: тремя пространственными координатами, образующими трехмерный вектор $\vec{r} = (x, y, z)$, и моментом времени t .

Четыре числа x, y, z, t объединяются вместе и составляют точку пространства Минковского, которую часто называют событием. В каждой из систем должна быть произведена синхронизация отдельно, так что каждому событию сопоставлен свой момент времени. В разных системах одному событию могут сопоставляться разные моменты времени, и это является правилом, а не исключением. Время в разных системах идет по-разному. Отсутствие всеобщего единого времени — характерная черта теории относительности.

Наряду с точками пространства Минковского рассматриваются векторы. Вектор, как обычно принимается в геометрии, — это упорядоченная пара точек. Пространство (на самом деле это пространство-время) четырехмерных векторов вида $\underline{r} = \{c(t_2 - t_1), (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\}$ также называем пространством Минковского. В частности, если одно событие поместить в начало координат (назовем его реперным), а у координат второго опустить индексы, то векторы, исходящие из начала, примут вид $\underline{r} = \{ct, \vec{r}\}$. Назовем такие векторы векторами положения. Векторы пространства Минковского можно умножать на вещественные числа и складывать.

Между двумя событиями определяется “расстояние”, точнее, квадрат интервала

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2. \quad (1)$$

Для векторов с одним концом в начале координат квадрат интервала записывается проще:

$$s^2 = c^2 t^2 - r^2. \quad (2)$$

В частности, для бесконечно малого вектора

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2. \quad (3)$$

Если интервал равен нулю, это не означает, что события совпадают. Равенство нулю интервала между ними означает, что такие события могут быть соединены световым сигналом. Так как скорость света одинакова во всех системах отсчета, то равный нулю в одной системе интервал равен нулю во всех инерциальных системах. Величина не равных нулю интервалов между двумя фиксированными событиями также постоянна во всех системах отсчета. Это положение доказывается ниже.

По знаку квадрата интервалы классифицируются следующим образом. Если $s_{12}^2 > 0$, интервал называется времениподобным. Если, напротив, $s_{12}^2 < 0$, интервал пространственно подобен. Когда $s_{12}^2 = 0$, интервал нулевой.

3. Преобразование Лоренца. Преобразование, связывающее две инерциальные системы отсчета, должно быть линейным и коэффициенты его не должны зависеть от координат и времени. Самое общее преобразование может включать повороты осей координат, отражения осей и изменение направления отсчета времени, а также изменение пространственных и временных масштабов. Для того, чтобы выяснить принципиальные особенности теории относительности, достаточно ограничиться теми преобразованиями, которые связаны только с переходом из одной инерциальной системы в другую. Поэтому мы будем считать, что две системы, которые связывает преобразование, совершенно идентичны, а соответствующие их координатные оси параллельны. Все различие между ними сводится к тому, что одна система, в которой находится наблюдатель, неподвижна по отношению к нему, а другая движется со скоростью, направление и величина которой задается вектором \vec{V} . Удобно принять, что начальные моменты в обеих системах совпадают и в этот общий момент совпадают положения начал координат систем. Координаты и время в первой системе будем обозначать просто \vec{r}, t , а соответствующие величины во второй снабжать штрихом (рис. 2). Для краткости обычно вторую систему называют штрихованной, а исходную — нештрихованной. Коэффициенты такого преобразования могут зависеть только от скорости, так как это единственный имеющийся при этом параметр.

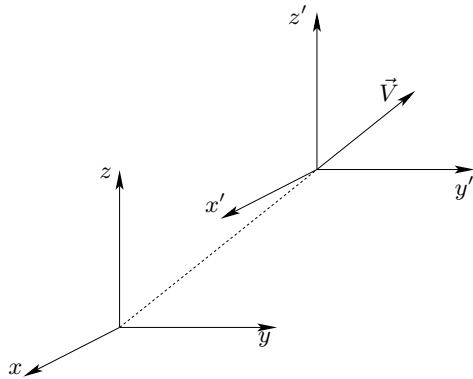


Рис. 2. Две инерциальные системы.

Тогда преобразование, выражающее пространственные координаты и время некоторого события в штрихованной системе через координаты того же события в нештрихованной системе, можно записать в виде

$$t' = \Gamma \left(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{c^2} \right), \quad \vec{r}' = \vec{r} - \Gamma \vec{V} t + (\Gamma - 1) \left(\vec{r} \frac{\vec{V}}{V} \right) \frac{\vec{V}}{V}. \quad (4)$$

Здесь

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (5)$$

так называемый лоренцевский множитель, который всегда больше единицы. Очевидно, что преобразование (4) не меняет величины интервала, как и преобразование, включающее повороты (оно влияет только на пространственные координаты).

Преобразование координат и времени, связывающее события в различных инерциальных системах называется преобразованием Лоренца. Это преобразование Х. А. Лоренц подобрал из условия, что они не изменяют вида уравнений Максвелла. По его собственному признанию он не понимал, что такое время t' , появляющееся в открытых им преобразованиях.

Для того, чтобы все координаты четырехмерного вектора имели одну размерность, обычно используется вместо времени t произведение ct . Кроме того, второе равенство в (4) часто удобнее записывать в таком виде, чтобы последнее слагаемое было перпендикулярно вектору скорости. С учетом всего этого преобразование Лоренца можно переписать в виде

$$ct' = \Gamma \left(ct - \frac{\vec{V}}{c} \cdot \vec{r} \right), \quad \vec{r}' = \Gamma(\vec{r} - \vec{V} t) + (\Gamma - 1) \frac{\vec{V}}{V} \times \left(\frac{\vec{V}}{V} \times \vec{r} \right). \quad (6)$$

Отметим некоторые свойства такого преобразования. Его определитель равен единице. Обратное преобразование получается заменой вектора \vec{V} на $-\vec{V}$, так как нештрихованная система движется по отношению к штрихованной с противоположной скоростью. Преобразования Лоренца, как правило, некоммутативны, то есть результат зависит от порядка перехода из одной системы в другую, а затем в третью. Они образуют группу.

Если вектор скорости параллелен одной из координатных осей, то формулы, определяющие преобразование, сильно упрощаются. Пусть $V = V(0, 0, 1)$. Тогда

$$ct' = \Gamma(ct - Vz), \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \Gamma(z - Vt). \quad (7)$$

Такое преобразование называется частным преобразованием Лоренца.

Если величина скорости \vec{V} мала по сравнению со скоростью света, то есть $V \ll c$, то можно положить $\Gamma \approx 1$ и преобразование (4) перейдет в

$$t' = t, \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t. \quad (8)$$

Это так называемое преобразование Галилея, соответствующее механике Ньютона. Согласно ему во всех системах отсчета время единое, а координаты в двух системах отличаются просто на путь, проходимый началом штрихованной системы в нештрихованной.

Заметим, что при начальной формулировке теории относительности часто вместо времени вводилась мнимая координата $x_4 = ict$ и изменялся знак квадрата интервала, что позволяло формально записать его как положительно определенный. Тогда преобразование получало вид четырехмерного ортогонального преобразования с одним мнимым углом. Впоследствии от этого отказались, так как этот прием приводил к необходимости поворотов на мнимые углы, затушевывая существа дела, кроме того, в релятивистской квантовой механике требовалось осуществлять комплексное сопряжение, а в координате x_4 этого делать нельзя.

§ 2. Простейшие эффекты

1. *Различие между интервалами.* Здесь продемонстрируем различие между времени- и пространственно-подобными интервалами.

а. Времениподобный интервал. Если в некоторой системе отсчета при фиксированных t и \vec{r} выполняется $s^2 = c^2 t^2 - \vec{r}^2 > 0$, то в системе, которая движется по отношению к первой со скоростью

$$\vec{V} = \frac{\vec{r}}{t}, \quad V = \frac{r}{t} < c, \quad \Gamma = \frac{ct}{s}, \quad (9)$$

для соответствующих времени и координат будет согласно (4)–(6)

$$t' = \frac{ct}{s} \left(t - \frac{\vec{r}^2}{c^2 t} \right) = \frac{s}{c}, \quad \vec{r}' = \frac{ct}{s} \left(\vec{r} - \frac{\vec{r}}{t} t \right) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, в этой, штрихованной системе $s = ct'$, то есть интервал свелся целиком к промежутку времени, а события произошли в одном месте. Такое положение возможно, когда вектор \vec{r} связан с одним телом. Тогда штрихованная система — это такая система, в которой положение тела в моменты 0 и t' совпадают. Частным случаем этого является то, что тело в штрихованной системе вообще не движется, то есть система жестко связана с телом.

б. Пространственноподобный интервал. Пусть $s^2 < 0$. Теперь выберем штрихованную систему, движущуюся относительно исходной со скоростью

$$\vec{V} = c \frac{ct}{r} \frac{\vec{r}}{r}, \quad V = c \frac{t}{r} < c, \quad \Gamma = \frac{r}{\sqrt{-s^2}}. \quad (11)$$

Тогда согласно преобразованию Лоренца

$$t' = \Gamma(t - Vt) = 0, \quad \vec{r}' = \Gamma \left(\vec{r} - c \frac{ct}{r} \frac{\vec{r}}{r} t \right) = \frac{r}{\sqrt{-s^2}} \frac{\vec{r}}{r^2} (r^2 - c^2 t^2) = \vec{r} \sqrt{-s^2}/r. \quad (12)$$

В этом случае два события произошли в штрихованной системе одновременно, а интервал $s^2 = -(\vec{r}')^2$.

в. Нулевой интервал. Тогда, как отмечалось выше, из одного события можно послать в другое световой сигнал. Все события, которые можно соединить световым сигналом с выбранным, располагаются на конусе в четырехмерном пространстве, который называется световым конусом и разделяет области времени- и пространственно подобных интервалов.

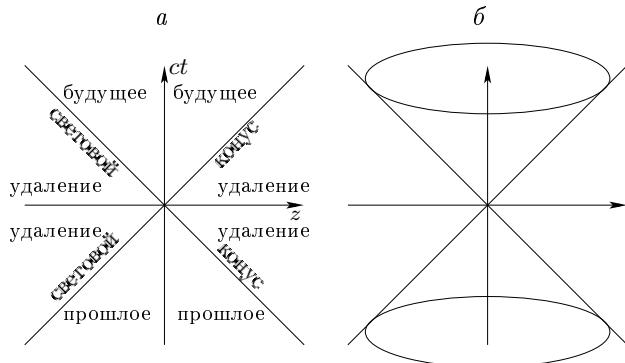


Рис. 3. Характер промежутков в пространстве-времени.

На рис. 3 a представлено двумерное сечение четырехмерного пространства, вертикальная ось соответствует координате ct , а горизонтальная — пространственным координатам. Световой конус изображен двумя пересекающимися (более жирными) прямыми. Рис. 3 b дает более наглядное представление о конусе, на этом рисунке три пространственные координаты (изобразить конус в четырехмерном пространстве трехмерные люди не могут). Внутри светового конуса при отрицательных t находится абсолютное прошлое, а при положительных — абсолютное будущее по отношению к реперному событию. Вне конуса располагаются события, которые абсолютно удалены от этого события.

2. Лоренцево замедление времени. Пусть два события происходят в штрихованной системе в одной точке, то есть $\vec{r}'_1 = \vec{r}'_2$. Это значит, что интервал между ними времени подобен. Выразим моменты их осуществления в нештрихованной системе через штрихованные координаты:

$$t_1 = \Gamma \left(t'_1 + \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}'_1}{c^2} \right), \quad t_2 = \Gamma \left(t'_2 + \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}'_2}{c^2} \right). \quad (13)$$

Поскольку их штрихованные пространственные координаты совпадают, то

$$t_2 - t_1 = \Gamma(t'_1 - t'_2). \quad (14)$$

Из последнего равенства следует, что разность в скобках всегда меньше, чем слева. Таким образом, промежуток времени между событиями в системе, в которой они происходят в одной точке, самое малое по сравнению со всеми другими системами. Если с двумя событиями связать одно и то же тело (или точку), то можно сказать, что в той системе, где тело покоятся, время для него течет медленнее всего. Такая выделенная система называется собственной по отношению к рассматриваемому телу, а время в этой системе — его собственным временем.

Заметим, что все инерциальные системы полностью эквивалентны только до тех пор, пока мы не выделили среди них класс систем, связанных с каким-либо телом — его собственные системы.

Этот эффект называется лоренцевым замедлением времени. Его можно вывести иначе. Записав квадрат бесконечно малого интервала движения тела в дифференциальной форме, то есть

$$c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = c^2 d\tau^2, \quad (15)$$

мы получаем связь дифференциала собственного времени тела (в системе, где оно покоятся,) со временем для него в любой другой системе, где его скорость равна по модулю v , а именно:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < dt. \quad (16)$$

Собственное время тела меньше всех других. Заметим, что скорость \vec{V} и множитель Лоренца Γ системы отсчета мы обозначаем прописными буквами, а эти же величины для тела — $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ и $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — строчными буквами.

На тему путешествий с большой скоростью на длительные периоды времени с возвратом после того, как в исходном месте прошло времени значительно больше, чем для путешественника, имеется много рассуждений и фантазий. Однако реальное осуществление такого путешествия сомнительно из-за необходимости затрат больших энергий на разгон, а также торможение, и выдерживания неизбежных при этом ускорений.

3. *Лоренцево сокращение*. Пусть теперь два события происходят в один и тот же момент в нештрихованной системе. Тогда для координат их в штрихованной системе имеем

$$\vec{r}'_1 = \Gamma(\vec{r}_1 - \vec{V}t_1) + (\Gamma - 1)\frac{\vec{V}}{V} \times \left(\frac{\vec{V}}{V} \times \vec{r}_1\right), \quad \vec{r}'_2 = \Gamma(\vec{r}_2 - \vec{V}t_2) + (\Gamma - 1)\frac{\vec{V}}{V} \times \left(\frac{\vec{V}}{V} \times \vec{r}_2\right). \quad (17)$$

Так как $t_1 = t_2$, то после раскрытия двойного векторного произведения с множителем $-(\Gamma - 1)$ разность их координат можно записать в виде

$$\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \left(\frac{\vec{V}}{V} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\right) \times \frac{\vec{V}}{V} + \Gamma \left(\frac{\vec{V}}{V} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\right) \frac{\vec{V}}{V}. \quad (18)$$

Так как разность векторов в нештрихованной системе можно представить в виде суммы двух слагаемых — перпендикулярного и параллельного скорости (что проверяется раскрытием двойного векторного произведения):

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(\frac{\vec{V}}{V} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\right) \times \frac{\vec{V}}{V} + \left(\frac{\vec{V}}{V} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\right) \frac{\vec{V}}{V}, \quad (19)$$

то видно, что составляющие этих разностей, ортогональные вектору скорости, равны, в то время как проекции их на скорость отличаются на множитель Γ .

Аналогичные соотношения получаются, если считать, что события одновременны в штрихованной системе. Для вывода, как всегда, надо заменить \vec{V} на $-\vec{V}$.

Полученным соотношениям дается следующая интерпретация. Будем считать нашими событиями два конца одного стержня. Пусть он покоятся в штрихованной системе, расположен вдоль оси z и вместе с системой движется со скоростью $\vec{V} = (0, 0, V)$. Там его длину $l_0 = z'_2 - z'_1$ можно измерять в любой момент. В нештрихованной же системе наблюдатель должен измерять длину стержня $l = z_1 - z_2$, прикладывая измерительный прибор в один и тот же момент времени к обоим концам $t_2 = t_1$. Тогда $l_0 = \Gamma l$. Из написанных формул следует, что длина стержня самая большая в той системе, где он покоятся. В системе координат, в которой стержень движется, размер его проекции на скорость меньше в Γ раз. Это и есть лоренцево сокращение. В нашем рассуждении скорость стержня направлена вдоль его длины, тогда сокращение длины стержня наибольшее. Максимальная длина стержня (в его собственной системе отсчета) называется его собственной длиной. Конечно, с самим стержнем ничего не случается, сокращение наблюдается при измерении.

Так как сокращение происходит только в одном измерении, то объем движущегося тела сокращается тоже в Γ раз. Наибольший объем тела, который оно имеет в той системе, где покоятся, называется его собственным объемом. Понятно, что в собственной системе отсчета тело имеет наименьшую плотность.

Элемент пространственного объема также самый большой в системе, где он покоятся. Собственный элемент d^3r_0 объема связан с элементом в системе, где он движется, равенством

$$d^3r_0 = \Gamma d^3r. \quad (20)$$

4. *Сложение скоростей*. Записав преобразование Лоренца от штрихованной системы к нештрихованной в дифференциальной форме:

$$d\vec{r} = \Gamma(d\vec{r}' + \vec{V}dt') + (\Gamma - 1)\frac{\vec{V}}{V} \times \left(\frac{\vec{V}}{V} \times d\vec{r}'\right), \quad dt = \Gamma \left(dt' + \frac{\vec{V}}{c^2} d\vec{r}'\right), \quad (21)$$

поделим первое равенство на второе, а получившиеся числитель и знаменатель — на $\gamma dt'$. Так как $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ и $d\vec{r}'/dt' = \vec{v}'$ — скорости движения в нештрихованной и штрихованной системах соответственно, то

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + \vec{V} + (\Gamma - 1)\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{v}')/V^2}{1 + \vec{V} \cdot \vec{v}'/c^2}. \quad (22)$$

Пусть \vec{v} и \vec{v}' — скорости движения одного тела, а \vec{V} — по-прежнему скорость штрихованной системы относительно нештрихованной. Тогда равенство (22) представляет закон сложения скоростей в релятивистской механике. Тело, движущееся со скоростью \vec{v}' в системе, которая сама движется в другой системе со скоростью \vec{V} , в этой последней будет иметь скорость \vec{v} согласно (22).

Легко проверить, что при сложении любых скоростей, не превосходящих скорости света, результирующая скорость тоже не превзойдет скорости света. Напротив, сложение любой скорости со скоростью света дает скорость света.

Закон сложения скоростей сильно упрощается и становится наглядным, если скорости движения тела и системы коллинеарны. Тогда последнее слагаемое в числитеle (22) исчезает, все три скорости направлены вдоль одной прямой и это равенство можно записать в скалярном виде:

$$v = \frac{v' + V}{1 + v' V/c^2}, \quad (23)$$

где величины v , v' и V могут, вообще говоря, быть как положительными, так и отрицательными. Если положить $v = c \cdot \operatorname{th} \chi$, $v' = c \cdot \operatorname{th} \chi'$ и $V = c \cdot \operatorname{th} \chi_0$, то формула (23) превратится в формулу гиперболического тангенса от суммы аргументов:

$$\operatorname{th} \chi = \frac{\operatorname{th} \chi' + \operatorname{th} \chi_0}{1 + \operatorname{th} \chi' \operatorname{th} \chi_0} = \operatorname{th}(\chi' + \chi_0). \quad (24)$$

Эту формулу в начале становления теории относительности интерпретировали так: сложение скоростей равносильно сложению мнимых углов при замене скоростей тангенсами ($\operatorname{tg} \chi = i \operatorname{th}(i\chi)$).

Для полноты приведем формулу сложения перпендикулярных скоростей. Если $\vec{v}' \perp \vec{V}$, то

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'/\Gamma. \quad (25)$$

Здесь поправка имеет порядок V^2/c^2 .

§ 3. Скаляры и векторы

1. *Скаляры*. Скалярами называются инвариантные преобразования Лоренца, то есть величины, одинаковые во всех инерциальных системах координат.

Скаляры — это не просто постоянные. Скорость света является мировой константой, так же как заряд и масса электрона, постоянная Планка и другие. Скаляры — это величины, которые в разных системах отсчета имеют одинаковый вид (подобные выражения в координатах) и, кроме того, одинаковое значение. Примерами являются квадрат интервала s^2 и элемент четырехмерного объема $d^4r = cdt d^3r$ (и следовательно, сам четырехмерный объем). Их инвариантность может быть проверена непосредственно, исходя из формул (4). Трехмерное расстояние и трехмерный объем скалярами не являются.

Как уже говорилось, если в пространстве имеется некоторое тело или материальная точка (нулевого объема), то из всех систем отсчета выделяется одна (с точностью до поворота вокруг начала координат), которая жестко связана с этим телом — собственная его система. Все величины в этой системе отсчета называются также собственными по отношению к этому телу. В частности, его собственный трехмерный объем и собственное время (в отличие от их значений в других инерциальных системах) являются однозначными величинами, что следует из инвариантности их элементов $d\tau = dt/\Gamma$ и $d^3r_0 = \Gamma d^3r$ (их произведение — уже упоминавшийся скаляр d^4r/c).

2. *Векторы*. Векторами в теории относительности называются элементы четырехмерного пространства, которое мы для простоты будем называть также пространством Минковского. Векторы, как и точки, задаются четырьмя числами-координатами: нулевой (или временной) и тремя пространственными. Векторы рассматриваются как свободные, то есть не прикрепляются к определенной точке пространства.

Обычно составляющие четырехмерных векторов перечисляют, нумеруя их цифрами 0, 1, 2, 3 или греческими буквами, причем индекс 0 относится к временной координате, а три других — к пространственным, объединяемым латинскими буквами, то есть

$$\underline{a} = \{a^\mu\} = \{a^0, a^j\} = \{a^0, \vec{a}\}, \mu = 0, 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, \vec{a} = (a^1, a^2, a^3) = (a^j) = (a_x, a_y, a_z). \quad (26)$$

Чтобы четыре числа составляли вектор, они должны при переходе от одной инерциальной системы к другой (от нештрихованной к штрихованной или обратно) преобразовываться согласно преобразованию Лоренца, то есть так же, как координаты событий:

$$a'_0 = \Gamma(a_0 - \vec{a} \cdot \vec{V}/c), \quad \vec{a}' = \vec{a} - a_0 \Gamma \vec{V}/c + (\Gamma - 1)(\vec{V} \cdot \vec{a})\vec{V}/V^2. \quad (27)$$

Это преобразование также можно записать с выделенной частью, перпендикулярной скорости:

$$a'_0 = \Gamma(a_0 - \vec{a} \cdot \vec{V}/c), \quad \vec{a}' = \Gamma(\vec{a} - a_0 \vec{V}/c) + (\Gamma - 1)\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{a})/V^2. \quad (28)$$

При переходе в другую систему отсчета изменяются составляющие четырехмерного вектора, сам вектор не изменяется. Однако для упрощения записи результата преобразования Лоренца мы будем отмечать соответствующими индексами (штрихами) обозначения не только составляющих, но и самого четырехмерного вектора.

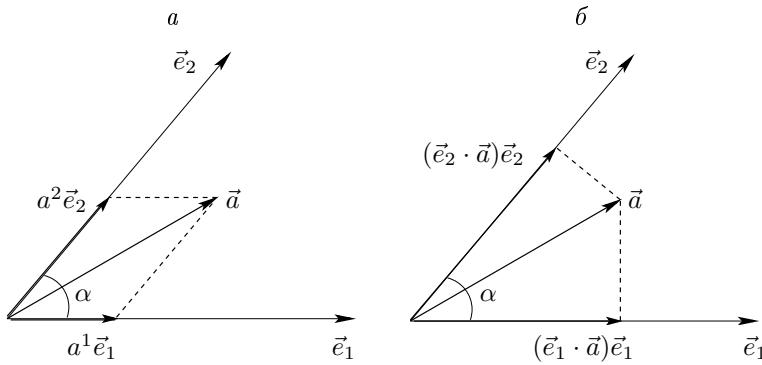


Рис. 4. Контравариантные и ковариантные координаты вектора:
a — разложение на составляющие, б — проецирование.

Наряду с контравариантными составляющими используются ковариантные, у которых индексы записываются снизу: a_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$. Смысл введения двух видов координат станет ясен из следующего рассуждения.

3. Координаты в неортогональных системах. Координаты двух видов появляются уже в обычном, евклидовом пространстве, если используется не декартова система ортонормальных ортov, а неортогональные орты. Продемонстрируем различие координат на примере двумерного пространства (плоскости).

Пусть между двумя ортами \vec{e}_1 и \vec{e}_2 образован угол α , то есть

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \alpha. \quad (29)$$

Произвольный вектор \vec{a} можно охарактеризовать по отношению к указанным ортам двумя способами. Один способ — разложить вектор по ортам (рис. 4a), то есть представить его в виде

$$\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2. \quad (30)$$

Это будут контравариантные координаты. Другой способ — спроектировать вектор на орты (рис. 4б) и ковариантными координатами считать проекции (вместе с их знаками):

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1 = a^1 + a^2 \cos \alpha, \quad a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2 = a^1 \cos \alpha + a^2. \quad (31)$$

Легко проверить, что квадрат вектора может быть представлен в следующих формах

$$\vec{a}^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + 2 \cos \alpha a^1 a^2 = a^1 a_1 + a^2 a_2 = g_{mn} a^m a^n, \quad (32)$$

где по повторяющимся индексам $m, n = 1, 2$ подразумевается суммирование, а так называемый метрический тензор представлен компонентами

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = \cos \alpha. \quad (33)$$

Конечно, если угол между ортами прямой $\alpha = \pi/2$, то $\cos \alpha = 0$, внедиагональные элементы метрического тензора тоже нули и координаты не различаются.

4. Ковариантные и контравариантные составляющие. Так как квадрат интервала пространства Минковского содержит только единицу и минус единицы, то отличные от нуля элементы метрического тензора этого пространства

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, \quad (34)$$

а все внедиагональные элементы равны нулю. Поэтому ковариантные составляющие вектора \underline{a} , обозначаемые $\{a_\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, отличаются от контравариантных тем, что пространственные координаты имеют противоположный знак, то есть $a_0 = a^0, a_k = -a^k$, $k = 1, 2, 3$. Мы будем пользоваться, в основном, контравариантными составляющими векторов, индексы которых пишутся сверху у обозначения вектора. Ввиду совпадения нулевых составляющих с верхним и нижним индексами в дальнейшем нулевой индекс будем писать внизу, а у пространственных часто будем указывать не номера, а оси проецирования. Как правило, четырехмерные векторы мы будем записывать в виде $\underline{a} = \{a_0, \vec{a}\}$, перечисляя их контравариантные составляющие.

5. Скалярное произведение. Для векторов пространства Минковского определяется скалярное произведение. Если $\underline{a} = \{a^\mu\} = \{a_0, \vec{a}\}$ и $\underline{b} = \{b^\mu\} = \{b_0, \vec{b}\}$ — два вектора, то их скалярное произведение и квадраты мы будем записывать так:

$$\underline{a} \underline{b} = a_0 b_0 - \vec{a} \vec{b}, \quad \underline{a}^2 = a_0^2 - \vec{a}^2, \quad \underline{b}^2 = b_0^2 - \vec{b}^2. \quad (35)$$

Скалярное произведение записывают также в виде $\underline{a} \underline{b} = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$, где по повторяющимся индексам (верхнему и нижнему) подразумевается суммирование, то есть

$$\underline{a} \underline{b} = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = a_0 b_0 - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z), \quad (36)$$

что совпадает с (35).

Легко показать, что скалярное произведение векторов и, в частности, квадрат вектора являются скалярами, чем и объясняется название произведения.

Из-за минуса в определении (35) скалярное произведение не является положительно определенным, то есть квадрат вектора может иметь любой знак, а равенство нулю квадрата вектора не означает, что все его компоненты равны нулю. Поэтому вводится классификация векторов, как и интервалов. Именно, если $\underline{a}^2 > 0$, вектор \underline{a} называется времениподобным, если $\underline{a}^2 < 0$, пространственно подобным, если $\underline{a}^2 = 0$, нулевым.

Ввиду неположительности скалярного произведения нельзя ввести понятия угла между четырехмерными векторами. Однако, если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то говорят, что они ортогональны.

6. Примеры векторов.

1) Первым примером вектора служит вектор положения $\underline{r} = \{ct, \vec{r}\}$. Его квадрат — квадрат интервала $\bar{r}^2 = s^2$.

Частицы (или материальные точки) движутся по кривым в четырехмерном пространстве, которые называют мировыми линиями. Дифференциал вектора положения $d\underline{r} = \{cdt, d\vec{r}\}$, взятый вдоль мировой линии, — тоже вектор. Квадрат этого вектора представляет дифференциальную форму интервала

$$(d\underline{r})^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - d\bar{r}^2. \quad (37)$$

Такой интервал пространственно подобен. Выше были рассмотрены и времениподобные интервалы.

2) Другой вектор, который возникает сразу, — это четырехмерный градиент

$$\underline{\nabla} = \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right\}. \quad (38)$$

То обстоятельство, что перед трехмерным градиентом надо поставить минус, проверяется непосредственно — иначе это не будет четырехмерным вектором. Однако, в такой необходимости можно убедиться и иначе: скалярное произведение дифференциала вектора положения и вектора градиента согласно определению (35)

$$d\underline{r} \underline{\nabla} = dt \frac{\partial}{\partial t} + d\vec{r} \vec{\nabla} = d \quad (39)$$

есть полный дифференциал и, значит, как известно из математического анализа, инвариант. Все это объясняется тем, что вектор градиента без минуса — ковариантный, а мы записываем контравариантные векторы. Квадрат вектора градиента

$$\underline{\nabla}^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square \quad (40)$$

представляет собой оператор Даламбера.

Компоненты вектора градиента будем также обозначать в виде $\{\nabla_\mu\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\}$ или $\{\nabla^\mu\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$.

§ 4. Скорость, импульс и ускорение

1. *Скорость.* По аналогии с трехмерной скоростью тела $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ четырехмерная скорость определяется как отношение дифференциалов вектора положения и времени. Однако, чтобы скорость получилась четырехмерным вектором, надо четырехмерный вектор делить (или умножать) на скаляр, то есть в качестве времени надо брать не время в какой-то произвольной системе отсчета, а собственное время для данного тела (материальной точки, частицы). Таким образом, по определению

$$\underline{v} = \frac{dr}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \{ct, \vec{r}\} = \{\gamma c, \gamma \vec{v}\} = \gamma \{c, \vec{v}\}, \quad (41)$$

где \vec{v} — обычная трехмерная скорость. Множитель γ обязательно должен входить в составляющие вектора, но мы часто будем писать его вне фигурных скобок.

Квадрат четырехмерной скорости

$$\underline{v}^2 = c^2 > 0, \quad (42)$$

так что вектор скорости времениподобен.

Часто мы будем использовать обозначение для отношения скорости к скорости света и называть его безразмерной (трехмерной или четырехмерной) скоростью

$$\underline{\beta} = \frac{\underline{v}}{c} = \{\gamma, \gamma \vec{\beta}\}, \quad \underline{\beta}^2 = 1. \quad (43)$$

2. *Импульс.* Импульс — это просто скорость, умноженная на массу, но для его составляющих вводятся специальные обозначения:

$$\underline{p} = m\underline{v} = m\{\gamma c, \gamma \vec{v}\} = \{p_0, \vec{p}\}, \quad p_0 = mc\gamma, \quad \vec{p} = m\vec{v}\gamma. \quad (44)$$

Ясно, что вектор импульса тоже времениподобен:

$$\underline{p}^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 > 0. \quad (45)$$

Из последнего равенства вытекает выражение нулевой составляющей через пространственный импульс

$$p_0 = \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} = mc\gamma, \quad p = |\vec{p}|, \quad (46)$$

а из него выражение лоренцевского множителя через тот же импульс

$$\gamma = \sqrt{1 + (p/mc)^2}. \quad (47)$$

С помощью (47) можно выразить и скорость через импульс:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = c \frac{\vec{p}}{p_0} = c \frac{\vec{p}}{\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}}. \quad (48)$$

Нулевая составляющая вектора импульса — это с точностью до множителя — энергия. Удобно ввести обозначение для кинетической энергии релятивистской частицы

$$E_{\text{kin}}(p) = p_0 c - mc^2 = mc^2(\gamma - 1), \quad p = |\vec{p}|, \quad (49)$$

то есть вычитать из полной энергии энергию покоя mc^2 . Отметим, что сразу после создания теории относительности большой резонанс вызвало соотношение $E(p) = cp_0 = mc^2\gamma$ между двумя различными физическими величинами — энергией и массой — и массой стали называть произведение $m\gamma$ (масса движения). Мы под термином масса всегда будем понимать массу покоя m .

Легко проверить, что абсолютная величина трехмерной скорости — это производная от энергии по импульсу:

$$v = |\vec{v}| = \frac{dE(p)}{dp} = \frac{dE_{\text{kin}}(p)}{dp} = c \frac{d\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}}{dp} = \frac{cp}{\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}}. \quad (50)$$

3. Нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

1) Если $v \ll c$, то есть частица движется со скоростью гораздо меньшей скорости света, то $\gamma \sim 1$ и $p \ll mc$. Тогда в нерелятивистском пределе получается

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad E_{\text{kin}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 c^2} - 1\right) = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}, \quad (51)$$

то есть обычные нерелятивистские соотношения.

2) При $v \sim c$ лоренцевский множитель велик $\gamma \gg 1$, а $p \gg mc$. Тогда $\varepsilon \sim pc$.

Соотношение (50) сохраняется в обоих предельных случаях.

4. Ускорение. Оно определяется по аналогии со скоростью

$$\underline{w} = \frac{d\underline{v}}{d\tau} = \gamma \frac{d\underline{v}}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \gamma \{c, \vec{v}\}. \quad (52)$$

Найдем сначала производную от лоренцевского множителя. При дифференцировании удобно использовать очевидное равенство $\vec{v}^2 = v^2$. Имеем

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{c^2}. \quad (53)$$

Тогда получаем

$$\underline{w} = \gamma^2 \left\{ \gamma^2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{c}, \vec{w} + \gamma \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{c^2} \vec{v} \right\}. \quad (54)$$

Как и скорость, ускорение удобно записать через вектор $\vec{\beta}$:

$$\underline{w} = \gamma^2 \left\{ \gamma^2 \vec{\beta} \cdot \vec{w}, \vec{w} + \gamma (\vec{\beta} \cdot \vec{w}) \vec{\beta} \right\}. \quad (55)$$

Вектор ускорения, как нетрудно убедиться, ортогонален вектору скорости. Действительно, если перемножить скалярно (43) и (55), то получится

$$\underline{\beta} \cdot \underline{w} = \gamma^3 (\gamma^2 \vec{\beta} \cdot \vec{w} - \vec{\beta} \cdot \vec{w} - \gamma^2 \beta^2 \vec{\beta} \cdot \vec{w}) = 0. \quad (56)$$

Это естественное соотношение для вектора, квадрат которого не зависит от времени. Его легко получить, если продифференцировать равенство (42) или (43) по собственному времени. Аналогично трехмерная скорость тела, движущегося по поверхности шара, перпендикулярна центробежному или центростремительному ускорению, имеющему радиальное направление.

5. *Квадрат ускорения*. Эта величина, интересная сама по себе, используется в теории излучения. Поэтому проделаем следующую выкладку.

$$\begin{aligned} \underline{w}^2 &= \gamma^4 [\gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \vec{w})^2 - \vec{w}^2 - \gamma^4 \beta^2 (\vec{\beta} \cdot \vec{w})^2 - 2\gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \vec{w})^2] = \gamma^4 [-\vec{w}^2 - \gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \vec{w})^2] = \\ &= \gamma^6 [-\vec{w}^2 + \beta^2 - (\vec{\beta} \cdot \vec{w})^2] = \gamma^6 [-\vec{w}^2 + (\vec{\beta} \times \vec{w})^2]. \end{aligned} \quad (57)$$

Из третьего выражения в цепочке равенств видно, что вообще говоря, вектор ускорения пространственно подобен. Однако, если пространственное ускорение $\vec{w} = 0$, то и четырехмерный вектор нулевой.

6. *Относительная скорость*. Это важное понятие очень просто вводится в обычной нерелятивистской механике: там относительная скорость равна просто разности скоростей. Ясно, что такое определение не подходит в теории относительности.

Как и в нерелятивистской механике, необходимо различать порядок частиц при определении относительной скорости. Назовем скоростью второй частицы относительно первой скорость ее в той системе отсчета, где первая поконится.

Пусть скорости частиц в какой-то системе равны соответственно

$$\underline{v}_1 = \gamma_1 \{c, \vec{v}_1\}, \quad \underline{v}_2 = \gamma_2 \{c, \vec{v}_2\}. \quad (58)$$

Применим преобразование Лоренца со скоростью $\vec{V} = \vec{v}_1$, то есть перейдем в систему покоя первой частицы. В этой системе

$$\underline{v}_{11} = \{\gamma_1^2 (c - \vec{v}_1^2/c), \gamma_1^2 (\vec{v}_1 - \vec{V})\} = \{c, 0\}, \quad (59)$$

$$\underline{v}_{21} = \{\gamma_1 \gamma_2 (c - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2/c), \gamma_2 \vec{v}_2 - \gamma_1 \gamma_2 \vec{v}_1 + (\gamma_1 - 1) \gamma_2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_1/v_1^2\} = \gamma_{21} \{c, \vec{v}_{21}\}. \quad (60)$$

Лоренцевский множитель, соответствующий скорости второй частицы в системе покоя первой,

$$\gamma_{21} = \gamma_1 \gamma_2 (1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2/c^2) = \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 / c^2 = \gamma_r = \gamma_{12} \quad (61)$$

на самом деле не зависит от порядка частиц и является релятивистским инвариантом, так как выражается через скалярное произведение их четырехмерных скоростей. Для трехмерной же скорости второй частицы относительно первой, исключив из ее выражения

$$v_1^2 = c^2 (1 - 1/\gamma_1^2), \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = c^2 (1 - \gamma_r/\gamma_1 \gamma_2), \quad (62)$$

найдем

$$\vec{v}_{21} = \frac{\gamma_2}{\gamma_r} \left[\vec{v}_2 - \gamma_1 \vec{v}_1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_r}{\gamma_2} \right) \vec{v}_1 \right] = \frac{1}{\gamma_r} \left(\gamma_2 \vec{v}_2 - \gamma_1 \frac{\gamma_2 + \gamma_r}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_1 \right). \quad (63)$$

Можно проверить, что квадрат относительной скорости в виде (63) выражается через лоренцевский множитель γ_r :

$$v_{21}^2 = |\vec{v}_{21}|^2 = \frac{c^2}{\gamma_r^2} \left[\gamma_2^2 - 1 + \frac{\gamma_r^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_r \gamma_2}{\gamma_1 + 1} (\gamma_1 - 1) - 2 \frac{\gamma_r + \gamma_2}{\gamma_1 + 1} (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_r) \right] = c \sqrt{1 - 1/\gamma_r^2}, \quad (64)$$

и не зависит от системы координат и от порядка частиц. Величину этой скорости можно записать в другом виде, выразив ее через трехмерные скорости частиц:

$$v_r = v_{12} = v_{21} = c \frac{\sqrt{c^2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}}{c^2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}. \quad (65)$$

Если скорость одной из частиц равна скорости света, то и относительная скорость равна c . Если скорости параллельны, то

$$\vec{v}_{21} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_r} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1). \quad (66)$$

При перпендикулярных скоростях

$$\gamma_r = \gamma_1 \gamma_2, \quad \vec{v}_{21} = \vec{v}_2 / \gamma_1 - \vec{v}_1. \quad (67)$$

Сумма взаимных относительных скоростей

$$\vec{v}_{12} + \vec{v}_{21} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_r} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \vec{v}_2 \right) - \frac{\gamma_r - 1}{\gamma_r} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \vec{v}_2 \right), \quad (68)$$

конечно, симметрична относительно частиц, но равна нулю только в нерелятивистском пределе (приближенно), а также в случае, если скорости обеих частиц совпадают ($\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, так как тогда $\gamma_1 = \gamma_2, \gamma_r = 1$).

§ 5. Импульс фотона

1. *Импульс фотона.* Здесь мы считаем фотон просто частицей, движущейся со скоростью света. Если фотон летит в некоторой системе отсчета (назовем ее системой наблюдателя или нештрихованной) в направлении вектора \vec{l} , то его путь можно охарактеризовать радиусом-вектором

$$\vec{r}_{ph} = \vec{r}_0 + c \vec{l} (t_{ph} - t_0), \quad (69)$$

где \vec{r}_0 — место фотона в начальный момент отсчета его времени $t_{ph} = t_0$. Можно образовать и четырехмерный вектор

$$\underline{r}_{ph} = \{ct_{ph}, \vec{r}_{ph}\} = \{ct_{ph}, \vec{r}_0 + c \vec{l} (t_{ph} - t_0)\}. \quad (70)$$

Мы можем формально продифференцировать вектор (70) по времени:

$$\frac{d\underline{r}_{ph}}{dt_{ph}} = \{c, c \vec{l}\}. \quad (71)$$

Однако в результате не получится четырехмерный вектор, так как время в определенной системе отсчета не является инвариантом. Определения предыдущего параграфа годятся только для частиц с массой покоя, отличной от нуля. Фотон же имеет нулевую массу покоя, для него не существуют собственное время, собственная система отсчета, и он обязан мчаться в пространстве со скоростью света в любой системе. Для этой частицы невозможно ввести понятие четырехмерной скорости, так как лоренцевский множитель для нее обращается в бесконечность. Следовательно невозможно ввести и импульс так, как это было сделано выше.

Тем не менее, фотон имеет энергию и импульс. Если частота фотона ν , а круговая частота $\omega = 2\pi\nu$, то его энергия равна $h\nu = \hbar\omega$ согласно предположению М. Планка. Здесь $h = 6.67 \cdot 10^{-27}$ и $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-27}$ в единицах $\text{г}\cdot\text{см}^2/\text{с}$. А Эйнштейном был определен и импульс фотона \vec{k} , величина которого, как у ультрарелятивистской частицы, равна энергии, деленной на скорость света, $h\nu/c = \hbar\omega/c$, а направление совпадает с направлением движения фотона.

Тем самым оказывается возможным ввести четырехмерный вектор импульса фотона

$$\underline{k} = \left\{ k, \vec{k} \right\} = \frac{h}{c} \left\{ \nu, \nu \vec{l} \right\}, \quad k = \frac{h\nu}{c}, \quad \vec{k} = k \vec{l}, \quad |\vec{l}| = 1. \quad (72)$$

Импульс и энергия фотона являются существенно квантовыми величинами и их выражения содержат постоянную Планка. Если желательно оставаться в рамках классической электродинамики, то вместо векторов импульса можно использовать волновые векторы, а вместо энергии — волновое число:

$$\underline{x} = \frac{\underline{k}}{\hbar}, \quad x = \frac{k}{\hbar} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \quad \vec{x} = \frac{\vec{k}}{\hbar} = \vec{x} \vec{l}. \quad (73)$$

Здесь $\lambda = c/\nu$ — длина волны, соответствующая частоте ν , а $\lambda = \lambda/2\pi$. Классические величины отличаются от квантовых на постоянные множители и релятивистские свойства у них те же самые.

Применение к импульсу фотона преобразования Лоренца выявляет два важных эффекта.

2. *Эффект Доплера.* Запишем формулу преобразования от нештрихованной системы отсчета к штрихованной, движущейся относительно первой со скоростью $\vec{V} = V \vec{e}$. Как и выше, пусть единичные векторы, в направлении которых летит фотон, обозначаются \vec{l} и \vec{l}' , а углы, образуемые этими ортами с вектором скорости, θ и θ' . Тогда

нулевые составляющие вектора импульса фотона, то есть его величины или, что в сущности то же самое, его частоты (или энергии) преобразуются следующим образом:

$$\nu' = \nu \Gamma \left(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{V}}{c} \right) = \nu \Gamma \left(1 - \frac{V}{c} \vec{e} \cdot \vec{l} \right), \quad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{\Gamma(1 - V \cos \theta/c)}. \quad (74)$$

Обратное преобразование получается, как обычно, заменой скорости на противоположную ($\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$):

$$\nu = \nu' \Gamma \left(1 + \frac{\vec{l}' \cdot \vec{V}}{c} \right) = \nu' \Gamma \left(1 + \frac{V}{c} \vec{e} \cdot \vec{l}' \right), \quad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{\Gamma(1 + V \cos \theta'/c)}. \quad (75)$$

Приведенные формулы, если отбросить лоренцевский множитель Γ , выражают обычный классический эффект, установленный в 1842 году Х. Доплером. Если светящийся объект летит к наблюдателю, частота света увеличивается, если от него — уменьшается. Наличие множителей Γ показывает, что даже при перпендикулярном по отношению к наблюдателю движении фотона, происходит сдвиг (увеличение) его частоты. Это явление называется поперечным эффектом Доплера. Он не существует согласно классической теории. Поскольку его поправка имеет порядок V^2/c^2 , то есть второго порядка малости по отношению к поправке, пропорциональной скорости V/c , поперечный эффект не был замечен до создания теории относительности.

Линейный же эффект имеет простое объяснение, которое подходит и для звуковых колебаний и заключается в том, что движущийся наблюдатель в зависимости от направления своего движения встречает больше или меньше волн (периодов), чем неподвижный. То же происходит, если движется источник. Для звука такое объяснение было известно давно, так как эффект легко заметен даже при не очень больших скоростях.

Дробь, равная отношению частот в (74)

$$D(V, \theta) = \frac{1}{\Gamma(1 - V \cos \theta/c)}, \quad (76)$$

называется множителем Доплера или доплер-фактором. Этот множитель появляется во многих выражениях для разных величин. Отметим его значения “вперед” и “назад”, а также их отношение:

$$D(V, 0) = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}, \quad D(V, \pi) = \frac{1}{D(V, 0)} = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}, \quad \frac{D(V, 0)}{D(V, \pi)} = D^2(V, 0) = \frac{1 + V/c}{1 - V/c}. \quad (77)$$

На рис. 5 представлены диаграммы зависимости этого множителя от угла θ при скоростях $V/c = 0, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99, 0.995$. Соответствующие значения лоренцевского множителя $\Gamma = 1.67, 2.29, 3.20, 5.03, 7.09, 10.01$, а значения “вперед” $D(V, 0) = 1, 4.36, 6.24, 9.95, 14.11, 19.97$. Ширина диаграмм по вертикали равна 2 независимо от значения V/c и достигается между точками, соответствующими углам $\theta = \pm \arccos(V/c) = \pm \arcsin(1/\Gamma)$.

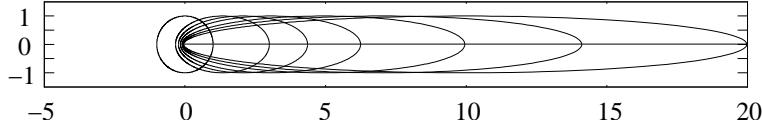


Рис. 5. Зависимость доплер-фактора от направления при скоростях источника $V/c = 0, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99, 0.995$.

При скоростях, близких к скорости света, диаграммы сильно вытянуты вперед, так что фактически угол θ заключен в узких пределах, порядка $1/\Gamma$. В связи с этим обычно применяется приближенное представление функции $D(V, \theta)$. Разность, заключенную в скобках, заменяют по схеме

$$1 - \frac{V}{c} \cos \theta = \frac{1 - V^2/c^2}{1 + V/c} + \frac{V}{c}(1 - \cos \theta) \sim \frac{1}{2\Gamma^2} + \frac{\theta^2}{2} = \frac{1 + \Gamma^2\theta^2}{2\Gamma^2}. \quad (78)$$

Тогда множитель приобретает вид

$$D(V, \theta) \sim \frac{2\Gamma}{1 + \Gamma^2\theta^2}. \quad (79)$$

Такую замену угла при ультраквантитативистских скоростях мы будем неоднократно применять.

3. Аберрация. Преобразование пространственной составляющей импульса фотона при переходе от ненштрихованной системы к штрихованной выглядит так:

$$\nu' \vec{l}' = \nu \vec{l} - \Gamma \nu \frac{V}{c} \vec{e} + (\Gamma - 1) \nu (\vec{e} \cdot \vec{l}) \vec{e}. \quad (80)$$

Отсюда находим закон преобразования ортов направлений распространения фотона:

$$\vec{l}' = \frac{\vec{l} - (\vec{e} \cdot \vec{l}) \vec{e} + \Gamma (\vec{e} \cdot \vec{l} - V/c) \vec{e}}{\Gamma (1 - V \vec{e} \cdot \vec{l}/c)}. \quad (81)$$

Обратное по отношению к (81) преобразование имеет тот же вид, но с заменой $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$

$$\vec{l} = \frac{\vec{l}' - (\vec{e} \cdot \vec{l}') \vec{e} + \Gamma (\vec{e} \cdot \vec{l}' + V/c) \vec{e}}{\Gamma (1 + V \vec{e} \cdot \vec{l}'/c)}. \quad (82)$$

Три вектора \vec{e} , \vec{l} и \vec{l}' лежат в одной плоскости, назовем ее плоскостью аберрации.

В чисителях дробей в формулах (81) и (82) первые два слагаемых составляют векторы, перпендикулярные вектору \vec{e} , а оставшиеся — параллельные ему. В связи с этим легко написать следующие соотношения:

$$\vec{e} \cdot \vec{l} = \frac{\vec{e} \cdot \vec{l}' + V/c}{1 + V \vec{e} \cdot \vec{l}'/c}, \quad \vec{e} \times \vec{l} = \frac{\vec{e} \times \vec{l}'}{\Gamma(1 + V \vec{e} \cdot \vec{l}'/c)}, \quad (83)$$

$$\vec{e} \cdot \vec{l}' = \frac{\vec{e} \cdot \vec{l} - V/c}{1 - V \vec{e} \cdot \vec{l}/c}, \quad \vec{e} \times \vec{l}' = \frac{\vec{e} \times \vec{l}}{\Gamma(1 - V \vec{e} \cdot \vec{l}/c)}. \quad (84)$$

Из (80) вытекает также соотношение между векторными произведениями:

$$\omega' \vec{l}' \times \vec{l} = \omega \left[\Gamma V/c - (\Gamma - 1) \vec{e} \cdot \vec{l} \right] \vec{l} \times \vec{e}. \quad (85)$$

Равенства (83) и (84) можно записать через тригонометрические функции:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + V/c}{1 + V \cos \theta'/c}, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta - V/c}{1 - V \cos \theta/c}, \quad \sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\Gamma(1 + V \cos \theta'/c)}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\Gamma(1 - V \cos \theta/c)}. \quad (86)$$

Из этих соотношений или из равенства (85) с учетом (74) следует, что

$$\sin(\theta' - \theta) = \sin \theta \frac{V/c - (1 - 1/\Gamma) \cos \theta}{1 - V \cos \theta/c}. \quad (87)$$

Нетрудно вывести еще одно соотношение между углами:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = D(V, \pi) \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2}, \quad (88)$$

которое показывает, что если угол θ' не равен 0 или π , он всегда больше угла θ , то есть вектор \vec{l}' располагается между векторами \vec{e} и \vec{l} .

Отметим частные и предельные случаи. Понятно, что при $V = 0$ (или даже при $V \ll c$) аберрации нет и $\vec{l} = \vec{l}'$. Напротив, если формально положить $V = c$, то вектор \vec{l}' сольется с вектором скорости $\vec{l} = \vec{e}$. При $\theta' = \pi/2$ будет $\cos \theta = V/c$, $\sin \theta = 1/\Gamma$, а чтобы оказалось $\theta = \pi/2$ нужно, чтобы было $\cos \theta' = -V/c$, $\sin \theta' = 1/\Gamma$.

Рис. 6 дает представление о зависимости между углами θ и θ' при скоростях $V/c = 0(0.1)0.9$, а также $V/c = 0.95, 0.98, 0.99, 0.995, 0.999, 0.9995, 0.9999$. На рис. 7 показаны положения вектора \vec{l} при $\theta' = \pi/3$ и $V/c = 0, 1/3, 1/2, 4/5, 12/13$ и 1 . Соответствующие значения $\Gamma = 1, 3/(2\sqrt{2}), 2/\sqrt{3}, 5/3, 13/5, \infty$. Крайние значения, как отмечалось, соответствуют векторам \vec{l}' и \vec{e} .

4. *Классическая формула аберрации.* Если в (87) отбросить члены порядка выше первого по скорости, то получится классическая формула аберрации

$$\sin(\theta' - \theta) = \frac{V}{c} \sin \theta. \quad (89)$$

Аберрация, то есть изменение направления на движущийся объект или восприятие объекта движущимся наблюдателем, проявляется не только для света. Очевидна аберрация дождя: даже если он идет вертикально, человеку, бегущему со скоростью, сравнимой со скоростью падения дождевых капель, эти капли будут попадать в лицо. Конечно, картину портит ветер. На аберрацию звука, по-видимому, внимания не обращали, хотя эффект

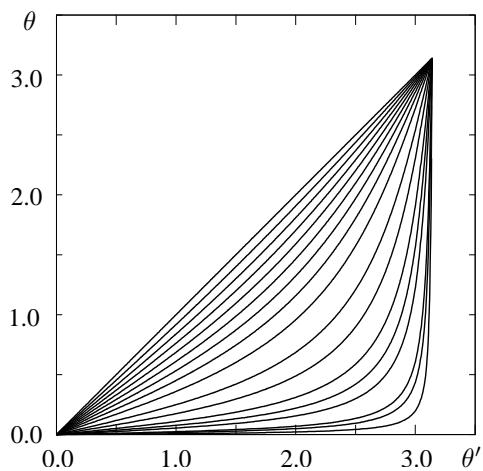


Рис. 6. Зависимость угла θ от угла θ' при различных скоростях источника.

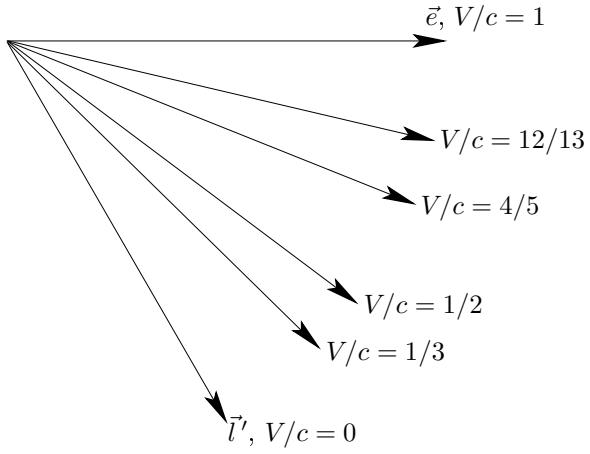


Рис. 7. Положения вектора \vec{l} при $\theta' = \pi/3$ и различных скоростях источника.

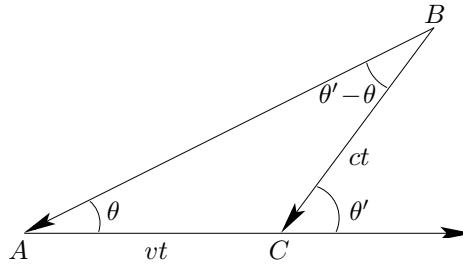


Рис. 8. Объяснение классической аберрации.

Доплера для звука хорошо известен. Восприятие направления звука человеком не столь определенно, как высота звучания, а скорости, сравнимые со скоростью звука, были достигнуты только в эпоху самолетов.

Аберрация света за счет движения Земли была открыта Брадлеем при попытке измерить параллаксы звезд. Он же дал следующее объяснение этому явлению. Пусть неподвижный наблюдатель (рис. 8) из точки A видит источник света, находящийся в точке B на достаточно большом расстоянии от него, под углом θ к направлению скорости другого наблюдателя. Тогда движущийся наблюдатель увидит тот же источник под другим углом θ' к той же скорости, так как пока он двигался, свет от источника тоже прошел некоторый путь и наблюдатель воспринял его в точке C . За одно и то же время t наблюдатель продвинулся на расстояние vt , а свет прошел путь ct . В треугольнике ABC угол A равен θ , а внешний угол $C - \theta'$, так что угол B — это их разность $\theta' - \theta$. Проекции этих расстояний на перпендикуляр к стороне AB , то есть высота из вершины C , должны быть равны:

$$vt \sin \theta = ct \sin(\theta' - \theta), \quad (90)$$

что совпадает с формулой классической аберрации. Интересно отметить, что эффект не зависит от времени t , то есть от удаленности источника. Строгую формулу можно вывести только исходя из теории относительности. Точность измерений Брадлея была достаточна для обнаружения аберрации, но недостаточна для ее устранения, так что параллаксы звезд определили другие. Для таких измерений можно обойтись классическими формулами эффекта Доплера и аберрации, так как скорости движения Земли и большинства звезд существенно меньше скорости света.

5. *Инварианты*. При преобразованиях Лоренца импульса фотона ряд величин остается неизменными. Так из (80) следует, что

$$\nu' \vec{l}' \times \vec{e} = \nu \vec{l} \times \vec{e}. \quad (91)$$

Взяв модуль от обеих частей этого равенства, найдем

$$\nu' \sin \theta' = \nu \sin \theta, \quad (92)$$

так что произведение частоты на синус угла импульса фотона со скоростью системы отсчета является инвариантом.

Другой инвариант связан с элементом объема в пространстве импульсов. Продифференцировав второе из соотношений (86), получим

$$\sin \theta' d\theta' = \frac{\sin \theta}{\Gamma^2(1 - \vec{V} \cos \theta/c)^2} d\theta = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^2 \sin \theta d\theta. \quad (93)$$

Таким образом, инвариантом является произведение $\nu^2 \sin \theta d\theta$, а значит, и $\nu d\theta$.

Инвариантны также элемент объема в пространстве импульса фотона, деленный на частоту (или на величину импульса) d^3k/k , и элемент телесного угла, умноженный на квадрат импульса $k^2 d^2l$, что проверяется непосредственно или на основе приведенных в этом параграфе формул для преобразованных частот и углов. Инвариантом является и отношение dk/k . Заметим, что для частиц с массой инвариантной величиной является только d^3p/p_0 .

§ 6. Тензоры и действия с ними

1. *Определение и типы тензоров.* Тензор — это более сложное понятие, соотносящееся с операторами или квадратными матрицами, так же, как векторы соотносятся со столбцами. В простейшем случае тензор представляет собой диадное произведение векторов. Поэтому и преобразуются тензоры как диады. Общее преобразование для тензоров мы приведем ниже.

Мы будем иметь дело почти исключительно с тензорами первого (векторами) и второго порядков (или, как обычно говорят, рангов). Скаляр может быть назван тензором нулевого ранга.

Представления тензоров, как и векторов, могут быть разных типов. Мы будем пользоваться, в основном, чисто контравариантными представлениями, с обоими верхними индексами $\hat{A} = \{A^{\mu\nu}\}$. Название типа представления будем относить к самому тензору.

Если надо перейти к смешанному тензору, второй индекс которого является нижним, то этот тензор получается в результате применения метрического тензора $A^\mu_\nu = A^{\mu\rho}g_{\rho\nu}$. Этот тензор отличается от исходного полностью контравариантного тем, что у его компонент с нижним вторым пространственным индексом другой знак, то есть $A^\mu_0 = A^{\mu 0}$, $A^\mu_k = -A^{\mu k}$, $k = 1, 2, 3$. Так же поднимаются и опускаются и все индексы. У тензоров следует, вообще говоря, различать порядок их индексов, поэтому второй индекс у смешанных тензоров пишется отступя: $\{A^\mu_\nu\}$ и $\{A_\mu^\nu\}$.

Тензоры могут умножаться на векторы. Так как к контравариантному вектору, чтобы получился снова контравариантный вектор, должен быть применен смешанный тензор, эту операцию изображают так:

$$b^\mu = A^\mu_\nu a^\nu. \quad (94)$$

2. *Базисные тензоры.* Среди тензоров выделяется уже упоминавшийся основной метрический тензор, изображаемый диагональной матрицей

$$\hat{g} = \{g_{\mu\nu}\} = \{g^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (95)$$

Эта матрица является обратной самой себе. Поэтому полностью ковариантный и полностью контравариантный тензоры изображаются одной и той же симметричной матрицей \hat{g} . Это утверждение записывается в виде равенств $g_{\mu\nu}g^{\nu\tau} = \delta_\mu^\tau$, где справа стоит символ Кронекера — единичная матрица.

Если ввести обозначение \check{I} для трехмерной единичной матрицы, то четырехмерная единичная матрица $\hat{\delta}$ и матрица тензора \hat{g} представляется так:

$$\hat{\delta} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \check{I} \end{Bmatrix}, \quad \hat{g} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\check{I} \end{Bmatrix}. \quad (96)$$

Как уже говорилось, с помощью метрического тензора можно из контравариантных представлений векторов получать ковариантные посредством соотношения вида

$$a_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu, \quad \underline{a} = \{a^\mu\} = \{a_0, \vec{a}\}, \quad \{a_\mu\} = \{a_0, -\vec{a}\}. \quad (97)$$

Эта операция называется опусканием индекса, противоположная — поднятием. Опусканье или поднятие нулевого индекса не изменяет компоненты, при опускании или поднятии пространственного индекса у компоненты изменяется знак.

Будет использован еще один базисный тензор, обозначаемый $\{e^{\mu\nu\rho\sigma}\}$ и называемый совершенно антисимметричным тензором четвертого ранга. Это единственный в курсе тензор четвертого ранга, но очень простой. Он вводится условием, что $e^{0123} = 1$, а остальные его компоненты равны 1 или -1 в зависимости от четности или нечетности перестановки индексов.

3. *Матричные обозначения.* Для наглядности и облегчения выполнения реальных, а не символических действий с векторами и тензорами будем записывать четырехмерные и в их составе трехмерные векторы в виде

столбцов, как это принято в алгебре:

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} a^0 \\ \vec{a} \end{Bmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{Bmatrix} a^1 = a_x \\ a^2 = a_y \\ a^3 = a_z \end{Bmatrix}. \quad (98)$$

Как говорилось выше, переход от контравариантных составляющих к смешанным и ковариантным и обратно производится при помощи матрицы метрического тензора. Так ковариантные составляющие вектора получаются умножением контравариантного вектора: $\hat{g} \cdot \underline{a}$. Скалярное произведение двух векторов в матричных обозначениях можно записать в виде

$$\{a_\mu b^\mu\} = [\hat{g} \cdot \underline{a}]^T \cdot \underline{b} = \underline{a}^T \cdot \hat{g} \cdot \underline{b}. \quad (99)$$

Точка между сомножителями означает матричное умножение.

Тензоры второго порядка удобно для наглядности изображать квадратными матрицами. Полностью контравариантный и полностью ковариантный тензоры изображаются так:

$$\hat{A} = \{A^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{30} & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}, \quad \{A_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} A_{00} = A^{00} & A_{01} = -A^{01} & A_{02} = -A^{02} & A_{03} = -A^{03} \\ A_{10} = -A^{10} & A_{11} = A^{11} & A_{12} = A^{12} & A_{13} = A^{13} \\ A_{20} = -A^{20} & A_{21} = A^{21} & A_{22} = A^{22} & A_{23} = A^{23} \\ A_{30} = -A^{30} & A_{31} = A^{31} & A_{32} = A^{32} & A_{33} = A^{33} \end{pmatrix}. \quad (100)$$

При этом первый индекс нумерует строки, а второй — столбцы тензора. Связь между двумя приведенными матрицами такова: $\{A_{\mu\nu}\} = \hat{g} \hat{A} \hat{g}$. Правые нижние миноры у этих двух представлений тензора совпадают, так как у их элементов пространственные индексы изменены дважды.

Смешанных тензоров может быть два: один с опущенным вторым индексом, другой с опущенным первым. Их также можно представить матрицами и связать с матрицей контравариантного тензора:

$$\{A^\mu_\nu\} = \hat{A} \hat{g} = \begin{pmatrix} A_0^0 = A^{00} & A_1^0 = -A^{01} & A_2^0 = -A^{02} & A_3^0 = -A^{03} \\ A_1^0 = A^{10} & A_1^1 = -A^{11} & A_1^2 = -A^{12} & A_1^3 = -A^{13} \\ A_2^0 = A^{20} & A_2^1 = -A^{21} & A_2^2 = -A^{22} & A_2^3 = -A^{23} \\ A_3^0 = A^{30} & A_3^1 = -A^{31} & A_3^2 = -A^{32} & A_3^3 = -A^{33} \end{pmatrix}, \quad (101)$$

$$\{A_\mu^\nu\} = \hat{g} \hat{A} = \begin{pmatrix} A_0^0 = A^{00} & A_0^1 = A^{01} & A_0^2 = A^{02} & A_0^3 = A^{03} \\ A_0^1 = -A^{10} & A_0^1 = -A^{11} & A_0^2 = -A^{12} & A_0^3 = -A^{13} \\ A_0^2 = -A^{20} & A_0^2 = -A^{21} & A_0^2 = -A^{22} & A_0^3 = -A^{23} \\ A_0^3 = -A^{30} & A_0^3 = -A^{31} & A_0^3 = -A^{32} & A_0^3 = -A^{33} \end{pmatrix}. \quad (102)$$

Смешанные формы тензора также имеют совпадающие пространственные части (правые нижние миноры третьего порядка).

Если тензор симметричный, то есть $B^{\mu\nu} = B^{\nu\mu}$, то $\hat{B} = \hat{B}^T$, $\{B^\mu_\nu\} = \hat{B} \hat{g}$, $\{B_\mu^\nu\} = \hat{g} \hat{B}$. Очевидно, что $\hat{g} \hat{B} = [\hat{B} \hat{g}]^T$, то есть $\{B_\mu^\nu\} = \{B_\nu^\mu\}$. Поэтому смешанное представление симметричного тензора можно записывать в виде B_μ^ν . Так уже делалось в отношении тензора \hat{d} .

Умножение тензора на вектор тоже надо выполнять через матрицу метрического тензора. Равенство (94) следует записать так:

$$\underline{b} = \hat{A} \cdot \hat{g} \cdot \underline{a}. \quad (103)$$

4. *Матричное представление преобразования Лоренца.* В виде матрицы можно записать и преобразование Лоренца. Например, если вектор в контравариантном представлении в нештрихованной и штрихованной системах отсчета изобразить в виде столбцов:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}' = \begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix}, \quad (104)$$

то преобразование (27) можно записать в матричном виде сравнительно коротко:

$$\underline{a}' = \hat{\mathcal{A}}_{\text{L}} \underline{a}, \quad (105)$$

где матрица преобразования

$$\hat{\mathcal{A}}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma V_x/c & -\Gamma V_y/c & -\Gamma V_z/c \\ -\Gamma V_x/c & 1 + (\Gamma - 1)V_x^2/V^2 & (\Gamma - 1)V_x V_y/V^2 & (\Gamma - 1)V_x V_z/V^2 \\ -\Gamma V_y/c & (\Gamma - 1)V_x V_y/V^2 & 1 + (\Gamma - 1)V_y^2/V^2 & (\Gamma - 1)V_y V_z/V^2 \\ -\Gamma V_z/c & (\Gamma - 1)V_x V_z/V^2 & (\Gamma - 1)V_y V_z/V^2 & 1 + (\Gamma - 1)V_z^2/V^2 \end{pmatrix}. \quad (106)$$

Исходя из приведенного представления матрицы преобразования Лоренца, легко установить его свойства, отмеченные в § 1. Именно матрица \hat{A}_L является симметричной, ее определитель равен 1, а обратная отличается только отсутствием знака минус в трех элементах первой строки и первого столбца.

Матрица преобразования (106) записана как матрица, соответствующая смешанному тензору второго ранга (порядка), и может быть представлена в виде $\hat{A}_L = \hat{L} \cdot \hat{g}$, аналогичном представлению тензоров. Матрица преобразования Лоренца в контравариантном представлении имеет вид

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma V_x/c & -\Gamma V_y/c & -\Gamma V_z/c \\ \Gamma V_x/c & -1 - (\Gamma - 1)V_x^2/V^2 & -(\Gamma - 1)V_x V_y/V^2 & -(\Gamma - 1)V_x V_z/V^2 \\ \Gamma V_y/c & -(\Gamma - 1)V_x V_y/V^2 & -1 - (\Gamma - 1)V_y^2/V^2 & -(\Gamma - 1)V_y V_z/V^2 \\ \Gamma V_z/c & -(\Gamma - 1)V_x V_z/V^2 & -(\Gamma - 1)V_y V_z/V^2 & -1 - (\Gamma - 1)V_z^2/V^2 \end{pmatrix}. \quad (107)$$

Для нее выполняются соотношения $\{L_{\mu\nu}\} = \hat{g} \hat{L} \hat{g} = \hat{L}^T$, $\hat{L} \hat{g} = [\hat{L} \hat{g}]^T = \hat{g} \hat{L}^T$.

Подобные матрицы удобно записывать символически, договорившись об обозначениях. Если использовать обозначение для диадного произведения трехмерных векторов, то формулу (106) можно переписать короче:

$$\hat{A}_L = \hat{L} \cdot \hat{g} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma \vec{V}^T/c \\ -\Gamma \vec{V}/c & \check{I} + (\Gamma - 1)\vec{V} \cdot \vec{V}^T/V^2 \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Эту же матрицу можно записать еще в одном виде, если положить $V/c = \operatorname{th} \chi$, $\Gamma = \operatorname{ch} \chi$ и задать вектор скорости сферическими координатами $\vec{V} = V(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$:

$$\hat{A}_L = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \chi & -\operatorname{sh} \chi \sin \theta \cos \varphi & -\operatorname{sh} \chi \sin \theta \sin \varphi & -\operatorname{sh} \chi \cos \theta \\ -\operatorname{sh} \chi \sin \theta \cos \varphi & 1 + 2 \operatorname{sh}^2(\chi/2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi & 2 \operatorname{sh}^2(\chi/2) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi & 2 \operatorname{sh}^2(\chi/2) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \\ -\operatorname{sh} \chi \sin \theta \sin \varphi & 2 \operatorname{sh}^2(\chi/2) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi & 1 + 2 \operatorname{sh}^2(\chi/2) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi & 2 \operatorname{sh}^2(\chi/2) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \\ -\operatorname{sh} \chi \cos \theta & 2 \operatorname{sh}^2(\chi/2) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi & 2 \operatorname{sh}^2(\chi/2) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi & 1 + 2 \operatorname{sh}^2(\chi/2) \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Если $\theta = 0$, то получится матрица частного преобразования (7).

Преобразование Лоренца для векторов в матричном виде через матрицу \hat{L} выглядит так:

$$\underline{a}' = \hat{L} \cdot \hat{g} \cdot \underline{a}. \quad (110)$$

а преобразование тензоров изображается матричным соотношением

$$\hat{A}' = \hat{L} \cdot \hat{g} \cdot \hat{A} \cdot [\hat{L} \cdot \hat{g}]^{-1} = \hat{L} \cdot \hat{g} \cdot \hat{A} \cdot \hat{g} \cdot \hat{L}^{-1}. \quad (111)$$

5. *Действия с тензорами.* Тензоры одинаковой природы, как и векторы, можно складывать, умножать на числа и производить с ними все другие линейные операции, например, дифференцирование или интегрирование по скалярам. Но есть одна операция, применяемая именно к тензорам. Эта операция — свертка, то есть суммирование по одинаковым индексам тензора. В случае тензора второго ранга она выполняется так:

$$A = A^\mu{}_\mu = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3 = A^{00} - A^{11} - A^{22} - A^{33} = A_\mu^\mu. \quad (112)$$

Свертка тензора второго ранга совпадает со взятием следа (шпура) матрицы:

$$A = A^\mu{}_\mu = A_\mu{}^\mu = \operatorname{Sp}(\hat{g} \cdot \hat{A}) = \operatorname{Sp}(\hat{A} \cdot \hat{g}) = A_0^0 + A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 = A^{00} - A^{11} - A^{22} - A^{33}. \quad (113)$$

Часто возникает необходимость векторного дифференцирования тензоров, то есть выполнения операции, подобной взятию дивергенции:

$$\operatorname{Div} \hat{A} = \{\nabla_\mu A^{\mu\nu}\} = \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^{0\nu} + \frac{\partial}{\partial x} A^{1\nu} + \frac{\partial}{\partial y} A^{2\nu} + \frac{\partial}{\partial z} A^{3\nu} \right\} = \nabla^T \hat{g} \hat{A}. \quad (114)$$

§ 7. Релятивистские формулы для величин электродинамики

1. *Вектор тока.* Пусть электромагнитное поле создается и распространяется в свободном пространстве. В этом случае описывающим его величинам и соотношениям можно придать релятивистски ковариантный вид. Начнем с плотности заряда и тока.

Исходя из того обстоятельства, что количество заряда является скалярной величиной, напишем цепочку равенств

$$\rho d^3r = \frac{\rho}{\gamma} \gamma d^3r = \frac{\rho}{\gamma} d^3r_0. \quad (115)$$

Здесь ρ — плотность заряда, γ — лоренцевский множитель, связывающий систему отсчета, в которой заряд поконится, с движущейся по отношению к ней со скоростью $v = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$. Так как стоящий слева заряд элементарного объема и множитель справа d^3r_0 — собственный объем заряда — являются релятивистскими инвариантами, то скаляром является и отношение $\rho/\gamma = \rho_0$, представляющее собой плотность заряда в его собственной системе отсчета.

Если умножить эту скалярную величину на четырехмерный вектор скорости элементарного заряда, то получится снова четырехмерный вектор, называемый вектором плотности заряда-тока или короче вектором тока:

$$\underline{j} = \frac{\rho}{\gamma} \{c\gamma, \vec{v}\gamma\} = \{c\rho, \vec{j}\}. \quad (116)$$

Равенство нулю скалярного произведения векторов градиента и тока

$$\underline{\nabla} \underline{j} = \underline{\nabla}^T \cdot \hat{g} \cdot \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{j} = 0 \quad (117)$$

представляет собой уравнение неразрывности.

2. *Потенциалы*. Уравнения, которым удовлетворяют потенциалы

$$\square \varphi = 4\pi\rho, \quad \square \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (118)$$

являются временной и пространственной составляющими одного четырехмерного векторного уравнения

$$\square \underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}. \quad (119)$$

Поскольку справа стоит четырехмерный вектор, а оператор Даламбера — скаляр, то и потенциалы образуют вектор

$$\underline{A} = \{\varphi, \vec{A}\}. \quad (120)$$

Скалярное произведение градиента на этот вектор, равное нулю

$$\underline{\nabla} \underline{A} = \underline{\nabla}^T \cdot \hat{g} \cdot \underline{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{A} = 0, \quad (121)$$

отражает условие Лоренца.

§ 8. Вариационный принцип для заряда в электромагнитном поле

1. *Действие и функция Лагранжа для частицы*. Основным вариационным принципом механики является принцип наименьшего действия. Он сохраняется и в релятивистской механике, но выражения для соответствующих величин являются релятивистскими обобщениями величин классической механики.

Начнем с определения действия для свободной частицы, на которую не действуют никакие силы. Эта величина не должна зависеть от системы отсчета, то есть быть инвариантом преобразования Лоренца. Поскольку действие представляется интегралом, то этот интеграл должен браться от дифференциала скаляра, а такой для свободной частицы имеется только один: это дифференциал элемента пути, то есть дифференциал интервала $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dr^2}$. Под знаком корня стоит положительное число, так как частица движется со скоростью, меньшей скорости света. В этом случае $ds = cd\tau = cdt/\gamma$, где τ — собственное время частицы, а $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Закрепляем начальную $\{ct_1, \vec{r}_1\}$ (1) и конечную $\{ct_2, \vec{r}_2\}$ (2) точки четырехмерной траектории частицы, которая называется мировой линией. Тогда действие можно записать в виде

$$S = -mc \int_{(1)}^{(2)} ds. \quad (122)$$

Выбор знака и коэффициента определяется переходом к нерелятивистскому пределу.

Функция Лагранжа определяется как подинтегральная функция в интеграле действия, взятом по времени:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (123)$$

При нерелятивистских скоростях

$$L \sim -mc^2 + \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} - mc^2 \quad (124)$$

эта функция с точностью до несущественного слагаемого совпадает с функцией Лагранжа нерелятивистской механики.

2. *Вариационный принцип для свободной частицы.* Запишем действие через дифференциалы координат

$$S = -mc \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{dx_\mu dx^\mu} \quad (125)$$

и найдем его вариацию:

$$\delta S = -mc \int_{(1)}^{(2)} \frac{\delta(dx_\mu) dx^\mu + dx_\mu \delta(dx^\mu)}{2ds} = -mc \int_{(1)}^{(2)} \frac{dx^\mu \delta(dx_\mu)}{cd\tau} = -m \int_{(1)}^{(2)} v_\mu \delta(dx^\mu) = -m \int_{(1)}^{(2)} \underline{v} \delta(d\underline{r}). \quad (126)$$

Проинтегрировав по частям с учетом того, что операции дифференцирования и варьирования перестановочны, получим

$$\delta S = -mv_\mu \delta(x^\mu)|_{(1)}^{(2)} + m \int_{(1)}^{(2)} \delta(x^\mu) \frac{du_\mu}{ds} ds. \quad (127)$$

При закреплении обеих точек вариации $\delta(x^\mu)_{(1)} = \delta(x^\mu)_{(2)} = 0$, а истинная траектория определяется условием $\delta S = 0$. Тогда получается уравнение $\frac{du_\mu}{ds} = 0$, то есть постоянство четырехмерной скорости, что соответствует прямолинейному и равномерному движению, как и должно быть для свободной частицы.

Чтобы найти вариацию действия как функцию координат, надо закрепить одну точку (первую, $\delta(x^\mu)_{(1)} = 0$) и варьировать координаты второй, положив $\delta(x^\mu)_{(2)} = dx^\mu$. При этом интеграл по-прежнему равен нулю, так как траектории рассматриваются только истинные. Таким образом, получаем

$$\delta S = -mv_\mu \delta(x^\mu) = -m\underline{v} \delta(\underline{r}). \quad (128)$$

Четырехмерный вектор производных

$$p_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu}, \quad \underline{p} = -\underline{\nabla}S, \quad \vec{p} = \vec{\nabla}S, \quad p_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{E}{c}, \quad (129)$$

совпадает с четырехмерным импульсом, причем градиент и производная по времени от действия так же связаны с импульсом и энергией, как в нерелятивистской механике.

3. *Заряд в электромагнитном поле.* Действие в этом случае складывается из двух частей: действия заряда q как частицы и действия, отражающего влияние на него поля. Эта часть должна быть скалярной линейной функцией дифференциалов координат. Коэффициентами оказываются потенциалы, так что

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \left(-mc ds - \frac{q}{c} A_\mu dx^\mu \right) = \int_{(1)}^{(2)} \left(-mc ds - \frac{q}{c} \underline{A} d\underline{r} \right). \quad (130)$$

Через интеграл по времени это выражение записывается в виде

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c} \vec{A} \vec{v} \right), \quad (131)$$

так что функция Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c} \vec{A} \vec{v}. \quad (132)$$

Два последних слагаемых описывают взаимодействие заряда с полем.

Производные от функции Лагранжа по трехмерным компонентам скорости составляют компоненты обобщенного импульса. Соберем эти производные в градиент по скорости и напишем

$$\vec{\nabla}_{\vec{v}} L = \vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{q}{c} \vec{A} = m\vec{v}\gamma + \frac{q}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A}, \quad (133)$$

где \vec{p} — обычный импульс частицы. Последнее равенство допускает четырехмерное обобщение:

$$\underline{P} = \underline{p} + \frac{q}{c} \underline{A}, \quad P_0 = mc\gamma + \frac{q}{c}\varphi = p_0 + \frac{q}{c}\varphi. \quad (134)$$

4. *Уравнения движения заряда в поле.* Конечно, поле влияет на движение заряда, но и заряд, порождая при своем движении дополнительное поле, тем самым влияет на поле. Однако, в большинстве случаев это дополнительное поле значительно слабее внешнего и влияние заряда на последнее можно не учитывать. Будем искать уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле. Эти уравнения получаются с помощью уравнений Эйлера, то есть варьированием функции Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} L = \vec{\nabla} L. \quad (135)$$

Правую часть этого уравнения можно считать известной — это производная по времени от обобщенного импульса заряда. Градиент (частный) функции Лагранжа находится при условии закрепления скорости:

$$\vec{\nabla} L = \frac{q}{c} \text{grad}(\vec{A}\vec{v}) - q \text{grad} \varphi \quad (136)$$

Здесь надо использовать формулу

$$\text{grad}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\vec{\nabla})\vec{a} + \vec{b} \times \text{rot} \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot} \vec{b}. \quad (137)$$

Следовательно,

$$\vec{\nabla} L = \frac{q}{c}(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \text{rot} \vec{A} - q \text{grad} \varphi. \quad (138)$$

Производную от векторного потенциала по вектору скорости можно исключить, приняв во внимание, что полная производная от потенциала по времени вдоль траектории заряда

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A}. \quad (139)$$

Эта полная производная входит в производную от обобщенного импульса и сокращается, так что уравнение (135) принимает вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q\varphi + \frac{q}{c}\vec{v} \times \text{rot} \vec{A}. \quad (140)$$

Пользуясь выражениями напряженностей через потенциалы, получим окончательный вид уравнения движения:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{H}. \quad (141)$$

Справа стоит выражение для силы Лоренца.

5. *Общие релятивистские уравнения движения.* Равенство (141) представляет уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Сформулируем теперь более общие уравнения движения частиц.

Рассмотрим движение некоторой частицы, тела или материальной точки. Для определенности будем говорить о частице, так как по отношению к телу возникает вопрос о его искажении при движении.

В уравнениях движения производная должна вычисляться по собственному времени частицы τ , а уравнений должно быть четыре. В нерелятивистском пределе уравнения должны переходить в уравнения Ньютона.

Очевидно, что произведение массы на ускорение следует заменить на производную от импульса по собственному времени. При этом придется сделать релятивистское обобщение силы. Оказывается, что получится

$$\frac{dp}{d\tau} = \underline{F}, \quad \underline{F} = \{\gamma F_0, \gamma \vec{F}\}. \quad (142)$$

Пространственная и временная части этого уравнения после сокращения на γ примут вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{dp_0}{dt} = F_0. \quad (143)$$

Поскольку $p_0 = \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}$, то второе уравнение является следствием первого:

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{\vec{p}}{p_0} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F} = F_0. \quad (144)$$

Это соотношение утверждает, что изменение энергии тела равно работе силы.

§ 9. Тензор электромагнитного поля

1. *Определение тензора.* Выведем уже полученные уравнения, используя четырехмерные релятивистские обозначения. Для этого варьируем действие, записанное в виде (130) с первым слагаемым в виде (125). Условие равенства нулю вариации гласит

$$\delta S = -\delta \int_{(1)}^{(2)} \left(mc\sqrt{dx_\mu dx^\mu} + \frac{q}{c} A_\mu dx^\mu \right) = -\int_{(1)}^{(2)} \left(mc \frac{dx_\mu d\delta(x^\mu)}{ds} + \frac{q}{c} A_\mu d\delta(x^\mu) + \frac{q}{c} \delta(A_\mu) dx^\mu \right) = 0. \quad (145)$$

Проинтегрировав теперь по частям в первых двух слагаемых и введя обозначение для скорости, найдем

$$\int_{(1)}^{(2)} \left(mdv_\mu \delta(x^\mu) + \frac{q}{c} dA_\mu \delta(x^\mu) - \frac{q}{c} \delta(A_\mu) dx^\mu \right) - \left(mv_\mu + \frac{q}{c} A_\mu \right) \delta(x^\mu) \Big|_{(1)}^{(2)} = 0. \quad (146)$$

Двойная подстановка дает нуль, так как на пределах координаты закреплены. Вариации и дифференциалы потенциалов выражаем через те же операции от координат:

$$\delta(A_\mu) = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta(x^\nu), \quad dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (147)$$

Тогда соотношение (146) примет вид

$$\int_{(1)}^{(2)} \left(mdv_\mu \delta(x^\mu) + \frac{q}{c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta(x^\mu) dx^\nu - \frac{q}{c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta(x^\nu) dx^\mu \right) = 0. \quad (148)$$

Выразив дифференциалы координат через компоненты скорости и собственное время, а также сделав в третьем слагаемом замену индексов $\mu \leftrightarrow \nu$, что возможно, так как по ним производится суммирование, получим

$$\int_{(1)}^{(2)} \left[m \frac{dv_\mu}{d\tau} - \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) v^\nu \right] \delta(x^\mu) d\tau = 0. \quad (149)$$

Ввиду произвольности вариаций координат находим уравнение движения в виде

$$m \frac{dv_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) v^\nu. \quad (150)$$

Далее вводится обозначение для тензора

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (151)$$

который называется тензором электромагнитного поля. Через него уравнение записывается в четырехмерной форме

$$m \frac{dv_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} v^\nu. \quad (152)$$

2. *Выражение через напряженности.* Подставив выражения для компонент потенциалов $\{A_\mu\} = \{\varphi, -\vec{A}\}$, получим представление тензора поля через его напряженности. В полностью ковариантном виде, как этот тензор определен в (151), и в полностью контравариантной форме, которая, как и в общем случае, получается поднятием индексов, причем поднятие каждого пространственного индекса сопровождается изменением знака, даются матрицами

$$\{F_{\mu\nu}\} = \begin{Bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{Bmatrix}, \quad \hat{F} = \{F^{\mu\nu}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{Bmatrix}. \quad (153)$$

Как и в случае общего тензора, правые нижние миноры третьего порядка, содержащие компоненты магнитной напряженности, у этих форм совпадают. Таким же свойством обладают и смешанные представления:

$$\{F_\mu^\nu\} = \begin{Bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{Bmatrix}, \quad \{F_\nu^\mu\} = \begin{Bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{Bmatrix}. \quad (154)$$

3. Свойства тензора. Тензор электромагнитного поля является антисимметричным $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$. Антисимметрична и его матрица, то есть $\hat{F}^T = -\hat{F}$. Его свертка, то есть след матрицы, равна нулю $F_\mu^\mu = F_\nu^\nu = 0$, а свертка произведения самого на себя

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \text{Sp}(\hat{F} \cdot (\hat{g} \cdot \hat{F} \cdot \hat{g})^T) = -F_\mu^\nu F_\nu^\mu = -\text{Sp}(\hat{g} \cdot \hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \hat{F}) = 2(H^2 - E^2) \quad (155)$$

является скаляром.

С тензором $e^{\mu\nu\rho\sigma}$ (это полностью антисимметричный относительно перестановок всех компонент тензора, упоминавшийся в § 6) образуется еще одна комбинация, содержащая произведения компонент тензора поля и просто выражаяющаяся через напряженности:

$$e^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = 8\vec{E}\vec{H}. \quad (156)$$

Эта комбинация представляет собой инвариант (скаляр), если только не допускаются отражения осей. При отражении же осей она изменяет знак, так как содержит магнитную напряженность, и поэтому называется псевдоскаляром.

Из наличия двух инвариантов поля вытекают два следствия. Если в какой-либо системе отсчета длины векторов электрической и магнитной напряженностей равны, то они равны и во всех системах. Аналогично, если эти векторы ортогональны в какой-то системе отсчета, то они ортогональны и во всех других системах.

Согласно преобразованию Лоренца для компонент тензора (111)

$$\hat{F}' = \hat{L} \cdot \hat{g} \cdot \hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \hat{L}^T \quad (157)$$

компоненты поля в штрихованной и нештрихованной системах отсчета связаны равенствами

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \Gamma \vec{E} + \Gamma \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{H} - (\Gamma - 1) \frac{\vec{V}}{c} \left(\frac{\vec{V}}{c} \vec{E} \right), \\ \vec{H}' &= \Gamma \vec{H} - \Gamma \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{E} - (\Gamma - 1) \frac{\vec{V}}{c} \left(\frac{\vec{V}}{c} \vec{H} \right). \end{aligned} \quad (158)$$

При помощи матричных обозначений матрицу (153) можно записать короче:

$$\hat{F} = \begin{Bmatrix} 0 & -\vec{E}^T \\ \vec{E} & \vec{H} \end{Bmatrix}, \quad \check{H} = \begin{Bmatrix} 0 & -H_z & H_y \\ H_z & 0 & -H_x \\ -H_y & H_x & 0 \end{Bmatrix}. \quad (159)$$

Произведение последней (трехмерной) матрицы на трехмерный вектор дает векторное произведение

$$\check{H} \cdot \vec{a} = \vec{H} \times \vec{a}. \quad (160)$$

Нетрудно проверить, что точно такая же связь между напряженностями поля получается, если считать, что они составляют другой тензор

$$\hat{G} = \{G^{\mu\nu}\} = \{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma}F_{\lambda\mu}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -\vec{H}^T \\ \vec{H} & -\vec{E} \end{Bmatrix}, \quad \check{E} = \begin{Bmatrix} 0 & -E_z & E_y \\ E_z & 0 & -E_x \\ -E_y & E_x & 0 \end{Bmatrix}. \quad (161)$$

Действительно, преобразования (158) инвариантны относительно замен $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$, $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$. Таким же образом тензор (161) получается из тензора (153).

Свертка произведения \hat{G} на самого себя совпадает со сверткой для тензора \hat{F} . Свертка произведения двух тензоров приводит ко второму скаляру поля:

$$F^{\mu\nu}G_{\nu\mu} = \text{Sp}(\hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \hat{G} \cdot \hat{g}) = 8\vec{E}\vec{H}. \quad (162)$$

Тот факт, что напряженности входят в тензор по-разному, объясняется следующим обстоятельством. Как уже отмечалось в предыдущей главе, напряженности электрического и магнитного полей имеют различную природу. Напомним, что трехмерные векторы могут быть двух типов. Если при отражении всех осей все координаты вектора и тем самым он сам изменяют знаки на противоположные, то такой вектор называется полярным. Напротив, если отражение осей не приводит к обращению направления вектора, вектор называют аксиальным. Примером является векторное произведение двух полярных векторов, координаты которого состоят из произведений координат векторов-сомножителей. Так как векторный потенциал \vec{A} полярный вектор, то и электрическая напряженность полярный вектор, ибо дифференцирование по времени этого свойства не изменяет. Вычисление же ротора от этого потенциала превращает результирующий вектор, то есть магнитную напряженность — в аксиальный вектор, так как и сам потенциал и ротор изменяют знаки при отражении осей.

4. *Первая пара уравнений Максвелла.* В явно релятивистской форме можно записать и уравнения для напряженностей. Первая пара уравнений Максвелла записывается через составляющие тензора \hat{F} следующим образом:

$$\nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \nabla^\mu F^{\nu\lambda} + \nabla^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \quad (163)$$

Эти уравнения можно проще записать через тензор \hat{G} :

$$\text{Div } \hat{G} = \{\nabla_\lambda G^{\lambda\mu}\} = (\underline{\nabla}^T \cdot \hat{g} \cdot \hat{G})^T = 0. \quad (164)$$

Все индексы должны быть разными. Из этого следует, что независимых уравнений здесь всего четыре. Без нулевого индекса — это уравнение, выражающее отсутствие магнитных зарядов:

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (165)$$

Три остальных получаются круговой подстановкой из одного, которое соответствует $\lambda = 0, \mu = 2, \nu = 3$:

$$\nabla^0 F^{23} + \nabla^2 F^{30} + \nabla^3 F^{02} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0. \quad (166)$$

Объединение трех уравнений в одно векторное дает

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (167)$$

§ 10. Вариационный принцип для поля

1. *Действие для электромагнитного поля.* Полное действие для заряженной частицы в поле и самого поля должно состоять из трех частей. Две части уже были написаны. Это, во-первых, часть (122), относящаяся к частице:

$$S_p = -mc \int_{(1)}^{(2)} ds. \quad (168)$$

Вторая часть (130) описывает действие поля на частицу:

$$S_{pf} = -\frac{q}{c} \int_{(1)}^{(2)} A_\mu dx^\mu. \quad (169)$$

Третья часть относится к самому полю. Поскольку действие должно быть инвариантом, оно выражается через инвариант поля (155):

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4r = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) d^3rdt. \quad (170)$$

Поскольку в последнем выражении интеграл берется по четырехмерному объему, преобразуем интеграл в (169) к такому же виду.

Выразим дифференциалы координат через вектор скорости $dx^\mu = v^\mu dt = v^\mu dt/\gamma$ и подставим вместо заряда его выражение через плотность заряда (1.4). Получится релятивистски инвариантное выражение

$$S_{pf} = -\frac{1}{c} \int_{(1)}^{(2)} A_\mu v^\mu \frac{dt}{\gamma} \int d^3r \rho(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \int d^3rdt A_\mu \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\gamma} v^\mu = -\frac{1}{c^2} \int d^4r A_\mu j^\mu = -\frac{1}{c^2} \int \underline{A} \underline{j} d^4r. \quad (171)$$

Итак, полное действие системы заряд в электромагнитном поле равно сумме

$$S = S_p + S_{pf} + S_f = -mc \int_{(1)}^{(2)} ds - \frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu d^4r - \frac{1}{16\pi c} \int_{(1)}^{(2)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4r. \quad (172)$$

2. Вариация действия. Теперь проварыруем полное действие по переменным поля, за которые удобнее всего принять потенциалы. При этом следует считать движение частицы уже заданным, то есть координаты варьировать не нужно, приняв, что они закреплены. Тогда вариация первого слагаемого в сумме (172) равна нулю, а при нахождении вариации второго слагаемого в этой сумме не надо варьировать компоненты тока. Таким образом,

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta(A_\mu) + \frac{1}{16\pi} [\delta(F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta(F^{\mu\nu})] \right] d^4r = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta(A_\mu) + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta(F_{\mu\nu}) \right] d^4r = 0. \quad (173)$$

При переходе к последнему выражению использовано, что поднятие индексов перестановочно со взятием вариации, так что два последних слагаемых во внутренних квадратных скобках равны.

Подставив под знак вариации выражение (151) тензора поля через потенциалы, получим

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta(A_\mu) + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta(A_\nu) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta(A_\mu) \right) \right] d^4r = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta(A_\mu) - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta(A_\mu) \right] d^4r. \quad (174)$$

Здесь сначала в среднем слагаемом сделана замена индексов $\mu \leftrightarrow \nu$, а затем использована антисимметричность тензора поля, что делает два слагаемых равными.

3. Вторая пара уравнений Максвелла. На следующем шаге интегрируем во втором слагаемом последнего интеграла по частям, что дает

$$\int F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta(A_\mu) d^4r = \int \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \delta(A_\mu) d^4r - \int F^{\mu\nu} \delta(A_\mu) d\Sigma_\nu \Big|_{(1)}^{(2)}. \quad (175)$$

В последнем слагаемом интеграл берется на некоторых пределах. По координатам пределы бесконечны, а на бесконечности поле обращается в нуль. По времени же пределы соответствуют моментам, где вариации равны нулю, так как там потенциалы должны быть заданы. В результате это слагаемое равно нулю и, следовательно,

$$\int \left[\frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right] \delta(A_\mu) d^4r = 0. \quad (176)$$

Ввиду произвольности вариаций потенциалов получаются уравнения

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (177)$$

Нулевая компонента этой системы совпадает с уравнением

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (178)$$

а остальные три — с уравнением

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (179)$$

Таким образом, всем уравнениям Максвелла для свободного пространства придан явно релятивистский вид.

§ 11. Движение заряда в постоянном поле

1. Постоянное и однородное электрическое поле. Пусть электрическое поле направлено вдоль оси x, так что $\vec{E} = E(1, 0, 0)$, где $E > 0$ — постоянная напряженность. Тогда сила Лоренца, действующая на заряд $q > 0$, равна $q\vec{E}$ и уравнения движения имеют вид

$$\frac{dp_x}{dt} = qE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0. \quad (180)$$

Пусть скорость заряда в какой-то момент лежит в плоскости xy, тогда и вся его траектория будет располагаться в этой же плоскости, то есть $p_z = 0$ и $z = 0$.

Интегрирование уравнений (180) дает

$$p_x = qEt, \quad p_y = p_*. \quad (181)$$

Нулевая компонента вектора импульса

$$p_0 = \sqrt{m^2c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}. \quad (182)$$

Компоненты скорости заряда в соответствии с формулой (48), связывающей ее с импульсом, выражаются через компоненты импульса так:

$$\vec{v} = c \frac{\vec{p}}{p_0}, \quad v_x = \frac{dx}{dt} = c \frac{p_x}{p_0} = c \frac{qEt}{\sqrt{m^2c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = c \frac{p_y}{p_0} = c \frac{p_*}{\sqrt{m^2c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}}. \quad (183)$$

Можно легко убедиться, что величина скорости движения заряда

$$v = c \frac{\sqrt{p_*^2 + (qEt)^2}}{\sqrt{m^2c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}} \quad (184)$$

всегда меньше скорости света, хотя стремится к ней при $t \rightarrow \infty$.

Проинтегрируем два полученных уравнения:

$$x = c \int \frac{qEt}{\sqrt{m^2c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}} dt = \frac{c}{qE} \sqrt{m^2c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}, \quad (185)$$

$$y = cp_* \int \frac{dt}{\sqrt{m^2c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}} = \frac{cp_*}{qE} \operatorname{arsh} \frac{qEt}{\sqrt{m^2c^2 + p_*^2}}. \quad (186)$$

Обращение последней зависимости приводит к формуле

$$t = \frac{\sqrt{m^2c^2 + p_*^2}}{qE} \operatorname{sh} \frac{qEy}{cp_*}, \quad (187)$$

а подстановка формулы для времени в выражение для абсциссы дает траекторию

$$x = \frac{c}{qE} \sqrt{m^2c^2 + p_*^2} \operatorname{ch} \frac{qEy}{cp_*}. \quad (188)$$

Эта траектория представляется кривой, которая называется цепной линией, так как именно такую кривую принимает тяжелая однородная нить (цепь) в однородном же поле силы тяжести.

2. Постоянное и однородное магнитное поле. Пусть теперь заряд движется в магнитном поле $\vec{H} = H(0, 0, 1) = H\vec{e}_3$, где $H > 0$ — постоянная напряженность. Ввиду того, что наибольший интерес представляет электрон, будем считать заряд отрицательным $q < 0$. Сила Лоренца в таком случае равна $-q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H}$ и уравнения движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q \frac{\vec{p}}{p_0} \times \vec{H}. \quad (189)$$

Из уравнения следует, что

$$\vec{p} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dp^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(p_0^2 - m^2c^2)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dp_0^2}{dt} = 0, \quad (190)$$

то есть энергия заряда $cpr_0 = mc^2\gamma$, а значит и E_{kin} , во время его движения остаются неизменными, что естественно, так как сила, перпендикулярная скорости, не совершает работы.

Вводится обозначение для частот вектора угловой скорости:

$$\omega_* = \frac{qH}{mc}, \quad \omega = \frac{qH}{p_0} = \frac{qH}{mc\gamma} = \frac{\omega_*}{\gamma}, \quad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_3. \quad (191)$$

Первая частота называется циклотронной, а вторая — лармовой.

Уравнение движения во введенных обозначениях записывается в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{p} \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{p}. \quad (192)$$

Введем в плоскости, перпендикулярной напряженности поля, то есть вектору \vec{e}_3 , ортогональный базис \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , так, чтобы три вектора составляли правую тройку (правый базис). Тогда можно легко проверить, что решением уравнения (192) может служить

$$\vec{p} = p_{\parallel} \vec{e}_3 + p_{\perp} [\vec{e}_1 \cos(\omega t - \phi_0) + \vec{e}_2 \sin(\omega t - \phi_0)]. \quad (193)$$

Здесь составляющие импульса вдоль поля p_{\parallel} и перпендикулярно ему p_{\perp} , а также начальная фаза ϕ_0 — произвольны.

Выражая через импульс скорость

$$\vec{v} = c \frac{\vec{p}}{p_0} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{p_{\parallel}}{m\gamma} \vec{e}_3 + \frac{p_{\perp}}{m\gamma} [\vec{e}_1 \cos(\omega t - \phi_0) + \vec{e}_2 \sin(\omega t - \phi_0)] \quad (194)$$

и интегрируя, находим траекторию заряда:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{p_{\parallel}}{m\gamma} t \vec{e}_3 + \frac{p_{\perp}}{m\omega\gamma} [\vec{e}_1 \sin(\omega t - \phi_0) - \vec{e}_2 \cos(\omega t - \phi_0)]. \quad (195)$$

Заряд движется равномерно вдоль оси z и вращается вокруг той же оси, то есть его траектория — это винтовая линия. Скорость его дрейфа вдоль поля равна $v_{\parallel} = \frac{p_{\parallel}}{m\gamma}$, а радиус цилиндра, на который накручена винтовая

линия, равен $R = \frac{p_{\perp}}{m\omega\gamma}$ и называется радиусом Лармора. В этих формулах $\gamma = \frac{p_0}{mc} = \sqrt{1 + \frac{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}{m^2 c^2}}$.

Если импульс мал по сравнению с mc , то есть заряд нерелятивистский, то такое движение называется циклотронным, движение релятивистского заряда, если только его перпендикулярная составляющая не мала, называют синхротронным.

§ 12. Тензор энергии импульса.

1. *Определение тензора энергии импульса.* Выведенные в § 4 предыдущей главы соотношения сохранения энергии и импульса для свободного пространства можно также записать в релятивистском виде. Для этого надо ввести тензор энергии-импульса электромагнитного поля, который представляется следующей матрицей:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \{T^{\lambda\mu}\} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -F^{\lambda\nu} F^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{4} (F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}) g^{\lambda\mu} \right\} = \frac{1}{4\pi} \left[\hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \hat{F} + \frac{1}{4} \hat{g} \operatorname{Sp}(\hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \hat{F} \cdot \hat{g}) \right] = \\ &= \begin{pmatrix} w & \vec{S}^T/c \\ \vec{S}/c & w\hat{I} - (\vec{E} \cdot \vec{E}^T + \vec{H} \cdot \vec{H}^T)/4\pi \end{pmatrix} = w\hat{d} + \begin{pmatrix} 0 & \vec{S}^T/c \\ \vec{S}/c & -(\vec{E} \cdot \vec{E}^T + \vec{H} \cdot \vec{H}^T)/4\pi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} w & (E_y H_z - E_z H_y)/(4\pi) & (E_z H_x - E_x H_z)/(4\pi) & (E_x H_y - E_y H_x)/(4\pi) \\ (E_y H_z - E_z H_y)/(4\pi) & w - (E_x^2 + H_x^2)/(4\pi) & -(E_x E_y + H_x H_y)/(4\pi) & -(E_x E_z + H_x H_z)/(4\pi) \\ (E_z H_x - E_x H_z)/(4\pi) & -(E_x E_y + H_x H_y)/(4\pi) & w - (E_y^2 + H_y^2)/(4\pi) & -(E_y E_z + H_y H_z)/(4\pi) \\ (E_x H_y - E_y H_x)/(4\pi) & -(E_x E_z + H_x H_z)/(4\pi) & -(E_y E_z + H_y H_z)/(4\pi) & w - (E_z^2 + H_z^2)/(4\pi) \end{pmatrix}. \quad (196) \end{aligned}$$

Этот тензор и его матрица симметричны, а свертка (след)

$$T_{\mu}^{\mu} = \operatorname{Sp}(\hat{T} \cdot \hat{g}) = w - 3w + 2w = 0. \quad (197)$$

2. *Дивергенция тензора.* Найдем дивергенцию введенного тензора, проделав следующую выкладку:

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \hat{T} &= \{\nabla_{\lambda} T^{\lambda\mu}\} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -\nabla_{\lambda}(F^{\lambda\nu}) F^{\mu}_{\nu} - F_{\lambda\nu} \nabla^{\lambda}(F^{\mu}_{\nu}) + \frac{1}{4} [\nabla^{\lambda}(F^{\nu\rho}) F_{\nu\rho} + F^{\nu\rho} \nabla^{\lambda}(F_{\nu\rho})] g^{\lambda\mu} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \nabla_{\lambda}(F^{\nu\lambda}) F^{\mu}_{\nu} + F_{\nu\lambda} \nabla^{\lambda}(F^{\mu\nu}) + \frac{1}{4} [\nabla^{\mu}(F^{\nu\rho}) F_{\nu\rho} + F^{\nu\rho} \nabla^{\mu}(F_{\nu\rho})] \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\nabla_{\lambda}(F^{\nu\lambda}) F^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2} F_{\nu\lambda} \nabla^{\lambda}(F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} F_{\nu\lambda} \nabla^{\nu}(F^{\lambda\mu}) + \frac{1}{2} F_{\nu\lambda} \nabla^{\mu}(F^{\nu\lambda}) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -\frac{4\pi}{c} F^{\mu}_{\nu} j^{\nu} + \frac{1}{2} F_{\nu\lambda} (\nabla^{\lambda} F^{\mu\nu} + \nabla^{\mu} F^{\nu\lambda} + \nabla^{\nu} F^{\lambda\mu}) \right\} = -\frac{1}{c} \{F^{\mu}_{\nu} j^{\nu}\}. \quad (198) \end{aligned}$$

При переходе к выражению во второй строчке был изменен порядок индексов у $F^{\lambda\nu}$ в первых двух слагаемых, во втором слагаемом кроме того переменены верхние и нижние индексы, а в двух последних подняты индексы за счет метрического тензора. При переходе к третьей строчке второе слагаемое было разбито на две части и во

второй из них сделаны замены индексов суммирования $\nu \leftrightarrow \lambda$ с последующей переменой их порядка. Кроме того, два слагаемых в скобках были объединены путем поднятия и опускания индексов с заменой ρ на λ . Наконец, при написании последней строчки были использованы в первом слагаемом вторая пара уравнений, а во втором — первая.

В матричной форме полученному соотношению может быть придан вид

$$(\underline{\nabla}^T \cdot \hat{g} \cdot \hat{T})^T = -\frac{1}{c} \hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \underline{j}. \quad (199)$$

3. *Тензор зарядов.* Можно ввести (симметричный) тензор энергии–импульса вещества, если считать, что заряды не взаимодействуют друг с другом:

$$\hat{T}_P = \{\mu_0 v^\lambda v^\mu\} = \mu_0 \underline{v} \underline{v}^T, \quad (200)$$

где μ_0 — пространственная плотность массы зарядов в сопутствующей в данной точке системе отсчета. Эта плотность пропорциональна плотности заряда в той же системе, пропорциональны и четырехмерные векторы плотностей заряда-тока и массы-потока массы:

$$\mu_0 = \frac{m}{e} \rho_0, \quad \mu_0 \underline{v} = \frac{m}{e} \underline{j}. \quad (201)$$

Оба вектора плотности удовлетворяют одному и тому же уравнению неразрывности.

Для нахождения расходности тензора (200) заметим, что скорость \underline{v} зависит от времени через координаты, так что для ускорения получается

$$\underline{w} = \frac{d\underline{v}}{d\tau} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = (v^\lambda \nabla_\lambda) \{v^\mu\} = (\underline{v}^T \cdot \hat{g} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}. \quad (202)$$

Поэтому (используем уравнение неразрывности)

$$\text{Div } \hat{T}_P = (\nabla_\lambda \mu_0 v^\lambda) \{v^\mu\} + \mu_0 (v^\lambda \nabla_\lambda) \{v^\mu\} = \frac{\mu_0}{e} (\nabla_\lambda j^\lambda) \{v^\mu\} + \mu_0 \frac{d\underline{v}}{d\tau} = \mu_0 \underline{w}. \quad (203)$$

Принимая во внимание локальное уравнение движения заряда в поле

$$\mu_0 \underline{w} = \frac{1}{c} \hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \underline{j}, \quad (204)$$

где слева стоит плотность силы Лоренца, получаем

$$\text{Div } \hat{T}_P = \frac{1}{c} \hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \underline{j} = \frac{1}{c} \{F^{\mu\nu} j_\nu\}. \quad (205)$$

Сложив равенства (198) и (203), убедимся в выполнении закона сохранения суммарных энергии и импульса вещества и поля:

$$\text{Div}(\hat{T} + \hat{T}_P) = 0. \quad (206)$$

4. *Сохранение моментов.* У электромагнитного поля имеется и момент, который связывается с моментом движущихся зарядов. Момент поля можно определить так:

$$L^{\lambda\mu\nu} = T^{\lambda\mu} x^\nu - T^{\lambda\nu} x^\mu. \quad (207)$$

Его дивергенция

$$\nabla_\lambda L^{\lambda\mu\nu} = \nabla_\lambda T^{\lambda\mu} x^\nu - \nabla_\lambda T^{\lambda\nu} x^\mu + T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\sigma (F^{\sigma\mu} x^\nu - F^{\sigma\nu} x^\mu). \quad (208)$$

Два слагаемых без сомножителей пропадают вследствие симметричности тензора энергии–импульса.

Аналогично (207) определяется и момент для частиц

$$L_P^{\lambda\mu\nu} = T_P^{\lambda\mu} x^\nu - T_P^{\lambda\nu} x^\mu. \quad (209)$$

Его дивергенция находится точно так же. Сложив их вместе, убедимся в выполнении закона сохранения момента

$$\nabla_\lambda (L^{\lambda\mu\nu} + L_P^{\lambda\mu\nu}) = 0. \quad (210)$$

§ 13. Проявления эффектов относительности

1. Проявления в физике. В обычной жизни мы не встречаемся с телами, скорости которых сравнимы со скоростью света. Именно поэтому появившаяся в начале двадцатого века теория относительности произвела сильное впечатление на ненаучную и даже научную общественность, вызвала появление многих объясняющих ее явления статей и книг как физических, так и популярных. За сто лет, прошедших с тех пор, эта теория стала уже привычной, хотя все время возникают тщетные попытки либо опровержения ее, либо уточнения. Никаких явлений, противоречащих теории относительности, не установлено.

Теория относительности давно стала одной из незыблемых и широко используемых разделов физики с теоретической точки зрения, так как почти все другие ее разделы используют аппарат теории относительности. Электродинамика с самого начала была релятивистской, даже до осознания физиками этого факта. К настоящему времени построены релятивистская квантовая электродинамика, релятивистские гидро- и газодинамика, релятивистская статистическая физика и т. д.

Релятивизм проявляется и в практической физике. Многие элементарные частицы имеют очень короткие времена жизни. Они появляются в результате тех или иных реакций взаимодействия между другими элементарными частицами и в своей собственной системе отсчета быстро распадаются. Приведем порядки времен жизни некоторых частиц. Наименьшее время живут частицы, которые распадаются в результате сильного взаимодействия. Это некоторые мезоны и так называемые резонансы. Время их жизни $10^{-23} \div 10^{-22}$ с. Чуть более устойчив нейтральный пион π^0 , время его жизни 10^{-16} . Другие частицы имеют следующие времена жизни в секундах: Л-гиперон — 10^{-10} , пионы π^\pm — 10^{-8} , мюоны μ^\pm — $2 \cdot 10^{-6}$, нейтрон — 10^3 (все в секундах).

В ускорителях частицы разгоняются до очень высоких энергий и скоростей, в результате чего весьма короткоживущие частицы (даже резонансы), рождающиеся при взаимодействии исходных разгоняемых частиц, благодаря замедлению их собственного времени успевают достаточно долго продержаться и быть вовлечеными в эксперименты. Например, масса мюона равна ≈ 300 масс электрона, то есть $300 \cdot 9 \cdot 10^{-28}$ г. В космических лучах он может иметь энергию порядка 10^{14} эВ = $10^{14} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} = 1.6 \cdot 10^2$ эрг, соответствующую $\gamma = 10^6$. Таким образом, он может прожить 2 секунды и пройти расстояние $6 \cdot 10^{10}$ см = $6 \cdot 10^5$ км. Это расстояние равно примерно 150 земным экваторам. Поэтому рожденный вблизи Земли мюон, вполне может до нее долететь. Различные частицы летят уже в земной атмосфере, в так называемых ливнях частиц, порождаемых падающими на нее космическими лучами. Они тормозятся в атмосфере, но тем не менее многие из них долетают либо до поверхности, либо улавливаются человеческими приборами, установленными на горах, аэростатах или спутниках.

Обнаружен и подтвержден количественно поперечный эффект Доплера.

Особенную роль релятивистская теория играет в астрофизике. Никакие ускорители не могут произвести частицы столь больших энергий, с какими приходится иметь дело астрофизикам.

2. Сверхсветовые скорости. Вообще говоря, скорости, превышающие скорость света, наблюдаются. Например, каждые сутки все галактики обращаются вокруг Земли, но это обращение кажущееся. С очень большими скоростями могут перемещаться световые отблески или зайчики, но они также не передают никаких сигналов, так как при этом перемещаются разные фотоны. Особого рассмотрения требуют сверхсветовые движения в космологии, но и там они объясняются расширением пространства, а не передачей сигналов.

Частицы, которые движутся со скоростями, большими скорости света, называются тахионами. Много статей посвящено доказательству, что рассуждать о таких частицах возможно, но их существование недопустимо.

Тем не менее, в астрофизике наблюдаются сверхсветовые перемещения. Из активных ядер галактик (АЯГ) выбрасываются джеты с большими, меньшими, но сравнимыми с c скоростями. Их отдельные сгустки (блобы) летят в некотором направлении и время от времени их наблюдают и измеряют угловое перемещение на небесной сфере. Если известно расстояние до галактики, то угловое расстояние можно перевести в линейное. При этом часто оказывается, что отношение линейного расстояния к промежутку времени между соответствующими, как говорят, эпохами наблюдений, то есть скорость перемещения блобов, превышает скорость света во много раз. Покажем, что и это явление только кажущееся.

Пусть некоторый источник излучения летит с скоростью \vec{v} и испускает фотоны в сторону наблюдателя, в направлении вектора \vec{e} . Угол между векторами \vec{e} и \vec{v} пусть будет $\theta \leq \pi/2$, так что (см. рис. 9) $\vec{e} \cdot \vec{v} = v \cos \theta \geq 0$. Пусть два наблюдения этого источника разделены временем t_0 . За это время источник пройдет путь vt_0 и окажется в точке, расположенной ближе к наблюдателю на расстояние $vt_0 \cos \theta$. Проекция пройденного источником пути на картинную плоскость равна $vt_0 \sin \theta$. Сигнал при втором наблюдении придет после первого через время $t_0 - (v/c)t_0 \cos \theta$, так как он вышел на t_0 позже, но идти ему на $(v/c)t_0 \cos \theta$ меньше. Таким образом, наблюдатель увидит второй сигнал на расстоянии от первого $vt_0 \sin \theta$ через $[1 - (v/c) \cos \theta]t_0$, то есть для наблюдателя источник переместился на небесной сфере с кажущейся скоростью

$$v_{\text{appr}} = v \frac{\sin \theta}{1 - (v/c) \cos \theta}. \quad (211)$$

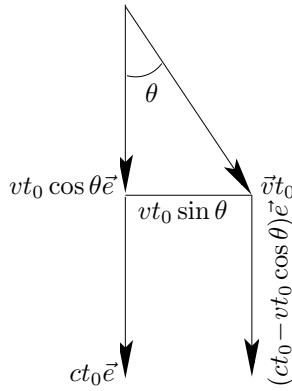


Рис. 9. Кажущееся сверхсветовое движение.

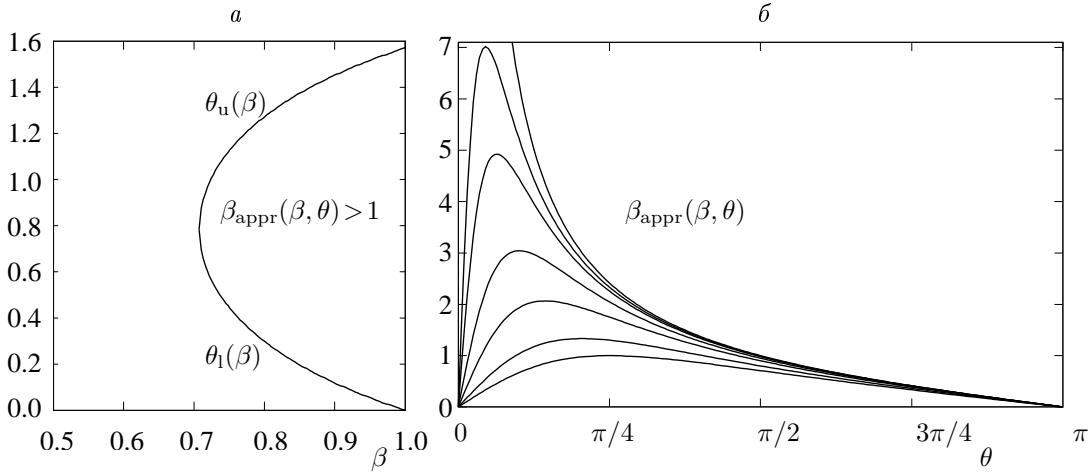


Рис. 10а. Границы для угла θ в зависимости от β .

Рис. 10б. Зависимость функции $\beta_{\text{appr}}(\beta, \theta)$ от θ при различных β .

Обозначим $\beta = v/c$ и рассмотрим функцию (appr — apparent)

$$\beta_{\text{appr}}(\beta, \theta) = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (212)$$

На концах промежутка изменения θ ее значения $\beta_{\text{appr}}(\beta, 0) = \beta_{\text{appr}}(\beta, \pi) = 0$, в середине $\beta_{\text{appr}}(\beta, \pi/2) = \beta$. Максимальное значение этой функции достигается при $\theta = \arccos(\beta)$ и равно $\gamma\beta$, где множитель Лоренца $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Неравенство $\beta_{\text{appr}}(\beta, \theta) \geq 1$ равносильно условию

$$\beta\sqrt{2} \sin(\theta + \pi/4) \geq 1 \text{ или } \theta_l(\beta) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}\beta} - \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}\beta} = \theta_u(\beta), \quad (213)$$

поэтому сверхсветовые скорости могут наблюдаться только при $\beta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Границы по θ в зависимости от β — повернутая и смещенная синусоида — изображены на рис. 10а. Графики функции $\beta_{\text{appr}}(\beta, \theta)$ в зависимости от $0 \leq \theta \leq \pi$ при $\beta = 1/\sqrt{2}, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99$ и 1.0 приведены на рис. 10б. При $\beta \rightarrow 1$ кривые приближаются к предельной кривой $\beta_{\text{appr}}(1, \theta) = \operatorname{ctg}(\theta/2)$, однако все они исходят из начальной точки при $\theta = 0$, в то время как предельная кривая обращается в ней в бесконечность.

Таким образом, действительно, кажущееся перемещение источника в картинной плоскости может происходить со скоростью, большей световой, если сам источник летит с достаточно большой скоростью и под достаточно малым углом к линии наблюдения. Если наблюдается превышение источником скорости света в a раз, то можно получить связь между реальной скоростью источника и углом, под которым он летит к наблюдателю:

$$\beta = \frac{a}{a \cos \theta + \sin \theta}. \quad (214)$$

3. Проявление лоренцева сокращения. В этом пункте обсудим, как проявляется лоренцево сокращение.

Согласно формулам пункта 3 § 2 размер предмета в направлении его движения сокращается, а в перпендикулярном — остается неизменным.

Более 50 лет после создания теории относительности считалось, что наблюдатель и увидит сокращенный предмет. По-видимому, так думал и А.Эйнштейн. Лишь в 1959 году было обращено внимание [5], что наблюдатель не измеряет размеры летящего предмета, одновременно прикладывая измерительный прибор к концам сокращаемого размера, как это описано в указанном выше пункте, а воспринимает его через излучение, то есть как светящийся объект. Изложение истории и интерпретация явления даны в статье [6] (см. также книгу [3]). Здесь рассмотрим движение стержня вдоль его длины.

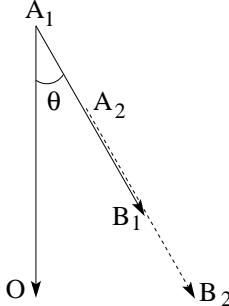


Рис. 11. Наблюдение движущегося стержня.

Пусть стержень движется вдоль своей длины со скоростью $V\vec{e}$, а направление на наблюдателя в системе этого наблюдателя составляет угол θ с направлением движения стержня (рис. 11). В своей собственной системе стержень имеет длину l_0 , а в системе наблюдателя вследствие лоренцева сокращения его длина $A_1B_1 = l_0/\Gamma$, где, как обычно, $\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Предположим, что стержень находится от наблюдателя достаточно далеко, так что можно считать, что световые сигналы от всех его точек идут параллельно. Для того, чтобы наблюдатель мог измерить длину стержня, свет от его обоих концов должен дойти до наблюдателя одновременно.

Свет, испущенный из дальнего конца стержня A_1 , дойдет до некоторого пункта O в сторону наблюдателя за время t_0 , пройдя путь $A_1O = ct_0$. За это время стержень пройдет расстояние $A_1A_2 = Vt_0$ и займет положение A_2B_2 (на рисунке это положение показано пунктиром со смещением, чтобы оно не накладывалось на начальное). Точки O и B_2 должны располагаться на одном расстоянии от наблюдателя, то есть отрезок OB_2 должен быть перпендикулярен линии A_1O . Покажем, что такой промежуток времени t_0 всегда существует. Действительно, очевидно, что тогда $A_1O = A_1B_2 \cos \theta$, то есть

$$ct_0 = (l_0/\Gamma + Vt_0) \cos \theta, \quad ct_0 = l_0 \cos \theta / [\Gamma(1 - V \cos \theta / c)] = l_0 \cos \theta D(V, \theta), \quad (215)$$

где $D(V, \theta)$ — доплеровский множитель (76).

Расстояние $A_1B_2 = l_0 D(V, \theta)$. Наблюдатель увидит проекцию этого отрезка, то есть $OB_2 = A_1B_2 \sin \theta$, равную

$$l_0 D(V, \theta) \sin \theta = l_0 \sin \theta / [\Gamma(1 - V \cos \theta / c)] = l_0 \sin \theta'. \quad (216)$$

Поскольку θ и θ' согласно формуле aberrации из (86) — это углы, которые стержень образует с направлениями на неподвижного и находящегося в одной со стержнем системе отсчета, проекции стержня для обоих наблюдателей оказываются совершенно одинаковыми. Таким образом, наблюдатель не увидит сокращения движущегося стержня, хотя это не означает, что оно не происходит. Это видно и из приведенного рассуждения.

Глава 3. Волны в однородных средах

§ 1. Волновые уравнения

1. *Однородные уравнения Максвелла.* Начнем рассмотрение решений уравнений Максвелла с самого простого случая, когда в среде нет источников, то есть нет зарядов и порождаемых ими токов. Тем не менее и в таком случае поля могут существовать и называются они тогда волнами.

Предполагаем, что среда однородна и неограничена. В ней нет проводимости, то есть это диэлектрик, но, может быть, с магнитными свойствами. Уравнения Максвелла для такого случая имеют вид

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2)$$

Кроме того, выполняются материальные уравнения с постоянными ϵ и μ :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (3)$$

Материальные уравнения позволяют свести уравнения (1) и (2) к уравнениям для двух неизвестных векторов. Выберем в качестве основных векторы \vec{E} и \vec{B} , исключив \vec{D} и \vec{H} . Первые два уравнения (1) тогда остаются неизменными, а уравнения (2) для \vec{E} и \vec{B} получаются такими:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

Можно исключить один из векторов и получить отдельные уравнения для каждого из них.

2. *Волновые уравнения для векторов поля.* Найдем двумя способами ротор от второго уравнения (4): по формуле для $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ с учетом первого уравнения (4) и с использованием второго уравнения (2). Тогда получится

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Введем обозначения, которые уже использовались в Главе 1:

$$v^2 = c^2 / (\epsilon \mu), \quad (6)$$

$$\square = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (7)$$

Оператор (7), как уже говорилось, называется волновым, или оператором Даламбера. Через него уравнение (5) можно записать в кратком виде

$$\square \vec{E} = 0. \quad (8)$$

С помощью аналогичной выкладки показывается, что и второй искомый вектор удовлетворяет такому же уравнению:

$$\square \vec{B} = 0. \quad (9)$$

3. *Уравнения для потенциалов.* Однородность среды позволяет ввести потенциалы, как и в Главе 1:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (10)$$

Тогда первые два уравнения Максвелла (1) удовлетворяются тождественно.

Градиентная инвариантность сохраняется, так что при любой функции f потенциалы можно заменить по формулам

$$\varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \operatorname{grad} f. \quad (11)$$

Эта инвариантность всегда дает возможность подчинить потенциалы дополнительному условию, например, условию Лоренца

$$\frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (12)$$

Для этого надо выбрать некоторую функцию f , являющуюся решением неоднородного волнового уравнения со свободным слагаемым, равным функции, которая получается, если правую часть условия (12) вычислить от не удовлетворяющих этому условию потенциалов (см. Главу 1).

С использованием условия Лоренца из двух оставшихся уравнений Максвелла получаются четыре уравнения для потенциалов, на этот раз однородных:

$$\square\varphi = 0, \quad \square\vec{A} = 0. \quad (13)$$

Однако, в случае однородных уравнений имеется еще одна инвариантность. Потенциалы можно еще раз заменить по тем же формулам

$$\varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial f_0}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \text{grad } f_0, \quad (14)$$

но теперь подчинить функцию f_0 волновому уравнению

$$\square f_0 = 0. \quad (15)$$

Тогда волновые уравнения (13) и условие Лоренца будут выполняться и для потенциалов со штрихами. Наличие второй инвариантности дает возможность еще сократить число искомых функций. Обычно приравнивают нуль скалярный потенциал. Так можно сделать, ибо произвольный потенциал φ' тоже удовлетворяет волновому уравнению, так что можно положить $\varphi' = \frac{1}{c} \frac{\partial f_0}{\partial t}$. Тогда остается один векторный потенциал, удовлетворяющий волновому уравнению и условию Лоренца, которое упрощается:

$$\square\vec{A} = 0, \quad \text{div } \vec{A} = 0. \quad (16)$$

4. *Другой вывод.* Можно рассуждать иначе и с самого начала положить скалярный потенциал равным нулю (кулонова калибровка), то есть принять

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (17)$$

Тогда первые два уравнения Максвелла удовлетворяются тождественно. Калибровочная инвариантность заключается в равенстве

$$\vec{A}' = \vec{A} - \text{grad } f_1. \quad (18)$$

Подстановка (17) во вторую пару уравнений (4) дает два соотношения

$$\text{div } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \text{div } \vec{A}}{\partial t} = 0, \quad \text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \quad (19)$$

Из первого из них следует, что $\text{div } \vec{A}$ не зависит от времени. Покажем, что ее всегда можно сделать равной нулю. Действительно, пусть потенциал \vec{A}' не удовлетворяет этому условию, то есть

$$\text{div } \vec{A}' = b(\vec{r}) \neq 0. \quad (20)$$

Подставляя сюда (18), получаем

$$\text{div } \vec{A}' = \text{div } \vec{A} - \Delta f_1 = b(\vec{r}). \quad (21)$$

Всегда можно найти одну такую функцию, которая является решением неоднородного уравнения

$$\Delta f_1 = -b(\vec{r}), \quad (22)$$

то есть уравнения Пуассона. Это ньютоновский (или объемный) потенциал. Тогда потенциал \vec{A} будет удовлетворять двум уравнениям (16).

§ 2. Плоские волны

1. *Одномерные волны.* Поскольку уравнения для всех составляющих напряженностей поля и потенциалов одинаковы, то есть однородные волновые, рассмотрим такое уравнение общего вида

$$\square u = 0, \quad (23)$$

где u — любая из компонент поля или потенциалов. Начнем с некоторых решений частного вида.

Пусть решение волнового уравнения (23) зависит только от одной пространственной координаты, например, x . Тогда уравнение для такого решения упрощается и принимает вид одномерного волнового уравнения

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0. \quad (24)$$

Такое уравнение имеет общее решение, которое можно представить так:

$$u(x, t) = \Phi_r(x - vt) + \Phi_l(x + vt). \quad (25)$$

Это решение называется решением Даламбера. В нем Φ_r и Φ_l — произвольные дважды дифференцируемые функции. Их аргументы — это характеристики волнового уравнения. То, что функция (25) действительно удовлетворяет уравнению (23), проверяется прямой подстановкой. Хотя для такой проверки функции должны иметь вторые производные, однако для нахождения самого решения этого не требуется, поэтому можно объявить обобщенным решением и такую комбинацию вида (25), в которой Φ_r и Φ_l совершенно произвольны. Производные можно понимать в некотором обобщенном смысле, а их плохие (нерегулярные, негладкие, разрывные и т.д.) части сокращаются при вычитании после подстановки в уравнение.

Рассмотрим решение, состоящее из одной функции, пусть сначала первой

$$u(x, t) = \Phi_r(x - vt). \quad (26)$$

Ясно, что величина u будет одинакова во всех точках и временах, где $x - vt = x_0 = \text{const}$. С течением времени каждая такая точка (с данным x_0) перемещается по закону

$$x = x_0 + vt, \quad (27)$$

то есть равномерно вдоль оси x вправо. Поэтому, если в какой-либо начальный момент функцию (26) можно изобразить некоторым графиком, то с течением времени ее график будет ползти вдоль оси x с постоянной скоростью v , не меняя своей формы, что можно истолковать, как распространение плоской волны. Таким образом, v — это скорость распространения волн.

Совершенно ясно, что вторая функция описывает распространение плоской волны в противоположном направлении и ее рассмотрение ничего принципиально нового не дает. Конечно, сумма двух волн, идущих в противоположных направлениях и не разошедшихся друг от друга, может создать сложную интерференционную картину, причудливо меняющуюся со временем.

2. Одномерные электромагнитные волны. Теперь посмотрим, как общее решение Даламбера осуществляется в теории электромагнитного поля. Векторный потенциал удовлетворяет волновому уравнению и дополнительному условию, приводящему к существенной особенности таких волн.

Рассматриваем сначала опять одномерные волны, то есть считаем, что все компоненты потенциала являются функциями только от пространственной координаты x и времени. Уравнения, определяющие векторный потенциал $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ в этом случае принимают вид

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \vec{A} = 0, \quad \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0. \quad (28)$$

Пусть волна распространяется в сторону положительных x . Тогда решение этого одномерного волнового уравнения можно записать в виде

$$\vec{A} = (A_x(x - vt), A_y(x - vt), A_z(x - vt)). \quad (29)$$

Дополнительное условие требует, чтобы первая функция не зависела от x . Но это единственный ее аргумент, поэтому она вообще должна быть постоянной. Так как потенциалы нужны только для вычисления напряженностей, для чего от них берутся производные, то постоянная у них несущественна. Следовательно, можно положить

$$\vec{A} = \vec{A}(x - vt) = (0, A_y(x - vt), A_z(x - vt)). \quad (30)$$

Найдем теперь составляющие поля. Напряженность электрического поля (индексы у составляющих потенциала означают не переменную, по которой берется производная, а ось проецирования, производные берутся по аргументу функций) получается в виде

$$\vec{E} = \frac{v}{c} (0, A'_y(x - vt), A'_z(x - vt)) = \frac{v}{c} \vec{A}'(x - vt). \quad (31)$$

Магнитная индукция в свою очередь (от переменных y и z функции не зависят)

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = (0, -A'_z(x - vt), A'_y(x - vt)). \quad (32)$$

Из (31) и (32) видно, что составляющие поля перпендикулярны направлению распространения волны, а также между собой. Это свойство называется поперечностью. Таким образом, в однородной среде могут существовать только поперечные волны. Причина этого — в выполнении дополнительного условия, которое поэтому называется условием поперечности.

Рассмотрим теперь волны, идущие в произвольном направлении.

3. Произвольная плоская волна. Для того, чтобы получить плоскую волну произвольного направления, не надо повторять все рассуждения. Здесь достаточно заметить, что поворотом системы координат всегда можно добиться, чтобы волна шла вдоль оси абсцисс. Тогда можно взять уже полученное решение (29) и повернуть систему координат обратно. При этом, как известно, скалярные произведения остаются инвариантными. Поэтому в произвольной волне вместо аргумента x будет стоять скалярное произведение вектора положения на орт направления ее движения.

Итак, решение волнового уравнения в виде плоской волны, движущейся в направлении орта \vec{n} , должно быть записано в виде

$$\vec{A} = \vec{A}'(\vec{n}\vec{r} - vt), \quad (33)$$

где справа стоит вектор-функция, то есть три обычных функции. Условие поперечности накладывает следующее требование ортоональности:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{n} \cdot \vec{A}'(\vec{n}\vec{r} - vt) = 0. \quad (34)$$

Составляющие поля находятся, как и выше:

$$\vec{E} = \frac{v}{c} \vec{A}'(\vec{n}\vec{r} - vt), \quad \vec{B} = \vec{n} \times \vec{A}'(\vec{n}\vec{r} - vt). \quad (35)$$

Из этих формул ясно видно, что три вектора: вектор распространения волны \vec{n} , вектор электрической напряженности \vec{E} и вектор магнитной индукции \vec{B} взаимно перпендикулярны. Выполняется в частности, соотношение

$$\vec{B} = \frac{c}{v} \vec{n} \times \vec{E}. \quad (36)$$

Поперечность — это характерное свойство электромагнитной волны в однородной среде без границ. Заметим, что в неоднородных и ограниченных средах это свойство, вообще говоря, теряется.

4. Энергетические величины. Получим формулы для величин, характеризующих энергию поля. Сначала найдем напряженность магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = \frac{1}{\mu} \vec{n} \times \vec{A}'(\vec{n}\vec{r} - vt), \quad \vec{H}^2 = \frac{1}{\mu^2} |\vec{A}'|^2. \quad (37)$$

Заметим, что

$$\epsilon \vec{E}^2 = \epsilon \frac{v^2}{c^2} |\vec{A}'|^2 = \epsilon \frac{1}{\epsilon \mu} |\vec{A}'|^2 = \frac{1}{\mu} |\vec{A}'|^2 = \mu \vec{H}^2. \quad (38)$$

Поэтому плотность электромагнитной энергии

$$w = \frac{\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2}{8\pi} = \frac{\epsilon \vec{E}^2}{4\pi} = \frac{\mu \vec{H}^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\mu} |\vec{A}'|^2. \quad (39)$$

Вектор Пойнтинга, то есть вектор потока энергии, равен

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi\mu} \frac{c}{v} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{v^2 \epsilon \mu}{4\pi\mu v} [\vec{n}(\vec{E})^2 - \vec{E}(\vec{n}\vec{E})] = \frac{v\epsilon}{4\pi} \vec{n}(\vec{E})^2 = w \vec{n}. \quad (40)$$

Поток энергии есть просто произведение плотности на скорость ее течения, то есть энергия не исчезает и не создается, а только перетекает вместе с несущей ее волной.

§ 3. Монохроматические волны

1. Понятиеmonoхроматической волны. Это такая волна, которая содержит только одну частоту, то есть зависит от времени только через синус и косинус от одной частоты: $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$. Однако в электродинамике принято вместо вещественных функций и амплитуд применять комплексные величины. Договорились представлять все электромагнитные величины, характеризующие поле, пропорциональными экспоненте. Например, напряженность электрического поля

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (41)$$

Здесь берется только одна экспонента — с минусом перед фазой, но зато принимается, что амплитуда комплексна $\vec{E}_0 = \vec{E}_R^0 + i\vec{E}_I^0$. Она так и называется: комплексная амплитуда. При этом считается, что физический смысл имеет только вещественная часть комплексного вектора \vec{E} :

$$\operatorname{Re} \vec{E} = \vec{E}_R^0 \cos \omega t + \vec{E}_I^0 \sin \omega t. \quad (42)$$

Проводить выкладки в линейных уравнениях с одной комплексной экспонентой оказывается проще, чем с двумя вещественными функциями. При переходе к физическим величинам надо воспользоваться формулой (42). Однако, часто нет необходимости отделять вещественную часть комплексного вектора напряженности или ее комплексной амплитуды, например, при нахождении средних по времени значений энергетических величин, квадратичных по напряженностям. Действительно, это среднее значение

$$\overline{(\operatorname{Re} \vec{E})^2} = (\vec{E}_R^0)^2 \overline{\cos^2 \omega t} + (\vec{E}_I^0)^2 \overline{\sin^2 \omega t} + 2 \vec{E}_R^0 \vec{E}_I^0 \overline{\cos \omega t \sin \omega t} = \frac{1}{2} [(\vec{E}_R^0)^2 + (\vec{E}_I^0)^2] = \frac{1}{2} |\vec{E}|^2. \quad (43)$$

В последнем выражении модуль вектора понимается одновременно в двух смыслах: как модуль вектора и как модуль комплексных чисел, из которых состоят его компоненты.

Важность таких средних энергетических величин заключается в том, что именно их воспринимают регистрирующие приборы, так как постоянные времени обычных приборов намного больше, чем периоды изменения волн.

2. Уравнения для комплексных амплитуд. Таким образом, все напряженности и индукции монохроматической электромагнитной волны пропорциональны $e^{-i\omega t}$. В электродинамике принимается еще одно соглашение, упрощающее запись формул и уравнений. Именно, комплексные амплитуды обозначаются так же, как и сами векторы (то есть не ставится 0), а различие их выявляется через вид уравнений, которыми определяются соответствующие величины: уравнения для комплексных амплитуд не содержат времени, зато содержат частоту.

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд выглядят так:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{B}, \operatorname{div} \vec{D} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{i\omega}{c} \vec{D}. \quad (44)$$

Материальные уравнения, так же как и уравнения Максвелла без производных по времени, полностью сохраняют свой формальный вид.

Вместо волновых уравнений получаются уравнения, которые называются уравнениями Гельмгольца. Например, для векторного потенциала (здесь сохраним индекс)

$$-\alpha^2 \vec{A}_0 - \Delta \vec{A}_0 = 0, \quad (45)$$

где $\alpha = \omega/v$ — волновое число. Условие поперечности по форме не изменяется.

3. Плоские монохроматические волны. Такая волна должна удовлетворять двум требованиям. Во-первых, быть плоской, то есть вся зависимость от координат и времени должна происходить через комбинацию $\vec{n}\vec{r} - vt$. Во-вторых, быть монохроматической, то есть вся зависимость от времени должна содержаться в множителе $\exp(-i\omega t)$. Надо объединить эти требования. Это делается следующим образом. Множитель, описывающий монохроматичность, представим так:

$$\exp(-i\omega(t - \vec{n}\vec{r}/v)) = \exp(-i\omega t + i\alpha \vec{n}\vec{r}) = \exp(-i(\omega t - \vec{\alpha}\vec{r})), \quad (46)$$

где $\vec{\alpha} = \alpha\vec{n}$ — волновой вектор. Таким образом, плоская монохроматическая волна представляется в виде

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \exp(-i(\omega t - \vec{\alpha}\vec{r})), \quad (47)$$

где теперь \vec{A}_0 — постоянный комплексный вектор (не зависящий ни от времени, ни от координат).

Напряженности поля выражаются через ту же амплитуду:

$$\vec{E} = i\frac{\omega}{c} \vec{A}_0, \vec{B} = i\vec{\alpha} \times \vec{A}_0. \quad (48)$$

§ 4. Сферические волны

1. Понятие сферических волн. Плоские волны фактически являются решениями волнового уравнения, которые можно получить разделением переменных в декартовых координатах. По аналогии сферические волны — это такие волны, которые являются частными решениями волнового уравнения в сферических (полярных) координатах. В этих координатах переменные также могут быть разделены.

Для разделения переменных приведем выражение оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi}, \quad (49)$$

где радиальная часть оператора

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (50)$$

а угловая часть

$$\Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (51)$$

Уравнение Гельмгольца (45) для каждой комплексной амплитуды потенциалов и напряженностей имеет вид

$$\alpha^2 u + \Delta u = 0. \quad (52)$$

При разделении переменных в сферических координатах основное разделение происходит между радиальной и угловыми координатами, причем угловые координаты являются аргументами так называемых сферических функций (гармоник), которые иногда называют шаровыми. Приведем здесь их основные свойства.

2. *Сферические гармоники.* Эти функции определяются уравнением

$$\Delta_{\theta\varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (53)$$

Они являются произведениями экспонент от φ вида $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$ и функций $P_{lm}(\cos \theta)$, выраждающихся через при соединенные функции Лежандра:

$$P_{lm}(\eta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\eta). \quad (54)$$

Те в свою очередь определяются уравнением

$$\left\{ \frac{d}{d\eta} \left[(1-\eta^2) \frac{d}{d\eta} \right] + l(l+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2} \right\} P_l^m(\eta) = 0 \quad (55)$$

и имеют явное выражение через многочлены Лежандра

$$P_l^m(\eta) = (1-\eta^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\eta^m} P_l(\eta), \quad P_l(\eta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\eta^l} (\eta^2 - 1)^l. \quad (56)$$

Оба числа l и m целые, причем $l = 0, 1, 2, \dots$, а при каждом l число m может принимать значения $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$.

Функции нормированы на единицу (в отличие от функций, обозначаемых $Y_l^m(\theta, \varphi)$), то есть

$$\int d^2n |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \right|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta d\theta |P_{lm}(\cos \theta)|^2 = 1. \quad (57)$$

Приведем функции с наименьшими номерами:

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}. \quad (58)$$

3. *Разделение переменных.* Разделим переменные в уравнении (52), то есть будем искать частное решение его в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (59)$$

Подставив эту функцию в уравнение (52), найдем, что радиальная функция удовлетворяет уравнению

$$\alpha^2 R(r) + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = 0. \quad (60)$$

Радиальная функция не зависит от числа m , которое не входит в определяющее ее уравнение.

Чтобы привести уравнение (60) к стандартному виду теории специальных функций, сделаем замену

$$R(r) = \frac{w(\alpha r)}{\sqrt{r}} = r^{-1/2} w(\alpha r), \quad R'(r) = -\frac{1}{2} r^{-3/2} w(\alpha r) + r^{-1/2} w'(\alpha r) \alpha. \quad (61)$$

Тогда

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{2} r^{1/2} w(\alpha r) + r^{3/2} w'(\alpha r) \alpha \right) = -\frac{1}{4} r^{-1/2} w(\alpha r) + r^{1/2} w'(\alpha r) \alpha + r^{3/2} w''(\alpha r) \alpha^2 \quad (62)$$

и уравнение (60) переходит в

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + [z^2 - (l + 1/2)^2] w(z) = 0. \quad (63)$$

Полученное уравнение есть частный случай уравнения Бесселя и определяет функции Бесселя с индексом $l+1/2$, так что его решения — это функции $J_{l+1/2}(z)$ и $J_{-l-1/2}(z)$. Соответствующие радиальные функции называются сферическими функциями Бесселя. Приведем их свойства ([7]).

4. *Функции Бесселя полуцелого порядка.* Функции Бесселя раскладываются в бесконечные везде сходящиеся ряды по степеням своего аргумента:

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu+n+1)}, \quad (64)$$

где в знаменателе стоит гамма-функция. Однако функции с полуцелыми индексами при всех целых l являются элементарными функциями. Они представляются дифференциальными формулами и конечными разложениями:

$$J_{l+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^l z^{l+1/2} \frac{d^l}{(zdz)^l} \left(\frac{\sin z}{z} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^l \frac{(l+n)!}{n!(l-n)!(2z)^n} \cos \left(z + \frac{\pi}{2}(n-l-1) \right), \quad (65)$$

$$J_{-l-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{l+1/2} \frac{d^l}{(zdz)^l} \left(\frac{\cos z}{z} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^l \frac{(l+n)!}{n!(l-n)!(2z)^n} \cos \left(z + \frac{\pi}{2}(n+l) \right). \quad (66)$$

В обеих суммах косинусы аргумента, зависящего от переменной суммирования, могут быть представлены через $\cos z$ и $\sin z$, при которых множителями будут конечные суммы обратных степеней z .

Приведем снова первые функции:

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right), \quad J_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(-\sin z - \frac{\cos z}{z} \right). \quad (67)$$

5. *Сферические функции Бесселя.* Согласно формуле (61) они выражаются через рассмотренные функции полуцелого порядка. Конкретно определяют три функции, называемые соответственно сферическими функциями Бесселя, Неймана и Ганкеля (или первого, второго и третьего рода) и имеющими следующее асимптотическое поведение при больших аргументах:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z) \sim \frac{1}{z} \cos \left(z - \frac{\pi}{2}(l+1) \right), \quad (68)$$

$$n_l(z) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-l-1/2}(z) \sim \frac{1}{z} \sin \left(z - \frac{\pi}{2}(l+1) \right), \quad (69)$$

$$h_l(z) = j_l(z) + i n_l(z) = \frac{e^{iz}}{z i^{l+1}} \sum_{n=0}^l \frac{(l+n)!}{n!(l-n)!} \frac{(-1)^n}{(2iz)^n} \sim \frac{1}{z} e^{iz - (\pi i/2)(l+1)} = \frac{i^{-l-1}}{z} e^{iz}. \quad (70)$$

Общее решение уравнения Гельмгольца в сферических координатах слагается из частных:

$$u(r, \theta, \varphi) = \int_0^\infty d\alpha \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) [C_{lm}^+(\alpha) j_l(\alpha r) + C_{lm}^-(\alpha) n_l(\alpha r)]. \quad (71)$$

Наличие в общем решении двух наборов коэффициентов соответствует тому, что это решение уравнения второго порядка. Для определения этих коэффициентов необходимо задать граничные условия, которые описывают действие первичных источников поля.

6. *Функция Грина.* Уравнение для функции Грина уравнения Гельмгольца (52)

$$\alpha^2 G(\vec{r}) + \Delta G(\vec{r}) = -\delta(\vec{r}) \quad (72)$$

может быть получено из волнового уравнения (1.57) (повторим его)

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) G(t, \vec{r}) = \frac{1}{v} \delta(t) \delta(\vec{r}). \quad (73)$$

путем применения к нему преобразования Фурье по времени:

$$G(\vec{r}) = v \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G(t, \vec{r}) dt. \quad (74)$$

Действительно, интеграл от дельта-функции от времени даст единицу, оператор Лапласа времени не содержит, а интеграл от второй производной по времени после двукратного интегрирования по частям добавит множитель $-\omega^2$. Таким образом, функцию Грина уравнения Гельмгольца можно получить из функции Грина волнового уравнения, выведенной в конце первой Главы. Находим

$$G(\vec{r}) = v \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{1}{4\pi r} \delta(vt - r) dt = \frac{1}{4\pi r} e^{i\alpha r}. \quad (75)$$

Функция с аргументом, равным разности векторов источника и приемника, то есть $G(\vec{r} - \vec{r}_0)$ получается простой подстановкой вместо r модуля разности

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2\vec{r}\vec{r}_0} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma}, \quad (76)$$

где γ — угол между векторами. Его косинус выражается через сферические углы двух векторов:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (77)$$

Функция Грина раскладывается по сферическим функциям Бесселя:

$$G(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{e^{i\alpha|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{i\alpha}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \gamma) j_l(\alpha r_<) h_l(\alpha r_>), \quad (78)$$

где $r_<$ и $r_>$ — меньшее и большее из r и r_0 . Входящие в разложение (78) многочлены Лежандра также раскладываются по сферическим гармоникам:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{2}{2l+1} \sum_{m=0}^l (2 - \delta_{m0}) P_{lm}(\cos \theta) P_{lm}(\cos \theta_0) \cos(m[\varphi - \varphi_0]). \quad (79)$$

7. *Асимптотическое поведение волн.* На больших расстояниях от источников поля, то есть при $r \rightarrow \infty$ решения упрощаются и принимают характерную форму. Из выражений для сферических функций Бесселя, в частности из формул (78) и (70) следует, что в этой асимптотической области все решения пропорциональны либо $e^{i\alpha r}/r$ либо $e^{-i\alpha r}/r$. Угловая же зависимость этих частей может быть различной. Следовательно, асимптотически все характеристики поля ведут себя так:

$$u(\vec{r}) \sim \frac{f_{\text{dvr}}(\theta, \phi)}{r} \exp(i\alpha r) + \frac{f_{\text{con}}(\theta, \phi)}{r} \exp(-i\alpha r). \quad (80)$$

Добавив множитель $e^{-i\omega t}$, получим асимптотику монохроматической сферической волны

$$u(t, \vec{r}) \sim \frac{f_{\text{dvr}}(\theta, \phi)}{r} \exp(-i[\omega t - \alpha r]) + \frac{f_{\text{con}}(\theta, \phi)}{r} \exp(-i[\omega t + \alpha r]). \quad (81)$$

Первое слагаемое соответствует расходящейся волне, так как с течением времени ее постоянная фаза удаляется от начала координат (в ней $r = r_* + \omega t/\alpha = r_* + vt$) и уходит на бесконечность, а второе слагаемое описывает сходящуюся волну ($r = r_* - vt$).

В отличие от плоской волны в показателе экспоненты стоит только радиальное расстояние, а не радиус-вектор, так как экспонента характеризует только радиальную зависимость волны и не зависит от направления ее распространения. Характеристики направления волны, то есть сферические углы θ и ϕ , входят в асимптотики только в амплитуды сходящейся и расходящейся сферических волн.

§ 5. Поляризация электромагнитных волн

1. *Поляризация монохроматической волны.* Пусть в пространстве распространяется монохроматическая волна. Закрепим точку наблюдения \vec{r} и не будем ее постоянные координаты указывать в качестве аргументов волны. В этом случае нам безразлично, какая это волна. Будем считать для простоты рассуждений, что волна плоская.

Рассмотрим вектор электрической напряженности, который именно и воспринимает человеческий глаз. Для монохроматической волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t). \quad (82)$$

Всегда можно выбрать такое число α_0 и такие два вещественных вектора \vec{b}_1 и \vec{b}_2 , чтобы выполнялись требования

$$\vec{E}_0 = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2) \exp(i\alpha_0), \quad \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0. \quad (83)$$

Действительно, отделяя вещественную и мнимую части в равенстве (83), получаем соотношения

$$\vec{E}_R^0 = \vec{b}_1 \cos \alpha_0 - \vec{b}_2 \sin \alpha_0, \quad \vec{E}_I^0 = \vec{b}_1 \sin \alpha_0 + \vec{b}_2 \cos \alpha_0. \quad (84)$$

Предположим, что число α_0 известно. Тогда векторы \vec{b}_1 и \vec{b}_2 легко находятся, так как матрица коэффициентов в линейной системе ортогональна. Имеем

$$\vec{b}_1 = \vec{E}_R^0 \cos \alpha_0 + \vec{E}_I^0 \sin \alpha_0, \quad \vec{b}_2 = -\vec{E}_R^0 \sin \alpha_0 + \vec{E}_I^0 \cos \alpha_0. \quad (85)$$

Остается потребовать перпендикулярность этих векторов, то есть

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = [(\vec{E}_I^0)^2 - (\vec{E}_R^0)^2] \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 + \vec{E}_R^0 \vec{E}_I^0 (\cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0) = 0. \quad (86)$$

Такое уравнение всегда имеет решение, так как введя двойной угол, получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\vec{E}_R^0 \vec{E}_I^0}{(\vec{E}_R^0)^2 - (\vec{E}_I^0)^2}, \quad (87)$$

что осмысленно при любых векторах \vec{E}_R^0 и \vec{E}_I^0 (при $(\vec{E}_R^0)^2 = (\vec{E}_I^0)^2$ можно взять $\alpha_0 = \pi/4$).

Значения α_0 , удовлетворяющие уравнению (87) могут отличаться на $\pi/2$. Можно выбрать одно из них, исходя из какого-либо условия, например, чтобы вектор \vec{b}_1 был длиннее, чем \vec{b}_2 , или чтобы эти векторы вместе с направлением волны составляли правую тройку. Сейчас для нас этот выбор несуществен.

Итак, мы представили вектор напряженности в виде

$$\vec{E} = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2) \exp(-i(\omega t - \alpha_0)). \quad (88)$$

Вспоминая, что физический смысл имеет лишь вещественная часть вектора (82), находим, что конец этого вектора описывает кривую

$$\operatorname{Re} \vec{E} = \vec{b}_1 \cos(\omega t - \alpha_0) + \vec{b}_2 \sin(\omega t - \alpha_0). \quad (89)$$

Вообще говоря, эта кривая — эллипс.

Таким образом, строго монохроматическая волна всегда полностью эллиптически поляризована. В зависимости от того, составляют векторы \vec{b}_1 и \vec{b}_2 правую или левую тройку с направлением движения волны и вращается ли вектор напряженности от \vec{b}_1 к \vec{b}_2 или наоборот, поляризация называется левой или правой (определения различаются). Направление того из векторов \vec{b}_1 и \vec{b}_2 , длина которого больше, называется плоскостью поляризации или плоскостью преимущественных колебаний электрического вектора.

Если один из векторов \vec{b}_1 или \vec{b}_2 оказывается нулевым, то вектор (82) зачерчивает отрезок прямой и поляризация — линейная (или плоская). Напротив, если длины векторов совпадают, вектор (82) движется по окружности, а поляризация — круговая (или циркулярная).

Однако, в природе редко осуществляются строго монохроматические волны, а реальные приборы тем более не могут вырезать очень узкую полосу по частоте. Поэтому приходится рассматривать более общий случай и для него вводить специальное описание состояния поляризации.

2. *Почти монохроматическая волна.* Представим проходящую через фиксированную точку пространства волну функцией

$$\vec{E} = \vec{E}_0(t) \exp(-i\omega t). \quad (90)$$

Конечно, так можно изобразить совершенно произвольную вектор-функцию. Здесь будем считать, что амплитуда $\vec{E}_0(t)$ меняется со временем достаточно медленно. Дело в том, что обычно частоты ω очень велики. Например, длине волны $\lambda = 5000$ ангстрем соответствует частота $\omega = 2\pi c/\lambda = 6.28 \cdot 3 \cdot 10^{10} / (5 \cdot 10^{-5}) = 3.6 \cdot 10^{15}$, так что за

1 секунду проходит 10^{15} периодов гармонической функции. Частота еще больше в УФ и рентгеновском диапазонах. Даже в радиодиапазоне частоты измеряются в мегагерцах. Вот по сравнению с этой быстрой экспонентой амплитуда меняется медленно, колеблясь вокруг какого-либо среднего. Постоянны же времена обычных приборов измеряются долями секунды.

Отличие волн от строго монохроматических может происходить в результате смещения некогерентных (то есть идущих от независимых источников) волн одной частоты или волн близких частот, не различимых прибором.

Выберем некоторую декартову систему координат (x, y) в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны так, чтобы оси координат составляли с направлением волны правую тройку. Эту систему можно принять в качестве базиса, который называется поляризационным. Разложим вектор \vec{E} по ортам базиса и представим его в виде столбца

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^0(t) \\ E_y^0(t) \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. \quad (91)$$

Здесь уже невозможно ввести векторы \vec{b}_1 и \vec{b}_2 , так как фаза α_0 все время меняется. Поэтому описание поляризации такой волны более сложно.

3. Поляризационная матрица и параметры Стокса. Определим для почти монохроматической волны следующую матрицу как среднее от диадного произведения

$$\check{\mathcal{S}} = \frac{c}{8\pi} \overline{\vec{E} \vec{E}^\dagger} = \frac{c}{8\pi} \begin{pmatrix} \overline{|E_x|^2} & \overline{E_x^* E_y} \\ \overline{E_x E_y^*} & \overline{|E_y|^2} \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Поскольку экспоненциальные множители при перемножении сопряженных проекций вектора исчезают, в этих формулах можно писать, а можно не писать (как мы сделали) полик у этих проекций, то есть все равно, что брать: сам вектор или его амплитуду. В обоих случаях (92) получается самосопряженной квадратной матрицей второго порядка с (вообще говоря) четырьмя независимыми параметрами. Заметим, что после усреднения матрицу уже нельзя (опять-таки вообще говоря) представить диадным произведением.

Наряду с поляризационной матрицей состояние поляризации почти монохроматической волны можно описывать параметрами Стокса. Через них матрица (92) выражается так

$$\check{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Здесь элементы матрицы выражены через четыре параметра Стокса I, Q, U, V . Напишем обратные выражения параметров Стокса через элементы матрицы и тем самым через напряженность волны. Эти выражения следующие:

$$I = \frac{c}{8\pi} (\overline{|E_x|^2} + \overline{|E_y|^2}), \quad Q = \frac{c}{8\pi} (\overline{|E_x|^2} - \overline{|E_y|^2}), \quad (94)$$

$$U = \frac{c}{8\pi} (\overline{E_x^* E_y} + \overline{E_x E_y^*}), \quad V = i \frac{c}{8\pi} (\overline{E_x^* E_y} - \overline{E_x E_y^*}). \quad (95)$$

Обычно поляризационные матрицы используются в физических работах. В астрофизике же гораздо более употребительны параметры Стокса. Их преимущество в том, что они все вещественны. Кроме того, их обычно представляют в виде столбца с четырьмя элементами и их линейные преобразования при различных изменениях описания представляются с помощью четырехмерных матриц, а не с помощью тензоров четвертого ранга, как в случае матриц. Таким образом, представление поляризации через параметры Стокса значительно более наглядно.

4. Свойства поляризационной матрицы и параметров Стокса. Эти свойства связаны с двумя обстоятельствами. Во-первых, с усреднением элементов диадного произведения по времени, а во-вторых, с преобразованиями этих элементов при поворотах ортов поляризационного базиса. Перечислим такие свойства.

1) Выполняется неравенство

$$\det \check{\mathcal{S}} = \frac{c^2}{(8\pi)^2} [|E_x|^2 |E_y|^2 - |E_x^* E_y|^2] \geq 0. \quad (96)$$

Это неравенство, если расписать усреднение через интегралы по времени (то есть по периоду, деленные на величину этого периода), представляет собой частный случай общего неравенства Коши—Буняковского (или Шварца). Его аналогом является неравенство, выражающее утверждение, что модуль скалярного произведения векторов меньше произведения норм (длин) этих векторов.

Через параметры Стокса неравенство (96) представляется так:

$$4 \det \check{\mathcal{S}} = I^2 - Q^1 - U^2 - V^2 \geq 0. \quad (97)$$

При доказательстве неравенства Коши–Буняковского устанавливается, что равенство в нем достигается только тогда, когда усредненные величины остаются пропорциональными, а это может выполняться, если волна монохроматическая. В противном случае (96) является строгим неравенством. Таким образом, равенство в (96) (или в (97)) есть необходимое и достаточное условие монохроматичности волны и полной ее поляризации (в общем случае эллиптической).

2) При повороте ортов поляризационного базиса на некоторый угол координаты векторов преобразуются с ортогональной матрицей. Преобразуются и элементы матриц, в частности, поляризационной матрицы. При этом некоторые величины, связанные с матрицами не изменяются. Например, не меняются собственные значения (с.з.) матриц, а также такие комбинации их элементов, которые определяют эти значения. Как известно, коэффициентами характеристического уравнения, из которого находятся с.з., являются след матрицы и ее определитель. У матрицы второго порядка всего два коэффициента, так что указанными двумя величинами исчерпываются инварианты характеристического уравнения.

Итак, инвариантами при повороте осей поляризационного базиса остаются следующие величины.

а) Определитель, то есть $I^2 - Q^2 - U^2 - V^2$, комбинация, определяющая монохроматичность или немонохроматичность волны.

б) След матрицы, то есть интенсивность излучения I .

в) Но у матрицы (93) есть еще один инвариант, связанный с тем, что преобразования, отражающие поворот базиса, вещественны. Поэтому вещественная часть матрицы преобразуется в вещественную, а мнимая — в мнимую. Поскольку мнимой частью матрицы (93) является только параметр V , он также инвариантен.

г) Как следствие инвариантности трех указанных величин оказывается инвариантной и сумма $Q^2 + U^2$.

Более подробное рассмотрение различных преобразований поляризационных матриц и векторов Стокса дается ниже.

5. *Преобразование параметров при повороте.* Инвариантные величины, остающиеся неизменными при повороте поляризационных ортов, нам удалось выявить не выписывая самих преобразований поляризационных параметров. Найдем теперь эти преобразования.

Пусть поляризационные орты повернуты на угол ϕ . Тогда новые (отмечаемые штрихами) и старые орты, как известно, связаны формулами

$$\vec{e}'_1 = \cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = -\sin \phi \vec{e}_1 + \cos \phi \vec{e}_2. \quad (98)$$

Составляющие напряженности, т. е. коэффициенты разложения ее по двум базисам, связаны точно такими же формулами. Оба преобразования можно записать в матричной форме. Для напряженностей это

$$\vec{E}' = \check{\mathcal{A}}(\phi) \vec{E}, \quad (99)$$

где матрица ортогонального преобразования (комплексного вектора)

$$\check{\mathcal{A}}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (100)$$

Элементы поляризационной матрицы, построенной как диадное произведение векторов напряженности, преобразуются согласно закону преобразования операторов:

$$\check{\mathcal{S}}' = \check{\mathcal{A}}(\phi) \check{\mathcal{S}} \check{\mathcal{A}}^T(\phi). \quad (101)$$

Поскольку ортогональная матрица вещественна, ее обратная равна эрмитово сопряженной, эрмитово сопряжение сводится к транспонированию, а последнее — к изменению знака у аргумента ϕ .

Перейдя от поляризационной матрицы к параметрам Стокса, убеждаемся, что преобразование вектора этих параметров при повороте поляризационных ортов

$$\begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \hat{L}(\phi) \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad (102)$$

осуществляется посредством матрицы, которую часто называют матрицей Чандрасекара:

$$\hat{L}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\phi) & \sin(2\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(2\phi) & \cos(2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (103)$$

При вещественных ортогональных преобразованиях из четырех параметров Стокса преобразуются только два, причем с удвоенным углом. Это согласуется с известной уже инвариантностью параметров I и V , а также суммы $Q^2 + U^2$.

6. *Наблюдаемая интенсивность и поляризация.* Посмотрим теперь, как можно наблюдать поляризацию волны и как отражается наличие поляризации на показаниях приборов.

Измерение интенсивности (точнее потоков) излучения производится при помощи фотометров. Эти приборы сами не могут отличить поляризованное излучение от неполяризованного. Для определения поляризации применяются анализаторы—поляроиды, которые пропускают излучение, поляризованное в одной плоскости, и не пропускают поляризованное в перпендикулярной. Такими поляроидами для видимого света могут служить пластиинки из исландского шпата или поляризационные призмы. Гораздо труднее измерять поляризацию в рентгене, там используется эффект Комптона. Здесь при теоретическом рассмотрении явления на приборных проблемах не останавливаемся.

При вращении анализатора через него будут проходить разные доли падающего излучения, следовательно, по показаниям фотометра, стоящего за анализатором, можно судить о состоянии поляризации волны.

Однако, анализатор не в состоянии измерить круговую поляризацию или даже установить ее присутствие, так как круговая поляризация не дает эффекта при вращении анализатора. Надо как-то превратить круговую поляризацию в линейную. Для этого используются пластинки из веществ, вращающих плоскость поляризации, то есть добавляющих разность фаз между составляющими вектора напряженности. Такими веществами являются кварц и другие кристаллические минералы, а также некоторые органические вещества, например, сахар. Обычно наблюдатели применяют так называемую пластинку в четверть волны, поворачивающую плоскость поляризации на 90° и переводящую круговую поляризацию полностью в линейную. Но в теории будем считать, что добавляемая фаза произвольна.

Итак, пусть почти монохроматическая волна (91) падает на фотометр, предварительно пройдя через пластинку, добавившую ей разность фаз δ между E_x и E_y , и через анализатор, ось которого (то есть такое направление, что если падает поляризованное в этом направлении излучение, то оно полностью проходит) повернута на угол ψ к оси x . Надо найти, какую интенсивность $I(\psi, \delta)$ в зависимости от ψ и δ измерит фотометр.

После пластиинки волна (91) превратится в

$$\vec{E}_\delta = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (104)$$

Через анализатор пройдет не все излучение, а только часть, колебания которой параллельны оси анализатора, то есть вектор напряженности спроектируется на эту ось. Представим это направление вектором-столбцом

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (105)$$

Тогда прошедшая волна будет иметь напряженность $\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta$. Вспомним, что физический смысл имеет только вещественная часть вектора напряженности, а фотометр измеряет усредненную по времени квадратичную величину:

$$I(\psi, \delta) = \frac{c}{4\pi} \overline{(\text{Re } \vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta)^2} = \frac{c}{16\pi} \overline{\left[\vec{l}^\dagger (\vec{E}_\delta + \vec{E}_\delta^*) \right]^2} = \frac{c}{16\pi} \left[\overline{(\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta)^2} + \overline{(\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta^*)^2} + 2 \overline{(\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta)(\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta^*)} \right]. \quad (106)$$

Рассмотрим по очереди три слагаемых в последних квадратных скобках. Первые два из них равны нулю, так как квадрат вектора напряженности содержит множитель $e^{-2i\omega t}$, а квадрат сопряженного вектора пропорционален $e^{2i\omega t}$. Обе экспоненты при усреднении дают нуль. Остается только произведение вектора напряженности на его сопряженный.

Так как усреднять надо напряженность, а не вектор \vec{l} или фазу δ , то постараемся вынести эти величины из-под знака усреднения. Для этого преобразуем сомножители. Первый

$$\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta = \cos \psi \vec{E}_x + \sin \psi \vec{E}_y e^{i\delta} = \vec{l}_\delta^\dagger \vec{E}, \quad (107)$$

где введено обозначение

$$\vec{l}_\delta = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi e^{-\delta} \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Во втором сомножителе эрмитово сопряженной величиной сделаем вектор напряженности:

$$\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta^* = \cos \psi \vec{E}_x^* + \sin \psi \vec{E}_y^* e^{-i\delta} = \vec{E}^\dagger \vec{l}_\delta. \quad (109)$$

Произведение этих сомножителей можно представить, воспользовавшись свойством ассоциативности произведения матриц, в виде

$$(\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta)(\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta^*) = (\vec{l}_\delta^\dagger \vec{E})(\vec{E}^\dagger \vec{l}_\delta) = \vec{l}_\delta^\dagger (\vec{E} \vec{E}^\dagger) \vec{l}_\delta. \quad (110)$$

Тогда после усреднения согласно определению поляризационной матрицы (92) получится простая формула

$$I(\psi, \delta) = \vec{l}_\delta^\dagger \check{S} \vec{l}_\delta. \quad (111)$$

Выразим эту интенсивность через параметры Стокса. Подставив в (111) выражение (93) и проведя простую, хотя и довольно громоздкую выкладку, получим

$$I(\psi, \delta) = \frac{1}{2}[I + Q \cos 2\psi + U \sin 2\psi \cos \delta - V \sin \psi \sin \delta]. \quad (112)$$

Минус перед параметром V объясняется тем, что дополнительная фаза была введена в E_y , а не в E_x .

7. *Частные случаи поляризации.* Имея общую формулу для наблюдаемой интенсивности, мы можем рассмотреть, какие параметры характеризуют определенную поляризацию. Начнем с самого простого случая, когда излучение неполяризовано.

1) Неполяризованное излучение. Такое излучение называется естественным. В этом случае интенсивность, которую регистрирует фотометр, не зависит ни от угла анализатора, ни от разности фаз, так как направления колебаний электрической напряженности совершенно хаотичны. Ясно, что такое положение возможно лишь при условии, что $Q = U = V = 0$, то есть все параметры Стокса, кроме интенсивности, равны нулю.

Противоположный случай — полная поляризация, уже рассмотренный выше, когда волна строго монохроматическая. Здесь применим развитый аппарат.

2) Полная эллиптическая поляризация. Зададим векторы \vec{b}_1 и \vec{b}_2 координатами в выбранном поляризационном базисе:

$$\vec{b}_1 = b_1 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = b_2 \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (113)$$

Числа b_1 и b_2 могут при этом быть как положительными, так и отрицательными.

Тогда поляризационная матрица для напряженности (88)

$$\begin{aligned} \check{S} &= \frac{c}{8\pi} (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)(\vec{b}_1^\dagger - i\vec{b}_2^\dagger) = \frac{c}{8\pi} \begin{pmatrix} b_1 \cos \alpha + ib_2 \sin \alpha \\ b_1 \sin \alpha - ib_2 \cos \alpha \end{pmatrix} (b_1 \cos \alpha - ib_2 \sin \alpha \quad b_1 \sin \alpha + ib_2 \cos \alpha) = \\ &= \frac{c}{8\pi} \begin{pmatrix} b_1^2 \cos^2 \alpha + b_2^2 \sin^2 \alpha & (b_1^2 - b_2^2) \cos \alpha \sin \alpha - ib_1 b_2 \\ (b_1^2 - b_2^2) \cos \alpha \sin \alpha + ib_1 b_2 & b_1^2 \sin^2 \alpha + b_2^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (114)$$

Соответствующие выражения для параметров Стокса

$$I = \frac{c}{8\pi} (b_1^2 + b_2^2), \quad Q = \frac{c}{8\pi} (b_1^2 - b_2^2) \cos 2\alpha, \quad (115)$$

$$U = \frac{c}{8\pi} (b_1^2 - b_2^2) \sin 2\alpha, \quad V = \frac{c}{8\pi} 2b_1 b_2. \quad (116)$$

Отсюда вытекают подслучаи полной поляризации.

3) Линейная поляризация. Эллипс вырождается в отрезок, когда одна из величин b_1 или b_2 обращается в нуль (оба обратиться в нуль они не могут). И в том и в другом случае их произведение равно нулю и следовательно $V = 0$.

4) Круговая поляризация. Напротив, если при отсутствии дополнительной фазы наблюдаемая интенсивность не зависит от положения анализатора, то есть поляризация круговая, то должно быть $Q = U = 0$.

Во всех других случаях говорят, что поляризация частичная. Ее однако можно свести к рассмотренным случаям, что мы и сделаем ниже, но перед этим рассмотрим, какие изменения поляризации вызывают перемену знаков у параметров Стокса, характеризующих эту поляризацию.

8. *Дискретные преобразования параметров Стокса.* Преобразование параметров Стокса при повороте поляризационного базиса относится к непрерывным преобразованиям, так как угол поворота может быть любым и сколь угодно малым. Дискретные преобразования вызываются отражениями осей координат и переменой их порядка. Здесь рассмотрим именно такие преобразования.

Если мы просто меняем базис при фиксированной поляризации волны, то параметры Стокса изменяются, но описывают они то же самое состояние. Мы же будем считать, что рассматриваются разные состояния при фиксированном базисе, но описываемые параметрами с разными знаками.

Начнем с простых преобразований, считая поляризацию полной и переходя к более сложным по очереди. Параметры Стокса будем располагать в виде вектора-столбца с четырьмя компонентами. Интенсивности двух волн будем считать равными.

Заметим, что отражение обеих осей координат или, что то же самое, изменение знаков обоих чисел b_1 и b_2 сводится к повороту базиса на угол π и не изменяет параметров Стокса.

1) Два вектора Стокса отличаются только знаками параметров Q и U . Это означает, что числа b_1 и b_2 у двух волн поменяны местами, то есть эллипсы их имеют одну форму и размер, но повернуты друг относительно друга на угол $\pi/2$.

2) Отличие — в знаках параметра V . У волн противоположные знаки одного из чисел b_1 или b_2 , то есть противоположны направления одного из векторов \vec{b}_1 или \vec{b}_2 . Значит, векторы электрической напряженности волн врачаются в противоположные стороны.

3) Если у волн противоположны знаки трех параметров Стокса, то это комбинация двух предыдущих случаев. Эллипсы волн повернуты на прямой угол и электрические векторы врачаются в противоположные стороны. Такие поляризации волн называются ортогональными.

9. *Представление общей поляризации через частные случаи.* Как уже говорилось, у некогерентных пучков излучения складываются не напряженности полей, а квадратичные, энергетические характеристики. Это относится и к параметрам Стокса. В этом пункте представим произвольно поляризованный пучок излучения как такую сумму некогерентных пучков с более простой поляризацией.

1) Полностью поляризованный и естественный. Легко проверить, что

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_d \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} + (I - R_d) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (117)$$

где $R_d = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}$. Таким образом, произвольно поляризованный пучок излучения можно представить как сумму полностью эллиптически поляризованного пучка и пучка естественного излучения. В силу неравенства (97) интенсивность последнего неотрицательна.

2) Два пучка с взаимно ортогональными поляризациями. Нетрудно также проверить и следующее равенство

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{I + R_d}{2R_d} \begin{pmatrix} R_d \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} + \frac{I - R_d}{2R_d} \begin{pmatrix} R_d \\ -Q \\ -U \\ -V \end{pmatrix}. \quad (118)$$

Здесь складываются два полностью поляризованных пучка неотрицательной интенсивности. При этом у них все параметры Стокса равны по модулю (точнее пропорциональны), но параметры, характеризующие поляризацию, имеют противоположные знаки, то есть поляризации ортогональны. У них, как показано выше, противоположны направления вращения вектора напряженности и перпендикулярны положения плоскостей преимущественных колебаний. Складывающиеся пучки при этом предполагаются некогерентными, то есть независимыми, происходящими от разных источников.

10. *Другие параметры.* Вводятся также и другие параметры, характеризующие состояние поляризации излучения. Это степени общей P , линейной p и круговой p_s поляризации:

$$P = \frac{R_d}{I}, \quad p = \frac{r_d}{I}, \quad p_s = \frac{V}{I}, \quad r_d = \sqrt{Q^2 + U^2}, \quad (119)$$

а также позиционный угол α , то есть угол между плоскостью преимущественных колебаний и выбранной осью абсцисс, и степень эллиптичности ε_s . Две последние величины определяются через тангенсы

$$\operatorname{tg} 2\alpha = U/Q, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_s = V/r_d. \quad (120)$$

§ 6. Особые точки поля поляризации

1. *Поле поляризации.* Излучение, идущее от многих природных объектов, поляризовано. В частности, уже давно измеряется поляризация излучения астрофизических объектов. Как правило, эти объекты на небесном своде занимают небольшую область. Поляризовано излучение дневного неба. Однако имеется один объект, который обнимает всю небесную сферу. Это так называемое реликтовое излучение (РИ), оставшееся от предыдущих эпох расширения Вселенной, когда вещество и излучение были горячими. Сейчас это излучение остыло и имеет температуру всего $2.7 K$ (градусов по шкале Кельвина). РИ было обнаружено в 1964 году и с тех пор интенсивно изучается.

В последнее время появились наблюдения линейной поляризации РИ. Показано, что положение плоскостей поляризации отражает движение масс в эпоху формирования крупномасштабных структур Вселенной, т. е. галактик и их скоплений. Пока измерения сделаны лишь в отдельных площадках, но в не очень далеком времени такие измерения покроют все небо. Измерение поляризации РИ позволит уточнить космологические параметры [8] и теорию образования крупномасштабной структуры Вселенной.

Известно, что поле направлений линейной (плоской) поляризации может быть весьма сложным. В связи с этим интересно проследить, какие особенности могут существовать в этом поле.

Линейная поляризация в некоторой системе координат x и y описывается параметрами Стокса I , Q и U . Степень линейной поляризации и позиционный угол по отношению к оси x определяются формулами, содержащимися в (119) и (120).

Поле направлений задается уравнением, разрешенным относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (121)$$

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством

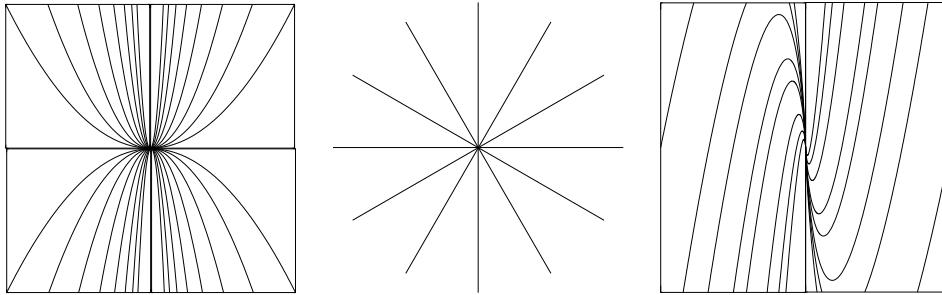
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} - 1}{\operatorname{tg} 2\alpha}, \quad (122)$$

получаем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2} - Q}{U}. \quad (123)$$

2. Особые точки дифференциальных уравнений. Напомним, что дифференциальные уравнения первого порядка, у которых обращаются в нуль регулярные числитель и знаменатель дроби в правой части, имеют следующие особые точки, характеризующиеся их названиями.

1) “Узел” одного из трех видов: а) $y = y_0x^2$, б) $y = (y_0 + \ln|x|)x$, в) $y = y_0x$. 2) “Седло” с четырьмя асимптотами: $y = y_0/x$. 3) “Центр”: $r = r_0$. 4) “Фокус”: $r = r_0e^\phi$. Рис. 12 отображает поведение интегральных кривых вблизи этих особых точек.



Особые точки “узел” трех типов.

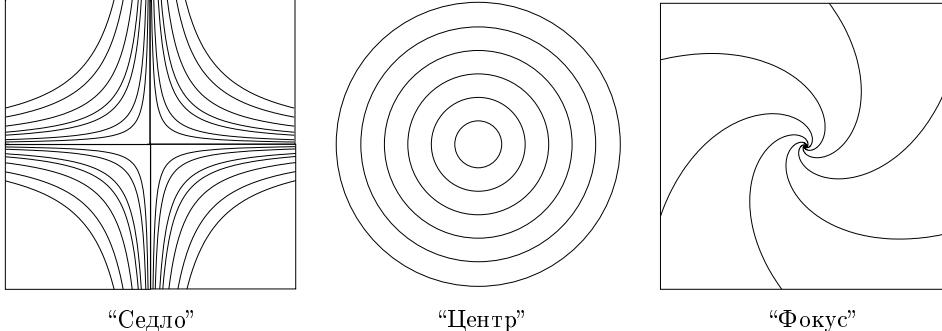


Рис. 12. Типы особых точек дифференциальных уравнений и поведение интегральных кривых вблизи них.

Поля поляризации излучения имеют совсем другие особые точки.

3. Особенности поля поляризации. Особыми точками уравнения (123) являются такие точки, в которых числитель и знаменатель обращаются в нуль. Предположим, что такая точка лежит в начале координат, причем в ней функции Q и U регулярны и не все их частные производные первого порядка равны нулю. Это предположение равносильно выполнению равенств (точнее эквивалентностей)

$$Q = q_x x + q_y y, \quad U = u_x x + u_y y. \quad (124)$$

Обратные формулы

$$x = \frac{u_y Q - q_y U}{d}, \quad y = -\frac{u_x Q - q_x U}{d}, \quad d = q_x u_y - q_y u_x. \quad (125)$$

Так как не все коэффициенты u и q равны нулю, без ограничения общности можно принять для определенности, что $u_y \neq 0$. Если все же $u_y = 0$, то $u_x \neq 0$ и оси x и y можно просто поменять местами. Определитель $d \neq 0$ тоже, так как в противном случае рассматриваемая точка не является особой.

Степень поляризации p , умноженная на интенсивность I , т. е. величина $r = pI$, и позиционный угол играют роль полярных координат:

$$Q = r \cos 2\alpha, \quad U = r \sin 2\alpha. \quad (126)$$

Дифференциалы этих переменных связаны соотношениями

$$dQ = dr \cos 2\alpha - 2r \sin 2\alpha d\alpha, \quad dU = dr \sin 2\alpha + 2r \cos 2\alpha d\alpha. \quad (127)$$

Выразим производную $\frac{dy}{dx}$ через переменные r и α . Тогда уравнение (121) в полярных координатах запишется в следующем виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x dQ - q_x dU}{u_y dQ - q_y dU} = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{u_x(dr \cos 2\alpha - 2r \sin 2\alpha d\alpha) - q_x(dr \sin 2\alpha + 2r \cos 2\alpha d\alpha)}{u_y(dr \cos 2\alpha - 2r \sin 2\alpha d\alpha) - q_y(dr \sin 2\alpha + 2r \cos 2\alpha d\alpha)}. \quad (128)$$

Сделав еще одну замену переменной $\operatorname{tg} \alpha = t$ и разрешив (128) относительно производной, получим

$$\frac{d \ln r}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \frac{q_y t^3 + (q_x - 2u_y)t^2 - (q_y + 2u_x)t - q_x}{u_y t^3 + (u_x + 2q_y)t^2 - (u_y - 2q_x)t - u_x} = \frac{N(t)}{D(t)}. \quad (129)$$

Здесь обозначено (в знаменателе $D(t)$) коэффициент при старшей степени t равен 1)

$$N(t) = \frac{2}{u_y} [q_y t^3 + (q_x - 2u_y)t^2 - (q_y + 2u_x)t - q_x], \quad (130)$$

$$D(t) = (1+t^2) \left(t^3 + \frac{u_x + 2q_y}{u_y} t^2 - \frac{u_y - 2q_x}{u_y} t - \frac{u_x}{u_y} \right). \quad (131)$$

В общем случае знаменатель дроби $D(t)$ в правой части уравнения (129), кроме очевидных корней $\pm i$, имеет еще три корня. Обозначим их t_1, t_2, t_3 . Тогда

$$D(t) = (1+t^2)(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3). \quad (132)$$

4. Характер поляризации вблизи особенности. Для решения уравнения (129) представим правую часть его в виде разложения на простейшие дроби, считая все корни различными:

$$\frac{N(t)}{D(t)} = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{\nu_1}{t-t_1} + \frac{\nu_2}{t-t_2} + \frac{\nu_3}{t-t_3}. \quad (133)$$

Коэффициенты ν , входящие в эту формулу, определяются выражениями

$$\nu_1 = -\frac{(1+t_1^2)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}(1+t_2t_3), \quad \nu_2 = -\frac{(1+t_2^2)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}(1+t_1t_3), \quad \nu_3 = -\frac{(1+t_3^2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}(1+t_1t_2). \quad (134)$$

Выразим все другие величины через значения корней многочлена $D(t)$. Коэффициенты его самого:

$$\frac{u_x}{u_y} = t_1 t_2 t_3, \quad \frac{q_x}{u_y} = \frac{1}{2}(1+t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1), \quad \frac{q_y}{u_y} = -\frac{1}{2}(t_1 + t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3); \quad (135)$$

числитель

$$N(t) = -(t_1 + t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3)t^3 + (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 - 3)t^2 + (t_1 + t_2 + t_3 - 3t_1 t_2 t_3)t - (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 + 1); \quad (136)$$

знаменатель в формулах (125)

$$d = q_x u_y - q_y u_x = \frac{u_y^2}{2}(1+t_1 t_2)(1+t_2 t_3)(1+t_3 t_1). \quad (137)$$

Нетрудно проверить, что выполняются соотношения

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = -2, \quad t_1 \nu_1 + t_2 \nu_2 + t_3 \nu_3 = -(t_1 + t_2 + t_3) - t_1 t_2 t_3 = 2 \frac{q_y}{u_y}. \quad (138)$$

В дальнейшем нам понадобится также соотношение

$$\nu_1 \nu_2 \nu_3 = \frac{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}{(t_1-t_2)^2(t_2-t_3)^2(t_3-t_1)^2}(1+t_1 t_2)(1+t_2 t_3)(1+t_3 t_1). \quad (139)$$

С использованием разложения (133) уравнение (129) легко интегрируется:

$$r = r_0(1+t^2) \prod_{j=1}^3 |t-t_j|^{\nu_j}. \quad (140)$$

Перепишем решение в угловой переменной:

$$r = \frac{r_0}{\cos^2 \alpha} \prod_{j=1}^3 |\tan \alpha - \tan \alpha_j|^{\nu_j}. \quad (141)$$

Заметим, что обращение множителя, стоящего перед знаком произведения, в бесконечность в точках $\alpha = \pm\pi/2$, компенсируется обращением в этих точках в нуль самого этого произведения, что является следствием первого соотношения (138).

5. Особенности в различных системах координат. Формула (141) характеризует поведение поляризационных кривых вблизи особой точки через зависимость параметров Стокса Q и U от угла α . Однако при изменении α от 0 до 2π эти параметры пробегают свои значения по два раза. Поэтому фактически кривые следует описывать функциями от угла $\phi = \frac{\alpha}{2}$.

На самом деле наглядное представление о поведении поляризационных кривых надо демонстрировать не на плоскости параметров Стокса, а в картинной плоскости xy . Для этого определим полярные координаты на этой плоскости

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (142)$$

и свяжем их с координатами r и ϕ , записав соотношения (124) в обеих системах координат:

$$r \cos \phi = q_x \rho \cos \varphi + q_y \rho \sin \varphi, \quad r \sin \phi = u_x \rho \cos \varphi + u_y \rho \sin \varphi. \quad (143)$$

Отсюда найдем связь полярных расстояний

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{|d|} \sqrt{((u_x^2 + u_y^2) \cos^2 \phi + (q_x^2 + q_y^2) \sin^2 \phi - 2(u_x q_x + u_y q_y) \cos \phi \sin \phi)} = \\ &= \frac{r}{\sqrt{(q_x^2 + u_x^2) \cos^2 \varphi + (q_y^2 + u_y^2) \sin^2 \varphi + 2(q_x q_y + u_x u_y) \cos \varphi \sin \varphi}} \end{aligned} \quad (144)$$

и полярных углов

$$\tan \varphi = \frac{q_x \tan \phi - u_x}{u_y - q_y \tan \phi}, \quad \tan \phi = \frac{u_x + u_y \tan \varphi}{q_x \tan \varphi + q_y}. \quad (145)$$

Из полученных формул следует, что тангенсы полярных углов в двух системах связаны неособенным дробно-рациональным преобразованием, а полярные расстояния различаются на множители, не обращающиеся в нуль или бесконечность. Поэтому характер поведения поляризационных кривых в обеих системах полярных координат получится одним и тем же, хотя количественные различия возможны.

6. Классификация особенностей. Теперь можно расклассифицировать особые точки.

Будем считать сначала, что все три корня t_j вещественны и различны. Пронумеруем их в порядке убывания: $t_1 > t_2 > t_3$. Тогда

$$\frac{\nu_1}{1+t_2 t_3} < 0, \quad \frac{\nu_2}{1+t_3 t_1} > 0, \quad \frac{\nu_3}{1+t_1 t_2} < 0, \quad (146)$$

т. е. знак ν_2 совпадает со знаком суммы $1+t_3 t_1$, а знаки ν_1 и ν_3 противоположны знакам соответствующих сумм $1+t_2 t_3$ и $1+t_1 t_2$. Возможны следующие случаи.

1) $0 < t_3 < t_2 < t_1$. Тогда все суммы в скобках в (139) положительны и произведение показателей ν_j положительно, $d > 0$. Порядок следования знаков показателей $(\nu_1 \nu_2 \nu_3)$ в этом случае $(- + -)$.

2) $t_3 < 0 < t_2 < t_1$. Тогда $1+t_1 t_2 > 0$ и $\nu_3 < 0$. Знаки двух первых показателей могут различаться в зависимости от величин корней:

- а) если $1+t_3 t_1 > 0$, то и $1+t_3 t_2 > 0$, $d > 0$ и следование знаков $(- + -)$;
- б) если $1+t_3 t_1 < 0$, но $1+t_3 t_2 > 0$, то $d < 0$ и знаки $(- - -)$;
- в) если и $1+t_3 t_1 < 0$, и $1+t_3 t_2 < 0$, то $d > 0$ и знаки $(+ - -)$.

3) $t_3 < t_2 < 0 < t_1$. Тогда $1+t_2 t_3 > 0$ и $\nu_1 < 0$. Остальные показатели могут иметь любые знаки:

- а) если $1+t_1 t_3 > 0$ и $1+t_1 t_2 > 0$, то $d > 0$ и знаки $(- + -)$;
- б) если $1+t_1 t_3 < 0$, но $1+t_1 t_2 > 0$, то $d < 0$, знаки $(- - -)$;
- в) если и $1+t_1 t_3 < 0$, и $1+t_1 t_2 < 0$, то $d > 0$ и знаки $(- - +)$.

4) $t_3 < t_2 < t_1 < 0$. Здесь опять все суммы в скобках положительны, $d > 0$ и знаки $(- + -)$.

Таким образом, при отрицательном d все показатели отрицательны, а при положительном — один положителен, а два других отрицательны. В первом случае все решения не проходят через особую точку, из которой исходят три асимптоты-сепаратрисы. Во втором случае вдоль одного из трех направлений решения входят в особую точку, а два других направления избегают, т. е. асимптоты только две.

В случае, когда имеется только один вещественный корень $t_1 = c$, а два других комплексно сопряжены $t_2 = a + bi$, $t_3 = a - bi$, такими же будут в общем случае и показатели ν : первый из них вещественный и отрицательный:

$$\nu_1 = -(1 + c^2) \frac{1 + a^2 + b^2}{(a - c)^2 + b^2} < 0, \quad (147)$$

а два остальных — комплексно-сопряженные числа, так что

$$R = \frac{\nu_2 + \nu_3}{2} = \frac{1}{2} \frac{(a^2 + b^2 - 1)(c^2 - 1) + 4ac}{(a - c)^2 + b^2}, \quad (148)$$

$$M = -b \frac{\nu_2 - \nu_3}{i} = \frac{c[(a^2 + b^2)^2 - 1] - a(c^2 - 1)(a^2 + b^2 + 1)}{(a - c)^2 + b^2}. \quad (149)$$

Решение уравнения (129) можно записать в виде

$$r = r_0(t - t_1)^{\nu_1}(1 + t^2)[(t - a)^2 + b^2]^R e^{-M\phi_*(t)}, \quad (150)$$

где

$$\phi_*(t) = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{t - a}. \quad (151)$$

Так как произведение трех последних множителей в (150) не имеет особенностей, то это решение имеет только одну асимптоту. В частных случаях может оказаться, что величина M равна нулю, т. е. все показатели вещественны.

Авторы статьи [9] дали следующие названия особым точкам, возникающим в случае поля направлений поляризации. При вещественных корнях и $d < 0$ точка — “седло” (saddle), но не с четырьмя, а с тремя асимптотами-сепаратрисами. При вещественных корнях и $d > 0$ — “клюв” (beak). Наконец, при одном вещественном корне — “комета” (cometa).

7. Примеры. В качестве примеров рассмотрим случаи диагональной зависимости в (124), а именно $Q = qx$, $U = y$, $q \neq 0$. Тогда $D(t) = (1 + t^2)t(t^2 + 2q - 1)$, $t_1 = 0$, а показатели $\nu_1 = \frac{2q}{1 - 2q}$, $\nu_2 = \nu_3 = -\frac{1 - q}{1 - 2q}$. Легко убедиться, что при $q < 0$ особая точка — “седло”, при $0 < q < 1/2$ — “клюв”, а при $q > 1/2$ — “комета”.

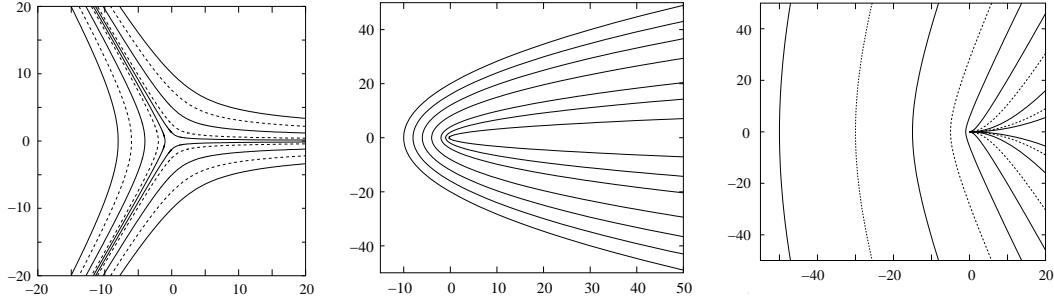


Рис. 13. Поляризационные кривые около особых точек типа “седло”, “комета” и “клюв”.

На рис. 13 воспроизводятся характерные черты указанных особых точек в переменных ϕ, r . Кривые рассчитаны для следующих значений параметров q .

- 1) Для “седла” $q = -1$, $t_2 = \sqrt{3}$, $t_3 = -\sqrt{3}$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = -\frac{2}{3}$, так что $r = \frac{r_0}{|\sin(\phi/2)[\sin^2(\phi/2) - 3\cos^2(\phi/2)]|^{2/3}}$.
- 2) Для “кометы” $q = 1$, $t_2 = i$, $t_3 = -i$. Здесь числа $\nu_1 = -2$, $\nu_2 = \nu_3 = 0$ и $r = \frac{r_0}{\sin^2(\phi/2)}$.
- 3) Для “клюва” $q = 1/4$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu_3 = -\frac{3}{2}$ и $r = r_0 \frac{|\sin(\phi/2)|}{|\sin^2(\phi/2) - (1/2)\cos^2(\phi/2)|^{3/2}}$.

В то время как кривые около особой точки “комета” имеют только одну общую асимптоту, так что каждая из них, соответствующая определенному значению r_0 , непрерывно приходит из бесконечно удаленной точки и, описав дугу, возвращается обратно, кривые около других точек состоят из нескольких ветвей: “клюв” из двух, “седло” из трех. Поэтому мы ветви этих кривых изобразили по очереди непрерывными и пунктирными линиями. Установить соответствие ветвей друг другу нетрудно.

8. Особые случаи. Общим рассмотрением не охвачены случаи, когда у многочлена (131) кратные корни или когда одна из величин Q и U в окрестности особой точки имеет порядок малости выше линейного. Этот последний случай реализуется в условиях предыдущего пункта при $q = 0$. Тогда $r = r_0/|\cos(\phi/2)|$, что изображается прямыми, параллельными оси y .

При $q = 1/2$ получается трехкратный корень. Тогда $D(t) = (1+t^2)t^3$, $N(t) = -3t^2 - 1$ и

$$r = \frac{r_0}{\sin^2(\phi/2)} e^{(1/2)\operatorname{ctg}(\phi/2)}. \quad (152)$$

Кривые около особой точки идут качественно так же, как в случае кометы, но из-за дополнительного экспоненциального множителя скорость роста полярного расстояния при приближении к особому направлению (углу) существенно выше. Этот тип особой точки можно назвать “метеором” (meteor).

Двукратный корень возникает при $Q = (x-y)/2$, $U = y$. При таких коэффициентах $D(t) = (1+t^2)t^2(t-1)$, $N(t) = -(t^3 + 3t^2 - t + 1)$,

$$r = \frac{r_0}{[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)]^2} e^{-\operatorname{ctg}(\phi/2)}. \quad (153)$$

Этот вариант особой точки имеет сложную структуру: кривые при углах, близких к нулю, выходят из начала координат, уходят на бесконечность вдоль некоторой прямой, возвращаются и снова уходят на бесконечность при приближении угла к значению 2π . Назовем такую точку “с сохой” (plough).

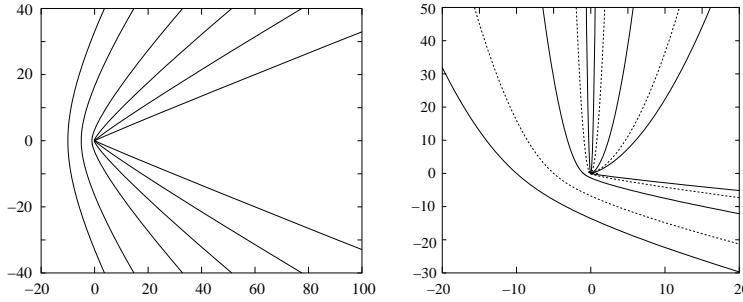


Рис. 14. Поляризационные кривые около особых точек “метеор” и “с сохой”.

Поведение поляризационных кривых вблизи особых точек последних двух типов отражено на рис. 14. Здесь опять кривые около точки “метеор” связны, а в случае “с сохой” состоят из двух ветвей.

§ 7. Энергетические характеристики электромагнитных волн

1. Тензор энергии-импульса волны. В этом параграфе вернемся к описанию волн в свободном пространстве, так что $\varepsilon = \mu = 1$. Для наглядности сохраним размерные величины. Кроме того, большая часть этого параграфа будет выдержанна в явно релятивистских обозначениях. В частности, калибровка принимается лоренцевская.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля волны определим так:

$$T_{\text{MW}}^{\lambda\mu} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}. \quad (154)$$

Сравним это определение с общим определением тензора энергии-импульса, данным в § 8 предыдущей Главы:

$$T^{\lambda\mu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\lambda\nu} F_\nu^\mu + \frac{1}{4} (F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}) g^{\lambda\mu} \right). \quad (155)$$

Во-первых, скаляр $(F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}) = 8(H^2 - E^2)$ в случае волны равен нулю, так как в свободном пространстве модули напряженностей электрического и магнитного полей волны равны. Во-вторых, выразим сначала тензор (155) с учетом сказанного через потенциалы:

$$4\pi T^{\lambda\mu} = F_\nu^\lambda F^{\nu\mu} = \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\nu} \right) \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (156)$$

Затем составим разность двух выражений (сокращается второе слагаемое в общем определении с выражением (154))

$$4\pi(T^{\lambda\mu} - T_{\text{MW}}^{\lambda\mu}) = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (157)$$

Полученную разность представим через дивергенцию некоторого тензора:

$$4\pi(T^{\lambda\mu} - T_{\text{MW}}^{\lambda\mu}) = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[A^\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} - A^\mu \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\nu} + A^\lambda \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right] - A^\mu \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} + A^\mu \frac{\partial^2 A^\lambda}{\partial x_\nu \partial x^\nu} - A^\lambda \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\nu \partial x_\mu}. \quad (158)$$

Три последних слагаемых равны нулю, так как

$$\frac{\partial^2 A^\lambda}{\partial x_\nu \partial x^\nu} = \square A^\lambda = 0, \quad \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \quad (159)$$

В первом равенстве выражено волновое уравнение для потенциалов, а второе выражает условие Лоренца.

Таким образом, разность выражений равна дивергенции. Оба выражения симметричны по индексам. Это означает, что они оба одинаково подходят в качестве тензоров энергии-импульса волны, так как от него требуется правильное выражение через напряженности и равенство нулю дивергенции от него, выраждающее законы сохранения. Обращение в нуль дивергенции (155) было доказано в общем случае. В нуль обращается дивергенция и от разности (158). Действительно, вычисление производной от нее по x^μ приводит снова к появлению двух равенств (159). Добавление же дивергенции какого-либо тензора к тензору энергии-импульса не мешает выполнению законов сохранения, так как вычисление интеграла по пространству или другим пространственно подобным поверхностям четырехмерного пространства Минковского, дающее эти законы, приводит к интегралам от дивергенции, которые выражаются через сами потенциалы и поэтому обращаются в нуль на используемых поверхностях.

2. Потенциалы и напряженности плоских волн. Пусть плоская почти монохроматическая волна описывается четырехмерным вектором потенциалов

$$\underline{A} = \underline{a} e^{-i\underline{x}\cdot\underline{r}} = \underline{a} e^{-i(\underline{x}ct - \underline{\vec{a}}\cdot\underline{r})}, \quad \underline{x} = \frac{\omega}{c}, \quad \underline{\vec{a}} = \underline{a}\underline{n}. \quad (160)$$

Представим комплексную амплитуду волны в виде разложения

$$\underline{a} = a^{(0)} \underline{e}_{(0)} + a^{(1)} \underline{e}_{(1)} + a^{(2)} \underline{e}_{(2)} + a^{(3)} \underline{e}_{(3)} = a^{(\lambda)} \underline{e}_{(\lambda)}, \quad (161)$$

где $\underline{e}_{(\lambda)}$ — поляризационный базис. Как и всякий четырехмерный базис он подчиняется соотношениям

$$\underline{e}_{(\lambda)} \underline{e}_{(\lambda')} = g_{\lambda \lambda'}. \quad (162)$$

Поляризационный базис, отвечающий волновому вектору \underline{x} , можно представить так:

$$\underline{e}_{(0)} = \{1, 0\}, \quad \underline{e}_{(1)} = \{0, \vec{e}_1\}, \quad \underline{e}_{(2)} = \{0, \vec{e}_2\}, \quad \underline{e}_{(3)} = \{0, \vec{e}_3\}, \quad (163)$$

где трехмерные орты правого базиса (правой тройки ортов)

$$\vec{e}_1 = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \quad \vec{e}_2 = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \vec{e}_3 = (\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (164)$$

Заметим, что \vec{e}_0 времениподобен, остальные орты — пространственно подобны. Очевидно, что \vec{e}_1 и \vec{e}_2 перпендикулярны волновому вектору \underline{x} , а \vec{e}_3 параллелен ему, то есть $\underline{x}\vec{e}_1 = \underline{x}\vec{e}_2 = 0$, а так как нулевые компоненты четырехмерных ортов \underline{e}_1 и \underline{e}_2 равны нулю, то и $\underline{x}\underline{e}_1 = \underline{x}\underline{e}_2 = 0$. Следовательно $a^{(\lambda)}$ — амплитуды четырехмерного вектора потенциала по его ортам, то есть скалярный ($a^{(0)}$), два поперечных ($a^{(1)}$ и $a^{(2)}$) и продольный ($a^{(3)}$) потенциалы. Заметим, что амплитуды не являются компонентами четырехмерного вектора, они коэффициенты при таких векторах и поэтому не изменяются при преобразовании Лоренца, то есть это скаляры.

Вектор потенциалов должен удовлетворять условию поперечности (условию Лоренца)

$$\nabla \underline{A} = -i\underline{x}\underline{A} = 0, \quad (165)$$

или

$$\underline{x}\underline{a} = \underline{x}a^{(0)} - \underline{x}\vec{a} = 0, \quad \underline{x}\vec{a} = \underline{x}a^{(0)}. \quad (166)$$

В силу свойств поляризационного базиса из (161) и (166) следует

$$\underline{x}\underline{a} = \underline{x}a^{(0)} - \underline{x}\vec{a} = \underline{x}a^{(0)} - \underline{x}\vec{e}_3 a^{(3)} = [\underline{x}\underline{e}_{(0)}][a^{(0)} - a^{(3)}] = 0, \quad a^{(0)} = a^{(3)}. \quad (167)$$

Выражения для напряженностей поля такой волны

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_0} - \vec{\nabla} A_0 = i(\underline{x}\vec{a} - \underline{x}a^{(0)})e^{-i\underline{x}\cdot\underline{r}}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A} = i\underline{x} \times \vec{a} e^{-i\underline{x}\cdot\underline{r}}. \quad (168)$$

3. Плотность и поток энергии. Квадрат электрической напряженности

$$\vec{E} \vec{E}^* = \alpha^2 (\vec{a} \vec{a}^* + a^{(0)} a^{(0)*}) - \alpha (a^{(0)} \vec{a}^* - a^{(0)*} \vec{a}) = \alpha^2 (a^{(1)} a^{(1)*} + a^{(2)} a^{(2)*} + a^{(3)} a^{(3)*} + a^{(0)} a^{(0)*} - 2a^{(0)} a^{(0)*}) \quad (169)$$

с учетом второго соотношения в (166)

$$|\vec{E}|^2 = \vec{E} \vec{E}^* = \alpha^2 (|a^{(1)}|^2 + |a^{(2)}|^2). \quad (170)$$

Выражение для квадрата магнитной напряженности

$$|\vec{H}|^2 = \vec{H} \vec{H}^* = (\vec{\alpha} \times \vec{a})(\vec{\alpha} \times \vec{a}^*) = \alpha^2 \vec{a} \vec{a}^* - (\vec{\alpha} \vec{a})(\vec{\alpha} \vec{a}^*) = \alpha^2 (\vec{a} \vec{a}^* - a_0 a_0^*) = \alpha^2 (|a^{(1)}|^2 + |a^{(2)}|^2) \quad (171)$$

получается точно тем же самым.

Плотность энергии получается в виде

$$w = \frac{|\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2}{8\pi} = \frac{\alpha^2}{4\pi} (|a^{(1)}|^2 + |a^{(2)}|^2). \quad (172)$$

У вектора потока энергии

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{c}{4\pi} [(\alpha \vec{a} - \alpha a^{(0)}) \times (\vec{\alpha} \times \vec{a}^*)] = \frac{c}{4\pi} [\vec{\alpha} (\alpha \vec{a} \vec{a}^* - \alpha \vec{a}^* a^{(0)}) - \vec{a}^* (\alpha \vec{\alpha} \vec{a} - \alpha^2 a^{(0)})] \quad (173)$$

слагаемое во вторых круглых скобках равно нулю, а в первых согласно (166) снова приводится к сумме квадратов поперечных амплитуд, так что

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \alpha \vec{\alpha} (|a^{(1)}|^2 + |a^{(2)}|^2) = cw \frac{\vec{\alpha}}{\alpha}, \quad (174)$$

то есть энергия просто течет.

Квадраты напряженностей и энергетические величины не зависят от продольно-скалярной амплитуды $a^{(0)}$, так что она несущественна и можно положить $a^{(0)} = a^{(3)} = 0$.

4. Выражение тензора через амплитуды потенциалов. Если плоская волна почти монохроматическая, то многие формулы предыдущего пункта остаются в силе, но при нахождении квадратичных величин требуется усреднение по времени, так как коэффициенты $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ рассматриваются как медленно меняющиеся функции времени. При этом физическими надо считать вещественные части векторов. Например, найдем такое среднее от потенциала. Вычисляем его, как при выводе равенства (43):

$$\overline{(\text{Re } \underline{A})^2} = \frac{1}{2} (\overline{\underline{a}_R^2} + \overline{\underline{a}_I^2}) = \frac{1}{2} \underline{A} \underline{A}^* = \frac{1}{2} \overline{(a_R + i\underline{a}_I)(a_R - i\underline{a}_I)}. \quad (175)$$

Квадрат вещественной части потенциала выражается через поперечные составляющие:

$$\underline{a}_R^2 = (a_R^{(\lambda)} \underline{e}_{(\lambda)}) (a_R^{(\lambda')} \underline{e}_{(\lambda')}) = a_R^{(\lambda)} a_R^{(\lambda')} g_{\lambda \lambda'} = (a_R^{(0)})^2 - (a_R^{(1)})^2 - (a_R^{(2)})^2 - (a_R^{(3)})^2 = - (a_R^{(1)})^2 - (a_R^{(2)})^2. \quad (176)$$

Точно такое же справедливо и для мнимой части и, следовательно,

$$\underline{A} \underline{A}^* = \underline{a} \underline{a} = - (a_R^{(1)})^2 - (a_R^{(2)})^2 - (a_I^{(1)})^2 - (a_I^{(2)})^2 = -|a^{(1)}|^2 - |a^{(2)}|^2. \quad (177)$$

Отрицательность этого выражения означает, что вектор потенциалов пространственно подобен.

В качестве тензора энергии-импульса надо принять

$$T_{\text{MW}}^{\lambda \mu} = - \frac{1}{4\pi} \overline{\frac{\partial \underline{A}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \underline{A}^*}{\partial x_\mu}}, \quad (178)$$

где черта сверху означает усреднение по времени и, возможно, по пространству. Производные по координатам вычисляются так:

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial x_\lambda} = \underline{a} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} e^{-i\alpha^\nu x_\nu} = -i\alpha^\lambda \underline{a} e^{-i\alpha^\nu x_\nu} = -i\alpha^\lambda \underline{A}, \quad (179)$$

так что

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \underline{A}^*}{\partial x_\mu} = \alpha^\lambda \alpha^\mu \underline{A} \underline{A}^*. \quad (180)$$

Таким образом,

$$T_{\text{MW}}^{\lambda \mu} = - \frac{1}{4\pi} \alpha^\lambda \alpha^\mu \overline{\underline{A}^* \underline{A}} = \frac{\alpha^\lambda \alpha^\mu}{4\pi} \left(\overline{|a_1|^2} + \overline{|a_2|^2} \right). \quad (181)$$

В частности, составляющие нулевой строчки

$$T_{\text{MW}}^{00} = \frac{1}{4\pi} \alpha^2 \left(\overline{|a_1|^2} + \overline{|a_2|^2} \right) = \frac{|\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2}{8\pi} = w, \quad T_{\text{MW}}^{0k} = \frac{1}{4\pi} \alpha^2 \frac{\alpha^k}{\alpha} \left(\overline{|a_1|^2} + \overline{|a_2|^2} \right) = w \frac{\alpha^k}{\alpha} = \frac{S^k}{c}, \quad (182)$$

суть пространственная плотность и плотность потока (деленная на c) энергии поля волны.

Если волна идет вдоль одной из осей координат, то отличны от нуля только четыре компоненты тензора. Например, если это ось x , то не равны нулю T^{00} , $T^{01} = T^{10}$ и T^{11} .

Глава 4. Классическая теория излучения

§ 1. Потенциалы точечного заряда

1. *Постановка задачи.* Пусть точечный заряд e движется в свободном пространстве. Его радиус-вектор в некоторой системе отсчета является известной функцией времени, определенного в этой системе:

$$\vec{r} = \vec{r}_0(t). \quad (1)$$

Тогда плотности заряда и тока определяются формулами

$$\rho(\vec{r}, t) = e \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{r}'_0(t). \quad (2)$$

Движущийся заряд создает вокруг себя электромагнитное поле. Найдем его. Начнем с вычисления потенциалов.

Пусть в точке с радиусом-вектором \vec{r} находится наблюдатель, который измеряет потенциалы в момент времени t . Величины \vec{r} и t считаем фиксированными (рис. 15).

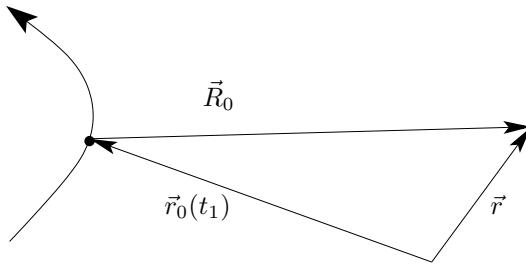


Рис. 15. Геометрия излучения заряда.

Как известно, потенциалы определяются неоднородными волновыми уравнениями

$$\square \varphi = 4\pi\rho, \quad \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (3)$$

где оператор Даламбера

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (4)$$

Их решения — запаздывающие потенциалы, определяемые формулами

$$\varphi = \int \rho(\vec{r}_1, t_1) \frac{d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}_1, t_1) \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (5)$$

При этом в формулах для потенциалов время t_1 — время влияния, которое меньше времени наблюдения, так как сигнал от источника поля до наблюдателя должен успеть дойти со скоростью распространения, равной скорости света. Таким образом, в (5) момент времени t_1 определяется соотношением

$$c(t - t_1) = |\vec{r} - \vec{r}_1|. \quad (6)$$

Эти общие формулы надо применить к случаю точечного заряда, то есть подставить туда выражения (2). Тогда для скалярного потенциала получится

$$\varphi(\vec{r}, t) = e \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (7)$$

Поскольку под знаком интеграла стоит δ -функция, то фактически в каждый момент времени t интеграл должен браться по одной точке, а соответствующий момент влияния определяется из уравнения

$$c(t - t_1^0) = |\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|. \quad (8)$$

Поэтому можно вынести значение знаменателя в (7) в этой точке и написать

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{R_0(\vec{r}, t_1^0)} \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) d^3 r_1. \quad (9)$$

где введен вектор, соединяющий положение заряда в момент влияния с положением наблюдателя (рис. 15):

$$\vec{R}_0 = \vec{R}_0(\vec{r}, t_1^0) = \vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0), \quad R_0 = R_0(\vec{r}, t_1^0) = |\vec{R}_0| = |\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|. \quad (10)$$

Точно так же в интеграле для векторного потенциала можно вынести два множителя и получить

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e}{R_0} \vec{r}'_0(t_1^0) \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) d^3 r_1. \quad (11)$$

Таким образом, дело сводится к вычислению одного интеграла от δ -функции. Однако, этот интеграл равен единице, только если величина \vec{r}_0 постоянна, то есть для неподвижного заряда. В случае движущегося заряда это не так.

2. Вычисление потенциалов. Нам надо вычислить интеграл в (9) при условии (8). Ввиду важности результата и нетривиальности его получения мы дадим четыре способа вычисления указанного интеграла.

1) Непосредственное вычисление. Сделаем замену переменных интегрирования

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c) = \vec{r}_2. \quad (12)$$

Найдем якобиан преобразования, то есть определитель, составленный из производных от составляющих \vec{r}_2 по составляющим \vec{r}_1 . Матрица этих производных получается следующей:

$$1 - \frac{1}{c|\vec{r} - \vec{r}_1|} \begin{pmatrix} x'_0(x - x_1) & x'_0(y - y_1) & x'_0(z - z_1) \\ y'_0(x - x_1) & y'_0(y - y_1) & y'_0(z - z_1) \\ z'_0(x - x_1) & z'_0(y - y_1) & z'_0(z - z_1) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где единица впереди означает единичную матрицу, а производные вычисляются в момент $t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c$. Разности координат в матрице — это не аргументы производных, а множители. Определитель этой матрицы

$$1 - \frac{\vec{r}'_0}{c} \frac{\vec{R}_0}{R_0} = \frac{s}{R_0}, \quad s = R_0 - \vec{\beta} \vec{R}_0, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{r}'_0}{c}. \quad (14)$$

После вычисления якобиана интеграл от δ -функции берется просто и мы находим

$$\int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) d^3 r_1 = \int \delta(\vec{r}_2) d^3 r_2 \frac{R_0}{s} = \frac{R_0}{s}. \quad (15)$$

Заметим, что в промежуточных выкладках этого пункта ввиду наличия под интегралом δ -функции безразлично, какой указывать аргумент функций, связанных с зарядом: t_1 или t_1^0 .

2) Вычисление через функцию Грина. Подставляя в формулу (1.55) выражение для функции Грина (1.67) и беря сначала интеграл по координатам, а затем по времени, находим

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= 4\pi e \int d^3 r_1 c dt_1 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_1|} \delta(c(t - t_1) - |\vec{r} - \vec{r}_1|) = e \int dt_1 \frac{\delta(t_1 - t + |\vec{r} - \vec{r}_0(t_1)|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_1)|} = \\ &= \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|} \int d\tau \delta(\tau) \frac{dt_1}{d\tau} = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|} \int d\tau \frac{\delta(\tau)}{1 - \vec{\beta} \vec{R}_0/R_0} = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|} \frac{1}{1 - \vec{\beta} \vec{R}_0/R_0}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь при выводе была произведена замена переменной интегрирования и найдена производная от τ по t_1 :

$$\tau = t_1 - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_1)|}{c}, \quad \frac{d\tau}{dt_1} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\vec{r}'_0(t_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_1)|}. \quad (17)$$

3) Релятивистский способ. Выражения для потенциалов можно получить, исходя из двух следующих соображений. Во-первых, они вместе должны составлять четырехмерный вектор $\underline{A} = \{\varphi, \vec{A}\}$. Во-вторых, в пределе неподвижного заряда должен получаться известный результат:

$$\varphi = \frac{e}{R_0}, \quad \vec{A} = 0. \quad (18)$$

Искомые выражения надо сконструировать из имеющихся четырехмерных векторов. Таких векторов у нас два. Это вектор перемещения влияния заряда

$$\underline{R}_0 = \{c(t - t_1^0), \vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)\} = \{R_0, \vec{R}_0\} \quad (19)$$

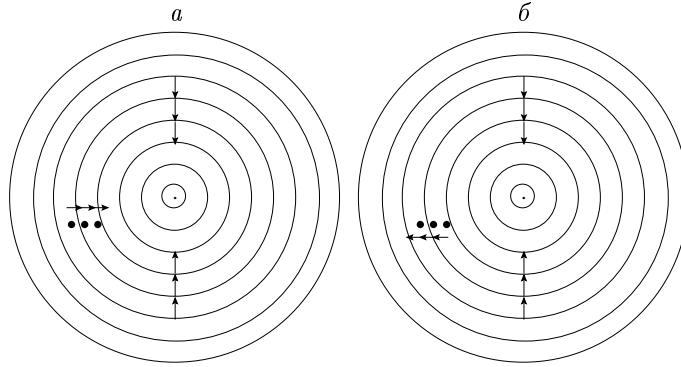


Рис. 16. Пересечение заряда сферой влияния при их движении:
а — в одном направлении, б — навстречу.

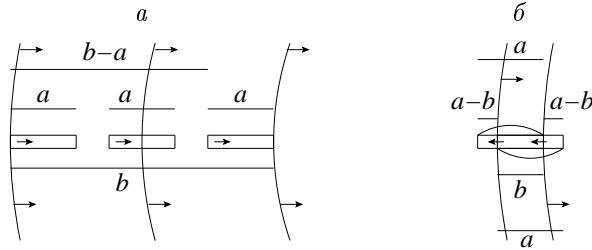


Рис. 17. Движение заряда и сферы: а — в одном направлении, б — навстречу.

и вектор скорости заряда

$$\underline{v} = c\{\gamma_0, \gamma_0 \vec{\beta}\}, \quad \gamma_0 = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (20)$$

Первый вектор нулевой, так как он описывает распространение сигнала, которое происходит со скоростью света. Второй вектор времениподобен, как и должно быть для вектора скорости.

Очевидно, что вектор потенциалов \underline{A} должен быть пропорционален вектору скорости \underline{v} , ибо у обоих этих векторов в случае неподвижного заряда пространственные составляющие обращаются в нули. В знаменатель же надо поместить выражение, обращающееся в этом же случае в R_0 . Таким выражением является скалярное произведение векторов \underline{v} и \underline{R}_0 . Окончательно получаем

$$\underline{A} = \frac{e}{v R_0} \underline{v} = \frac{e}{s} \{1, \vec{\beta}\}. \quad (21)$$

4) Наглядный. Наконец, четвертый способ вывода — наименее формальный из всех. Уравнение (6) при закрепленных значениях \vec{r} , t и t_1 представляет сферу с центром в точке $\vec{r} = c(t - t_1)$, точки \vec{r}_1 лежат на поверхности сферы. Если на сфере оказывается заряд, он дает вклад в интеграл. Назовем эту сферу сферой влияния. При $t_1 = -\infty$ сфера имеет бесконечный радиус, так что заряд находится внутри нее. С ростом t_1 радиус сферы уменьшается и при $t_1 = t$ сфера обращается в точку, совпадающую с положением наблюдателя. Радиус сферы уменьшается со скоростью света, а заряд движется с меньшей скоростью, рано или поздно сфера пересечет заряд. При этом заряд может лететь либо в ту же сторону, что и сфера (рис. 16а), либо навстречу ей (рис. 16б).

Для наглядности откажемся от точечности заряда. Пусть заряд имеет постоянное поперечное сечение и длину a , а скорость его направлена прямо на наблюдателя. В какой-то момент сфера догонит заряд, то есть коснется его заднего сечения, а потом перегонит его, то есть коснется переднего его сечения. Вклад в интеграл заряд будет давать только в те моменты, когда сфера его пересекает. Если бы заряд был неподвижен, этот промежуток времени был бы пропорционален a . Из-за движения заряда в ту же сторону, что и сфера, промежуток времени влияния увеличивается. Обозначим расстояние, на котором происходит влияние заряда, через b . Тогда за одно и то же время заряд проходит расстояние $b - a$, а сфера b . Поделив эти расстояния на скорости и приравняв результаты, получим

$$\frac{b}{c} = \frac{b - a}{v}. \quad (22)$$

Отсюда

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{1 - v/c}. \quad (23)$$

Это как раз тот дополнительный множитель, на который отличается величина интеграла в (9) от единицы, так как в (23) v — это проекция скорости заряда на направление на наблюдателя.

Аналогично рассматривается противоположный случай, когда заряд движется навстречу сфере. Тогда получаются соотношения

$$\frac{b}{c} = \frac{a - b}{v}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{1 + v/c}. \quad (24)$$

Здесь v — проекция скорости заряда на направление от наблюдателя, так что формула фактически та же.

Мы считали заряд неточечным. Однако поправочный множитель не зависит от a и остается тем же при $a \rightarrow 0$.

Итак, потенциалы точечного движущегося заряда, называемые обычно потенциалами Лиенара—Вихерта, определяются формулами (21) или подробнее

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{s}, \quad \vec{A} = \frac{e \vec{r}'_0(t_1)}{c s}, \quad s = R_0(\vec{r}, t_1) - \vec{r}'_0(t_1) \cdot \vec{R}_0(\vec{r}, t_1)/c, \quad \vec{R}_0(\vec{r}, t_1) = \vec{r} - \vec{r}_0(t_1). \quad (25)$$

Здесь для краткости у аргумента t_1^0 , определяемого (8), опущен нолик, то есть

$$c(t - t_1) = R_0(\vec{r}, t_1). \quad (26)$$

Теперь можно найти напряженности электрического и магнитного полей.

§ 2. Поле точечного заряда

1. *Соотношения между переменными, связанными с зарядом и с наблюдателем.* Найдя потенциалы движущегося точечного заряда (25), где момент влияния определяется равенством (26), можно найти напряженности электромагнитного поля.

Напряженности электрического и магнитного полей выражаются через потенциалы при помощи обычных формул

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi, \quad \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (27)$$

Трудность вычисления напряженностей по этим формулам заключается в том, что производные в них берутся по времени t и координатам x, y, z , а потенциалы (25) зависят от времени t_1 . При этом зависимость потенциалов от пространственных координат двойная. Во-первых, эти координаты входят непосредственно через вектор \vec{r} , во-вторых, от них зависит и время t_1 . Поэтому сначала надо найти производные от t_1 по времени t и по координатам, а затем дифференцировать потенциалы как сложные функции.

Найдем прежде всего производные по t_1 , что сделать достаточно легко:

$$\frac{\partial \vec{R}_0}{\partial t_1} = -\vec{r}'_0(t_1) = -c \vec{\beta}, \quad \frac{\partial R_0}{\partial t_1} = \frac{1}{2 R_0} \frac{\partial \vec{R}_0^2}{\partial t_1} = \frac{\vec{R}_0}{R_0} \frac{\partial \vec{R}_0}{\partial t_1} = -\frac{\vec{R}_0}{R_0} \vec{r}'_0(t_1) = -\frac{\vec{R}_0}{R_0} c \vec{\beta}. \quad (28)$$

Вторая производная по времени t_1 — это ускорение заряда:

$$\frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t_1} = \vec{\beta}' = \frac{\vec{r}''_0(t_1)}{c}. \quad (29)$$

Нам понадобится и

$$s' = \frac{\partial s}{\partial t_1} = \frac{\partial R_0}{\partial t_1} - \frac{\partial \vec{R}_0}{\partial t_1} \vec{\beta} - \vec{R}_0 \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t_1} = -c \vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0} + c \beta^2 - \vec{R}_0 \vec{\beta}'. \quad (30)$$

Теперь найдем производную от времени t_1 по времени наблюдения. Для этого продифференцируем равенство (26) по t . Получим

$$\frac{\partial R_0}{\partial t} = \frac{\partial R_0}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t_1}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial t_1}{\partial t} = \frac{R_0}{s} = \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{R}_0 / R_0}. \quad (31)$$

Так же находится и обратная производная:

$$\frac{\partial R_0}{\partial t_1} = c \left(\frac{\partial t}{\partial t_1} - 1 \right) = -c \vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0}, \quad \frac{\partial t}{\partial t_1} = 1 - \vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0}. \quad (32)$$

Интересно отметить, что производная от t_1 по t и производная от t по t_1 взаимно обратны. Для частных производных такая связь в общем случае не имеет места. То, что она выполняется для времен t и t_1 , является исключительным случаем.

Перейдем к производным по координатам. При этом, как уже говорилось, дифференцировать надо дважды: непосредственно по координатам — через вектор \vec{r} — и через время t_1 . Поэтому сначала найдем градиент t_1 . Для этого возьмем градиент от обеих частей равенства (26):

$$\vec{\nabla}R_0 = \frac{\vec{R}_0}{R_0} + \frac{\partial R_0}{\partial t_1} \vec{\nabla}t_1 = -c \vec{\nabla}t_1, \quad \vec{\nabla}t_1 = -\frac{\vec{R}_0}{c R_0} \frac{1}{1 - \beta \vec{R}_0/R_0} = -\frac{\vec{R}_0}{c s}. \quad (33)$$

Аналогично находим

$$\vec{\nabla}s = \frac{\vec{R}_0}{R_0} - \vec{\beta} + s' \vec{\nabla}t_1, \quad \vec{\nabla} \times \vec{\beta} = \vec{\nabla}t_1 \times \vec{\beta}'. \quad (34)$$

Теперь у нас есть все, чтобы найти напряженности.

2. Вычисление напряженностей. Для этого придется проделать довольно длинные выкладки. Сначала для напряженности электрического поля.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi = e \left[\frac{1}{s^2} \vec{\nabla}s - \frac{1}{c} \frac{\partial t_1}{\partial t} \left(\frac{1}{s} \vec{\beta}' - \frac{1}{s^2} s' \vec{\beta} \right) \right] = \\ &= \frac{e}{s^2} \left[\frac{\vec{R}_0}{R_0} - \vec{\beta} - \frac{\vec{R}_0}{c s} \left(c\beta^2 - \vec{R}_0 \vec{\beta}' - c \vec{\beta} \right) - \frac{1}{c} R_0 \vec{\beta}' + \frac{R_0}{c s} \vec{\beta} \left(c\beta^2 - \vec{R}_0 \vec{\beta}' - c \vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0} \right) \right] = \\ &= -\frac{e}{s^3} \left[\left(\frac{\vec{R}_0}{R_0} - \vec{\beta} \right) s - \vec{R}_0 \beta^2 + \vec{R}_0 \left(\vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0} \right) + R_0 \vec{\beta} \beta^2 - \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \vec{R}_0 \right) + \frac{1}{c} R_0 \left(\vec{R}_0 \vec{\beta}' \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c} R_0 s \vec{\beta}' - \frac{1}{c} R_0 \vec{\beta} \left(\vec{R}_0 \vec{\beta}' \right) \right] = -\frac{e}{s^3} [\vec{R}_0 - R_0 \vec{\beta} + \vec{\beta} (\vec{\beta} \vec{R}_0) - \vec{R}_0 \beta^2 - \frac{\vec{R}_0}{R_0} (\vec{\beta} \vec{R}_0) + \\ &\quad + \frac{\vec{R}_0}{R_0} (\vec{\beta} \vec{R}_0) + R_0 \vec{\beta} \beta^2 - \vec{\beta} (\vec{\beta} \vec{R}_0) + \frac{1}{c} (\vec{R}_0 (\vec{R}_0 \vec{\beta}') - R_0^2 \vec{\beta}' + R_0 (\vec{\beta} \vec{R}_0) \vec{\beta}' - \\ &\quad \left. - R_0 \vec{\beta} (\vec{R}_0 \vec{\beta}') \right)] = \frac{e}{s^3} (\vec{R}_0 - R_0 \vec{\beta}) (1 - \beta^2) + \frac{e}{s^3 c} \vec{R}_0 \times [(\vec{R}_0 - R_0 \vec{\beta}) \times \vec{\beta}']. \end{aligned} \quad (35)$$

Теперь для магнитного поля.

$$\begin{aligned} \vec{H} &= e \vec{\nabla} \times \frac{\vec{\beta}}{s} = e [\vec{\nabla} \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \vec{\nabla} \times \vec{\beta}] = e [-\frac{1}{s^2} \vec{\nabla}s \times \vec{\beta} + \frac{1}{s} \vec{\nabla}t_1 \times \vec{\beta}'] = \\ &= \frac{e}{s^2} (\frac{\vec{R}_0}{R_0} \times \vec{\beta} + s' \vec{\nabla}t_1 \times \vec{\beta} + s \vec{\nabla}t_1 \times \vec{\beta}') = \frac{e}{s^2} [\frac{\vec{R}_0}{R_0} \times \vec{\beta} - (c\beta^2 - c\vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0} - \vec{R}_0 \vec{\beta}') + \\ &\quad + \frac{1}{c} \vec{R}_0 \times \vec{\beta}'] = -\frac{e}{s^3} [\frac{\vec{R}_0}{R_0} \times \vec{\beta} (R_0 - \vec{\beta} \vec{R}_0) - \beta^2 \vec{R}_0 \times \vec{\beta} + (\vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0}) \vec{R}_0 \times \vec{\beta}] - \\ &\quad - \frac{e}{c s^3} [(\vec{R}_0 \vec{\beta}') \vec{R}_0 \times \vec{\beta} + (R_0 - \vec{R}_0 \vec{\beta}) \vec{R}_0 \times \vec{\beta}'] = \\ &= -\frac{e}{s^3} (1 - \beta^2) \vec{R}_0 \times \vec{\beta} - \frac{e}{c s^3} [(\vec{R}_0 \vec{\beta}') \vec{R}_0 \times \vec{\beta} + (R_0 - \vec{R}_0 \vec{\beta}) \vec{R}_0 \times \vec{\beta}']. \end{aligned} \quad (36)$$

Формулы для напряженностей довольно громоздки. Отметим важные их свойства. Во-первых, между напряженностями электрического и магнитного полей имеется простое соотношение

$$\vec{H} = \frac{\vec{R}_0}{R_0} \times \vec{E}, \quad (37)$$

так что эти два вектора всегда перпендикулярны. Во-вторых, каждый из них состоит из двух частей, что явно отражено в выписанных формулах. Вторая часть обращается в нуль при $\vec{\beta}' = 0$, то есть если заряд движется без ускорения. В-третьих, указанные слагаемые имеют разную скорость убывания с ростом расстояния от заряда до наблюдателя. Действительно, при $R_0 \rightarrow \infty$ и $s \sim R_0 \rightarrow \infty$ и, следовательно, первые слагаемые убывают как $1/R_0^2$, а вторые как $1/R_0$. Вследствие такого медленного убывания вторых слагаемых и модуль вектора Пойнтинга, то есть поток энергии электромагнитного поля, пропорциональный произведению напряженностей, убывает медленно, как $1/R_0^2$. Поэтому полный поток энергии поля через сферу радиуса R_0 остается постоянным, что интерпретируется как отрыв энергии от заряда и уход его на бесконечность, то есть излучение. Таким образом, можно сделать вывод, что только движущийся с ускорением заряд излучает.

3. Условие Лоренца. В заключение этого параграфа проверим, что потенциалы удовлетворяют условию Лоренца. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{A} &= -\frac{e}{cs^2} \frac{\partial s}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial t} - \frac{e}{s^2} \vec{\beta} \vec{\nabla} s + \frac{e}{s} \vec{\nabla} \vec{\beta} = -\frac{e}{cs^2} \left(-c\vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0} + c\beta^2 - \vec{R}_0 \vec{\beta}' \right) \frac{R_0}{s} - \\ &- \frac{e\vec{\beta}}{s^2} \left[\frac{\vec{R}_0}{R_0} - \vec{\beta} - \left(-c\vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0} + c\beta^2 - \vec{R}_0 \vec{\beta}' \right) \frac{\vec{R}_0}{cs} \right] - \frac{e}{s} \vec{\beta}' \frac{\vec{R}_0}{cs} = \frac{e}{c} \left(\vec{R}_0 \vec{\beta}' - c\beta^2 - c \frac{\vec{R}_0}{R_0} \vec{\beta} \right) \left(\frac{R_0}{s^3} - \frac{\vec{\beta} \vec{R}_0}{s^3} - \frac{1}{s^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Обращение в нуль происходит за счет содержимого последних скобок по определению величины s .

Рассмотрим теперь подробнее части напряженностей, дающие излучение. Сначала выведем их более простым способом.

§ 3. Поле точечного заряда на больших расстояниях

1. Направление и время на большом расстоянии от заряда. Пусть заряд движется в некоторой ограниченной области размером a . Выберем в этой области фиксированную точку с радиусом-вектором \vec{r}_c . Вектор, идущий из этой точки к наблюдателю, обозначим

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_c. \quad (39)$$

Введем вектор смещения заряда от фиксированной точки

$$\vec{x} = \vec{x}(t_1) = \vec{r}_0(t_1) - \vec{r}_c = \vec{R}_0(t_1) - \vec{R}. \quad (40)$$

Ясно, что $|\vec{x}| \leq a$, и

$$\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{x}, \quad \vec{\beta} = \frac{1}{c} \vec{r}_0'(t_1) = \frac{1}{c} \vec{x}'(t_1), \quad \vec{\beta}'(t_1) = \frac{1}{c} \vec{r}_0''(t_1) = \frac{1}{c} \vec{x}''(t_1) = \frac{1}{c} \vec{w}, \quad (41)$$

где $\vec{w} = \vec{w}(t_1)$ — вектор ускорения заряда.

Обозначим единичный вектор направления от той же точки к наблюдателю через

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}, \quad R = |\vec{R}|. \quad (42)$$

Будем считать, что размер области мал по сравнению с расстоянием до наблюдателя, то есть $|\vec{x}| \leq a \ll \vec{R}$. Это означает, что наблюдатель находится на большом расстоянии от заряда. Тогда

$$R_0 = \sqrt{R^2 + \vec{x}^2 - 2 \vec{R} \cdot \vec{x}} = R \sqrt{1 - 2(\vec{x}/R) \cdot \vec{n} + (\vec{x}/R)^2} \approx R [1 - (\vec{x}/R) \cdot \vec{n}] = R - \vec{x} \cdot \vec{n}. \quad (43)$$

Поэтому

$$\frac{\vec{R}_0}{R_0} = \frac{\vec{R} - \vec{x}}{R_0} \approx \vec{n}. \quad (44)$$

Можно ввести запаздывающее время T , не зависящее от положения заряда:

$$R = c(t - T). \quad (45)$$

Тогда из (26), (43) и (45) следует, что на далеких расстояниях

$$t_1 - \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{x} = T = t - \frac{R}{c}. \quad (46)$$

Время T течет так же, как и t , только со смещением на R/c . Из (46) вытекают как связь между временами t и t_1 , так и выражение для градиента t_1 . Действительно,

$$dt_1 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) = dt, \quad \vec{\nabla} t_1 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) = -\frac{\vec{n}}{c}, \quad (47)$$

откуда

$$\frac{\partial t_1}{\partial t} = \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}}, \quad \frac{\partial t}{\partial t_1} = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}, \quad \vec{\nabla} t_1 = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}}. \quad (48)$$

2. Потенциалы на больших расстояниях. При выводе формул для частей напряженностей, определяющих излучение, достаточно ограничиться главными слагаемыми, убывающими как $1/R_0$ или, что то же самое, как

$1/R$. Поэтому все слагаемые, убывающие быстрее, мы будем отбрасывать. В частности, в формулах (25) для потенциалов можно заменить \vec{R}_0 на \vec{R} и записать эти формулы в виде

$$\varphi = \frac{e}{R - \vec{R} \vec{\beta}}, \quad \vec{A} = \frac{e \vec{\beta}}{R - \vec{R} \vec{\beta}} \quad (49)$$

или

$$\varphi(t_1) = \frac{e}{R} \frac{1}{1 - \vec{n} \vec{\beta}(t_1)}, \quad \vec{A}(t_1) = \frac{e}{R} \frac{\vec{\beta}(t_1)}{1 - \vec{n} \vec{\beta}(t_1)}. \quad (50)$$

Теперь время t_1 в выражения для потенциалов входит только через аргумент скорости $\vec{\beta}$. Заметим, что потенциалы связаны соотношением

$$\varphi(t_1) = \frac{e}{R} + \vec{n} \vec{A}(t_1). \quad (51)$$

Еще одно упрощение заключается в следующем. При нахождении градиента уже не нужно дифференцировать по координатам непосредственно, так как такое дифференцирование всегда увеличивает скорость убывания дифференцируемой функции с R . Действительно,

$$\vec{\nabla} r^\alpha = \alpha r^{\alpha-1} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (52)$$

Следовательно, при вычислении градиента достаточно находить производные по координатам только через время t_1 , то есть можно принять

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_{t_1} \frac{\partial}{\partial t_1} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{1}{1 - \vec{n} \vec{\beta}} \frac{\partial}{\partial t_1}. \quad (53)$$

Поэтому аргумент \vec{r} у потенциалов не указан.

3. *Дополнительные соотношения.* Приведенные упрощенные формулы взятия производных позволяют вывести еще некоторые соотношения между характеристиками поля. Например, комбинация (53) и (48) дает

$$\vec{\nabla} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (54)$$

так что

$$\vec{\nabla} \varphi = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \vec{A} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (55)$$

Таким образом, достаточно найти производные от потенциалов по времени:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{e}{R} \frac{\vec{n} \vec{\beta}'}{(1 - \vec{n} \vec{\beta})^3}, \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{e}{R} \frac{\vec{\beta}'(1 - \vec{n} \vec{\beta}) + \vec{\beta}(\vec{n} \vec{\beta}')}{(1 - \vec{n} \vec{\beta})^3}. \quad (56)$$

С помощью этих соотношений легко проверить справедливость условия Лоренца

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0. \quad (57)$$

Заметим, что потенциалы в этом приближении, как и точные, составляют компоненты четырехмерного вектора:

$$\underline{A} = \frac{e}{R \underline{\beta}} \underline{\beta}, \quad \underline{R} = \{R, \vec{R}\}, \quad \underline{\beta} = \{1, \vec{\beta}\} / \sqrt{1 - \vec{\beta}^2}. \quad (58)$$

4. *Напряженности.* Ввиду всех этих упрощений и напряженности на больших расстояниях находить значительно проще и поэтому мы приведем этот вывод независимо. Имеем

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{A} + \vec{n} \varphi) = \frac{e}{R c} \frac{1}{(1 - \vec{n} \vec{\beta})^3} [-\vec{\beta}'(1 - \vec{n} \vec{\beta}) + (\vec{n} - \vec{\beta}) \vec{n} \vec{\beta}']. \quad (59)$$

Аналогично

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{e}{R c} \frac{1}{(1 - \vec{n} \vec{\beta})^3} [\vec{\beta}'(1 - \vec{n} \vec{\beta}) + \vec{\beta}(\vec{n} \vec{\beta}')]. \quad (60)$$

Легко проверить, что формулу (59) можно переписать в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{c R} \frac{e \vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}']}{(1 - \vec{n} \vec{\beta})^3}, \quad (61)$$

а соотношение (37) переходит в

$$\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}. \quad (62)$$

Таким образом, три вектора \vec{n} , \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны, то есть на далеких расстояниях поле движущегося с ускорением точечного заряда представляет собой поперечную сферическую волну.

Заметим, что с помощью соотношений предыдущего пункта формулы для напряженностей могут быть записаны в таком виде, что в них будет входить только производная по времени наблюдателя от векторного потенциала:

$$\vec{E} = \vec{n} \times \left(\frac{\vec{n}}{c} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right), \quad \vec{H} = -\frac{\vec{n}}{c} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}. \quad (63)$$

Такая форма этих выражений полезна при нахождении преобразований Фурье от напряженностей.

5. *Энергетика поля.* Найдем энергетические характеристики поля. Электрическая и магнитная части плотности энергии, как легко видеть, равны. Поэтому плотность энергии электромагнитного поля равна $w = E^2/4\pi = H^2/4\pi$. Поток энергии, то есть вектор Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{E^2}{4\pi} c \vec{n} = w c \vec{n}. \quad (64)$$

Таким образом, вектор потока энергии равен произведению плотности энергии на скорость распространения поля, то есть энергия только перетекает. Поэтому, как легко проверить, выполняется уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} c \vec{n} = 0. \quad (65)$$

§ 4. Дипольное приближение

Сделаем еще одно предположение: пусть скорость заряда мала по сравнению со скоростью света, то есть заряд нерелятивистский. Обозначим модуль его скорости через v . Тогда $v \ll c$. Это неравенство можно выразить в несколько другой форме. Заряд проходит область размером a за время a/v . Его излучение имеет примерно такой же период и, следовательно, частоту $\nu = v/c$ и длину волны $\lambda = c/\nu \sim c a/v$. Так как $v \ll c$, то $\lambda \gg a$. Таким образом, медленный заряд излучает на длине волны, значительно большей размера той области, в которой он движется.

Из соотношения (46), связывающего запаздывающие времена t_1 и T , видно, что разность между ними в случае медленного заряда значительно меньше, чем время, за которое заряд пересекает область: $a/c \ll a/v$. Поэтому изменение скорости заряда \vec{x}' за это время относительно мало и мы можем разложить ее по формуле Тейлора. Если удерживаются производные первого и второго порядков, то поле раскладывается на дипольную, квадрупольную и магнитно-дипольную составляющие. Здесь ограничимся дипольной компонентой поля.

В дипольном приближении в формуле Тейлора остается только самое первое слагаемое, то есть различием между временами T и t_1 вообще пренебрегается. В этом случае

$$\varphi = \frac{e}{R} \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{x}'(t_1)/c} = \frac{e}{R} \left[1 + \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{x}}'}{c} \right]. \quad (66)$$

Аналогично

$$\vec{A} = \frac{e}{R c} \frac{\vec{x}'}{1 - \vec{n} \cdot \vec{x}'/c} = \frac{e}{R c} \dot{\vec{x}}(T) \quad (67)$$

Формулы для напряженностей можно получить из общих формул (59) и (60), если принебречь в них малой безразмерной скоростью $\vec{\beta}$:

$$\vec{E} = \frac{e}{R c^2} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}') = \frac{e}{R c^2} [\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\beta}') - \vec{\beta}'], \quad \vec{H} = \vec{n} \times \vec{E} = \frac{e}{R c^2} \vec{\beta}' \times \vec{n}. \quad (68)$$

Эти формулы записывают еще в одном виде

$$\vec{H} = \frac{1}{R c^2} \ddot{\vec{d}} \times \vec{n}, \quad \vec{E} = \vec{H} \times \vec{n}, \quad (69)$$

где $\vec{d} = e \vec{x}$ — дипольный момент заряда относительно точки \vec{r}_c .

Найдем энергетические величины. Плотность энергии поля равна

$$w = \frac{1}{4\pi} E^2 = \frac{1}{4\pi} H^2 = \frac{1}{c^4 R^2} |\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}|^2, \quad (70)$$

а вектор Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} = \frac{\vec{n}}{4\pi c^3 R^2} |\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}|^2 = w c \vec{n}. \quad (71)$$

Вектор Пойнтинга — это вектор потока энергии, то есть величина, рассчитанная на единицу площади. Если находить количество энергии, которое идет в единицу телесного угла, то надо модуль (71) умножить на r^2 , то есть это количество равно

$$\mathcal{W}(\Theta) = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}|^2 = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{d}}|^2 \sin^2 \Theta, \quad (72)$$

где Θ — угол между дипольным моментом и направлением на наблюдателя. Поскольку дипольный момент равен произведению величины заряда на его ускорение, то формулу (72) можно переписать так:

$$\mathcal{W}(\Theta) = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{x}}|^2 \sin^2 \Theta. \quad (73)$$

Равенство (73) называется формулой Лармора. Распределение излучения по направлениям таково, что прямо вперед по второй производной от дипольного момента и в обратном направлении оно отсутствует. Во всех других направлениях излучение примерно одинаково, максимально оно в перпендикулярном к ускорению направлении.

Легко найти полное излучение, то есть идущее во все стороны. Для этого возьмем интеграл по всем направлениям, выбрав в качестве полярного угла Θ и приняв во внимание осевую симметрию излучения:

$$I = 2\pi \int_0^\pi \mathcal{W}(\Theta) \sin \Theta d\Theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{x}}|^2 2\pi \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \sin^2 \Theta = \frac{2e^2}{3c^3} |\ddot{\vec{x}}|^2. \quad (74)$$

Последняя формула дает полную мощность излучения заряда в дипольном приближении, то есть количество энергии, которое он излучает в единицу времени во всех направлениях. Ее тоже называют формулой Лармора. Она широко применяется во всех случаях, когда можно заряд считать нерелятивистским и ограничиться дипольным приближением.

§ 5. Рассеяние излучения свободными зарядами

1. *Схема рассеяния.* Если на некоторую частицу падает электромагнитная волна из направления орта \vec{n}' , то частица может рассеять ее излучение в направление другого орта \vec{n} . Плоскость, содержащую эти орты, будем называть плоскостью рассеяния.

В классической электродинамике (см., например, [1]) рассеяние излучения зарядом интерпретируется следующим образом. На заряженную частицу падает плоская электромагнитная волна, под действием которой частица колеблется, т. е. движется с ускорением, и порождает электромагнитное поле. На больших расстояниях от частицы поле превращается в сферическую волну, которая и рассматривается как излучение, рассеянное заряженной частицей. Частота излучения при этом не изменяется, изменяется только направление волны. Такое рассеяние называется томсоновским.

Рассеяние может произойти или не произойти, нужно найти вероятность его осуществления.

Угол γ между направлениями падающей и рассеянной волн называется углом рассеяния, косинус угла рассеяния $\cos \gamma = \vec{n} \cdot \vec{n}' = \mu$. Теория должна ответить на вопрос: если рассеяние происходит, то с какой вероятностью оно происходит на определенный угол в единицу телесного угла?

Падающая волна может быть поляризована, при рассеянии происходит изменение состояния поляризации. Еще один вопрос: как при рассеянии преобразуются параметры, характеризующие состояние поляризации?

В этом параграфе даются ответы на эти вопросы для случая, когда рассматривается рассеяние излучения свободными зарядами. Сначала надо ввести характеристики поляризации волн.

2. *Поляризационные базисы.* Для описания состояния поляризации волн построим два поляризационных базиса на векторах \vec{n} и \vec{n}' , причем один из векторов каждого базиса сделаем перпендикулярным плоскости рассеяния.

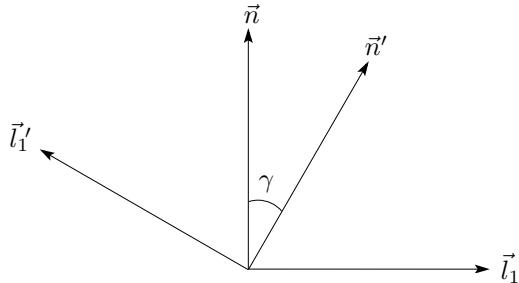


Рис. 18. Орты в плоскости рассеяния.

Поляризационные орты базисов для рассеянного и падающего излучения представляются аналогичными формулами:

$$\vec{l}_1 = \frac{\vec{n}' - \mu\vec{n}}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \vec{l}_2 = \frac{\vec{n} \times \vec{n}'}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \vec{l}'_1 = \frac{\vec{n} - \mu\vec{n}'}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \vec{l}'_2 = \frac{\vec{n}' \times \vec{n}}{\sqrt{1 - \mu^2}}. \quad (75)$$

Единичные векторы двух базисов связаны следующими простыми соотношениями:

$$\vec{l}_1 = \sqrt{1 - \mu^2}\vec{n}' - \mu\vec{l}'_1, \quad \vec{l}'_1 = \sqrt{1 - \mu^2}\vec{n} - \mu\vec{l}_1, \quad \vec{l}'_2 = -\vec{l}_2. \quad (76)$$

На рис. 18 изображены орты в плоскости рассеяния. Орт \vec{l}'_2 смотрит в сторону читателя, орт \vec{l}_2 от него.

Напряженности электрического поля падающей и рассеянной волн перпендикулярны направлению распространения своей волны. Пусть векторы напряженности рассеянной и падающей волн в принятых базисах задаются одинаковыми формулами:

$$\vec{E} = E_1\vec{l}_1 + E_2\vec{l}_2, \quad \vec{E}' = E'_1\vec{l}'_1 + E'_2\vec{l}'_2. \quad (77)$$

Теперь найдем связь между падающей и рассеянной волнами. Для этого найдем, как движется заряд под действием падающей волны.

3. Движение заряда. Чтобы определить характер движения заряда в поле волны, надо составить уравнение его движения, исходя из общего уравнения (2.141).

Сделаем предположение, что амплитуда падающей волны не очень велика, так что частица в ее поле не достигает релятивистских скоростей и не очень далеко отклоняется от положения равновесия. Поэтому можно считать, что на протяжении траектории частицы амплитуда падающей волны не зависит от пространственных координат в данный момент. Ввиду нерелятивистской скорости частицы не учитываем магнитной составляющей силы Лоренца.

В результате таких предположений уравнение движения заряженной частицы получает вид

$$m\ddot{\vec{x}} = -e\vec{E}', \quad \vec{E}' = \vec{E}_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad (78)$$

где m и $-e$ — масса и заряд частицы, \vec{E}_0 — постоянный вектор, а \vec{x} — вектор отклонения частицы от положения равновесия. Отсюда ускорение частицы

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{e}{m}\vec{E}'. \quad (79)$$

4. Создаваемое поле. В дипольном приближении на больших расстояниях R от частицы согласно формуле (68) создается поле напряженностью

$$\vec{E} = -\frac{e}{c^2 R} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{x}). \quad (80)$$

Подставив сюда выражение ускорения через напряженность падающей волны, получим

$$\vec{E} = \frac{r_e}{R} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}'), \quad (81)$$

где $r_e = e^2/mc^2$ — так называемый классический радиус заряда. Поскольку наименьшую массу при единичном заряде имеет электрон, наиболее эффективно из всех элементарных частиц рассеивает излучение именно электрон (наряду с позитроном, который в природе встречается в очень малых количествах).

5. Преобразование напряженности. Для определения связи напряженности рассеянной волны с напряженностью падающей найдем, как преобразуются орты базиса падающей волны согласно формуле (81):

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{l}'_1) = \vec{n} \times (-\mu\vec{l}_2) = \mu\vec{l}_1, \quad \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{l}'_2) = -\vec{l}'_2 = \vec{l}_2. \quad (82)$$

Тогда компоненты напряженности рассеянной волны выразятся через составляющие напряженности падающей так:

$$\vec{E} = \frac{r_e}{R} (\mu E'_1 \vec{l}_1 + E'_2 \vec{l}_2). \quad (83)$$

Представим, как обычно при рассмотрении поляризации, векторы напряженностей (77) в виде столбцов. Тогда сравнив равенства (77) и (83), можем записать

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \frac{r_e}{R} \check{A} \begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix}, \quad \check{A}(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Здесь каждый вектор относится к своему базису, но их базисы связаны между собой. Матрица рассеяния составляется именно при таком условии. Тогда она имеет наиболее простой вид: составляющая напряженности

электрического поля, перпендикулярная плоскости рассеяния, остается неизменной (если отвлечься от множителя r_e/R), в то время как составляющая, лежащая в этой плоскости, умножается на косинус угла рассеяния.

Теперь перейдем от напряженностей к поляризационным матрицам и выведем матрицу томсоновского рассеяния.

6. *Матрица томсоновского рассеяния.* Матрица рассеянного излучения выразится через матрицу падающего:

$$\check{S} = \frac{c}{8\pi} \vec{E} \vec{E}'^\dagger = \frac{c}{8\pi} \frac{r_e^2}{R^2} \check{\mathcal{A}} \vec{E}' (\vec{E}')^\dagger \check{\mathcal{A}} = \frac{r_e^2}{R^2} \check{\mathcal{A}} \check{S}' \check{\mathcal{A}}. \quad (85)$$

Если сделать следующий шаг и от поляризационных матриц перейти к параметрам Стокса, то получится соотношение, связывающее векторы Стокса:

$$\vec{I} = \frac{r_e^2}{R^2} \hat{\mathcal{R}}(\mu) \vec{I}'. \quad (86)$$

Более подробно

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{r_e^2}{R^2} \begin{pmatrix} \frac{\mu^2 + 1}{2} & \frac{\mu^2 - 1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\mu^2 - 1}{2} & \frac{\mu^2 + 1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix}. \quad (87)$$

Матрица рассеяния свободными зарядами совпадает с матрицей молекулярного рассеяния и называется релеевской.

На больших расстояниях R сферическая волна мало отличается от плоской, величина R изменяется медленно и может считаться постоянной.

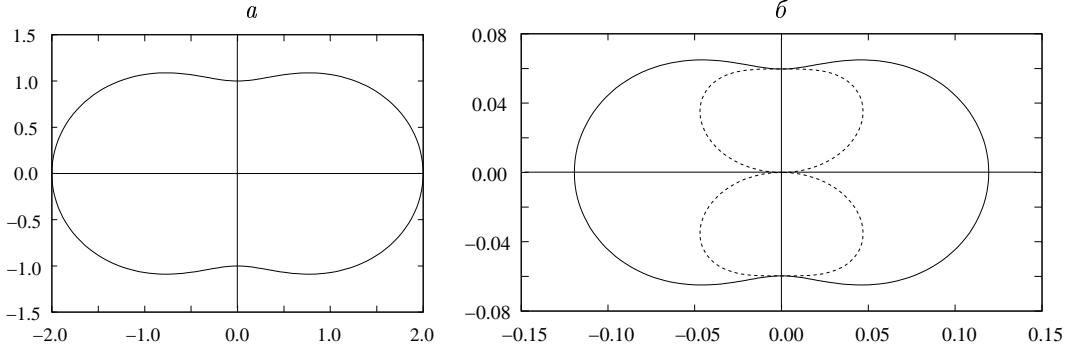


Рис. 19. Релеевская индикатриса. а: $1 + \cos^2 \gamma$, б: $\chi(\gamma)/4\pi$ и $\chi(\gamma) \sin \gamma / (4\pi)$.

Параметры U и V в принятых базисах с точностью до множителя r_e^2/R^2 просто умножаются на косинус угла рассеяния. Два других параметра преобразуются совместно. В частности, рассеяние даже неполяризованной волны, когда все параметры падающей волны кроме интенсивности равны нулю, создает поляризацию.

7. *Сечение и индикатриса рассеяния.* Процессы рассеяния характеризуются сечениями, общее определение которых будет дано в другой части курса. Здесь используем конкретные функции.

Элемент матрицы, стоящий в левом верхнем ее углу, если его умножить на R^2 , представляет собой так называемое дифференциальное сечение рассеяния

$$\varsigma(\mu) = \frac{r_e^2}{2} (\mu^2 + 1). \quad (88)$$

Полное сечение, то есть проинтегрированное по всем направлениям, выражается через классический радиус электрона и называется томсоновским [1]:

$$\varsigma_T = \int d^2n \varsigma(\mu) = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (89)$$

Если в единице объема находится n_e электронов (эта величина называется их концентрацией), то произведение $n_e \varsigma_T ds$ равно вероятности того, что на пути ds излучение испытает томсоновское рассеяние, то есть его часть изменит свое направление. Если поток энергии в этом направлении был S , то его относительная убыль составит $dS/S = -\sigma ds$, где $\sigma = n_e \varsigma_T$. Если начальный поток S_0 , то после прохождения пути s от него останется $S = S_0 e^{-\sigma s}$. При рассуждении об одном фотоне следует сказать, что вероятность его сохранения $e^{-\sigma s}$. Напротив, вероятность того, что фотон выпадет из пучка на пути s равна $F(s) = 1 - e^{-\sigma s}$, что может рассматриваться как интегральная функция распределения вероятностей. Дифференциальная функция $f(s) = \sigma e^{-\sigma s}$. Можно найти, например, средний путь, проходимый фотоном без рассеяния (средний пробег). Это математическое ожидание

$$\bar{s} = \int_0^\infty s \sigma e^{-\sigma s} ds = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n_e \zeta_T}. \quad (90)$$

Частное

$$\frac{\varsigma(\mu)}{\zeta_T} = \frac{3}{16\pi} (\mu^2 + 1) = \frac{3}{16\pi} (\cos^2 \gamma^2 + 1) = \frac{1}{4\pi} \chi(\gamma) \quad (91)$$

совпадает с деленной на 4π релеевской индикатрисой рассеяния $\chi(\gamma)$, которая описывает рассеяние излучения на молекулах. Произведение

$$\chi(\gamma) \frac{d^2 n}{4\pi} = \frac{3}{16\pi} (\cos^2 \gamma + 1) \sin \gamma d\gamma d\varphi \quad (92)$$

равно вероятности того, что при рассеянии излучение отклонится на угол γ и попадет в телесный угол $d^2 n$. Понятно, что интеграл от этой вероятности по направлениям равен 1.

Зависимость релеевской индикатрисы от полярного угла характеризуется рис. 19. На рис. 19a изображена полярная диаграмма $1 + \cos^2 \gamma$, а на рис. 19б кривая $\chi(\gamma)/(4\pi)$ и внутри нее произведение $\sin \gamma \chi(\gamma)/(4\pi)$. Точнее, это сечения пространственных фигур, которые из приведенных получаются вращением вокруг оси абсцисс, вдоль которой летел падающий фотон и рассеялся в начале координат. Азимут рассчитывается в плоскости уз.

В заключение параграфа приведем численные значения. Классический радиус электрона $r_e = 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, а полное томсоновское сечение $\zeta_T = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$, что в $8/3$ раз больше, чем классическое геометрическое сечение πr_e^2 .

§ 6. Излучение быстрых зарядов

1. *Полное излучение.* Самый простой способ найти полное излучение релятивистского заряда — это использовать релятивистские соображения, аналогичные тем, с помощью которых были получены формулы для потенциалов точечного движущегося заряда.

Должны выполняться два требования по отношению к искомым формулам. Они должны быть релятивистски ковариантны и оставаться правильными при переходе к нерелятивистскому пределу. Поэтому напишем два столбца формул, нерелятивистские и релятивистские, заполняя сначала левый сверху вниз, а затем правый снизу вверх.

Нерелятивистский заряд $d\underline{x} = \{cdt, 0\},$ $d\underline{P} = \{dP_0, 0\} = I\{dt/c, 0\} =$ $= (I/c^2)\{cdt, 0\} = (I/c^2)d\underline{x},$ $I = (2/3)(e^2/c^3)w^2,$	Релятивистский заряд $d\underline{x} = \{cdt_1, d\vec{x}(t_1), \}$ $d\underline{P} = \{dP_0, \vec{P}\} = I\{dt_1/c, d\vec{x}(t_1)/c^2\} =$ $= (I/c^2)\{cdt_1, d\vec{x}(t_1)\} = (I/c^2)d\underline{x}(t_1),$ $I = (2/3)(e^2/c^3)(-\underline{w}).$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(93)

Нерелятивистский заряд излучает энергию и мощность его полного (во все стороны) излучения дается формулой Лармора. Но в релятивистских обозначениях надо писать не отдельно энергию и время, а целиком четырехмерные векторы энергии-импульса и положения, точнее их дифференциалы. Малыми скоростями заряда пренебрегаем. В релятивистском случае нулевые пространственные составляющие векторов заменяем на конечные. Тем самым получаются правильные релятивистские формулы. Используется время t_1 , так как излучение относится к заряду. Через w обозначено ускорение заряда (а не плотность излучения).

Из полученных формул следует, что релятивистский заряд излучает не только энергию, но и импульс, то есть оторвавшееся от него электромагнитное поле уносит с собой и энергию и импульс. Сферическая расходящаяся волна расширяется со скоростью света, но еще и ее центр смещается со сравнимой скоростью.

Мощность излучения I оказывается коэффициентом пропорциональности между векторами энергии-импульса и смещения заряда. Квадрат ускорения естественно заменяется на квадрат четырехмерного ускорения. Знак минус берется потому, что вектор ускорения пространственно подобен и в нерелятивистском пределе его квадрат переходит в $-w^2$. Вспоминай выражение для этого квадрата, можно написать

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \gamma^6 [w^2 - (\vec{\beta} \times \vec{w})^2] = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \gamma^6 w^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \alpha), \quad (94)$$

где α обозначен угол между векторами $\vec{\beta}$ и \vec{w} .

2. *Сравнение эффективности излучения.* Обычно рассматриваются два крайних случая взаимного расположения векторов скорости и ускорения: когда они параллельны или перпендикулярны. В первом случае заряд совершает мгновенное движение по прямой, во втором — мгновенное движение по окружности. Соответственно мощность излучения

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \begin{cases} \gamma^6 w^2, & \vec{\beta} \parallel \vec{w}, \\ \gamma^4 w^2, & \vec{\beta} \perp \vec{w}. \end{cases} \quad (95)$$

Пусть на заряд действует некоторая сила, благодаря которой он движется. Эта сила равна производной от его импульса:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}\gamma). \quad (96)$$

Производная от лоренцевского множителя

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = \beta\gamma^3 \vec{v}\vec{w}/(\beta c) = \gamma^3 \vec{v}\vec{w}/c, \quad (97)$$

так что

$$\vec{F} = m\gamma\vec{w} + m\gamma^3\vec{\beta}(\vec{\beta}\vec{w}) = m\gamma w \left[\frac{\vec{w}}{w} + \gamma^2\beta^2 \frac{\vec{\beta}}{\beta} \left(\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{w}}{\beta w} \right) \right]. \quad (98)$$

В двух наших крайних случаях:

$$\vec{F} = m\gamma\vec{w} \begin{cases} \gamma^2, & \vec{\beta} \parallel \vec{w}, \\ 1, & \vec{\beta} \perp \vec{w}. \end{cases} \quad (99)$$

Сравнение (95) и (99) дает соотношения

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} |\vec{F}|^2 \begin{cases} 1, & \vec{\beta} \parallel \vec{w}, \\ \gamma^2, & \vec{\beta} \perp \vec{w}. \end{cases} \quad (100)$$

Наряду с крайними случаями расположения скорости и ускорения представляют очевидный интерес и предельные случаи нерелятивистского и ультрарелятивистского зарядов. Когда скорость заряда невелика, множитель γ порядка 1 и случаи соотношений в (100) ничем не различаются. Если же скорость заряда близка к скорости света, то есть $\beta \approx 1$ (тогда $\gamma \gg 1$), различие велико. Если сила, действующая на заряд имеет примерно равные составляющие вдоль скорости и перпендикулярно ей, то излучение происходит так, как если бы заряд двигался в направлении, перпендикулярном скорости. Следовательно, основное излучение ультрарелятивистского заряда происходит за счет мгновенного движения по окружности.

Теперь рассмотрим, как это излучение распределено по направлениям.

3. Угловое распределение. Запишем формулу для напряженности электрической составляющей излучаемого зарядом поля

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{w}]}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (101)$$

Количество лучистой энергии, излучаемое в направлении \vec{n} в телесном угле d^2n в единицу времени t , равно

$$dI_*(\vec{n}) = \mathcal{W}_* d^2n = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 d^2n = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{w}]|^2}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^6} d^2n. \quad (102)$$

Чтобы отсюда получить выражение для полного излучения, найденного в пункте 1, необходимо проинтегрировать по всем направлениям на наблюдателя \vec{n} , закрепив при этом вектор скорости $\vec{\beta}(t_1)$, а значит момент времени t_1 . В разных направлениях \vec{n} этому времени будут соответствовать различные моменты времени наблюдения t на одном и том же расстоянии R или разные расстояния R при одном t . Если закрепляется время t_1 , то и мощность излучения надо рассчитывать на единицу времени t_1 .

Мощность же излучения \mathcal{W}_* рассчитана на единицу времени наблюдателя t . Для пересчета на мощность по отношению ко времени излучающего заряда t_1 величину \mathcal{W}_* следует умножить на производную $\partial t / \partial t_1 = 1 - \vec{n}\vec{\beta}$. Тогда мощность в расчете на единицу времени заряда и единицу телесного угла будет

$$\mathcal{W}(\vec{n}) = (1 - \vec{n}\vec{\beta})\mathcal{W}_* = \frac{c}{4\pi} R^2 |\vec{E}|^2 (1 - \vec{n}\vec{\beta}) = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{w^2(1 - \vec{n}\vec{\beta})^2 + 2(\vec{n}\vec{w})(\vec{\beta}\vec{w})(1 - \vec{n}\vec{\beta}) - (1 - \beta^2)(\vec{n}\vec{w})^2}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^5}. \quad (103)$$

Построим на векторах $\vec{\beta}$ и \vec{w} (α — угол между ними) базис с ортами

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1(\vec{\beta}, \vec{w}) = \frac{\vec{w}/w - \cos\alpha \vec{\beta}/\beta}{\sin\alpha}, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_2(\vec{\beta}, \vec{w}) = \frac{\vec{\beta} \times \vec{w}}{\beta w \sin\alpha}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{\beta}}{\beta}. \quad (104)$$

Тогда

$$\vec{\beta} = \beta \vec{e}_3, \quad \vec{w} = w(\sin\alpha \vec{e}_1 + \cos\alpha \vec{e}_3). \quad (105)$$

Разложим и вектор направления излучения по этим ортам:

$$\vec{n} = \sin \theta (\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2) + \cos \theta \vec{e}_3. \quad (106)$$

Тогда

$$\vec{\beta}\vec{n} = \beta \cos \theta, \quad \vec{\beta}\vec{w} = \beta w \cos \alpha, \quad \vec{n}\vec{w} = w\mu, \quad \mu = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \cos \phi. \quad (107)$$

Подставив эти скалярные произведения в формулу (103), получим зависимость интенсивности от полярных углов, определяющих направление излучения:

$$dI(\vec{n}) = \mathcal{W}(\vec{n}) d^2 n, \quad \mathcal{W}(\vec{n}) = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \left[\frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} + 2 \frac{\beta \cos \alpha}{(1 - \beta \cos \theta)^4} \mu - \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \mu^2 \right]. \quad (108)$$

4. *Связь с полным излучением.* Проинтегрировав выражение (108) по направлениям, мы получим полную интенсивность (94). Для проверки этого используем значения интегралов

$$I_{m,n}(\beta) = \int_{-1}^1 \frac{\eta^m}{(1 - \beta \eta)^n} d\eta. \quad (109)$$

Для них легко получить рекуррентные соотношения

$$I_{m,n}(\beta) = \frac{I_{m-1,n}(\beta) - I_{m-1,n-1}(\beta)}{\beta}, \quad I'_{m,n}(\beta) = n I_{m+1,n+1}(\beta). \quad (110)$$

Приведем значения этих интегралов для первых натуральных чисел, опустив их аргумент:

$$\begin{aligned} I_{0,2} &= 2\gamma^2, \quad I_{0,3} = 2\gamma^4, \quad I_{0,4} = \frac{2}{3}(3 + \beta^2)\gamma^6, \quad I_{0,5} = 2(1 + \beta^2)\gamma^8, \\ I_{1,3} &= 2\beta\gamma^4, \quad I_{1,4} = \frac{8}{3}\beta\gamma^6, \quad I_{1,5} = \frac{2}{3}\beta(5 + \beta^2)\gamma^8, \\ I_{2,4} &= \frac{2}{3}(1 + 3\beta^2)\gamma^6, \quad I_{2,5} = \frac{2}{3}(1 + 5\beta^2)\gamma^8, \quad I_{3,5} = 2\beta(1 + \beta^2)\gamma^8, \\ I_{0,6} &= \frac{2}{5}(5 + 10\beta^2 + \beta^4)\gamma^{10}, \quad I_{1,6} = \frac{4}{5}\beta(5 + 3\beta^2)\gamma^{10}, \quad I_{2,6} = \frac{2}{15}(5 + 38\beta^2 + 5\beta^4)\gamma^{10}. \end{aligned} \quad (111)$$

Здесь через γ обозначен лоренцевский множитель, если считать, что β — это скорость.

Для интеграла от выражения в квадратных скобках находим

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[\frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} + 2 \frac{\beta \cos \alpha}{(1 - \beta \cos \theta)^4} \mu - \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \mu^2 \right] = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d\eta \left[\frac{1}{(1 - \beta \eta)^3} + 2 \frac{\beta \cos^2 \alpha}{(1 - \beta \eta)^4} \eta - \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \eta)^5} \left(\eta^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \frac{1 - \eta^2}{2} \right) \right] \\ &= 2\pi \left[I_{0,3} + 2\beta \cos^2 \alpha I_{1,4} - \frac{\cos^2 \alpha}{\gamma^2} I_{2,5} - \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma^2} \frac{I_{0,5} - I_{2,5}}{2} \right] = \\ &= 4\pi \left[\gamma^4 + \frac{8}{3} \cos^2 \alpha \beta^2 \gamma^6 - \frac{1}{3} \cos^2 \alpha \gamma^6 (1 + 5\beta^2) - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \gamma^4 \right] = \frac{8\pi}{3} (1 - \beta^2 \sin^2 \alpha) \gamma^6. \end{aligned} \quad (112)$$

Умножив этот интеграл на дробь $e^2 w^2 / 4\pi c^3$, получим выражение для I , совпадающее с найденным из релятивистских соображений (94), то есть

$$\int dI(\vec{n}) = \int \mathcal{W}(\vec{n}) d^2 n = I. \quad (113)$$

Установим еще одно соотношение, а именно покажем, что

$$\int \vec{n} dI(\vec{n}) d^2 n = \int d^2 n \mathcal{W}(\vec{n}) \vec{n} = \vec{\beta} I. \quad (114)$$

Для этого надо вычислить три интеграла — от трех составляющих вектора \vec{n} , причем эти составляющие умножаются на то же выражение, которое стоит в квадратных скобках в (112). Очевидно, что интеграл от проекции

\vec{n} на орт \vec{e}_2 , содержащей $\sin \phi$, равен нулю. Точно так же равен нулю и интеграл от составляющей по \vec{e}_1 . Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \cos \phi d\phi \left[\frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} + 2 \frac{\beta \cos \alpha}{(1 - \beta \cos \theta)^4} \mu - \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \mu^2 \right] = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d\eta (1 - \eta^2) \left[\frac{\beta \cos \alpha \sin \alpha}{(1 - \beta \cos \theta)^4} - \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \eta \cos \alpha \sin \alpha \right] = \\ &= 2\pi \cos \alpha \sin \alpha \int_{-1}^1 \frac{1 - \eta^2}{(1 - \beta \eta)^5} (\beta - \eta) = 2\pi \cos \alpha \sin \alpha [\beta(I_{05} - I_{25}) - (I_{15} - I_{35})] = 0. \end{aligned} \quad (115)$$

Наконец, третий интеграл, единственный отличный от нуля, не содержит функций от ϕ и отличается от (112) только лишним множителем $\cos \theta = \eta$. Поэтому он имеет тот же вид, что и (112), но первый индекс у интегралов I_{mn} у него на единицу больше:

$$\begin{aligned} & \int d^2n \mathcal{W} \cos \theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 2\pi \left[I_{13} + 2\beta \cos^2 \alpha I_{24} - \frac{\cos^2 \alpha}{\gamma^2} I_{35} - \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma^2} \frac{I_{15} - I_{35}}{2} \right] = \\ &= \frac{e^2}{2c^3} w^2 [2\beta \gamma^4 + 2\beta \cos^2 \alpha \frac{2}{3} \gamma^6 (1 + 3\beta^2) - 2\beta \cos^2 \alpha \gamma^6 (1 + \beta^2) - \sin^2 \alpha \frac{2}{3} \beta \gamma^6] = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} w^2 \beta \gamma^6 (1 - \beta^2) = \beta I. \end{aligned} \quad (116)$$

Таким образом, равенство (114) доказано.

5. *Излучаемый импульс.* Доказанные формулы (113) и (114) позволяют записать формулу для импульса, уносимого излучаемым зарядом полем, в следующем виде:

$$d\underline{P} = \frac{I}{c^2} d\underline{x}(t_1) = \frac{I}{c^2} \{cdt_1, d\vec{x}(t_1)\} = \frac{I}{c} dt_1 \{1, \vec{\beta}(t_1)\} = \frac{dt_1}{c} \int \mathcal{W} d^2n \{1, \vec{n}\}. \quad (117)$$

Можно проверить прямой выкладкой релятивистскую ковариантность этой формулы. Но можно продемонстрировать ее явно, если ввести четырехмерные векторы мгновенной безразмерной скорости и мгновенного ускорения

$$\underline{\beta}(t_1) = \gamma(t_1) \{1, \vec{\beta}(t_1)\}, \quad \underline{w}(t_1) = \gamma^2 \{\gamma^2 \vec{\beta} \vec{w}, \vec{w} + \gamma^2 (\vec{\beta} \vec{w}) \vec{\beta}\}, \quad (118)$$

а также волновой вектор излучаемого поля

$$\underline{\alpha} = \alpha \{1, \vec{n}\}, \quad (119)$$

выбрав какую-нибудь величину волнового числа α . Поскольку все частоты (или волновые числа, или модули импульсов) фотонов преобразуются одинаково, так как различаются на множители, которые не зависят от исходной частоты, то безразлично, какую величину α взять.

Тогда легко показать, что формула (117) может быть записана так:

$$d\underline{P} = -\frac{e^2}{4\pi c^3} d\tau_1 \int \frac{(\underline{\alpha} \underline{\beta})^2 \underline{w}^2 + (\underline{\alpha} \underline{w})^2}{(\underline{\alpha} \underline{\beta})^5} \underline{\alpha}^2 d^2n \underline{\alpha}. \quad (120)$$

Сюда входят инвариантные величины: дифференциал собственного времени заряда в данный момент $d\tau_1 = dt_1/\gamma$, инвариант $\underline{\alpha}^2 d^2n$ и дробь, содержащая только скалярные произведения четырехмерных векторов, а также вектор $\underline{\alpha}$. Введенная для удобства и наглядности величина α входит в одной и той же степени в числитель и знаменатель подинтегрального выражения и сокращается.

Таким образом, мощность излучения в единицу телесного угла можно представить в виде множителя, который входит в инвариантное выражение

$$d\underline{P} = dt_1 \int d^2n \mathcal{W} \{1, 0\}, \quad \mathcal{W} = -\frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{\alpha^3}{\gamma} \frac{(\underline{\alpha} \underline{\beta})^2 \underline{w}^2 + (\underline{\alpha} \underline{w})^2}{(\underline{\alpha} \underline{\beta})^5}. \quad (121)$$

При мгновенной остановке заряда или при переводе в его мгновенную собственную систему отсчета, где $\vec{\beta} = 0$, будет $\underline{w}^2 = -w^2$, $\alpha = \alpha_0$, $\underline{\alpha} \underline{\beta} = \alpha_0$, $\underline{\alpha} \underline{w} = -\alpha_0 \vec{n} \vec{w}$ и формула (121) для \mathcal{W} перейдет в формулу Лармора (73).

6. *Движение по прямой.* Рассмотрим этот случай подробнее, так как для него формулы получаются проще и нагляднее. При $\vec{\beta} \parallel \vec{w}$

$$\mathcal{W} = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (122)$$

Поскольку на концах промежутка изменения угла θ неотрицательная функция \mathcal{W} обращается в нуль, внутри она должна иметь максимум. Действительно, он достигается при

$$\cos \theta_{\max} = \frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta} = \frac{5\beta}{\sqrt{1+15\beta^2}+1}, \quad \sin \theta_{\max} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{1+3\beta^2+\sqrt{1+15\beta^2}}}. \quad (123)$$

При малых скоростях последний знаменатель в (122) можно заменить единицей. Тогда распределение излучения по направлениям описывается простым множителем $\sin^2 \theta$ (ясно, что при этом нет зависимости от азимута). Прямо вперед и назад излучения нет, а во всех других направлениях оно примерно одинаково. Максимум достигается при $\theta = \pi/2$.

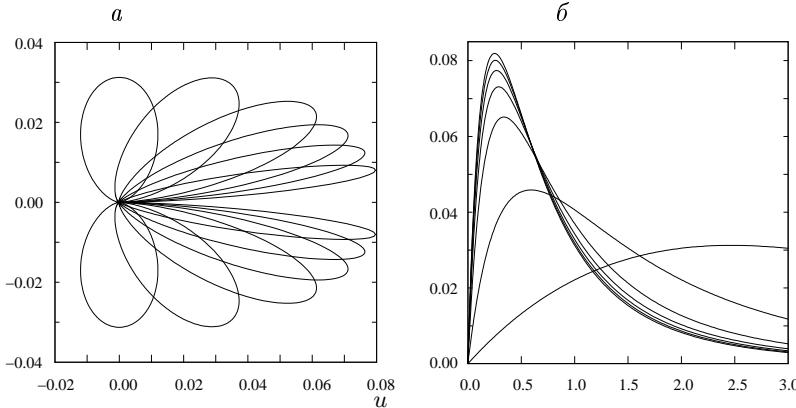


Рис. 20а. Отношения $\frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \frac{1}{32\gamma^8}$ при $\beta = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95$ и 0.98 в полярных координатах.

Рис. 20б. Те же величины, что и на рис. 20а, в зависимости от аргумента $u = (\theta\gamma)^2$ и предел при $\beta \rightarrow 1.0$.

Если заряд ультрарелятивистский, то характер излучения совсем другой. Разность в скобках в знаменателе $1 - \beta \cos \theta$ в (122) при близких к единице β близка к единице при всех углах, кроме малых. Если же $0 < \theta \ll 1$, то знаменатель близок к нулю и дробь становится очень большой. Продемонстрируем это количественно.

При малых углах и скоростях, близких к скорости света, рассматриваемую разность можно преобразовать следующим образом:

$$1 - \beta \cos \theta = 1 - \beta + \beta(1 - \cos \theta) = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} + 2\beta \sin^2 \frac{\theta}{2} \sim \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta^2}{2} = \frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2\gamma^2}. \quad (124)$$

Подставив ее в (122) и заменив синус на угол, получим

$$\mathcal{W} \sim \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \theta^2 \left(\frac{2\gamma^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} \right)^5 = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 2^5 \gamma^8 \frac{u}{(1+u)^5}, \quad u = (\theta\gamma)^2. \quad (125)$$

Таким образом, в существенной части мощность излучения зависит от произведения $\theta\gamma$. В частности, максимум эта мощность достигает при $u = 1/4$, то есть $\theta_{\max} = 1/(2\gamma)$, что согласуется с (123). Максимальное значение дроби $u/(1+u)^5$ равно $2^8/5^5$. Половинное от максимального значение мощность принимает при двух корнях уравнения $u/(1+u)^5 = 2^7/5^5$. Эти корни $u = 0.0530368616763$ и $u = 0.8216533474857$. Соответствующие значения углов $\theta = 0.2302973331941/\gamma$ и $\theta = 0.9064509625378/\gamma$.

На рис. 20а приведены полярные диаграммы безразмерных множителей $\frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \frac{1}{32\gamma^8}$, определяющих направленность излучаемой зарядом энергии (122), при $\beta = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98$. Соответствующие значения $\gamma = 1.154, 1.167, 2.294, 3.203, 5.025$. Диаграммы с ростом β становятся все более узкими и вытянутыми. Множители $32\gamma^8$, для выбранных значений β равны соответственно $32, 1.01 \cdot 10^2, 1.91 \cdot 10^3, 2.46 \cdot 10^4, 3.54 \cdot 10^5, 1.30 \cdot 10^7$. Они введены (в знаменатель) для возможности помещения кривых на один график. Без этих множителей реальная вытянутость кривых с приближением β к единице растет катастрофически. На рис. 20б значения тех же функций отложены в зависимости от аргумента $u = (\theta\gamma)^2$. Большим значениям β соответствуют большие величины максимумов. Там же помещена и предельная кривая $u/(1+u)^5$, отвечающая $\beta = 1, \gamma = \infty$. Видно, как кривые с приближением β к 1 приближаются к своей предельной кривой, причем значительная близость достигается уже при не очень больших γ .

Хотя точная функция распределения излучения по направлениям заменена на приближенную, ошибка при больших γ невелика. Так, полная интенсивность, находимая по точной и по приближенной формулам, если во второй продолжить интегрирование по углу до бесконечности, получается одной и той же:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \int_{-1}^1 \frac{1 - \eta^2}{(1 - \beta \eta)^5} d\eta = I_{05} - I_{25} = \frac{4}{3} \gamma^6, \quad 2^5 \gamma^{10} \int_0^\infty \frac{\theta^3 d\theta}{(1 + \theta^2 \gamma^2)^5} = 2^5 \gamma^6 I_{235} = \frac{4}{3} \gamma^6. \quad (126)$$

Здесь использован интеграл с тремя индексами, который заменой переменной интегрирования $y = 1/(1 + v^p)$ сводится к бета-функции:

$$I_{pmn} = \int_0^\infty \frac{v^m dv}{(1 + v^p)^n} = \frac{1}{p} B\left(n - \frac{m+1}{p}, \frac{m+1}{p}\right) = \frac{1}{p\Gamma(n)} \Gamma\left(n - \frac{m+1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{p}\right). \quad (127)$$

Тот же порядок, что и угол максимальной мощности излучения, имеют средние степени угла, взвешенные по распределению интенсивности:

$$\langle \theta^\alpha \rangle = \frac{3}{4\gamma^6} 2^5 \gamma^{10} \int_0^\infty \frac{\theta^{\alpha+3} d\theta}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5} = 24 I_{2\alpha+35} = \frac{1}{2} \Gamma\left(3 - \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(2 + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right) \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha/2)}. \quad (128)$$

Средние имеют смысл при $-4 < \alpha < 6$. В частности, средний угол и средний квадрат угла

$$\langle \theta \rangle = \frac{9\pi}{32} \frac{1}{\gamma} = \frac{0.8835729338221}{\gamma}, \quad \langle \theta^2 \rangle = \frac{24}{\gamma^2} I_{255} = \frac{1}{\gamma^2}. \quad (129)$$

Соответственно дисперсия и стандарт равны

$$D\theta = \frac{0.219298870617}{\gamma^2}, \quad \sqrt{D\theta} = \frac{0.4682935731109}{\gamma}. \quad (130)$$

Таким образом, излучение ультраполитивистского заряда, который движется мгновенно по прямой, сосредоточено в узком конусе с углом раствора порядка $1/\gamma$ в сторону его движения, хотя прямо по направлению этого движения излучения нет.

Случай движения заряда по окружности заслуживает отдельного рассмотрения, которое будет осуществлено в разделе, посвященном магнитотормозному механизму излучения.

§ 7. Спектр излучения в волновой зоне

1. *Преобразования Фурье от потенциалов.* В этом параграфе получим представление спектра излучения движущегося заряда на больших расстояниях от него, то есть в волновой зоне. Для этого найдем преобразования Фурье по времени от электромагнитных величин и начнем с потенциалов.

Определим эти преобразования обычным способом:

$$\varphi_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \varphi(t_1) dt, \quad \vec{A}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \vec{A}(t_1) dt. \quad (131)$$

У всех величин в этом параграфе не будем писать аргумента \vec{r} , так как он у них принимает одно и то же значение, то есть точка наблюдения закреплена.

Воспользовавшись соотношениями (46) и (47), связывающими времена t, t_1 и их дифференциалы, получим

$$\varphi_\omega = \frac{e}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{dt}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} = e^{i\omega R/c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_1 - \vec{x}\vec{n}/c)} dt_1, \quad \vec{A}_\omega = \frac{e}{R} e^{i\omega R/c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_1 - \vec{x}\vec{n}/c)} \vec{\beta} dt_1. \quad (132)$$

Эти преобразования можно представить в четырехмерных обозначениях через один вектор, а именно

$$\underline{A}_\omega = \{\varphi_\omega, \vec{A}_\omega\} = \frac{e}{R} e^{i\omega R/c} \underline{G}(\vec{x}), \quad (133)$$

где четырехмерный вектор (назовем его основным)

$$\underline{G}(\vec{x}) = \{G_0(\vec{x}), \vec{G}(\vec{x})\} = \int e^{i\omega x} dx/c. \quad (134)$$

Аргументом этого вектора является пространственная часть четырехмерного вектора

$$\underline{\alpha} = \{\alpha, \vec{\alpha}\}, \quad \vec{\alpha} = \alpha \vec{n}, \quad \alpha = \omega/c, \quad (135)$$

то есть волновой вектор, длина которого равна волновому числу. Интеграл в (134) берется по траектории заряда

$$\underline{x} = \{ct_1, \vec{x}(t_1)\}, \quad d\underline{x}/c = \{dt_1, \vec{\beta}(t_1)dt_1\}, \quad (136)$$

в пространстве Минковского, называемой мировой линией. Фазовый множитель перед преобразованиями Фурье в (132) и (133) не играет никакой роли. В (131)–(133) зависимость преобразований Фурье от вектора \vec{n} подразумевается.

Из условия Лоренца с учетом (55) следует соотношение между преобразованиями Фурье от потенциалов

$$\underline{\alpha} \underline{A} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{A} = 0, \quad \vec{\nabla} \vec{A} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0, \quad -\frac{i\omega}{c} \varphi_\omega + \frac{\vec{n}}{c} i\omega \vec{A}_\omega = 0, \quad \alpha \varphi_\omega = \vec{\alpha} \vec{A}_\omega, \quad \underline{\alpha} \underline{A}_\omega = 0, \quad (137)$$

или (что то же самое) между составляющими вектора (134)

$$\underline{\alpha} \underline{G}(\vec{\alpha}) = 0, \quad \alpha G_0(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} \vec{G}(\vec{\alpha}), \quad (138)$$

отражающее условие поперечности.

Обратные преобразования

$$\underline{A}(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \underline{A}_\omega d\omega. \quad (139)$$

Поскольку потенциалы вещественны, то должны выполняться соотношения

$$\underline{A}_{-\omega} = \underline{A}_\omega^*, \quad (140)$$

то есть изменение знака аргумента преобразования равносильно комплексному сопряжению.

2. *Преобразования напряженностей.* Поскольку напряженности электромагнитного поля выражаются линейно через производные от потенциалов по времени, то преобразования Фурье от напряженностей найти очень просто. Для электрического поля получается

$$\vec{E}_\omega = \frac{i}{\alpha} \vec{\alpha} \times (\vec{A}_\omega \times \vec{\alpha}) = i\alpha \vec{n} \times (\vec{A}_\omega \times \vec{n}) = i \alpha [\vec{A}_\omega - \vec{n}(\vec{A}_\omega \cdot \vec{n})] = i \alpha [\vec{A}_\omega - \vec{n} \varphi_\omega]. \quad (141)$$

Аналогично для магнитного поля

$$\vec{H}_\omega = i \vec{\alpha} \times \vec{A}_\omega = \vec{n} \times \vec{E}_\omega. \quad (142)$$

Вещественность напряженностей влечет для их преобразований справедливость соотношений, аналогичных (140) для потенциалов. Поэтому равенство Парсеваля запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}_\omega|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\vec{E}_\omega|^2 d\omega. \quad (143)$$

Легко убедиться, что входящий сюда квадрат преобразования

$$|\vec{E}_\omega|^2 = \alpha^2 [|\vec{A}_\omega|^2 + |\varphi_\omega|^2 - \vec{n}(\vec{A}_\omega \varphi_\omega^* + \vec{A}_\omega^* \varphi_\omega)] \quad (144)$$

в силу равенств (137) и (133) выражается через пространственно подобный основной вектор \underline{G} :

$$|\vec{E}_\omega|^2 = \alpha^2 [|\vec{A}_\omega|^2 - |\varphi_\omega|^2] = -\alpha^2 \underline{A}_\omega \underline{A}_\omega^* = -\frac{e^2}{R^2} \alpha^2 \underline{G}_\omega \underline{G}_\omega^*. \quad (145)$$

3. *Энергетические величины.* Теперь найдем энергетические, то есть квадратичные по напряженностям величины. Равенство (143) через интенсивность излучения переписывается так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W} dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_* dt = \frac{c}{4\pi} R^2 \int_0^{\infty} |\vec{E}|^2 dt = \frac{c}{4\pi^2} R^2 \int_0^{\infty} d\omega |\vec{E}_\omega|^2 = -\frac{e^2 c}{4\pi^2} \int_0^{\infty} d\omega \alpha^2 \underline{G}_\omega \underline{G}_\omega^*. \quad (146)$$

Из выражения для дифференциала излучаемого четырехмерного импульса (93) с учетом соотношений (113) и (114) получается

$$\underline{P} = \frac{1}{c^2} \int I d\underline{x} = \frac{1}{c} \int \{1, \vec{\beta}(t_1)\} I dt_1 = \frac{1}{c} \int \{1, \vec{\beta}\} dt_1 \int \mathcal{W} d^2 n = \frac{1}{c} \int d^2 n \int \{1, \vec{\beta}\} dt_1 \mathcal{W} = \frac{1}{c} \int d^2 n \{1, \vec{n}\} \int dt_1 \mathcal{W}. \quad (147)$$

Наконец, воспользовавшись выражением (146) для интеграла от интенсивности, получим окончательно

$$\underline{P} = -\frac{e^2 c}{4\pi^2} \int d^2 n \{1, \vec{n}\} \int_0^\infty \alpha^2 d\alpha \underline{G}_\omega \underline{G}_\omega^* = -\frac{e^2 c}{4\pi^2} \int \frac{d^3 \alpha}{\alpha} \underline{\alpha} (\underline{G}_\omega \underline{G}_\omega^*). \quad (148)$$

Это выражение представляет излучаемую энергию и импульс в спектральной форме.

Опустив в подинтегральном выражении $\underline{\alpha}$ и поделив на \hbar ($\hbar \underline{\alpha}$ — четырехмерный импульс фотона), получим формулу для числа излучаемых фотонов

$$N = -\frac{e^2 c}{4\pi^2 \hbar} \int \frac{d^3 \alpha}{\alpha} \underline{G}_\omega \underline{G}_\omega^*. \quad (149)$$

Присутствие здесь постоянной Планка указывает на квантовый характер величины числа фотонов.

4. *Разложения Фурье при периодическом движении заряда.* Если движение заряда периодическое, то все величины, связанные с этим движением, например, координаты заряда, его скорость, ускорение, а следовательно и напряженности излучаемого им электромагнитного поля, тоже периодические. Пусть период составляет T_0 по времени влияния t_1 . Легко показать, что и по времени наблюдателя t излучение заряда имеет тот же период. Действительно, пусть f — некоторая периодическая функция времени t_1 , то есть $f(t_1 + T_0) = f(t_1)$. Времена t и t_1 связаны равенством (46), представляющим t как функцию t_1 . Найдя обратную зависимость t_1 от t и подставив ее в качестве аргумента функции f , получим другую функцию, обозначим ее f_1 , с теми же значениями, то есть $f_1(t) = f(t_1)$. Но из (46) ясно, что если добавить T_0 к t_1 , то точно та же величина добавится к t и наоборот. Поэтому $f_1(t + T_0) = f(t_1 + T_0) = f(t_1) = f_1(t)$.

Периодические напряженности излучаемого поля раскладываются в ряды Фурье. Поэтому спектр излучения периодически движущегося заряда состоит из отдельных линий, причем расстояние между соседними линиями по круговой частоте равно $\omega_0 = 2\pi/T_0$ — круговой частоте, соответствующей периоду T_0 . Формулы, определяющие этот спектр, аналогичны приведенным выше для случая непериодического движения, только обычно множитель 2π включается в преобразование, а не в обращение его. Кроме того, размерность коэффициентов Фурье отличается от размерности преобразований (интегралов) Фурье, так как интеграл, входящий в выражение для коэффициентов, берется по периоду и делится на период.

Представим разложения потенциалов в виде

$$\underline{A} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega_0 l t) \underline{A}_l. \quad (150)$$

Тогда

$$\underline{A}_l = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underline{A} \exp(i l \omega_0 t) dt. \quad (151)$$

Очевидно, что для вещественности потенциалов должно выполняться соотношение, аналогичное (140):

$$\underline{A}_{-l} = \underline{A}_l^*. \quad (152)$$

Так как потенциалы подчиняются условию Лоренца во всех случаях (периодическое движение или нет), то коэффициенты разложений потенциалов удовлетворяют соотношению

$$\vec{n} \vec{A}_l = \varphi_l. \quad (153)$$

Поскольку напряженности электромагнитного поля представляются через производную по времени от векторного потенциала согласно (63), то разложения напряженностей имеют тот же вид, что и (150), и их коэффициенты выражаются через (151):

$$\vec{E}_l = -\frac{i}{c} l \omega_0 \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A}_l) = -\frac{i}{c} l \omega_0 [\vec{n}(\vec{n} \vec{A}_l) - \vec{A}_l], \quad \vec{H}_l = \frac{i}{c} l \omega_0 \vec{n} \times \vec{A}_l. \quad (154)$$

Точно такая же аналогия выполняется и с выражением коэффициентов рядов Фурье через вектор — аналог (133). После подстановки соотношения между временами наблюдения и влияния (46) и выражений (151) для потенциалов получится

$$\underline{A}_l = \frac{\omega_0}{2\pi} e^{(i l \omega_0 R/c)} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underline{A} e^{i l \omega_0 (t_1 - \vec{n} \vec{x}/c)} dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{e}{R} e^{(i l \omega_0 R/c)} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{i l \omega_0 (t_1 - \vec{n} \vec{x}/c)} \{1, \vec{\beta}\} dt_1. \quad (155)$$

Отсюда следует

$$\underline{A}_l = \frac{e \omega_0}{R} e^{(i l \omega_0 R/c)} \underline{G}_l, \quad (156)$$

причем

$$\underline{G}_l(\vec{n}) = \{G_{0l}, \vec{G}_l\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{i l \omega_0 (t_1 - \vec{n} \vec{x}/c)} \{1, \vec{\beta}\} dt_1, \quad G_{0l}(\vec{n}) = \vec{n} \vec{G}_l(\vec{n}). \quad (157)$$

Теперь у нас есть все, чтобы охарактеризовать энергетику излучения.

4. *Спектр излучения периодического заряда.* Квадраты коэффициентов Фурье напряженностей

$$|\vec{E}_l|^2 = |\vec{H}_l|^2 = \frac{l^2}{c^2} \omega_0^2 (|\vec{A}_l|^2 + |\varphi_l|^2 - \vec{n} \vec{A}_l \varphi_l^* - \vec{n} \vec{A}_l^* \varphi_l) = \frac{l^2}{c^2} \omega_0^2 (|\vec{A}_l|^2 - |\varphi_l|^2) \quad (158)$$

также выражаются через вектор \underline{G}_l (тоже пространственно подобный):

$$|\vec{E}_l|^2 = -\frac{l^2}{c^2} \omega_0^2 \underline{A}_l \underline{A}_l^* = -\frac{l^2}{c^2} \omega_0^4 \frac{e^2}{R^2} \underline{G}_l \underline{G}_l^*. \quad (159)$$

Запишем уравнение замкнутости для вектора \vec{E} :

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \vec{E}^2 dt = T_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\vec{E}_l|^2 = -T_0 \frac{e^2}{R^2} \frac{\omega_0^4}{c^2} 2 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \underline{G}_l \underline{G}_l^*. \quad (160)$$

Через полное излучение его можно переписать так:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \mathcal{W} dt_1 = \frac{c}{4\pi} R^2 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \vec{E}^2 dt = -\frac{e^2}{c} \omega_0^3 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \underline{G}_l \underline{G}_l^*. \quad (161)$$

Четырехмерный импульс, переносимый излучением за период, находится, как и выше. Комбинация равенств (147) для случая периодического движения и (161) дает

$$\underline{P} = \frac{1}{c} \int d^2 n \{1, \vec{n}\} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt_1 \mathcal{W} = -\frac{e^2}{c^2} \omega_0^3 \int d^2 n \{1, \vec{n}\} \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \underline{G}_l \underline{G}_l^*. \quad (162)$$

Таким образом, спектр излучения периодически движущегося заряда состоит из отдельных равноотстоящих друг от друга линий. Формула (162) определяет интенсивности этих линий. Для возможности сравнения с распределением интенсивности в непрерывном спектре и интенсивность линий рассчитывают на единичный интервал частот, то есть вводят множитель $1/\omega_0$. В расчете на единицу частоты и единичный телесный угол интенсивность l -той линии излучения заряда, совершающего периодическое движение, равна

$$W_l = -\frac{e^2}{c^2} l^2 \omega_0^2 \underline{G}_l \underline{G}_l^*, \quad (163)$$

так что

$$\underline{P} = \omega_0 \int d^2 n \{1, \vec{n}\} \sum_{l=1}^{\infty} W_l. \quad (164)$$

Для нахождения W_l необходимо вычислить три интеграла, входящие в основной вектор \vec{G}_l .

Отметим еще поведение интенсивности (163) при преобразованиях Лоренца. Поскольку в формуле вектор $\omega_0 \{1, \vec{n}\}$ преобразуется как импульс фотона, а $\omega_0^2 d^2 n$ и квадрат вектора \underline{G} инвариантны, то инвариантом является также частное W_l/ω_0^2 .

Глава 5. Магнитотормозное излучение

§ 1. Геометрия и терминология

1. *Движение и излучение заряда.* Пусть заряд e массой m равномерно движется по окружности в некоторой системе отсчета. Центр окружности находится в начале координат этой системы и считается неподвижным, т. е. система отсчета жестко связана с ним.

По окружности движется заряд во внешнем однородном магнитном поле, если не учитывать излучение заряда и если его скорость перпендикулярна магнитному полю. Если имеется составляющая скорости вдоль поля, то траектория заряда — спираль, точнее — винтовая линия (см., например, [1]). Здесь ограничиваемся движением по окружности.

Влиянием потерь энергии заряда на излучение мы пренебрегаем, т. е. считаем, что траектория заряда в результате излучения не изменяется. Так можно поступать ввиду того, что энергия излучения заряда составляет малую долю его энергии.

Излучение рассматриваемого заряда или совокупности таких зарядов называется магнитотормозным (именно потому, что заряды тормозятся вследствие излучения, и по аналогии с тормозным излучением заряженных частиц в электрическом поле других зарядов). Если заряды нерелятивистские или ультрарелятивистские, то их излучение называют соответственно циклотронным или синхротронным, в диапазоне промежуточных энергий говорят о гироциклотронном излучении.

Поскольку главное излучение дают заряды с наименьшей массой, в дальнейшем под словом заряд подразумеваем электрон.

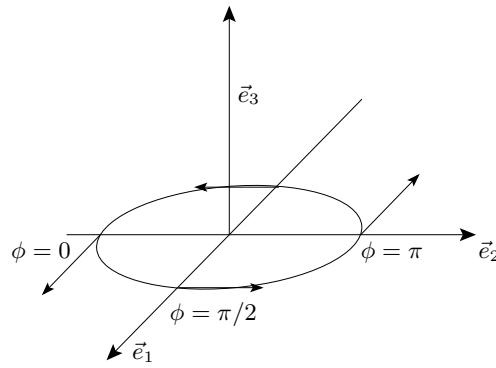


Рис. 21. Вращающийся по окружности заряд.

Величина напряженности магнитного поля $\mathcal{H}_* > 0$ закрепляется. Ей соответствует циклотронная частота $\omega_* = \frac{e\mathcal{H}_*}{mc}$ и период $T_* = 2\pi/\omega_*$.

2. *Описание движения электрона.* Введем в той системе отсчета, в которой электрон вращается по окружности (назовем ее лабораторной), ортонормальный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Пусть окружность, по которой движется электрон, лежит в плоскости векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , а магнитное поле $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_* \vec{e}_3$.

Зададим радиус-вектор заряда относительно центра окружности (см. рис. 21) в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(\phi) = R_* (\vec{e}_1 \sin \phi - \vec{e}_2 \cos \phi), \quad (1)$$

где R_* — радиус окружности, по которой обращается заряд, угол $\phi = \omega t$, ω — угловая скорость движения заряда по окружности, t — время в лабораторной системе отсчета. Четырехмерный вектор положения заряда в этой системе

$$\underline{r} = \{ct, \vec{r}\}. \quad (2)$$

Безразмерный четырехмерный импульс заряда (или, что то же самое, четырехмерная безразмерная скорость) в той же системе отсчета

$$\underline{z} = \frac{1}{c} \frac{d\underline{r}}{d\tau} = \frac{\gamma}{c} \frac{d\vec{r}}{dt} = \{\gamma, \vec{z}\}, \quad \vec{z} = \gamma \vec{\beta}, \quad (3)$$

где τ — собственное время заряда, а безразмерная скорость вращения его по окружности

$$\vec{\beta} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}}{dt} = \beta (\vec{e}_1 \cos \phi + \vec{e}_2 \sin \phi), \quad \beta = \frac{R_*}{c} \frac{d\phi}{dt} = \frac{R_*}{c} \omega. \quad (4)$$

Безразмерная энергия электрона γ выражается через его безразмерные скорость β и импульс z в этой системе отсчета обычным образом:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{1 + z^2}. \quad (5)$$

Этот множитель связывает собственное время заряда τ со временем в лабораторной системе отсчета и, соответственно, угловую частоту обращения заряда с циклотронной частотой:

$$\tau = \frac{t}{\gamma}, \quad \omega = \frac{\omega_*}{\gamma}, \quad (6)$$

так что $\phi = \omega t = \omega_* \tau$. Периоды обращения связаны точно так же: $T = T_* \gamma$. Отметим, что так как длина вектора скорости заряда постоянна, то хотя время τ относится к неинерциальной системе отсчета, оно течет равномерно, т. е. отличается от времени t на постоянную величину. Собственное время τ — самое медленное для заряда. Радиус $R_* = \beta c \gamma / \omega$ называется радиусом Лармора.

Четырехмерный вектор ускорения и трехмерное ускорение задаются простыми формулами:

$$\underline{w} = c \frac{dz}{d\tau} = \{0, \gamma^2 \vec{w}\}, \quad \vec{w} = w(-\vec{e}_1 \sin \phi + \vec{e}_2 \cos \phi), \quad w = R_* \omega^2 = c \beta \omega = c \omega_* \frac{\beta}{\gamma} = \frac{R_* \omega_*^2}{\gamma^2}. \quad (7)$$

Релятивистский скаляр

$$-\underline{w}^2 = \gamma^4 w^2 = R_*^2 \omega_*^4. \quad (8)$$

3. Полное излучение и классификация.

Найдем полное излучение электрона в волновой зоне.

Как известно, релятивистский заряд излучает не только энергию, но и импульс, которые уносятся излучаемой зарядом электромагнитной волной. Перенос импульса означает, что центр расходящейся сферической волны смещается в сторону движения заряда. Четырехмерный вектор излучаемого импульса пропорционален вектору смещения электрона (формулы (4.93), в качестве dt_1 следует взять dt), а коэффициентом пропорциональности является мощность излучения, которая в общем случае дается выражением (4.94)

$$I = \frac{2 e^2}{3 c^3} [-\underline{w}^2], \quad \underline{w}^2 = -\gamma^6 [w^2 - (\vec{\beta} \times \vec{w})^2], \quad (9)$$

где $\underline{w} = \gamma^2 \{\gamma^2 \vec{\beta} \vec{w}, \vec{w} + \gamma(\vec{\beta} \vec{w}) \vec{\beta}\}$ — пространственно подобный четырехмерный вектор ускорения. Для нашего случая этот вектор определяется формулой (7), а его квадрат — формулой (8), так что

$$I = \frac{2 e^2}{3 c} \omega_*^2 \beta^2 \gamma^2 = \frac{2 e^2}{3 c} \omega^2 \beta^2 \gamma^4 = \frac{2 e^2}{3 c^3} R_*^2 \omega_*^4. \quad (10)$$

Зафиксируем наряду с величиной напряженности внешнего магнитного поля \mathcal{H}_* скорость заряда и тем самым величины β и γ . Рассмотрим предельные случаи, о которых говорилось выше.

1) Нерелятивистский предел. При $\beta \ll 1$ множитель $\gamma \approx 1$ и

$$I \sim \frac{2 e^2}{3 c} \omega_*^2 \beta^2. \quad (11)$$

Это излучение называется, как уже говорилось, циклотронным.

2) Ультрапрелятивистский предел. Здесь $\beta \approx 1$, $\gamma \gg 1$, так что в случае синхротронного излучения

$$I \sim \frac{2 e^2}{3 c} \omega_*^2 \gamma^2. \quad (12)$$

Из приведенных формул видно, что синхротронное излучение значительно сильнее циклотронного, так как в первом случае γ велико, а во втором β мало. В промежуточных случаях, когда скорость электрона умеренно релятивистская, излучение называют гироциклотронным.

4. Доля излучаемой энергии. В заключение параграфа сопоставим величину энергии, излучаемой врачающимся по окружности электроном за период T , с его кинетической энергией (2.49). Их отношение равно

$$\frac{IT}{E_{\text{kin}}} = \frac{2 e^2}{3 c} \omega^2 \beta^2 \gamma^4 \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{mc^2(\gamma - 1)} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\mathcal{H}_*}{e} \frac{\beta^2 \gamma^3}{\gamma - 1}. \quad (13)$$

Это отношение достигает значения 1 при напряженности магнитного поля

$$\mathcal{H}_* = \frac{e}{c} \frac{2}{\gamma(\gamma + 1)}. \quad (14)$$

Коэффициент e/ς_t , где $\varsigma_t = (8\pi/3)r_e^2$ — томсоновское сечение, равен $7.21 \cdot 10^{14}$ Гс. Множитель, зависящий от скорости электрона, при $\beta = 0$ равен 1, а при больших γ пропорционален $2/\gamma^2$. Даже при очень значительных величинах γ величина напряженности магнитного поля, определяемая принятым условием, очень велика. Столь большие ее значения могут достигаться в магнитосферах нейтронных звезд, однако при таких напряженностях классическая теория магнитотормозного излучения уже неверна и требуется квантовое рассмотрение. Таким образом, предположение о возможности пренебречь влиянием излучения на траекторию электрона оправдано.

§ 2. Угловая зависимость излучения

1. *Общие формулы.* Напомним формулы, характеризующие излучение заряда, движущегося с ускорением. Напряженность электрического поля на расстоянии R от заряда согласно формулам (4.63) и (4.101)

$$\vec{E} = \frac{e}{cR} \vec{n} \times \left[\frac{\vec{n}}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} \times \frac{d}{dt_1} \frac{\vec{\beta}}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} \right] = \frac{e}{c^2 R} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{w}]}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (15)$$

Здесь \vec{R} — вектор, соединяющий фиксированную точку в области движения заряда с наблюдателем, $\vec{n} = \vec{R}/R$ — единичный вектор направления на наблюдателя, $\vec{\beta}$ и \vec{w} — безразмерная скорость и ускорение заряда, которые вычисляются в момент запаздывающего времени t_1 , связанного со временем наблюдения t равенством

$$t = t_1 + \frac{R}{c} - \frac{\vec{n}\vec{r}(t_1)}{c}, \quad (16)$$

где $\vec{r}(t_1)$ — радиус-вектор заряда, исходящий из указанной точки, так что при закрепленном расстоянии R дифференциалы времен связаны соотношением

$$dt = (1 - \vec{n}\vec{\beta})dt_1. \quad (17)$$

В первом выражении в (15) производная по времени t_1 берется полная, так как вектор $\vec{\beta}$ зависит только от этого времени.

Общая формула для мощности излучения заряда, т. е. количества лучистой энергии, испускаемой им в единицу времени, имеет вид

$$\mathcal{W}(\vec{n}) = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{w^2(1 - \vec{n}\vec{\beta})^2 + 2(\vec{n}\vec{w})(\vec{\beta}\vec{w})(1 - \vec{n}\vec{\beta}) - (1 - \beta^2)(\vec{n}\vec{w})^2}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^5}. \quad (18)$$

2. *Мгновенное излучение.* Пусть наблюдатель находится на расстоянии R от места движения заряда и в направлении \vec{n} . Для нашего случая выберем входящие в формулу (18) векторы следующим образом. Можно принять, что вектор \vec{n} расположен в плоскости векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_3 , что не является ограничением, так как заряд вращается и его излучение при фиксированном положении наблюдателя по отношению к направлению поля будет одним и тем же, независимо от азимута наблюдателя. Вектор направления на наблюдателя характеризуем поэтому только полярным углом:

$$\vec{n} = \vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_3 \cos \theta = (\sin \theta, 0, \cos \theta). \quad (19)$$

Остальные векторы задаются формулами, приведенными в предыдущем параграфе. Запишем их в виде перечисления трех декартовых координат в принятом базисе:

$$\vec{\beta} = \beta(\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad \vec{w} = -w(\sin \phi, -\cos \phi, 0). \quad (20)$$

Найдем произведения векторов, входящие в общую формулу для мощности излучения (18):

$$\vec{n}\vec{w} = -w \sin \theta \sin \phi, \quad \vec{n}\vec{\beta} = \beta \sin \theta \cos \phi, \quad \vec{\beta}\vec{w} = 0. \quad (21)$$

В качестве основной переменной выбираем скорость электрона β . Тогда

$$\mathcal{W}(\theta, \phi) = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \frac{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(\vec{n}\vec{w})^2/w^2}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^5} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{e^2 \mathcal{H}_*^2 \beta^2}{m^2} \frac{(1 - \beta \sin \theta \cos \phi)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{\gamma^2} \frac{(1 - \beta \sin \theta \cos \phi)^5}{(1 - \beta \sin \theta \cos \phi)^5}. \quad (22)$$

Опять рассмотрим предельные значения скорости. Если $\beta \ll 1$, то мощность излучения

$$\mathcal{W}(\theta, \phi) = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{e^2 \mathcal{H}_*^2}{m^2} \beta^2 (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) \quad (23)$$

несильно зависит от направления, хотя при $\theta = \pi/2$, $\phi = \pm\pi/2$ обращается в нуль.

Напротив, если скорость близка к скорости света, то выражение в скобках в знаменателе может становиться очень малым. Это происходит при $\theta = \pi/2$ и $\phi = 0$. Тогда знаменатель становится равным $1 - \beta = (1 - \beta^2)/(1 + \beta) \approx 1/(2\gamma^2)$ и вся дробь

$$\mathcal{W}(\theta, \phi) \approx \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{e^2 \mathcal{H}_*^2}{m^2} 2^3 \gamma^4, \quad (24)$$

то есть значительно больше, чем (23). При углах, близких к указанным, мощность излучения будет также велика, хотя и меньше максимальной. Наблюдатель, располагающийся вблизи плоскости вращения заряда при мгновенной фиксации излучения будет воспринимать кратковременные вспышки этого излучения в моменты, когда заряд движется прямо на него (подобно маячкам на крыше полицейской машины).

3. *Среднее излучение.* Формула (22) довольно сложна и не очень наглядна. Поэтому найдем энергию, которую излучает заряд в среднем. Эта энергия представляет интерес еще и потому, что период вращения заряда очень мал и приборы, измеряющие его излучение, почти наверное имеют постоянную времени (то есть наименьший промежуток, различимый прибором) значительно большую, чем период вращения заряда, так что воспринимать будут среднее значение его мощности.

Для вычисления излучения за период понадобятся два интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 - \beta_1 \cos \phi)^3} = \pi \frac{2 + \beta_1^2}{(1 - \beta_1^2)^{5/2}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\phi \sin^2 \phi}{(1 - \beta_1 \cos \phi)^5} = \frac{\pi}{4} \frac{4 + \beta_1^2}{(1 - \beta_1^2)^{7/2}}. \quad (25)$$

Их использование с заменой переменной интегрирования $t = \phi T/(2\pi)$ дает

$$\overline{\mathcal{W}}(\theta) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{W}(\theta, \phi) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{W}(\theta, \phi) d\phi = \frac{e^2}{8\pi c^3} \frac{e^2 \mathcal{H}_*^2}{m^2} \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left[\frac{2 + \beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{5/2}} - \frac{\sin^2 \theta}{4\gamma^2} \frac{4 + \beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{7/2}} \right]. \quad (26)$$

Так как большая часть излучения идет около плоскости вращения заряда, будем отсчитывать угол от этой плоскости, то есть заменим $\theta = \pi/2 - \varepsilon$. Тогда

$$\overline{\mathcal{W}}(\pi/2 - \varepsilon) = \frac{e^2}{8\pi c} \omega_*^2 \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left[\frac{2 + \beta^2 \cos^2 \varepsilon}{(1 - \beta^2 \cos^2 \varepsilon)^{5/2}} - \frac{\cos^2 \varepsilon}{4\gamma^2} \frac{4 + \beta^2 \cos^2 \varepsilon}{(1 - \beta^2 \cos^2 \varepsilon)^{7/2}} \right]. \quad (27)$$

Легко найти, что отношение мощности излучения в плоскости ($\varepsilon = 0$) и в направлении поля ($\varepsilon = \pm\pi/2$) равно

$$\frac{\overline{\mathcal{W}}(\pi/2)}{\overline{\mathcal{W}}(0)} = \gamma^5 \frac{4 + 3\beta^2}{8}. \quad (28)$$

Нерелятивистский заряд излучает в среднем

$$\overline{\mathcal{W}}(\pi/2 - \varepsilon) = \frac{e^2}{8\pi c} \omega_*^2 \beta^2 (1 + \cos^2 \theta), \quad (29)$$

так что его излучение слабо и несильно зависит от угла направления на наблюдателя. Интересно отметить, что распределение по направлениям совпадает с индикаторой Релея (4.91). Отношение (28) равно 1/2.

Синхротронное излучение рассмотрим отдельно.

4. *Среднее синхротронное излучение.* Если заряд ультрарелятивистский, то излучение идет в основном под малыми углами от плоскости, то есть в тонком конусе около нее. Поэтому сделаем замену

$$1 - \beta^2 \cos^2 \varepsilon = 1 - \beta^2 + \beta^2 \sin^2 \varepsilon \approx \frac{1}{\gamma^2} + \varepsilon^2 = \frac{1 + \varepsilon^2 \gamma^2}{\gamma^2}. \quad (30)$$

В этом приближении $\overline{\mathcal{W}}(\pi/2 - \varepsilon) \sim \overline{\mathcal{W}}_{as}(\pi/2 - \varepsilon) = \frac{e^2}{8\pi c} \omega_*^2 \frac{\gamma^3}{4} \frac{7 + 12\varepsilon^2 \gamma^2}{(1 + \varepsilon^2 \gamma^2)^{7/2}}$, (31)

а отношение (28) $7\gamma^5/8$.

Как и в случае движения по прямой, при больших γ средняя мощность зависит от произведения $\varepsilon\gamma$, а замена (30) не приводит к большой ошибке. Например, интеграл по всем ε оказывается правильным. Действительно, после подстановок $\varepsilon^2 \gamma^2 = u = 1/t - 1$ интеграл сводится к двум бета-функциям:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{\mathcal{W}}(\pi/2 - \varepsilon) 2\pi \cos \varepsilon d\varepsilon &\sim 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{W}}_{as}(\pi/2 - \varepsilon) d\varepsilon = \frac{e^2}{8\pi c} \omega_*^2 \frac{\gamma^2}{4} 2\pi 2 \int_0^{\infty} \frac{7 + 12u}{(1+u)^{7/2}} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \\ &= \frac{e^2}{16c} \omega_*^2 \gamma^2 \int_0^1 t^2 dt (1-t)^{-1/2} \left(7 + 12 \frac{1-t}{t} \right) = \frac{e^2}{16c} \omega_*^2 \gamma^2 \left[B\left(3, \frac{1}{2}\right) + 12B\left(2, \frac{3}{2}\right) \right] = \frac{e^2}{16c} \omega_*^2 \gamma^2 \frac{32}{3} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \gamma^2, \end{aligned} \quad (32)$$

что полностью совпадает с (12).

5. *Переход к синхротронному излучению.* Чтобы проследить, как с ростом энергии заряда происходит переход от циклотронного к синхротронному излучению, преобразуем формулу (27) точно, заменив в ней ($z = \beta\gamma$)

$$1 - \beta^2 \cos^2 \varepsilon = 1 - \beta^2 + \beta^2 \sin^2 \varepsilon = \frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 \sin^2 \varepsilon = \frac{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \varepsilon}{\gamma^2} = \frac{1 + z^2 \sin^2 \varepsilon}{\gamma^2}. \quad (33)$$

Кроме того, для сравнения со случаем движения по прямой выделим множителем квадрат ускорения заряда $w = c\omega_*\beta/\gamma$. Тогда получится

$$\overline{\mathcal{W}}(\pi/2 - \varepsilon) = \frac{e^2}{8\pi c^3} w^2 \gamma^5 \mathcal{W}_*(\beta, \varepsilon), \quad \mathcal{W}_*(\beta, \varepsilon) = \frac{1 + \frac{3}{4}\beta^2 + \left[\frac{1}{\gamma^2} + 2z^2 + \left(\frac{1}{2} + z^2\right)\beta^2\right] \sin^2 \varepsilon - \beta^2 \left(\frac{1}{4} + z^2\right) \sin^4 \varepsilon}{(1 + z^2 \sin^2 \varepsilon)^{7/2}}. \quad (34)$$

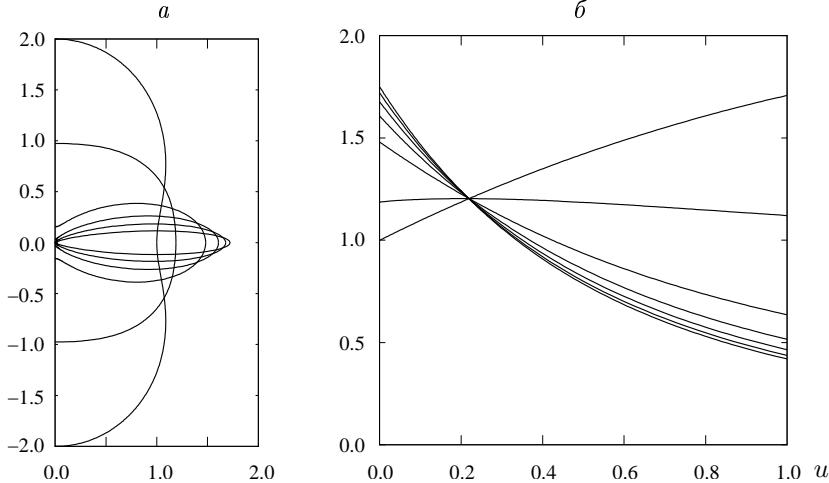


Рис. 22а. Полярные
диаграммы функций
 $\mathcal{W}_*(\beta, \varepsilon)$ при $\beta = 0, 0.5,$
 $0.8, 0.9, 0.95$ и 0.98 .

Рис. 22б. Те же функции в зависимости
от аргумента $u = (\gamma\varepsilon)^2$ и предельная
кривая $(7/4 + 3u)/(1 + u)^{7/2}$.

На рис. 22а приведены графики, отражающие зависимость $\mathcal{W}_*(\beta, \varepsilon)$ от угла ε для тех же значений скорости, что и на рис. 20 Главы 4: $\beta = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98$. Большим значениям скорости соответствуют большие значения излучения в плоскости вращения $\mathcal{W}_*(\beta, 0) = 1 + 3\beta^2/4$, причем значения множителя γ^5 , опущенного для возможности нанести кривые на один рисунок, равны соответственно $\gamma^5 = 1, 2.053, 12.86, 63.55, 336.9, 3205$. Значения этой функции при $\varepsilon = \pi/2$ (вдоль поля) равны $\mathcal{W}_*(\beta, \pi/2) = 2/\gamma^5$. Рис. 22а для большей наглядности дан в правильном соотношении масштабов осей. Заметим, что на самом деле кривые рисунков 20а Главы 4 и 22а являются сечениями поверхностей, характеризующих распределение направлений излучения в пространстве, но если поверхности первых получаются вращением кривых вокруг оси абсцисс, то для получения поверхностей вторых кривые надо вращать вокруг оси ординат.

На рис. 22б те же величины представлены в зависимости от $u = (\gamma\varepsilon)^2 = \varepsilon_0^2$. При близких к 1 значениях β кривые уже довольно близки к предельной кривой $(7/4 + 3u)/(1 + u)^{7/2}$, также помещенной на рисунок (кривая верхняя слева и нижняя справа). Кривые пересекаются в точках, близких к точке с абсциссой $u = 0.219$ и ординатой 1.20.

§ 3. Спектр магнитотормозного излучения в волновой зоне

1. *Характер спектра.* В этом параграфе найдем спектр излучения электрона в магнитном поле в волновой зоне. Поскольку заряд движется по окружности и влиянием его излучения на его же движение мы пренебрегаем, то все величины, связанные с этим движением, а именно, координаты заряда, его скорость, ускорение, а следовательно и напряженности излучаемого им электромагнитного поля, периодические с периодом $T = 2\pi/\omega$.

Напомним основные формулы для излучения при периодическом движении заряда. Как было показано в Главе 4, периоды по времени заряда t_1 и по времени наблюдения t совпадают.

Спектр излучения периодического заряда состоит из отдельных равноотстоящих друг от друга линий. Для определения интенсивностей спектральных линий надо вычислить основной вектор \vec{G}_l , определяемый формулой (4.157):

$$\vec{G}_l(\vec{n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp(i l \omega_0(t_1 - \vec{n} \cdot \vec{r}/c)) \vec{\beta} dt_1. \quad (35)$$

Тогда коэффициент разложения в ряд напряженности электрического поля

$$\vec{E}_l = -i \frac{e}{R} l^2 \omega_0^2 e^{il\omega_0 R/c} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{G}_l). \quad (36)$$

Формулы (35) и (36) справедливы для любого периодического движения. Дальше перейдем к магнитотормозному излучению. Вектор направления на наблюдателя \vec{n} по-прежнему можно взять в плоскости векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_3 .

Подставим формулы для входящих в подинтегральное выражение векторов для заряда, движущегося по окружности:

$$\vec{n} = \sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_3, \quad \vec{r} = \frac{c\beta}{\omega} (\sin \phi \vec{e}_1 - \cos \phi \vec{e}_2), \quad \vec{\beta} = \beta (\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2), \quad (37)$$

и сделаем замену $t_1 = t = \phi/\omega$. Интеграл (35) перейдет в

$$\vec{G}_l = \frac{\beta}{2\pi\omega} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2) e^{il\phi - iz \sin \phi} d\phi, \quad (38)$$

где $z = l\beta \sin \theta$.

Теперь воспользуемся формулами, выражающими интегралы, входящие в вектор \vec{G}_l , через функцию Бесселя и ее производную

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\phi - iz \sin \phi} d\phi = \frac{z}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi - iz \sin \varphi} \cos \varphi d\varphi, \quad J'_n(z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi - iz \sin \varphi} \sin \varphi d\varphi. \quad (39)$$

Тогда вектор (35) примет вид

$$\vec{G}_l = \frac{\beta}{\omega} \left(\frac{1}{\sin \theta} J_l(z) \vec{e}_1 + i\beta J'_l(z) \vec{e}_2 \right). \quad (40)$$

2. Формула Шотта. Чтобы написать формулу для коэффициента разложения напряженности, найдем двойные векторные произведения от двух координатных ортов:

$$\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{e}_1] = \sin \theta \vec{n} - \vec{e}_1 = -\cos \theta (\cos \theta \vec{e}_1 - \sin \theta \vec{e}_3), \quad \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{e}_2] = -\vec{e}_2. \quad (41)$$

Удобно ввести орты, перпендикулярные направлению излучения и образующие с ортом \vec{n} правую тройку:

$$\vec{e}_1(\vec{n}) = \cos \theta \vec{e}_1 - \sin \theta \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2(\vec{n}) = \vec{e}_2. \quad (42)$$

Тогда l -тая составляющая напряженности согласно формулам (36), а также (40), (41) и (42) предстанет в виде

$$\vec{E}_l = \frac{e}{cR} il\omega e^{il\omega R/c} [\operatorname{ctg} \theta J_l(z) \vec{e}_1(\vec{n}) + i\beta J'_l(z) \vec{e}_2(\vec{n})]. \quad (43)$$

Заметим, что составляющая с номером нуль равна нулю.

Подставив результат (43) в формулу (4.161), получим

$$\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{W} dt_1 = \int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{W}_* dt = \frac{c}{2\omega} R^2 \frac{e^2 \omega^2}{c^2 R^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^2 [\operatorname{ctg}^2 \theta J_l^2(z) + \beta^2 J_l'^2(z)] = \omega \sum_{l=1}^{\infty} W_l. \quad (44)$$

Для интенсивности l -той линии (полного излучения в ней) W_l в расчете на единицу частоты найдем

$$W_l = \frac{e^2}{c} l^2 w_l, \quad (45)$$

где введено еще одно обозначение

$$w_l = w_l(\beta, \theta) = \operatorname{ctg}^2 \theta J_l^2(z) + \beta^2 J_l'^2(z). \quad (46)$$

Напомним, что аргумент бесселевой функции $z = l\beta \sin \theta$. Величина $|\vec{E}_l|^2/(4\pi) = e^2 l^2 \omega^2 w_l / (4\pi c^2 R^2)$ представляет плотность энергии в линии с номером l на расстоянии R от источника, вектор Пойнтинга (потока энергии) имеет дополнительный множитель $c\vec{n}$.

Формула (45) носит название формулы Шотта, который ее вывел в 1912 г.

3. Поляризация в линиях. Каждая линия в спектре магнитотормозного излучения представляет собой монохроматическую волну и к ней можно применить общую теорию поляризации, изложенную в Главе 3. Как и

всякая строго монохроматическая волна, эти волны полностью эллиптически поляризованы. Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим напряженность электрического поля в линии с номером l , т. е. вектор \vec{E}_l . Поскольку интенсивность линии у нас уже найдена, поляризационные характеристики (параметры Стокса) можно находить с точностью до множителя.

Используем орты (42) в качестве поляризационного базиса. Представим напряженность в линии в этих ортах согласно формуле (41) в виде столбца:

$$\vec{E}_l \propto [i \operatorname{ctg} \theta J_l(z) \vec{e}_1(\vec{n}) - \beta J'_l(z) \vec{e}_2(\vec{n})] = \begin{pmatrix} i \operatorname{ctg} \theta J_l(z) \\ -\beta J'_l(z) \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Тогда в принятых поляризационных ортах поляризационная матрица излучения в линии с номером l с точностью до постоянного множителя будет иметь вид

$$\hat{S}_l = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_l \vec{E}_l^\dagger \propto \begin{pmatrix} \operatorname{ctg}^2 \theta J_l^2(z) & -i\beta \operatorname{ctg} \theta J_l(z) J'_l(z) \\ i\beta \operatorname{ctg} \theta J_l(z) J'_l(z) & \beta^2 J_l'^2(z) \end{pmatrix}, \quad (48)$$

а параметры Стокса с правильным коэффициентом, таким же как у интенсивности, определяемой формулой (45), примут следующие значения: $U_l = 0$,

$$Q_l = \frac{e^2}{c} l^2 [\operatorname{ctg}^2 \theta J_l^2(z) - \beta^2 J_l'^2(z)], \quad V_l = 2 \frac{e^2}{c} l^2 \beta \operatorname{ctg} \theta J_l(z) J'_l(z). \quad (49)$$

Легко проверить, что выполняется равенство $W_l^2 = Q_l^2 + U_l^2 + V_l^2$, являющееся условием полной поляризации.

Таким образом, мы убедились, что излучение в каждой магнитотормозной линии полностью эллиптически поляризовано, т. е. обладает как линейной, так и круговой поляризацией. В основной плоскости круговая поляризация исчезает ($\operatorname{ctg} \pi/2 = 0$), а линейная становится полной: $I_l = -Q_l = \frac{e^2}{c} [z J'_l(z)]^2$. Напротив, при наблюдении вдоль оси вращения электрона, т. е. при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, поляризация полностью круговая. При этом наблюдатель видит только одну линию, а именно, первую и $I_1 = V_1 = \frac{e^2}{c} \frac{\beta^2}{2}$. Последние утверждения вытекают из свойства бесселевых функций, выражаемого асимптотическим равенством $J_l(z) \sim (z/2)^l / l!$ при $z \rightarrow 0$ (см. ниже формулу (61)). Состояния поляризации согласуются с геометрией движения излучающего электрона и положения наблюдателя.

4. Полное излучение в линиях. Полное количество энергии, излучаемой в линии, равно интегралу по направлениям от интенсивности (45), т. е.

$$\overline{W}_l(\beta) = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta W_l. \quad (50)$$

При интегрировании возникают два интеграла, которые согласно формулам теории бесселевых функций выражаются через функции Бесселя двойного (по сравнению с номером линии) порядка, так что

$$\overline{W}_l(\beta) = 4\pi \frac{e^2}{c} l \left[\beta J'_{2l}(2l\beta) - \frac{l}{\gamma^2} \int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) dy \right]. \quad (51)$$

Можно найти суммарные параметры поляризации излучения, идущего во все стороны. При этом $\overline{V}_l = 0$, т. е. круговая поляризация исчезает ввиду симметричности правой и левой поляризации, остается только линейная:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_l(\beta) &= -4\pi \frac{e^2}{c} l \left[\beta J'_{2l}(2l\beta) + l \int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) dy \left(1 + \beta^2 - \frac{2}{y} \right) \right] = \\ &= -4\pi \frac{e^2}{c} l \left[\beta J'_{2l}(2l\beta) - \frac{l}{\gamma^2} \int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) dy + 2l \int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) \frac{1-y}{y} dy \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

В случае нерелятивистского заряда ($l\beta \ll 1$) из приведенных формул с помощью уже использовавшегося соотношения: $J_\nu(z) \sim (z/2)^\nu / \Gamma(\nu + 1)$ при $z \rightarrow +0$, легко получить

$$\overline{W}_l \sim 4\pi \frac{e^2}{c} \frac{l(l+1)}{(2l+1)!} (l\beta)^{2l}, \quad \overline{Q}_l \sim -4\pi \frac{e^2}{c} \frac{l^2}{(2l+1)!} (l\beta)^{2l}. \quad (53)$$

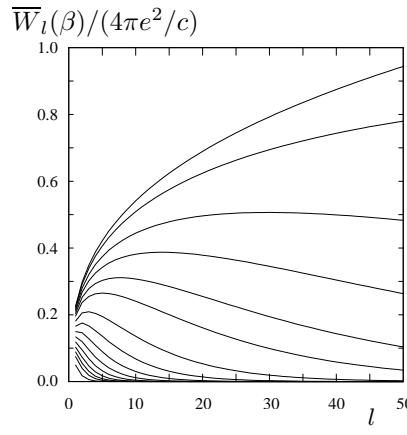


Рис. 23. Полное излучение в линиях при различных β .

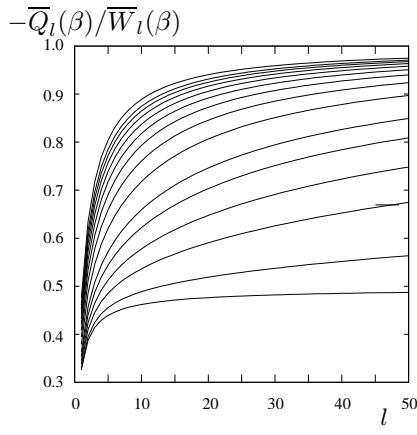


Рис. 24. Степень линейной поляризации в полном излучении.

Так как множители, зависящие от l , при малых l невелики, а при больших l согласно формуле Стирлинга приближенно пропорциональны $(2/e)^{2l+1}$, то за счет множителя β^{2l} интенсивности спектральных линий быстро убывают с ростом номера, так что фактически осуществляются только первые циклотронные линии.

Рис. 23 дает представление о зависимости от номера линии функции $\bar{W}_l(\beta)$ при различных энергиях электрона. Как и на рис. 4, представлены огибающие дискретных значений этой функции в единицах $4\pi e^2/c$ при значениях $\beta = 0.4, 0.5(0.05)0.9, 0, 0.925, 0.95, 0.97, 0.99, 1.0$. Чем больше β , тем выше соответствующая кривая. Некоторая негладкость кривых при небольших l объясняется дискретностью функций. На рис. 24 даются отношения параметра Стокса $-\bar{Q}_l(\beta)$ и интенсивности при тех же значениях β . Большим их значениям соответствуют меньшие величины поляризации. Отметим предельные значения степени поляризации. При $\beta \rightarrow 0$ отношение $-\frac{\bar{Q}_l(\beta)}{\bar{W}_l(\beta)} \rightarrow \frac{l}{l+1}$, при $l \rightarrow \infty$ это отношение стремится к 1, причем тем быстрее, чем меньше β .

Поведение спектра синхротронного излучения уже намечается на приведенных рисунках. В последующем параграфе оно будет подробно обсуждено, но перед этим приведем сведения о входящих в формулу Шотта функциях Бесселя.

§ 4. О функциях Бесселя

1. *Определения функций Бесселя.* Для вывода формул, описывающих спектр синхротронного излучения, приведем краткие сведения о бесселевых функциях.

Бесселева функция (первого рода) может быть определена сходящимся на всей комплексной плоскости рядом

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(\nu + 1 + m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}. \quad (54)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Функция $J_\nu(z)$ является решением уравнения Бесселя

$$z^2 \frac{d^2 J_\nu(z)}{dz^2} + z \frac{d J_\nu(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2) J_\nu(z) = 0. \quad (55)$$

Число ν называется порядком уравнения и функции.

Линейно независимыми решениями уравнения Бесселя являются функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$, если только ν не целое число. Второе линейно независимое решение (функция второго рода) представляют в виде следующей линейной комбинации указанных решений

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\pi \nu) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi \nu)}, \quad (56)$$

которую называют функцией Вебера или Неймана. Она остается линейно независимой от основной и при целых порядках.

Если в уравнении Бесселя (55) заменить переменную z на $i z$, то уравнение перейдет в

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2) w = 0, \quad (57)$$

называемое модифицированным уравнением Бесселя. Соответствующие решения носят название модифицированных функций Бесселя. Одна из них — это просто функция Бесселя (основная) от аргумента, умноженного на мнимую единицу:

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(e^{i\pi/2}z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(\nu+1+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}. \quad (58)$$

Опять, вторым решением при нецелых ν может служить $I_{-\nu}(z)$. Более удобна другая функция, которую называют функцией Макдональда:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\pi\nu)}. \quad (59)$$

Для нее справедливо рекуррентное соотношение, связывающее производную от этой функции с двумя функциями с соседними номерами:

$$2K'_\nu(z) = -K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z). \quad (60)$$

Непосредственно из представлений в виде рядов вытекают формулы, характеризующие поведение функций при $z \rightarrow +0$:

$$J_\nu(z) \sim I_\nu(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}, \quad K_\nu(z) \sim \frac{\pi}{2} \frac{(z/2)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)\sin(\pi\nu)} = \Gamma(\nu)2^{\nu-1}z^{-\nu}. \quad (61)$$

При переходе к последнему выражению использована формула дополнения гамма-функции.

2. Интегральные представления. Функции Бесселя могут быть представлены в виде определенных интегралов, с помощью которых их удобно исследовать и вычислять. Представление для функции целого порядка

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inz - iz \sin \phi} d\phi. \quad (62)$$

доказывается непосредственной выкладкой, при которой экспоненту надо разложить в ряд по степеням z . Аналогично представление модифицированной функции

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-z \sin \phi} \cos n \phi d\varphi. \quad (63)$$

Для функции Макдональда справедливо представление

$$K_\nu(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{ch}(\nu t) dt. \quad (64)$$

Исходя из него получим асимптотику этой функции при $z \rightarrow \infty$ методом Лапласа. Для этого заменим в показателе экспоненты $\operatorname{ch} t = 1 + 2\operatorname{sh}^2(t/2)$ и примем во внимание, что при больших аргументах z в интеграл дают вклад только малые значения t , так что

$$K_\nu(z) = e^{-z} \int_0^{\infty} e^{-2z\operatorname{sh}^2(t/2)} \operatorname{ch}(\nu t) dt \sim e^{-z} \int_0^{\infty} e^{-zt^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}. \quad (65)$$

Особый интерес представляет асимптотика функции $J_\nu(z)$, когда велики и аргумент z и порядок ν , причем $z \leq \nu$. Ее мы, следуя книге [10], получим в два этапа.

3. Метод ВКБ. Метод, называемый методом ВКБ по именам физиков Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна, применивших его в различных областях физики к ряду задач, теперь стал одним из методов приближенного решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$u'' + f(z)u = 0. \quad (66)$$

Пусть функция $f(z)$ существенно изменяется на большом масштабе $s \gg 1$ изменения z . Введем новую переменную $\tau = z/s$, изменение которой имеют небольшой диапазон. В этой переменной уравнение предстанет в форме

$$\frac{1}{s^2} \frac{d^2u}{d\tau^2} + fu = 0. \quad (67)$$

Ищем решение в виде

$$u(z) = e^{is\psi(\tau)}. \quad (68)$$

Находим производные по аргументу τ :

$$\frac{du}{d\tau} = uis\frac{d\psi}{d\tau}, \quad \frac{d^2u}{d\tau^2} = u \left(is\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 + uis\frac{d^2\psi}{d\tau^2}, \quad (69)$$

подставляем их в уравнение (67):

$$-\left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 + \frac{i}{s} \frac{d^2\psi}{d\tau^2} + f = 0. \quad (70)$$

Смысл подстановки (68) заключается в том, что в уравнении для новой функции малый множитель появился явно у производной второго порядка, так что в первом приближении ее можно отбросить, но уравнение, получившееся в результате такой процедуры, имеет смысл. Такое приближение невозможно осуществить в исходном уравнении (66) или в уравнении (67).

Решение уравнения (70) ищем в виде разложения по малому параметру:

$$\psi = \psi_0 + \frac{i}{s}\psi_1 + \dots \quad (71)$$

Подставляем это разложение в уравнение и приравниваем выражения при одинаковых степенях параметра малости $1/s$. При этом ограничиваемся двумя первыми слагаемыми. Получаются два уравнения, нулевого и первого порядка:

$$\left(\frac{d\psi_0}{d\tau} \right)^2 = f, \quad -2\frac{d\psi_0}{d\tau} \frac{d\psi_1}{d\tau} + \frac{d^2\psi_0}{d\tau^2} = 0. \quad (72)$$

В этих двух уравнениях и заключается приближение ВКБ.

Уравнение нулевого приближения решается сразу:

$$\psi_0 = \pm \int \sqrt{f} d\tau. \quad (73)$$

В уравнении первого приближения переменные разделяются:

$$2\frac{d\psi_1}{d\tau} = \frac{\frac{d^2\psi_0}{d\tau^2}}{\frac{d\psi_0}{d\tau}}, \quad \psi_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{d\psi_0}{d\tau} = \frac{1}{4} \ln f. \quad (74)$$

Собрав вместе два приближения и подставив их в формулу (68), найдем

$$u(z) = \exp \left(\pm is \int \sqrt{f} d\tau - (1/4) \ln f \right) = f^{-1/4}(z) \exp \left(\pm i \int f^{1/2}(z) dz \right). \quad (75)$$

Наличие двойного знака перед интегралом в показателе экспоненты означает существование двух независимых решений уравнения. Общее решение можно записать так:

$$u(z) = f^{-1/4}(z) \left[C_1 \exp \left(i \int f^{1/2}(z) dz \right) + C_2 \exp \left(-i \int f^{1/2}(z) dz \right) \right]. \quad (76)$$

Очевидно, что если функция f положительна, то решение имеет колебательный характер, если отрицательна, то одно из решений возрастает, а другое убывает.

Обсудим условие применимости приближения. Чтобы слагаемое первого приближения было меньше нулевого, требуется выполнение неравенства (в качестве ψ подставлено ψ_0 , неравенство написано в различных модификациях)

$$\frac{1}{s} \left| \frac{d^2\psi_0}{d\tau^2} \right|^2 \ll \left| \left(\frac{d\psi_0}{d\tau} \right)^2 \right|, \quad \frac{1}{s} \left| \frac{d}{d\tau} f^{1/2} \right| \ll |f|, \quad \left| \frac{d}{dz} f^{-1/2} \right| \ll 1. \quad (77)$$

Приближение ВКБ широко применяется не только в конкретных задачах, но и чисто математических вопросах, в частности, в теории специальных функций. Здесь применим его при выводе асимптотики бесселевой функции.

4. Приближение ВКБ для функции Бесселя. Применим к уравнению (55) сначала метод ВКБ. Для этого заменим в нем независимую переменную z на y по формуле $z = \nu e^y \leq \nu$, $y \leq 0$. Тогда уравнение перейдет в

$$\frac{d^2 J_\nu}{dy^2} - \nu^2 u^2 J_\nu = 0, \quad (78)$$

где обозначено

$$u = \sqrt{1 - z^2/\nu^2} = \sqrt{1 - e^{2y}}, \quad z = \nu \sqrt{1 - u^2}. \quad (79)$$

Решение методом ВКБ уравнения (78) имеет вид

$$w = \frac{1}{\sqrt{u}} e^{\pm \nu \int u dy}. \quad (80)$$

Входящий в формулу для решения интеграл легко вычисляется:

$$v = \int_y^0 u dy = \int_y^0 \sqrt{1 - e^{2y}} dy = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} - u, \quad (81)$$

Тогда решение уравнения (78) в приближении ВКБ запишется в виде

$$J_\nu(z) = u^{-1/2} (C_1 e^{\nu v} + C_2 e^{-\nu v}). \quad (82)$$

Постоянные C_1 и C_2 определим, исходя из поведения функции Бесселя около нуля (61). При больших значениях порядка ν для гамма-функции воспользуемся формулой Стирлинга. С другой стороны при $z \rightarrow 0$ будет $u \sim 1 - z^2/(2\nu^2) \rightarrow 1$, а $v \sim \frac{1}{2} \ln \frac{2}{z^2/(2\nu^2)} - 1 = \ln \frac{2\nu}{ze}$. Тогда

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{e}{\nu}\right)^\nu, \quad J_\nu(z) \sim C_1 \left(\frac{2\nu}{ze}\right)^\nu + C_2 \left(\frac{ze}{2\nu}\right)^\nu. \quad (83)$$

Отсюда находим, что $C_1 = 0$, $C_2 = 1/\sqrt{2\pi\nu}$. Следовательно,

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu u}} e^{-\nu v}. \quad (84)$$

Как обычно, решение методом ВКБ неприменимо, когда u и, следовательно, v близки к нулю. Но полученные асимптотические формулы можно существенно уточнить, так, чтобы они не имели указанного недостатка.

5. Формулы Лангера. В исходном уравнении (55) сделаем (второй этап вывода) следующие замены искомой функции и ее аргумента:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{u}} F(v). \quad (85)$$

Замена производной получается при помощи формулы

$$\frac{d}{dz} = \frac{dv}{du} \frac{du}{dz} \frac{d}{dv} = \left(\frac{1}{1-u^2} - 1 \right) \frac{-z}{u\nu^2} \frac{d}{dv} = -\frac{u}{z} \frac{d}{dv}. \quad (86)$$

Тогда

$$z \frac{dJ_\nu(z)}{dz} = z \left[-\frac{1}{2u^{3/2}} \frac{-z}{\nu^2 u} F - \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{u}{z} F' \right] = \left(\frac{z^2}{2\nu^2 u^{5/2}} F - \sqrt{u} F' \right). \quad (87)$$

Уравнение для функции F получается таким:

$$F'' - \nu^2 F = -\frac{z^2}{4\nu^2 u^6} \left(5 \frac{z^2}{\nu^2} + 4u^2 \right) F = -\frac{1-u^2}{4} u^{-6} (5-u^2) F. \quad (88)$$

Нам надо уточнить наше решение при малых u , поэтому преобразуем уравнение именно для этой области. В ней можно принять, что $v \sim u^3/3$. Тогда уравнение (87) можно переписать так:

$$F'' - \nu^2 F + \frac{5}{36} v^{-2} F = 0. \quad (89)$$

От уравнения, которому удовлетворяет решение (84), полученное уравнение отличается последним слагаемым, которое велико при малых v .

Чтобы привести уравнение (89) к стандартному виду, сделаем еще одну замену:

$$F(v) = \sqrt{\nu v} G(\nu v). \quad (90)$$

Для вновь введенной функции получается уравнение

$$x^2 G''(x) + xG'(x) - (1/9 + x^2)G(x) = 0, \quad (91)$$

то есть модифицированное уравнение Бесселя порядка 1/3. Поведение решения при больших v согласно (84) таково, что надо выбрать в качестве G функцию Макдональда $K_{1/3}$. Окончательно

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{v}{u}} \frac{1}{\pi} K_{1/3}(\nu v). \quad (92)$$

Теперь значение $J_\nu(\nu) = \sqrt{u^3/3u}[\Gamma(1/3)/\pi]2^{-2/3}(\nu u^3/3)^{-1/3} = [\Gamma(1/3)/\pi]2^{-2/3}3^{-1/6}\nu^{-1/3}$ конечно.

Для получения производной от функции Бесселя $J'_\nu(z)$ достаточно продифференцировать асимптотическую формулу (92):

$$J'_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \sqrt{u v} K_{2/3}(\nu v). \quad (93)$$

Значение $J'_\nu(\nu) = [\Gamma(2/3)/\pi]2^{-1/3}3^{-1/6}\nu^{-2/3}$ также конечно.

§ 5. Спектр синхротронного излучения

1. *Направленное излучение в линиях.* Применим выведенные асимптотики к спектру синхротронного излучения. Снова рассмотрим движение заряда по окружности.

Считается, что $\beta \sim 1$, $\gamma \gg 1$. Излучение сосредоточено в узком конусе около плоскости вращения, поэтому целесообразно вместо угла θ использовать угол $\varepsilon = \pi/2 - \theta$. Тогда основное излучение идет при малых значениях $\varepsilon = \varepsilon_0/\gamma \ll 1$.

По аргументу бесселевых функций $z = l\beta \sin \theta$ при больших l находим

$$u = \sqrt{1 - z^2/l^2} = \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varepsilon} = \sqrt{1 - \beta^2 + \beta^2 \sin^2 \varepsilon} \sim \sqrt{1/\gamma^2 + \varepsilon^2} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2}}{\gamma} \ll 1. \quad (94)$$

Для малых u величина $v \sim u^3/3 = (1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma^3$. Следовательно,

$$J_l(z) \sim \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2}}{\sqrt{3}\pi\gamma} K_{1/3} \left(l(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma^3 \right), \quad J'_l(z) \sim \frac{1 + \varepsilon_0^2}{\sqrt{3}\pi\gamma^2} K_{2/3} \left(l(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma^3 \right) \quad (95)$$

и ($\operatorname{ctg} \theta = \operatorname{tg} \varepsilon \sim \varepsilon$)

$$W_l \sim \frac{e^2}{c} l^2 \frac{1 + \varepsilon_0^2}{3\pi^2\gamma^4} \left[\varepsilon_0^2 K_{1/3}^2 \left(l(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma^3 \right) + (1 + \varepsilon_0^2) K_{2/3}^2 \left(l(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma^3 \right) \right]. \quad (96)$$

Рассмотрим предельные случаи. Обе величины l и γ большие.

1) $l \ll 3\gamma^3$. В этом случае второе слагаемое в квадратных скобках в (96) больше первого, так как у него большая отрицательная степень малой величины. Согласно формуле для $K_\nu(z)$ из (61)

$$W_l \sim \frac{e^2}{c} 3^{1/3} 2^{-2/3} \Gamma^2(2/3) \frac{l^{2/3}}{1 + \varepsilon_0^2}. \quad (97)$$

При таких l интенсивность не зависит от γ и растет пропорционально $l^{2/3}$. При этом производная по l бесконечна, то есть рост быстрый.

2) $l \sim 3\gamma^3$. Функции Макдональда порядка 1, а W_l пропорциональна $l^2/\gamma^4 \sim 9\gamma^2$.

3) $l \gg 3\gamma^3$. При таких номерах линий обе функции Макдональда убывают экспоненциально, так же убывает и W_l :

$$W_l \sim \frac{e^2}{c} \frac{1}{2\pi} \frac{l}{\gamma} \frac{1 + 2\varepsilon_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^{1/2}} \exp \left(-\frac{2}{3}(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2} \frac{l}{\gamma^3} \right). \quad (98)$$

Интенсивность линий быстро возрастает с номером l до значений порядка γ^2 , образуя широкий максимум на номерах l порядка $3\gamma^3$, а затем экспоненциально убывает.

Таким образом, спектр синхротронного излучения имеет совершенно другой характер, чем спектр циклотронного. Синхротронное излучение распространяется в узком конусе вблизи плоскости, в которой вращается

заряд. С ростом γ угол, в котором идет максимальное количество излучения суживается, интенсивность спектра увеличивается. Излучение идет в линиях с большими номерами $l \sim 3\gamma^3$ и, следовательно, на высоких частотах порядка $l\omega_*/\gamma \sim 3\gamma^2\omega_*$. При этом, так как расстояние между линиями пропорционально $1/\gamma$, то линии располагаются все теснее. Если же учесть, что вследствие излучения линии имеют конечную ширину (что мы не учитываем), то спектр синхротронного излучения фактически оказывается непрерывным.

Гироциклotronное излучение является промежуточным между циклотронным и синхротронным, то есть с ростом β неуклонно возрастает направленность излучения, убывание интенсивностей линий с номером в области сильного излучения постепенно сменяется возрастанием, а затем максимум перемещается в сторону все больших номеров.

2. Полное излучение в линиях. Проинтегрированная по направлениям интенсивность линий (51) при больших номерах имеет те же свойства, что и направленная. Здесь во внеинтегральном слагаемом $u = \sqrt{1 - \beta^2} = 1/\gamma \ll 1$, $v \sim u^3/3 = 1/3\gamma^3$ и

$$\beta J'_{2l}(2l\beta) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{3}\gamma^2} K_{2/3}(x), \quad x = \frac{2l}{3\gamma^3}. \quad (99)$$

Интеграл оценивается несколько сложнее. В нем сделаем замену

$$u' = \sqrt{1 - \beta^2 y^2}, \quad v' = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u'}{1-u'}, \quad dv' = \frac{u'^2 du'}{1-u'^2} = -\beta^2 \frac{u' y dy}{1-u'^2} = -\beta \frac{u' y dy}{\sqrt{1-u'^2}}, \quad dy = -\frac{1}{\beta} \frac{\sqrt{1-u'^2}}{u'} dv'. \quad (100)$$

Тогда после подстановки асимптотической формулы (92)

$$\int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) dy \sim \frac{1}{\pi\beta} \int_{1/3\gamma^3}^{\infty} \sqrt{\frac{v'}{u'}} K_{1/3}(2lv') \frac{\sqrt{1-u'^2}}{u'} dv'. \quad (101)$$

После еще одной замены переменной интегрирования $x' = 2lv'$ интеграл примет вид

$$\int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) dy \sim \frac{1}{2l\pi} \int_x^{\infty} \sqrt{\frac{v'}{u'^3}(1-u'^2)} K_{1/3}(x') dx', \quad (102)$$

Ввиду экспоненциального убывания функции Макдональда при больших аргументах основной вклад в интеграл вносят значения x' , имеющие порядок 1 и меньше. Поэтому существенны значения $v' = x'/2l \ll 1$. В этой области $u' \ll 1$ и $v' \sim u'^3/3$, так что

$$\int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) dy \sim \frac{1}{2l\pi\sqrt{3}} \int_x^{\infty} K_{1/3}(x') dx'. \quad (103)$$

Подставив оценки двух слагаемых в формулу (51), получим

$$\overline{W}_l \sim \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{e^2}{c} \frac{l}{\gamma^2} \left[K_{2/3}(x) - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} K_{1/3}(x') dx' \right]. \quad (104)$$

Наконец, воспользуемся рекуррентным соотношением для функций Макдональда (60) и получим окончательное выражение

$$\overline{W}_l \sim \sqrt{3} \frac{e^2}{c} \gamma f_W \left(\frac{2l}{3\gamma^3} \right), \quad (105)$$

где использовано стандартное обозначение для функции, отражающей зависимость интенсивности излучения от номера линии и лоренцевского множителя:

$$f_W(x) = x \int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx'. \quad (106)$$

Интеграл от этой функции

$$\int_0^{\infty} f_W(x) dx = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}}. \quad (107)$$

При достаточно малых x функция разлагается в степенной ряд

$$f_W(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}x \left[\left(\frac{x}{2}\right)^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{n!\Gamma(n-2/3)(n-1/3)} - \left(\frac{x}{2}\right)^{8/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{n!\Gamma(n+8/3)(n+4/3)} - 1 \right] \sim \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{2^{5/3}}{\Gamma(1/3)} x^{1/3}. \quad (108)$$

Она круто возрастает, достигая максимума 0.91801 при $x = 0.28581$. Напротив, при больших x справедливо асимптотическое разложение

$$f_W(x) \sim \sqrt{\frac{x\pi}{2}} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n x^n} \sum_{m=0}^n \frac{\prod_{k=0}^{m-1} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{9} \right]}{m!(2m-1)!!}, \quad (109)$$

из которого видно ее экспоненциальное убывание. Все это отражается на рис. 25.

3. Поляризация в полном излучении. Точно так же выводится выражение для параметра Стокса в линии. При этом поскольку первые два слагаемых в скобках в формуле (52) для \bar{Q}_l совпадают со стоящими в выражении (51) для \bar{W}_l , то оценить остается последний интеграл. При оценке интеграла можно считать, что $y = \sqrt{1-u'^2}/\beta \sim 1$, а

$$1-y = \frac{\beta - \sqrt{1-u'^2}}{\beta} = \frac{\beta^2 - 1 + u'^2}{\beta(\beta + \sqrt{1-u'^2})} \sim \frac{u'^2 - 1/\gamma^2}{2} \sim \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2l}x'\right)^{2/3} - \frac{1}{\gamma^2} \right]. \quad (110)$$

Таким образом, интеграл распадается на два, причем первый вычисляется с помощью формул 6.561.12 и 16 справочника [7]:

$$2l \int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) \frac{1-y}{y} dy \sim \frac{2l}{4l\pi\sqrt{3}} \int_x^{\infty} K_{1/3}(x') dx' \left[\left(\frac{3}{2l}x'\right)^{2/3} - \frac{1}{\gamma^2} \right] = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}\gamma^2} \left[K_{2/3}(x) - \int_x^{\infty} K_{1/3}(x') dx' \right]. \quad (111)$$

В результате интегралы сокращаются и остается только функция Макдональда:

$$\bar{Q}_l = -\frac{e^2}{c} \frac{2l}{\gamma^2 \sqrt{3}} K_{2/3}(x) = -\frac{e^2}{c} \sqrt{3} \gamma f_Q(x), \quad f_Q(x) = x K_{2/3}(x). \quad (112)$$

Интеграл от функции $f_Q(x)$ по всем x равен $2\pi/3\sqrt{3}$, в $4/3$ раза меньше, чем от f_W . График функции $f_Q(x)$ также представлен на том же рис. 25. Там же помещено отношение двух функций, представляющее степень линейной поляризации синхротронного излучения в потоке: $p(x) = f_Q(x)/f_W(x)$. В частности, $p(0) = 0.5, p(\infty) = 1$.

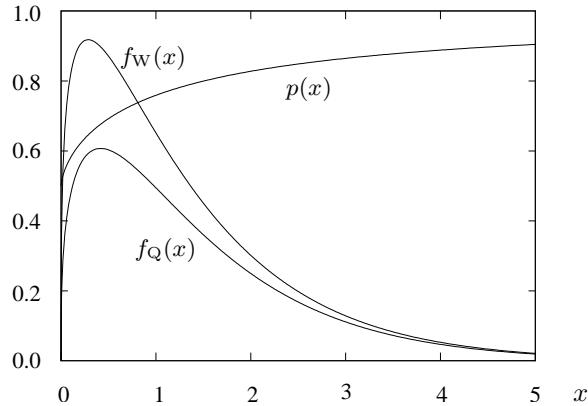


Рис. 25. Графики функций $f_W(x)$, $f_Q(x)$ и $p(x)$.

4. Усреднение по энергиям электронов. Здесь найдено излучение электрона, движущегося по окружности с определенной энергией. В электронном газе частицы движутся по разным траекториям, имея составляющие скорости вдоль поля. Эти траектории — спирали. Обобщение теории для движения по спирали делается тем же приемом, что и вывод полного излучения быстрого заряда (4.93), то есть с помощью релятивистских соображений (см. [11]).

После вычисления интенсивности и параметра Стокса линейной поляризации излучения одного электрона с заданной энергией и направлением движения по отношению к полю эти величины надо усреднить по распределению электронов по энергиям. Распределения берутся в двух видах. Это либо (тепловое, равновесное)

$$dn_e = n_e \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\mathcal{E}^{1/2}}{(k_B T)^{3/2}} e^{-\mathcal{E}/(k_B T)} d\mathcal{E}, \quad (113)$$

где n_e — концентрация электронов, dn_e — число электронов в единице объема с энергиями от \mathcal{E} до $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$, $m = 9.11 \cdot 10^{-28}$ г — масса электрона, T — температура электронного газа, а $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К (эрг=г см²/с², К — кельвин, то есть градус по шкале Кельвина, нуль которого соответствует -273° по шкале Цельсия) — постоянная Больцмана. Либо релятивистское обобщение этого распределения. Либо это степенное распределение

$$dn_e = n_e C_p \mathcal{E}^p d\mathcal{E}, \quad \mathcal{E}_m \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_M, \quad C_p \int_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{E}_M} \mathcal{E}^p d\mathcal{E} = 1. \quad (114)$$

Обо всем этом написано в книге [11].

5. *Синхротронное излучение в природе.* Теория магнитотормозного излучения и в особенности синхротронного излучения получила широкое применение в различных областях физики и в первую очередь в астрофизике. Во многих астрофизических объектах имеются релятивистские электроны и магнитное поле, так что наблюдается излучение, для интерпретации которого и определения физических условий в таких объектах привлекается изложенная теория.

Примером таких объектов являются выбросы из активных ядер галактик (АЯГ). В центре галактик, как правило, находится так называемая черная дыра, то есть образование очень большой массы и сравнительно малого размера. В нашей Галактике (Млечный Путь) черная дыра обладает массой около $10^5 M_\odot$ (масс Солнца). В других галактиках массы центральных черных дыр доходят до $10^{10} \div 10^{11} M_\odot$. Такие массивные образования притягивают к себе звезды, некоторые из которых обращаются вокруг черной дыры, как планеты вокруг Солнца. Другие звезды падают на нее, увеличивая ее массу. Падает на черную дыру и другое вещество: газ и пыль. Все это приводит к образованию вокруг черной дыры оболочки, в которой происходят мощные процессы взаимодействия между различными видами материи. В частности, эти процессы приводят к образованию выбросов или струй (джетов), состоящих из отдельных сгустков. В сгустках различными способами частицы ускоряются до ультрарелятивистских энергий. В них также имеется не очень сильное магнитное поле. В результате электроны испускают синхротронное излучение, которое наблюдается в оптическом, инфракрасном, ультрафиолетовом, рентгеновском и радио диапазонах электромагнитного излучения. Такие наблюдения позволяют исследовать вещество в необычных физических условиях, недостижимых в лабораториях, а также постигать природу активности галактик.

Другим примером объектов, испускающих синхротронное излучение, являются вспышки сверхновых звезд, название которых отражает их внезапное появление на небе и мощность сопровождающих вспышку процессов. После вспышки часть вещества звезды улетает от нее, образуя светящуюся оболочку, которая и дает мощное видимое излучение, которое продолжается недели и месяцы. Другая часть исходной звезды коллапсирует, то есть сжимается до значительно меньшего размера, чем размер обычной звезды, превращаясь в нейтронную звезду или черную дыру. Радиус нейтронной звезды около 10 км или 10^6 см. Размеры обычных звезд, а типичной звездой является наше Солнце, радиус которого $7 \cdot 10^{10}$ см, значительно больше. Образовавшаяся нейтронная звезда вращается очень быстро, так как сохраняется момент вращения. Усиливается при сжатии и магнитное поле. Нейтронная звезда испускает радио и оптические сигналы с периодом своего вращения (секунды и меньше), являясь пульсаром. Одновременно она извергает потоки релятивистских электронов и поддерживает магнитное поле, в котором электроны испускают синхротронное излучение. Вся оболочка нейтронной звезды долгое время светится как в радио, так и других диапазонах. Действие механизма синхротронного излучения доказывается характером спектра, а также сильной поляризацией этого излучения.

Так например, сверхновая звезда, вспыхнувшая в 1054 году, что зафиксировано в китайских хрониках, породила нейтронную звезду со свойствами, описанными выше. Сейчас она является пульсаром с периодом около одной секунды. Вокруг нейтронной звезды образовалась туманность, которая в оптическом свете выглядит как аморфное, похожее на круг образование, что дало ей название Крабовидная туманность. Синхротронную природу свечения туманности установили И.С.Шкловский по ее спектру и В.А.Домбровский, обнаруживший поляризацию ее излучения.

Глава 6. Волны в неоднородных и диспергирующих средах

§ 1. Уравнения для напряженностей

1. *Неоднородный диэлектрик.* Пусть волна распространяется в неоднородном немагнитном диэлектрике. Это означает, что магнитная проницаемость $\mu = 1$, а диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$. Вся неоднородность заключается в последнем равенстве.

Уравнения Максвелла, определяющие волны при указанных условиях, записываются точно так же, как и для однородной среды. Повторим их:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1)$$

Материальные уравнения для рассматриваемого случая

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B} = \vec{H}. \quad (2)$$

2. *Уравнения для напряженностей.* В случае неоднородной среды потенциалы не вводятся, так что волновые уравнения выводятся непосредственно для самих напряженностей.

Из третьего уравнения в (1) и первого в (2) находим по правилу дифференцирования произведения

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \vec{E} + \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \vec{E}. \quad (3)$$

Далее, берем ротор от ротора во втором уравнении с учетом четвертого в (1)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\varepsilon(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Как и в однородном случае, вводится скорость

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})}} = v(\vec{r}), \quad (5)$$

но здесь эта скорость зависит от координат, так что она представляет локальную скорость света.

Заменив в (4) дивергенцию напряженности согласно (3), получим уравнение

$$\frac{1}{v^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} - \operatorname{grad}(\vec{E} \cdot \operatorname{grad} \ln \varepsilon) = 0. \quad (6)$$

Аналогичной выкладкой находится уравнение для магнитной напряженности:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{D} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(\varepsilon \vec{E}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \varepsilon \times \vec{E} + \varepsilon \operatorname{rot} \vec{E}) = \\ &= \frac{1}{c} \operatorname{grad} \varepsilon \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon \times \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

с результатом

$$\frac{1}{v^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \Delta \vec{H} - \operatorname{grad} \ln \varepsilon \times \operatorname{rot} \vec{H} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, обе напряженности удовлетворяют отдельным однородным уравнениям, но по сравнению с волновыми эти уравнения содержат дополнительные слагаемые, в которые входит градиент логарифма диэлектрической проницаемости, и кроме того, коэффициент при второй производной по времени зависит от координат.

3. *Монохроматические волны.* Для получения уравнений для комплексных амплитуд монохроматических волн надо в уравнениях (1), а затем в (6) и (8) заменить производную по времени на $-i\omega$. Получим из (1) исходные уравнения

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{H}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{grad} \ln \varepsilon \cdot \vec{E}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{E}, \quad (9)$$

а из (6) и (8) окончательные уравнения

$$[-\Delta - k^2(\vec{r})] \vec{E} - \operatorname{grad}(\vec{E} \cdot \operatorname{grad} \ln \varepsilon) = 0, \quad [-\Delta - k^2(\vec{r})] \vec{H} - \operatorname{grad} \ln \varepsilon \times \operatorname{rot} \vec{H} = 0. \quad (10)$$

Здесь $k(\vec{r}) = \omega/v(\vec{r})$.

Достаточно найти одну из амплитуд, вторая находится с помощью уравнений Максвелла (9).

§ 2. Геометрическая оптика

1. Приближение геометрической оптики. Это приближение применяется для слабо неоднородных сред и волн малых длин, значительно меньших размеров той области, где волны распространяются. В таком случае можно пренебречь изменением $\ln \varepsilon$ и отбросить соответствующие слагаемые в уравнениях. Тогда окажется, что уравнения для компонент обеих напряженностей совпадают и имеют вид

$$\frac{1}{v^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0. \quad (11)$$

В случае монохроматической волны все компоненты пропорциональны $e^{-i\omega t}$, так что уравнения для них

$$-k^2(\vec{r})u - \Delta u = 0. \quad (12)$$

При этом $k(\vec{r})$ медленно меняющаяся функция, а произведение $\omega t = 2\pi vt/\lambda$ велико ввиду малости длины волны $\lambda(\vec{r}) = 2\pi v(\vec{r})/\omega$, так что уравнения (11) и (12) можно еще упростить.

2. Уравнение эйконала. Будем искать решение уравнения (11) в виде

$$u = e^{i\psi(\vec{r}, t)}, \quad (13)$$

где согласно сказанному в предыдущем пункте $\psi \gg 1$. Вычисляем производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= ui \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -u \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + iu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\ \vec{\nabla} u &= ui \vec{\nabla} \psi, \quad \Delta u = \vec{\nabla}^2 u = -u (\vec{\nabla} \psi)^2 + iu \Delta \psi. \end{aligned} \quad (14)$$

В первые слагаемые вторых производных ψ входит в квадрате, а во вторые — в первой степени. Так как эта величина предполагается большой, то вторыми слагаемыми можно пренебречь по сравнению с первыми, то есть принять, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -u \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2, \quad \Delta u = -u (\vec{\nabla} \psi)^2. \quad (15)$$

Уравнение (11) в таком приближении перейдет в

$$\frac{1}{v^2(\vec{r})} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - (\vec{\nabla} \psi)^2 = 0. \quad (16)$$

Полученное уравнение называется уравнением эйконала, а его решение — функция $\psi(\vec{r}, t)$ — эйконалом. В отличие от исходного уравнения, которое содержит производные второго порядка, уравнение эйконала является уравнением первого порядка, хотя и нелинейным. Как известно, всякое уравнение в частных производных первого порядка может быть сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые поддаются решению значительно проще, чем уравнения в частных производных.

3. Монохроматическая волна. В случае монохроматических волн эйконал можно представить в виде

$$\psi = -\omega t + \frac{\omega}{c} \Psi(\vec{r}). \quad (17)$$

Уравнение для функции $\Psi(\vec{r})$ получится таким:

$$(\vec{\nabla} \Psi)^2 = n^2(\vec{r}). \quad (18)$$

Отношение

$$n(\vec{r}) = \sqrt{\varepsilon(\vec{r})} = \frac{c}{v(\vec{r})} \quad (19)$$

показывает, во сколько раз скорость света в вакууме больше скорости света в данном месте среды, и называется показателем преломления среды.

4. Метод решения. Как уже говорилось, всякое уравнение в частных производных первого порядка сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для его характеристик. Уравнение (18) можно свести к дифференциальным уравнениям методом функции Гамильтона. Зададим эту функцию в виде

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}) = p^2 - n^2(\vec{r}), \quad (20)$$

где \vec{p} — не импульс, а вектор из трех производных (явно указано, что градиент берется по координатам)

$$\vec{p} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Psi. \quad (21)$$

Поскольку функция \mathcal{H} не зависит явно ни от времени, ни от искомой функции Ψ , уравнения характеристик запишутся в виде стационарной системы

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\nabla}_{\vec{p}} \mathcal{H} = 2\vec{p}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \mathcal{H} = 2n(\vec{r})\vec{\nabla}_{\vec{r}} n(\vec{r}) \quad (22)$$

или

$$\frac{dx}{p_x} = \frac{dy}{p_y} = \frac{dz}{p_z}, \quad \frac{dp_x}{nn'_x} = \frac{dp_y}{nn'_y} = \frac{dp_z}{nn'_z}. \quad (23)$$

5. *Лучи.* Постоянное значение показателя экспоненты (13) в случае монохроматической волны

$$-\omega t + \frac{\omega}{c} \Psi(\vec{r}) = \frac{\omega}{c} \Psi_0 \quad (24)$$

в каждый момент времени задает некоторую поверхность уровня значения эйконала

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_0 + ct. \quad (25)$$

Перпендикулярные к такой поверхности направления (нормали) отражают перемещения постоянной фазы, то есть могут интерпретироваться как лучи. Лучи — это, вообще говоря, кривые линии, касательные к которым в каждой их точке совпадают с направлением распространения волны. Таким образом, лучи задают поле направлений, определяемых векторами $\text{grad } \Psi(\vec{r}) = \vec{p}$. Первое уравнение в (23) и определяет совокупность лучей. Поэтому геометрическая оптика называется также лучевой.

6. *Частные случаи.* Рассмотрим простейшие случаи зависимости показателя преломления от координат.

1) Однородная среда. Если n постоянно, то можно положить $p_x = p_x^0$, $p_y = p_y^0$. Тогда

$$\Psi = p_x^0 x + p_y^0 y + p_z^0 z + \Psi_0, \quad (p_x^0)^2 + (p_y^0)^2 + (p_z^0)^2 = n^2. \quad (26)$$

2) Одномерная неоднородность. Одномерность означает, что неоднородность проявляется только вдоль некоторой прямой. Пусть эта прямая — ось аппликат, то есть $n(\vec{r}) = n(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}$. Здесь применим другой метод решения.

Решение уравнения (18) в рассматриваемом случае можно искать в виде

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_x(x) + \Psi_y(y) + \Psi_z(z). \quad (27)$$

Подставив эту формулу в уравнение, получим

$$[\Psi'_x(x)]^2 + [\Psi'_y(y)]^2 + [\Psi'_z(z)]^2 = n^2(z). \quad (28)$$

Обычное рассуждение о зависимости от входящих в уравнение переменных приводит к решению

$$\Psi'_x(x) = \alpha, \quad \Psi'_y(y) = \beta, \quad \Psi_x(x) = \alpha x, \quad \Psi_y(y) = \beta y. \quad (29)$$

Уравнение (28) переходит в

$$\alpha^2 + \beta^2 + [\Psi'_z(z)]^2 = n^2(z), \quad \Psi'_z(z) = \pm \sqrt{n^2(z) - \alpha^2 - \beta^2}, \quad (30)$$

и имеет решение

$$\Psi_z(z) = \pm \int \sqrt{n^2(z) - \alpha^2 - \beta^2} dz. \quad (31)$$

В целом

$$\Psi(\vec{r}) = \alpha x + \beta y \pm \int \sqrt{n^2(z) - \alpha^2 - \beta^2} dz. \quad (32)$$

Поверхности, описываемые уравнением распространения постоянной фазы волны

$$\Psi(\vec{r}) = \alpha x + \beta y \pm \int \sqrt{n^2(z) - \alpha^2 - \beta^2} dz = \Psi_0 + ct, \quad (33)$$

имеют вид искаженных плоскостей. Лучи, соответствующие этим поверхностям, определяются уравнениями, имеющими вид (23):

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \pm \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \alpha^2 - \beta^2}}. \quad (34)$$

Их можно проинтегрировать:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} + C_1 = \pm \int \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \alpha^2 - \beta^2}} + C_2. \quad (35)$$

Два параметра описывают двухпараметрическое семейство кривых-лучей.

3) Сферическая симметрия. Если $n(\vec{r}) = n(r)$, то

$$\vec{\nabla}n(r) = n'(r)\frac{\vec{r}}{r}. \quad (36)$$

Система (23) сводится к

$$\frac{dx}{p_x} = \frac{dy}{p_y} = \frac{dz}{p_z}, \quad \frac{dp_x}{x} = \frac{dp_y}{y} = \frac{dp_z}{z}. \quad (37)$$

Решение естественно искать в виде

$$\Psi = \Psi(r), \quad \vec{\nabla}\Psi(r) = \Psi'(r)\frac{\vec{r}}{r}, \quad (38)$$

так что

$$\Psi'(r) = \pm n(r), \quad \Psi(r) = \pm \int n(r)dr. \quad (39)$$

7. *Применение приближения.* Лучевое приближение, не принимающее во внимание волновые свойства электромагнитного поля, применяется при расчете многих оптических систем, например, телескопов. Характерный размер телескопа — это дециметры (малые телескопы) и метры. В последнее время построено несколько телескопов с диаметром зеркала 8-10 метров. Идет подготовка к сооружению телескопа с диаметром зеркала в 100 метров. Эти телескопы устанавливаются на поверхности Земли и принимают излучение в оптическом и инфракрасном диапазонах, длина волн в которых имеет порядок от 10^{-5} до 10^{-3} см, что значительно меньше габаритов даже малых телескопов. Поэтому оптические свойства телескопов, конечно, рассчитываются в приближении геометрической оптики. Волновые же характеристики, такие как хроматическая aberrация, размер дифракционного изображения точки и т. п., находятся как поправки к геометрическому расчету.

§ 3. E- и H-волны

1. *Точное рассмотрение.* Теперь изучим решения уравнений § 1 без приближений. Неоднородность будем считать одномерной, то есть $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(z)$, так что

$$\text{grad } \varepsilon = (0, 0, \varepsilon'(z)). \quad (40)$$

Этот градиент подставим в уравнения для напряженностей и попробуем их решить.

2. *E-волны.* Начнем с первого уравнения (10). Ищем частное решение, при котором волна идет вдоль оси x, а напряженность \vec{E} перпендикулярна направлениям распространения и неоднородности, то есть осям x и z, как в однородной среде:

$$\vec{E} = E(z)(0, 1, 0)e^{i\alpha x}. \quad (41)$$

Все влияние неоднородности заключается в зависимости от z амплитуды волны. В таком случае последнее слагаемое в уравнении аннулируется и амплитуда подчиняется уравнению

$$E''(z) + f(z)E(z) = 0, \quad f(z) = k^2(z) - \alpha^2. \quad (42)$$

Как говорилось выше, для нахождения магнитной напряженности следует воспользоваться вторым уравнением (9):

$$\frac{i\omega}{c}\vec{H} = \text{rot } \vec{E} = (-E'(z), 0, i\alpha E(z))e^{i\alpha x}. \quad (43)$$

Получается, что магнитная напряженность перпендикулярна электрической, но имеет составляющую по направлению распространения волны, то есть наряду с поперечной также и продольную составляющую.

3. *H*-волны. Теперь ищем волну с магнитной напряженностью, перпендикулярной направлениям волны и неоднородности:

$$\vec{H} = H(z)(0, 1, 0)e^{i\alpha x}. \quad (44)$$

Тогда аналогично (43)

$$\text{rot } \vec{H} = (-H'(z), 0, i\alpha H(z))e^{i\alpha x} \quad (45)$$

и, следовательно,

$$\text{grad } \ln \varepsilon \times \text{rot } \vec{H} = (0, -\varepsilon' H'/\varepsilon, 0)e^{i\alpha x}. \quad (46)$$

Уравнение для амплитуды $H(z)$ получается более сложным, чем (42):

$$H''(z) + f(z)H(z) - \frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon(z)}H'(z) = 0. \quad (47)$$

Однако это уравнение сводится к тому же виду, что и (42), введением новой функции:

$$H = \varepsilon^{1/2}w, H' = \frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\varepsilon'w + \varepsilon^{1/2}w', H'' = -\frac{1}{4}\varepsilon^{-3/2}(\varepsilon')^2w + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\varepsilon''w + \varepsilon^{-1/2}\varepsilon'w' + \varepsilon^{1/2}w'', \quad (48)$$

для которой получается уравнение

$$w'' + g(z)w = 0, \quad g(z) = f(z) + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon} - \frac{3}{4}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2. \quad (49)$$

Электрическая напряженность находится из уравнения

$$\frac{i\omega}{c}\varepsilon(z)\vec{E} = -\text{rot } \vec{H}. \quad (50)$$

Поскольку ротор магнитной напряженности уже найден, видно, что теперь электрическая напряженность имеет продольную составляющую.

Появление продольных составляющих напряженностей в волне, распространяющейся в неоднородной среде, сильно отличает неоднородные среды от однородных, в частности, от свободного пространства, в которых продольные компоненты волн невозможны.

4. *Слабая неоднородность*. Применим к уравнениям (42) и (49) приближенный метод ВКБ, описанный в предыдущей главе. Для возможности его применения требуется, чтобы функции $f(z)$ и $g(z)$ не сильно изменялись в области изменения аргумента z . Масштаб изменения — большая длина s .

Повторим здесь схему приближения в упрощенном варианте. Решение уравнения (42) ищется в виде

$$E(z) = e^{i\psi_0(z)-\psi_1(z)}. \quad (51)$$

Нулевым приближением является уравнение эйконала, то есть геометрическая оптика,

$$\left(\frac{d\psi_0}{dz}\right)^2 = f(z), \quad \psi_0(z) = \pm \int f^{1/2}(z)dz, \quad (52)$$

а первое приближение учитывает волновые свойства

$$-2\frac{d\psi_0}{dz}\frac{d\psi_1}{dz} + \frac{d^2\psi_0}{dz^2} = 0, \quad \psi_1(z) = \frac{1}{4}\ln f(z). \quad (53)$$

Тогда общее решение в этом приближении

$$E(z) = f^{-1/4}(z) \left[C_+ \exp \left(i \int f^{1/2}(z)dz \right) + C_- \exp \left(-i \int f^{1/2}(z)dz \right) \right]. \quad (54)$$

5. *Условие применимости*. Неравенству (5.77), выражающему условие справедливости приближения, применительно к волнам в неоднородной среде можно придать физический смысл. Именно, согласно определению (42) $1/\sqrt{f(z)} \sim 1/k(z) = 1/\lambda(z) = \lambda/(2\pi)$, так что условие применимости можно записать в виде

$$\left| \frac{d\lambda(z)}{dz} \right| \ll 1, \quad (55)$$

то есть локальная длина волны (деленная на 2π) должна быть достаточно медленной функцией аргумента z . Так как $f \sim k^2 = \varepsilon\omega/c$, а $\lambda = 1/k = v/\omega = c/(\omega\sqrt{\varepsilon})$, то выполнение неравенств (77) и (55) обеспечивается, если медленно изменяется с z диэлектрическая проницаемость ε .

Покажем, что это условие годится и для уравнения (49), в котором функция g определена более сложно. Однако слагаемые, добавляемые к функции f содержат вторую производную от ε и квадрат первой производной. Оба они поэтому имеют порядок $1/s^2$ и не мешают применению метода.

Приближение ВКБ широко применяется не только в конкретных задачах, но и чисто математических вопросах, в частности, в теории специальных функций. С одним из таких применений мы познакомились при выводе асимптотики бесселевой функции.

Очевидно, что условие (77) не выполняется в точках, где функция $f(z)$ обращается в нуль, и в их окрестностях. Около таких точек применяется уточнение решения ВКБ, которым мы также воспользовались при выводе формул Лангера.

§ 4. Диспергирующие среды

1. *Материальные уравнения для быстропеременных процессов.* Простейшие соотношения между индукциями и напряженностями, применявшиеся нами до сих пор, выполняются только при условии, что связь между этими величинами локальна и мгновенна. Однако, часто эти требования не выполняются. Действующая на вещество напряженность вызывает какие-то изменения в этом веществе. Требуется некоторое время для того, чтобы вещество пришло к некоторому равновесному состоянию и дало отклик в виде создания определенной величины зарядов и токов поляризации или намагничения и тем самым векторов индукции. Такое воздействие может происходить и нелокально, то есть на образование индукции могут воздействовать и напряженности в соседних точках. Оба эффекта называются дисперсией, временной и пространственной. Более важна первая из них.

Рассмотрим указанную ситуацию на примере электрических величин и немгновенности связи. Для простоты в последующих формулах опустим зависимость этих величин от координат, хотя будем ее подразумевать.

Если обычное соотношение между электрической индукцией и напряженностью $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ не справедливо, то его обобщение на немгновенность связи следует записать в виде

$$\vec{D}(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t-t') \vec{E}(t') dt'. \quad (56)$$

При написании этого соотношения неявно учтено несколько обстоятельств.

Во-первых, $\varepsilon(t-t')$ — функция влияния или отклика. Она показывает, какой вклад напряженность, действовавшая в момент t' , даст в индукцию в момент t . Тот факт, что эта функция зависит не от каждого из моментов t и t' отдельно, а только от их разности, говорит, что свойства среды (вещества) не изменяются за время наблюдения, важны не моменты начала и конца воздействия, а только промежуток времени между ними, то есть свойства среды не изменяются, среда стационарна.

Во-вторых, интеграл в (56) берется только до момента t , что выражает так называемый принцип причинности. Он гласит, что на любое явление может оказывать влияние только такое другое явление, которое произошло не позже первого, то есть причина не может быть позже следствия, будущее не влияет на настоящее и тем более на прошлое.

В-третьих, среда предполагается однородной, то есть функция ε не зависит от координат, хотя это предположение не столь существенно.

Соотношение (56) может переходить в обычное материальное уравнение в двух случаях.

1) Если $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \delta(t)$, это мгновенное воздействие, то есть дисперсия отсутствует.

2) Если напряженность \vec{E} слабо зависит от времени. Тогда ее можно вынести из-под знака интеграла и

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \vec{E}(t), \quad \varepsilon_0 = \int_0^\infty \varepsilon(t) dt. \quad (57)$$

Последняя формула выполняется в обоих случаях и ε_0 — это обычная диэлектрическая проницаемость.

2. *Преобразования Фурье.* Правая часть соотношения (56) имеет вид свертки функций $\varepsilon(t)$ и $\vec{E}(t)$. Поэтому естественно применить к нему преобразование Фурье. Обозначая преобразования Фурье теми же буквами, но с аргументом — параметром преобразования ω :

$$\vec{D}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \vec{D}(t) dt, \quad \vec{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \vec{E}(t) dt, \quad \varepsilon(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \varepsilon(t) dt, \quad (58)$$

находим для них соотношение

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega). \quad (59)$$

Полученное соотношение по виду совпадает с простейшим материальным уравнением. Однако, во-первых, оно установлено не между индукцией и напряженностью, а между их преобразованиями Фурье, а во-вторых, $\varepsilon(\omega)$ — это вовсе не диэлектрическая проницаемость, а преобразование Фурье функции отклика. Это преобразование может быть комплексным.

Как будет показано ниже, при реальной дисперсии функция отклика имеет слагаемое вида $\delta(t)$. Выделим это слагаемое, положив

$$\varepsilon(t) = \delta(t) + \varepsilon_*(t), \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \varepsilon_*(\omega), \quad \varepsilon_*(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} \varepsilon_*(t) dt. \quad (60)$$

При $\omega \rightarrow \infty$ функция $\varepsilon_*(\omega)$ стремится к 0. Тогда

$$\vec{D}(t) = \vec{E}(t) + \int_{-\infty}^t \varepsilon_*(t-t') \vec{E}(t') dt', \quad \vec{D}(\omega) = [1 + \varepsilon_*(\omega)] \vec{E}(\omega). \quad (61)$$

Аналогичное соотношение имеет место и для магнитных величин:

$$\vec{B}(\omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega). \quad (62)$$

§ 5. Аналитические свойства преобразования функции отклика

1. *Функция комплексного аргумента.* Преобразование Фурье от функции отклика без дельта-функции

$$\varepsilon_*(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} \varepsilon_*(t) dt \quad (63)$$

можно рассматривать как функцию комплексного аргумента ω . Представляет интерес изучить свойства этой функции на комплексной плоскости.

Функция $\varepsilon_*(t)$ должна быть гладкой и убывающей функцией времени, так как далекие моменты от времени наблюдения должны по физическому смыслу меньше участвовать в создании поляризации зарядов и тем самым в индукции, чем более близкие. Поэтому интеграл (63) должен сходиться в верхней полуплоскости комплексного аргумента ω , так как он содержит убывающую экспоненту. Сходится он и на вещественной оси включая точку $\omega = 0$. Следовательно, в верхней полуплоскости функция $\varepsilon_*(\omega)$ регулярна. В нижнюю полуплоскость эта функция может быть аналитически продолжена, но там у нее непременно имеются особые точки.

Функция $\varepsilon_*(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. Для нее можно написать формулу Коши для произвольной точки ω из верхней полуплоскости ($\text{Im } \omega > 0$)

$$\varepsilon_*(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \varepsilon_*(\omega') \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}. \quad (64)$$

2. *Вещественная и мнимая части.* При вещественных ω можно разделить вещественную и мнимую части преобразования:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_R(\omega) + i\varepsilon_I(\omega), \quad \varepsilon_*(\omega) = \varepsilon_R(\omega) - 1 + i\varepsilon_I(\omega), \quad (65)$$

где

$$\varepsilon_R(\omega) - 1 = \int_0^\infty \varepsilon_*(t) \cos \omega t dt, \quad \varepsilon_I(\omega) = \int_0^\infty \varepsilon_*(t) \sin \omega t dt. \quad (66)$$

Вещественная часть $\varepsilon_R(\omega)$ — четная, а мнимая $\varepsilon_I(\omega)$ — нечетная функции аргумента ω . Очевидно, что $\varepsilon_I(0) = 0$.

Представим вещественную часть как сумму самого преобразования и его сопряженного:

$$\varepsilon_R(\omega) - 1 = \frac{1}{2} [\varepsilon_*(\omega) + \varepsilon_*^*(\omega)] = \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty e^{i\omega t} \varepsilon_*(t) dt + \int_0^\infty e^{-i\omega t} \varepsilon_*(t) dt \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \varepsilon_*(|t|) e^{i\omega t} dt. \quad (67)$$

Аналогично мнимую часть представим разностью:

$$\varepsilon_I(\omega) = \frac{1}{2i} [\varepsilon_*(\omega) - \varepsilon_*^*(\omega)] = \frac{1}{2i} \left[\int_0^\infty e^{i\omega t} \varepsilon_*(t) dt - \int_0^\infty e^{-i\omega t} \varepsilon_*(t) dt \right] = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty \varepsilon_*(|t|) \text{sgn}(t) e^{i\omega t} dt. \quad (68)$$

Написанные равенства позволяют связать вещественную и мнимую части. Напишем обращения формул, умножив вторую из них на $\text{sgn}(t)$:

$$\varepsilon_*(|t|) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon_R(\omega) - 1] e^{-i\omega t} d\omega = \frac{i}{\pi} \text{sgn}(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_I(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (69)$$

Теперь подставим в формулы (67) и (68) выражения функции отклика через преобразование другой функции и переставим порядок интегрирования:

$$\varepsilon_R(\omega) - 1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \frac{i}{\pi} \text{sgn}(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_I(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_I(\omega') d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} \text{sgn}(t) dt, \quad (70)$$

$$\varepsilon_I(\omega) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) dt e^{i\omega t} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon_R(\omega') - 1] e^{-i\omega' t} d\omega' = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' [\varepsilon_R(\omega') - 1] \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} \text{sgn}(t) dt. \quad (71)$$

В обеих формулах возник одинаковый интеграл, который надо вычислить. Формально этот интеграл расходится, так как подинтегральная функция не стремится к нулю на бесконечности. Поэтому применяем обобщенный метод суммирования, введя регуляризующий множитель и заменив разность $\omega - \omega'$ на ω :

$$\mathcal{J}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \text{sgn}(t) dt = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \text{sgn}(t) e^{-\alpha|t|} dt = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left[\int_0^{\infty} e^{(i\omega-\alpha)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(i\omega+\alpha)t} dt \right] = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left[\frac{1}{\alpha-i\omega} - \frac{1}{\alpha+i\omega} \right]. \quad (72)$$

3. *Интеграл типа Коши.* Получившиеся дроби интересны не сами по себе, а вместе с другими функциями под интегралами. Поэтому рассмотрим интеграл при комплексных z

$$\mathcal{I}(z) = \int_a^b f(x) \frac{dx}{x-z}. \quad (73)$$

Такой интеграл называется интегралом типа Коши. Этот интеграл похож на интеграл Коши (64), однако имеются значительные отличия. Во-первых, вообще говоря, контур интегрирования не обязательно замкнутый (и не обязательно отрезок). Во-вторых, функция $f(x)$ совсем не обязана быть регулярной где бы то ни было. Достаточно потребовать, чтобы эта функция на отрезке удовлетворяла известному условию Липшица

$$|f(x') - f(x)| \leq A|x' - x|^{\nu}, \quad (74)$$

где $A = \text{const}$, а $\nu > 0$. Тогда интеграл (73) везде регулярен кроме точек, в которых знаменатель обращается в нуль, то есть в рассматриваемом случае — точек промежутка на вещественной оси (a, b) , где он ветвится. Чтобы изучить его поведение вблизи линии ветвления, внесем мнимую добавку в знаменатель, то есть возьмем $x \in (a, b)$, $\alpha > 0$ и положим

$$\mathcal{I}(x + i\alpha) = \int_a^b f(x') \frac{dx'}{x' - x - i\alpha}. \quad (75)$$

Взяв число $\delta > \alpha > 0$, преобразуем интеграл так:

$$\mathcal{I}(x + i\alpha) = \int_a^{x-\delta} f(x') \frac{dx'}{x' - x - i\alpha} + \int_{x+\delta}^b f(x') \frac{dx'}{x' - x - i\alpha} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x - i\alpha} dx' + f(x) \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{dx'}{x' - x - i\alpha}. \quad (76)$$

Последний интеграл просто вычисляется:

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{dx'}{x' - x - i\alpha} = \ln(x' - x - i\alpha) \Big|_{x-\delta}^{x+\delta} = \ln \frac{\delta - i\alpha}{-\delta - i\alpha} = \ln \frac{e^{-i\psi}}{e^{\pi i + i\psi}} = -i\psi - \pi i - i\psi = -\pi i - 2i\psi, \quad (77)$$

где введено обозначение углу ψ , задаваемому функциями

$$\cos \psi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \alpha^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\alpha}{\sqrt{\delta^2 + \alpha^2}}. \quad (78)$$

Теперь устремим $\alpha \rightarrow 0$. Первые два интеграла не имеют особенностей, у третьего знаменатель обращается в нуль, но и числитель тоже обращается в нуль, так что интеграл остается конечным. Наконец, последний интеграл вычислен и его предел очевиден, так как $\psi \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Все вместе дает

$$\mathcal{I}(x + i0) = \int_a^{x-\delta} f(x') \frac{dx'}{x' - x} + \int_{x+\delta}^b f(x') \frac{dx'}{x' - x} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \pi i f(x). \quad (79)$$

Наконец, переходим к пределу $\delta \rightarrow 0$. Интеграл по малому промежутку стремится к нулю, а предел суммы двух интегралов называется главным значением по Коши. Дело в том, что несобственный интеграл с подинтегральной функцией, обращающейся в бесконечность в некоторой точке, определяется так, что сначала берется интеграл по промежутку, не включающему особую точку, а затем производится предельный переход к этой точке. По такому определению переходить к пределам в двух интегралах следовало бы независимо, но тогда бы они оба стремились в бесконечности. Переход к пределу с одинаковым отступом от особой точки приводит к тому, что предел оказывается конечным.

Интеграл с аргументом $x - i0$ просто комплексно сопряжен с выведенным. Окончательно,

$$\mathcal{I}(x \pm i0) = \mathcal{I}(x) \mp \pi i f(x), \quad \int_a^b f(x') \frac{dx'}{x' - x \mp i0} = \int_a^b f(x') \frac{dx'}{x' - x} \mp \pi i f(x), \quad \mathcal{I}(x) = \int_a^b f(x') \frac{dx'}{x' - x}. \quad (80)$$

Прочерк посередине знака интеграла как раз и означает, что интеграл понимается в смысле главного значения.

Полученные формулы называются формулами Сохоцкого-Племеля. Эти формулы можно записать в символьическом виде без интегралов и без функции:

$$\frac{1}{x' - x \pm i0} = \frac{\mathcal{P}}{x' - x} \pm \pi i \delta(x' - x), \quad (81)$$

где стоящий в числителе справа знак \mathcal{P} указывает, что при вычислении интеграла типа Коши по x' следует брать его главное значение по Коши.

4. *Связь вещественной и мнимой частей.* Вернемся к формулам (70) и (71). Входящий в них интеграл (72) сведем к интегралам типа Коши. Для этого первую дробь умножим на $-i$, а вторую — на i . Кроме того, восстановим разность $\omega - \omega'$ и перейдем к пределу $\alpha \rightarrow 0$. В соответствии с формулами (81) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\omega - \omega') &= -\frac{i}{\omega' - \omega - i0} - \frac{i}{\omega' - \omega + i0} = -i \left(\frac{1}{\omega' - \omega - i0} + \frac{1}{\omega' - \omega + i0} \right) = \\ &= -i \left[\frac{\mathcal{P}}{\omega' - \omega} - \pi i \delta(\omega' - \omega) + \frac{\mathcal{P}}{\omega' - \omega} + \pi i \delta(\omega' - \omega) \right] = -2i \frac{\mathcal{P}}{\omega' - \omega}. \end{aligned} \quad (82)$$

Подставив результат в формулы (70) и (71), найдем окончательно

$$\varepsilon_R(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_I(\omega') \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}, \quad \varepsilon_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon_R(\omega') - 1] \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}. \quad (83)$$

Полученные формулы носят название формул Крамерса—Кронига (1927).

Первую формулу (83), воспользовавшись нечетностью функции $\varepsilon_I(\omega)$, можно переписать по-другому:

$$\varepsilon_R(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_I(\omega') \frac{\omega' d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (84)$$

С помощью этой формулы по известной функции $\varepsilon_I(\omega)$ можно вычислить функцию $\varepsilon_R(\omega)$, которая обязательно окажется четной. При этом функция $\varepsilon_I(\omega)$ может быть приближенной, или эмпирической (полученной из какого-либо эксперимента), или модельной. По отношению ко второй формуле приведенное утверждение не всегда верно, так как функция $\varepsilon_I(\omega)$ должна быть не только нечетной, что выполняется, но, как мы увидим, и положительной, чего не всегда можно достигнуть.

В формуле (84) можно положить $\omega = 0$, что дает

$$\varepsilon_R(0) = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt = \varepsilon_0 = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon_I(\omega) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (85)$$

С другой стороны, при $\omega \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_R(\omega) \sim 1 - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega^2} \int_0^\infty \omega' \varepsilon_I(\omega') d\omega'. \quad (86)$$

В первом случае диэлектрическая проницаемость, а во втором — асимптотика выражаются через интегралы от мнимой части преобразования функции отклика.

§ 6. Волны в диспергирующих средах

1. *Плоская монохроматическая волна.* Ищем решения уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (87)$$

в виде плоской монохроматической волны частоты ω . Тогда уравнения для амплитуд волны при материальных уравнениях (59) и (62)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{B}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \mu \vec{E}. \quad (88)$$

Не раз применявшаяся процедура вывода волновых уравнений приводит к уравнению, по форме совпадающему с однородным уравнением Гельмгольца:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \vec{E} = \alpha^2 \vec{E}. \quad (89)$$

Однако здесь α не волновое число. Его квадрат — произведение преобразований Фурье от функций отклика

$$\alpha^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \quad (90)$$

и в общем случае комплексно. Поэтому вектор

$$\vec{a}(\omega) = \vec{a}_R + i\vec{a}_I, \quad \alpha^2 = \alpha_R^2 - \alpha_I^2 + 2i\vec{a}_R \vec{a}_I, \quad (91)$$

а волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{a}\vec{r}} = \vec{E}_0 e^{i\vec{a}_R \vec{r} - \vec{a}_I \vec{r}}. \quad (92)$$

Вещественная часть вектора \vec{a} определяет гармоническое колебание волны, а мнимая — изменение амплитуды. Вещественная и комплексная части вектора могут не совпадать, так что плоскости постоянной фазы и постоянной амплитуды могут различаться.

2. *Немагнитная почти прозрачная среда.* Большинство диспергирующих сред немагнитные, у них $\mu = 1$. Почти прозрачная среда характеризуется тем, что у нее мнимая часть преобразования функции отклика значительно меньше вещественной: $\varepsilon_I \ll \varepsilon_R$. Для простоты будем считать, что $\vec{a}_I \parallel \vec{a}_R$. Тогда $\alpha_I \ll \alpha_R$ и

$$\alpha_R + i\alpha_I = \frac{\omega}{c}(n_R + in_I), \quad n_R^2 - n_I^2 + 2in_R n_I = \varepsilon_R + i\varepsilon_I, \quad n_R^2 - n_I^2 \approx n_R^2 = \varepsilon_R, \quad n_R = \sqrt{\varepsilon_R} > 0, \quad n_I = \frac{\varepsilon_I}{2\sqrt{\varepsilon_R}}. \quad (93)$$

Плоская монохроматическая волна в направлении вектора \vec{l} в такой среде характеризуется экспонентой

$$\exp\left(i\frac{\omega}{c}(n_R + in_I)\vec{l}\vec{r}\right) = \exp\left(i\frac{\omega}{c}n_R \vec{l}\vec{r}\right) \exp\left(-\frac{\omega}{c}n_I \vec{l}\vec{r}\right). \quad (94)$$

Частное

$$\alpha = \frac{\omega}{c} n_R = \frac{\omega}{v} \quad (95)$$

здесь играет роль волнового числа, причем n_R — показатель преломления среды, $v = c/n_R$ монохроматическая скорость света в среде, а $\vec{a} = \alpha \vec{l}$ — волновой вектор. Первая экспонента характеризует фазу волны. Вторая экспонента убывает с расстоянием, частное $\frac{\omega}{c}n_I$ — коэффициент ослабления амплитуды волны, а так как поток энергии пропорционален квадрату амплитуды, то коэффициент поглощения излучения за счет дисперсии составляет

$$\alpha = 2\frac{\omega}{c}n_I. \quad (96)$$

Напомним, что все величины при этом ($n_R(\omega)$, $n_I(\omega)$, $\alpha(\omega)$, $\alpha(\omega)$) зависят от частоты. Из равенств (93) и (96) следует, что должно быть $\varepsilon_I > 0$. В этом мы убедимся ниже при рассмотрении конкретных сред.

§ 7. Энергетическое соотношение при наличии дисперсии

1. *Поток энергии.* Выясним, как отражается дисперсия среды на энергетике поля. Пусть в диспергирующей среде идет волна, то есть нет свободных зарядов и токов.

Как и при выводе энергетического соотношения в случае отсутствия дисперсии, выпишем уравнения Максвелла с роторами:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (97)$$

Умножив первое уравнение на \vec{H} , а второе на \vec{E} и вычтя результаты, получим с использованием векторного тождества

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{1}{c}(\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}}). \quad (98)$$

Найденное соотношение позволяет написать выражение для вектора Пойнтинга:

$$\operatorname{div} \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{1}{4\pi}(\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}}). \quad (99)$$

Чтобы продвинуться дальше, будем считать волну монохроматической.

2. *Монохроматическая волна.* В этом случае напряженности и индукции пропорциональны $e^{-i\omega t}$, причем связь между напряженностями и индукциями такая же, как между их преобразованиями Фурье.

Найдем среднее от дисперсии вектора потока энергии. Для получения физически осмысливших результатов следует взять вещественные части всех векторов поля:

$$\overline{\operatorname{div} \vec{S}} = -\frac{1}{4\pi} \left(\overline{\operatorname{Re} \vec{E} \cdot \operatorname{Re} \dot{\vec{D}}} + \overline{\operatorname{Re} \vec{H} \cdot \operatorname{Re} \dot{\vec{B}}} \right). \quad (100)$$

Возьмем полусумму напряженностей и их комплексно сопряженных

$$\operatorname{Re} \vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{E} + \vec{E}^*), \quad \operatorname{Re} \vec{H} = \frac{1}{2}(\vec{H} + \vec{H}^*). \quad (101)$$

Тогда для электрической индукции получится

$$\operatorname{Re} \dot{\vec{D}} = \operatorname{Re}(-i\omega(\varepsilon_R + i\varepsilon_I)\vec{E}) = \frac{\omega}{2}[i\varepsilon_R(\vec{E} - \vec{E}^*) + \varepsilon_I(\vec{E} + \vec{E}^*)]. \quad (102)$$

Среднее от электрической части дивергенции

$$\overline{\operatorname{Re} \vec{E} \cdot \operatorname{Re} \dot{\vec{D}}} = \frac{\omega}{4} \left[i\varepsilon_R \left(\overline{(\vec{E}^*)^2} - \overline{(\vec{E})^2} \right) + \varepsilon_I 2 \overline{\vec{E} \cdot \vec{E}^*} \right] = \frac{\omega}{2} \varepsilon_I |\vec{E}|^2. \quad (103)$$

Аналогичное равенство справедливо для магнитной части. Из этих равенств следует, что всегда должно быть $\varepsilon_I \geq 0, \mu_I \geq 0$.

Итак, получаем

$$\overline{\operatorname{div} \vec{S}} = -\frac{\omega}{8\pi} [\varepsilon_I |\vec{E}|^2 + \mu_I |\vec{H}|^2]. \quad (104)$$

Наличие дисперсии, когда мнимые части преобразований Фурье от функций отклика не равны нулю (а следовательно, положительны) средняя дивергенция потока энергии отрицательна, то есть энергия волны убывает. Ясно, что она идет на раскачку зарядов, создающих поляризацию и намагничение, и в конце концов переходит в тепло.

§ 8. Групповая скорость

Пусть в направлении оси аппликат идет группа (набор, семейство или, как говорят физики, цуг) монохроматических волн, компоненты которых можно представить интегралом

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t + i\omega z} d\omega. \quad (105)$$

Весовая функция $A(\omega)$ имеет резкий максимум в точке $\omega = \omega_0$, так что эта группа — почти монохроматическая волна. Волновое число и частота связаны некоторым соотношением, которое называется дисперсионным. Мнимая часть преобразования функции отклика всегда мала по сравнению с вещественной, так что на небольших расстояниях поглощением можно пренебречь.

Будем считать независимой переменной ω , а частоту — функцией от нее, так что $\omega = \omega(\omega)$, $\omega_0 = \omega(\omega_0)$ и $\omega = \omega(\omega)$, $\omega_0 = \omega(\omega_0)$. Сделаем в интеграле (105) замену переменной интегрирования $\omega = \omega(\omega)$:

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega(\omega)) e^{-i\omega(\omega)t + i\omega z} \omega'(\omega) d\omega. \quad (106)$$

Поскольку волна почти монохроматическая, заметный вклад в ее амплитуду дают значения экспоненты при значениях волновых чисел, близких к ω_0 . Поэтому разложим ω в показателе экспоненты по формуле Тейлора вблизи этой точки, ограничившись первой производной:

$$\omega(\omega) \approx \omega_0 + \omega'(\omega_0)(\omega - \omega_0). \quad (107)$$

Приближение в интеграле выразится формулой

$$u(z, t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega(\omega)) e^{-i[\omega_0 + \omega'(\omega_0)(\omega - \omega_0)]t + i\omega z} \omega'(\omega) d\omega. \quad (108)$$

Возвратившись к исходной переменной ω , убедимся, что преобразованный интеграл приближенно выражается через значение первоначального в нулевой момент:

$$u(z, t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega_0 t + i\omega'(\omega_0)\omega_0 t + i\omega[z - \omega'(\omega_0)t]} d\omega = e^{-i[\omega_0 + \omega'(\omega_0)\omega_0]t} u(z - \omega'(\omega_0)t, 0). \quad (109)$$

Энергетические величины пропорциональны квадратам напряженностей, а согласно приближению (109)

$$|u(z, t)|^2 \approx |u(z - \omega'(\omega_0)t, 0)|^2. \quad (110)$$

Здесь энергия группы волн в точке с координатой z в момент t равна (приближенно) энергии, которую несла волна в начальный момент в точке с координатой, меньшей z на величину $\omega'(\omega_0)t$, то есть энергия перетекает со скоростью, которая называется групповой (индекс нуль опущен):

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{d\omega} = \frac{1}{\frac{d\omega}{d\omega}}. \quad (111)$$

Таким образом, с группой волн связаны две скорости. Одна определяет скорость распространения фазы волны и называется фазовой:

$$v_{\text{phs}} = \frac{c}{n}. \quad (112)$$

Другая соответствует перетеканию энергии, это групповая скорость, формула (111) для которой может быть переписана так:

$$v_{\text{gr}} = \frac{c}{\frac{d(\omega n)}{d\omega}}. \quad (113)$$

Фазовая скорость может быть произвольной по величине и даже превосходить скорость света, так как фаза — это формальная характеристика волны и не соответствует перемещению какого-либо сигнала или материального объекта. Напротив, групповая скорость всегда меньше световой, так как это скорость перетекания характеристики движения с группой волн — энергии. Однако, это понятие может быть введено не во всех случаях, в частности, в случае, если по формуле (113) получается скорость большая световой.

В следующих двух параграфах рассматриваются конкретные диспергирующие среды.

§ 9. Плазма как диспергирующая система

1. *Квазинейтральность плазмы.* Плазмой называется ионизованное вещество, то есть состоящее из свободных электронов и положительно заряженных ионов. В целом это нейтральная среда, так как объемный заряд образоваться не может. Если бы в каком-то объеме в результате какого-то механизма произошло разделение зарядов, то очень быстро оно было бы ликвидировано, так как силы притяжения между зарядами противоположных знаков очень велики. Конечно, на расстояниях порядка расстояний между ионами плотность заряда флюктуирует и следовательно объемные заряды существуют. Однако области, существенно большие по размерам, должны быть нейтральны. Поэтому такое свойство плазмы называется квазинейтральностью.

Обозначим концентрацию электронов через n_e и ионов сорта j с зарядом Z_j — через n_j . Тогда должно выполняться условие квазинейтральности

$$\sum_j Z_j n_j - n_e = 0. \quad (114)$$

2. *Движение электрона под действием волны в плазме.* Пусть в плазме распространяется монохроматическая волна, электрическая напряженность которой

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (115)$$

Под действием волны электроны и ионы приходят в движение и начинают колебаться около положения своего равновесия. При этом электроны и ионы движутся в противоположных направлениях, так что происходит локальное разделение зарядов, хотя в целом плазма остается нейтральной. Однако, поскольку ионы значительно массивней электронов, их отклонением от равновесия можно пренебречь и рассматривать движение одних электронов.

При написании уравнения движения электрона делаются те же предположения, что и при рассмотрении рассеяния свободными электронами. Во-первых, волна не разгоняет электрон до больших скоростей, электроны остаются нерелятивистскими. Поэтому используется нерелятивистское уравнение Ньютона. Не учитывается и магнитная часть силы Лоренца. Во-вторых, смещение электрона \vec{r} от положения равновесия не очень велико, так что амплитуда волны на всем протяжении траектории электрона можно считать постоянной.

Кроме того, предположим, что имеется тормозящая сила, происходящая из-за воздействия окружающих частиц плазмы. С некоторым приближением можно считать эту силу пропорциональной скорости движения электрона при отклонении его от равновесия, а также среднему числу столкновений, которые испытывает электрон в единицу времени. Тогда уравнение движения электрона в поле волны записывается в виде

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} - \nu_{\text{col}} m\dot{\vec{r}}. \quad (116)$$

Как всегда, общее решение линейного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Однако, общее решение однородного уравнения с течением времени из-за действия столкновений быстро затухает. Волна же существует более длительное время (при решении уравнения — все время). Поэтому достаточно найти частное решение.

Так как волна (115) монохроматическая, то есть пропорциональна экспоненте, то и решение будет пропорционально такой же экспоненте:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}. \quad (117)$$

Подставив такую форму решения в уравнение (116), найдем

$$\vec{r}_0 = \frac{e\vec{E}_0}{m\omega(\omega + i\nu_{\text{col}})}, \quad \vec{r} = \frac{e\vec{E}}{m\omega(\omega + i\nu_{\text{col}})}. \quad (118)$$

3. *Поляризация зарядов.* Из-за смещения электронов в плазме возникает поляризация зарядов, вектор которой равен произведению плотности заряда $-en_e$ на смещение электронов:

$$\vec{\mathcal{P}} = -en_e \vec{r}. \quad (119)$$

В результате в данном месте создается электрическая индукция, вектор которой

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{\mathcal{P}} = \varepsilon(\omega)\vec{E}, \quad (120)$$

где для монохроматической волны

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 n_e}{m\omega(\omega + i\nu_{\text{col}})} = 1 - \frac{4\pi e^2 n_e}{m} \frac{1}{\omega^2 + \nu_{\text{col}}^2} + i \frac{4\pi e^2 n_e}{m} \frac{\nu_{\text{col}}}{\omega} \frac{1}{\omega^2 + \nu_{\text{col}}^2} = \varepsilon_R + i\varepsilon_I. \quad (121)$$

Таким образом, для плазмы

$$\varepsilon_R = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{\text{col}}^2}, \quad \varepsilon_I = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{\text{col}}^2} \frac{\nu_{\text{col}}}{\omega}, \quad (122)$$

где введена величина, называемая плазменной частотой:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m}}. \quad (123)$$

4. *Оптические характеристики плазмы.* Обычно частота столкновений значительно меньше, чем частота волны. Поэтому можно принять, что

$$\varepsilon_R = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_I = \frac{\omega_p^2}{\omega^3} \nu_{\text{col}}. \quad (124)$$

Показатель преломления плазмы равен

$$n_R(\omega) = \sqrt{\varepsilon_R} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (125)$$

Через него выражаются как фазовая скорость

$$v_{\text{phs}} = \frac{c}{n_R(\omega)}, \quad (126)$$

так и групповая скорость

$$v_{\text{gr}} = \frac{c}{d\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = cn_R(\omega). \quad (127)$$

Поскольку показатель преломления плазмы меньше единицы, фазовая скорость превосходит скорость света, но групповая скорость всегда меньше световой. Произведение фазовой и групповой скоростей для плазмы оказывается равным квадрату скорости света.

Мнимая часть показателя преломления получается из (96)

$$n_I(\omega) = \frac{\varepsilon_I}{2n_R(\omega)} = \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\nu_{\text{col}}}{\sqrt{\omega^2 - \nu_{\text{col}}^2}} \sim \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^3} \nu_{\text{col}} \quad (128)$$

и согласно (96) определяет зависимость от частоты коэффициента поглощения плазмы

$$\alpha = 2 \frac{\omega}{c} n_I = \frac{1}{c} \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\nu_{\text{col}}}{\sqrt{\omega^2 - \nu_{\text{col}}^2}} \sim \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\nu_{\text{col}}}{c}. \quad (129)$$

Наконец, сравнение формул первой в (124) и (86) приводит к соотношению

$$\int_0^\infty \omega' \varepsilon_I(\omega') d\omega' = \frac{\pi}{2} \omega_p^2 = \frac{2\pi^2 e^2}{m} n_e. \quad (130)$$

§ 10. Дисперсия на атомах

1. *Осцилляторная модель атома.* Уровни энергии атомов рассчитываются методами квантовой механики. Однако многие явления, связанные с атомами, можно описать в рамках классической электродинамики, что и было сделано. Для этого еще до создания квантовой механики была придумана так называемая осцилляторная модель атома.

Спектры атомов наблюдались, начиная с середины девятнадцатого века. В них присутствовали атомные линии, частоты которых измерялись. В качестве первой естественной модели линии приписали ее частоту собственной частоте гармонического осциллятора. Осцилляторов понадобилось много — для каждой линии свой со своей частотой. Соответствующее уравнение для осциллятора требует введения упругой силы, иначе называемой силой Гука. Эта сила заменила кулоновскую силу, действующую на электрон.

Покажем действенность такой модели на примере описания дисперсии при взаимодействии излучения с атомом.

2. *Гармонический осциллятор.* Пусть линии с частотой ω_0 соответствует осциллятор, для которого ω_0 является собственной частотой. Тогда на электрон, чтобы он колебался с такой частотой, должна действовать сила $m\omega_0^2 \vec{r}$, где m — масса электрона, \vec{r} — его смещение от положения равновесия. Уравнение движения осциллятора в таком случае имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2 \vec{r}. \quad (131)$$

Общее решение этого уравнения

$$\vec{r} = C_+ e^{i\omega_0 t} + C_- e^{-i\omega_0 t} \quad (132)$$

или

$$\vec{r} = C_c \cos(\omega_0 t) + C_s \sin(\omega_0 t). \quad (133)$$

3. Действие волны на атомный электрон. Пусть на атом падает монохроматическая волна с частотой ω

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (134)$$

Эта волна воздействует на атомный электрон, заставляя его прийти в движение.

Кроме того, когда электрон движется, на него оказывают влияние столкновения и соприкосновение атома с другими, свободными частицами. Все эти частицы тормозят электрон. Примем, что тормозящая сила такая же, какая была принята для плазмы, то есть $-\nu_{\text{col}} m \dot{\vec{r}}$. Тогда уравнение движения атомного электрона под действием своей (гуковской) силы, силы Лоренца от падающей волны и тормозящей силы запишется в виде

$$m \ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2 \vec{r} - m\nu_{\text{col}} \dot{\vec{r}} - e\vec{E}. \quad (135)$$

Общее решение этого уравнения состоит из суммы двух слагаемых, а именно, общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения содержит две экспоненты

$$\vec{r} = C_+ \exp\left(-\left[\frac{\nu_{\text{col}}}{2} + \sqrt{\frac{\nu_l^2}{4} - \omega_0^2}\right]t\right) + C_- \exp\left(-\left[\frac{\nu_{\text{col}}}{2} - \sqrt{\frac{\nu_l^2}{4} - \omega_0^2}\right]t\right) \sim C_+ e^{-[\nu_{\text{col}}/2 + i\omega_0]t} + C_- e^{-[\nu_{\text{col}}/2 - i\omega_0]t} \quad (136)$$

и с течением времени затухает.

4. Смещение электронов и поляризация зарядов. Частное решение неоднородного уравнения находим в виде амплитуды, умноженной на ту же экспоненту, что и у волны, то есть $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$. Получается уравнение

$$(-\omega^2 - i\omega\nu_{\text{col}} + \omega_0^2)\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}, \quad (137)$$

откуда

$$\vec{r} = \frac{e}{m\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\nu_{\text{col}}} \frac{\vec{E}}{m\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\nu_{\text{col}}}. \quad (138)$$

Смещающиеся под действием волны электроны создают поляризацию зарядов. Вектор поляризации — это произведение

$$\vec{P} = -eN_e \vec{r} = -\frac{e^2}{m\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\nu_{\text{col}}} N_e, \quad (139)$$

где N_e — концентрация атомов с электронами, участвующими в создании рассматриваемой линии.

С полученным вектором поляризации создается индукция

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon(\omega)\vec{E}, \quad (140)$$

где

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\nu_{\text{col}}} N_e. \quad (141)$$

5. Оптические свойства атома. В этом пункте рассмотрим свойства атома на частотах, близких к центральной частоте ω_0 .

Как и в плазме, частота столкновений значительно меньше частоты волны, то есть $\nu_{\text{col}} \ll \omega$. В таком случае дробь в (138) принимает заметную величину только при частотах, близких к собственной, то есть можно считать, что $\omega \approx \omega_0$. Тогда разность квадратов можно разложить на множители и принять, что

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0). \quad (142)$$

Вместо (141) получится

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{2m\omega_0} \frac{\vec{E}}{\omega - \omega_0 + i\nu_{\text{col}}/2}. \quad (143)$$

Разделяя вещественную и мнимую части в выражении (143), получаем

$$\varepsilon_R(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{2m\omega_0} \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \nu_{\text{col}}^2/4} N_e, \quad \varepsilon_I = \frac{4\pi e^2}{2m\omega_0} \frac{\nu_{\text{col}}}{(\omega - \omega_0)^2 + \nu_{\text{col}}^2/4} N_e. \quad (144)$$

Следовательно, коэффициент преломления на атоме

$$n_R(\omega) = \sqrt{1 - \frac{4\pi e^2}{2m\omega_0} \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \nu_{\text{col}}^2/4} N_e}, \quad (145)$$

а коэффициент поглощения вблизи центральной частоты ω_0 (там можно считать, что $n_R = 1$)

$$\alpha(\omega) = 2 \frac{\omega_0}{c} n_I = \frac{\omega_0}{c} \varepsilon_I(\omega) = \frac{2\pi e^2}{m} \frac{\nu_{\text{col}}}{(\omega - \omega_0)^2 + \nu_{\text{col}}^2/4} N_e. \quad (146)$$

Этот коэффициент называется дисперсионным или лоренцевским. Частота ν_{col} называется шириной дисперсионной линии, а $\nu_{\text{col}}/2$ — полушириной. Если выразить расстояние по частоте от центральной частоты в полуширинах, то есть положить $\omega = \omega_0 + \frac{\nu_{\text{col}}}{2}x$, то коэффициент (146) будет пропорционален дисперсионному профилю $\frac{1}{1+x^2}$.

6. *Правило сумм.* Теперь рассмотрим, напротив, большие частоты, далекие от центральной частоты. Тогда асимптотика функции (141) на больших частотах

$$\varepsilon(\omega) \sim \varepsilon_{\text{Re}}(\omega) \sim 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{\omega^2} N_e. \quad (147)$$

Сравнивая ее с асимптотикой (86), находим так называемое правило сумм:

$$\int_0^\infty \omega' \varepsilon_I(\omega') d\omega' = \frac{2\pi^2 e^2}{m} N_e. \quad (148)$$

Таким образом, интеграл от мнимой части преобразования функции отклика пропорционален числу атомов с электронами на определенных связанных состояниях.

Аналогичное соотношение справедливо и по отношению к свободным электронам в плазме, что отражено в равенстве (130).

Заключение

На этом заканчивается первый раздел курса. Конечно, далеко не вся электродинамика изложена в этих лекциях. Многие ее главы вообще не упомянуты. Не затронуты электростатика и магнитостатика, распространение электромагнитного поля в проводниках и кристаллах, ферромагнетизм и пространственная дисперсия, дифракция и интерференция, нелинейная оптика и др.

В то же время продемонстрировано, какая математика и как используется в этой теории. Многие математические проблемы возникли в связи с задачами физики. Кое-какие математические сведения, там где они применяются, приведены для напоминания. Все выкладки проделываются на уровне строгости, обычном для физических работ.

Заметим, что в учебниках, как правило, теории электромагнитного поля в свободном пространстве и в веществе рассматриваются раздельно. Здесь это сделано вперемешку для сокращения объема изложения.

Список литературы

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики, том II. Теория поля. М., Наука, 2003, 533 с.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики, том VIII. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982, 620 с.
- [3] Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Современная электродинамика. Ч. 1. Микроскопическая теория. Москва, Ижевск. 2003.
- [4] Топтыгин И. Н. Современная электродинамика. Ч. 2. Теория электромагнитных явлений в веществе. Москва, Ижевск. 2005.
- [5] Terrell J. Invisibility of the Lorentz-contraction // Phys. Rev. 1959. Vol. 116. N 4. P. 1041–1045.
- [6] Ghisellini G. Special relativity at action in the Universe. astro-ph/9905181.
- [7] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1108 с.
- [8] Prunet S., Sethi S.K., Bouchet F. R. Cosmic microwave background polarization data and galactic foregrounds: estimations of cosmological parameters // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2000. Vol. 314. N 2. P. 348–353.
- [9] Dolgov A. D., Doroshkevich A. G., Novikov D. I., Novikov I. D. Classification of singular points in polarization field of cosmic microwave background and eigenvectors of Stokes matrix // Письма в журн. эксперим. теор. физ. 1999. Т. 69. N 6. С. 395–401.
- [10] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., Наука, 1974, 392 с.
- [11] Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. М., Наука, 1987, 488 с.