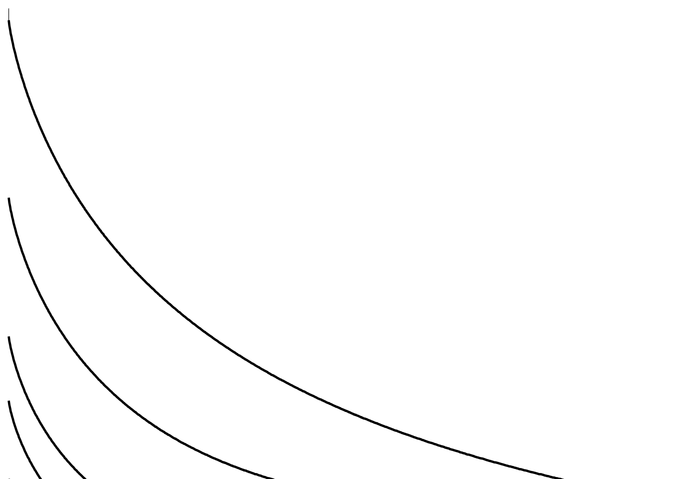
Д. И. НАГИРНЕР

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2001

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д. И. НАГИРНЕР

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Учебное пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2001

УДК 52–64
ББК 22.63
Н16

Р е ц е н з е н т ы : д-р физ.-мат. наук, проф. Ю. Н. Гнедин
(Гл. астрон. обсерв. РАН)
д-р физ.-мат. наук М. А. Лившиц (ИЗМИРАН)

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского государственного университета

Нагирнер Д.И.

Н16 **Лекции по теории переноса излучения:** Учеб. пособие. —
СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. — 147 с.
ISBN 5-288-024-59

В учебном пособии излагаются теории переноса монохроматического излучения и излучения в спектральной линии. Подробно рассматривается аналитическая теория, включая точные, асимптотические и приближенные методы решения модельных задач. Дается представленгие о некоторых распространенных численных методах.

Книга предназначена для студентов и аспирантов, специализирующихся по теоретической астрофизике, оптике атмосфер планет и Земли, физике моря и океана. Может быть полезна также оптиками и спектроскопистами.

Библиогр. 109 назв. Табл. 2. Илл. 12

Тем. план. 2000 г. № 52 ББК 22.63

ISBN 5-288-024-59

Оглавление

Посвящается светлой памяти
дорогого учителя
Виктора Викторовича Соболева

Предисловие

Излучение является основным источником информации о небесных телах, поэтому теория переноса излучения находит разнообразное применение для интерпретации фотометрических, спектральных, а также поляризационных наблюдений астрофизических объектов и геофизических экспериментов по дистанционному зондированию.

В книге излагается теория переноса монохроматического излучения, изотропного и анизотропного (глава 2), и излучения в спектральной линии с полным или частичным перераспределением по частоте (глава 4). Геометрия рассеивающих сред предполагается плоской. Рассматриваются бесконечная и полубесконечная среды, а также плоский конечный слой. Подробно излагается аналитическая теория, в том числе точные, асимптотические и приближенные методы решения модельных задач. В отдельную главу 3 выделен резольвентный метод, позволяющий найти точные выражения для основных функций, характеризующих поля излучения, и асимптотики этих функций. Дается представление о некоторых распространенных численных методах. В последней главе 5 рассматриваются задачи об определении интегральных характеристик полей излучения, таких как среднее число рассеяний, особенности рассеяния в молекулярных полосах, с частичным перераспределением по частоте, а также с учетом поляризации и движения рассеивающей среды.

Книга написана на основе спецкурсов, которые автор читал на астрономическом отделении математико–механического факультета и на кафедре физики атмосферы физического факультета СПбГУ, и является учебным пособием для студентов и аспирантов, специализирующихся по теоретической астрофизике, оптике атмосфер планет и Земли, физике моря и океана. Может быть использована также оптиками и спектроскопистами.

Это именно лекции со всеми их особенностями. В них некоторые результаты даются без вывода, в то же время многие другие в дидактических целях выводятся с бóльшими подробностями, чем это принято в монографиях. Воспроизводятся также некоторые сведения из математики, которые не читаются в общих курсах.

Теории переноса посвящено несколько монографий и ряд учебников. Ближе всего эта книга к монографиям В. В. Соболева [70,76], В. В. Иванова [31] и И. Н. Минина [44]. В данном учебном пособии многие классические результаты заимствованы из них, но приводятся также сведения, извлеченные из журнальных статей. Ссылки по возможности даются не на оригинальные работы, а на более доступные монографии или обзоры. Отмечаются лишь приоритетные и самые последние работы. Список литературы ни в коем случае не претендует на полноту. Заметим, что результаты, полученные в теории переноса излучения Школой по теоретической астрофизике академиков В. А. Амбарцумяна и В. В. Соболева, изложены в серии статей, собранных в выпуске Трудов Астрономической обсерватории С.-Петербургского университета [79].

Цель настоящего издания — ввести читателя в проблематику современной теории переноса. Для этого отобран минимум материала, определяемый объемом читавшихся курсов. Усвоившие этот материал смогут читать специальную литературу по теории переноса и ее приложениям, а также применять ее к собственным исследованиям, связанным с рассеянием света.

В изготовлении рисунков для книги мне оказали помощь Н. В. Вощинников, С. И. Грачев, В. М. Лоскутов и А. Б. Шнейвайс. Ценные замечания, направленные на улучшение текста рукописи, сделали В. М. Лоскутов и С. И. Грачев. Всем им я искренне благодарен.

Издание осуществлено при частичной поддержке гранта “Ведущие научные школы” № 00-15-96607.

Глава 1. Введение

§ 1.1. Поле излучения

1. Излучение и фотоны. Кратко напомним некоторые из основных понятий теории излучения [39,40].

Излучение — это электромагнитное поле, оторвавшееся (далеко ушедшее) от своих источников и потерявшее связь с ними. Иначе говоря, это электромагнитные волны. Энергия излучения называется также лучистой энергией.

Фотоны — элементы поля. Фотон — частица с массой покоя, равной нулю, и спином $s = 1$. Спин фотона проявляется поляризацией поля. Число проекций спина не $2s + 1 = 3$, а только 2, что, как показывается в квантовой электродинамике, является следствием равенства нулю массы покоя. Отражением наличия только двух проекций спина является поперечность поляризации электромагнитного поля в свободном пространстве (условие поперечности $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$, где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал).

Фотоны — бозоны, т. е. подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна. В одном состоянии их может находиться сколько угодно и более того: если в каком-то состоянии уже имеются фотоны, то вероятность другим фотонам перейти в такое же состояние увеличивается. Этот принцип вынужденных (индуцированных) переходов (вынужденного излучения) является противоположностью принципу запрета Паули для фермионов.

Энергия фотона (согласно предположению Планка) $h\nu$, а его импульс (по формуле Эйнштейна) $\mathbf{p} = p\boldsymbol{\omega}$, $|\boldsymbol{\omega}| = 1$, $p = h\nu/c$. Между ними выполняется соотношение $h\nu = cp$ как для всякой ультрарелятивистской частицы. В астрофизической теории переноса излучения используется не круговая, а обычная частота ν. Поэтому постоянная Планка не перечеркивается.

2. Функция распределения и интенсивность. Фотоны в теории переноса излучения трактуются квазиклассически, т. е. каждому сопоставляется импульс $\mathbf{p}$ и координаты $\mathbf{r}$. При этом считается, что на каждое состояние приходится фазовый объем $h^3/2$. Число два в знаменателе соответствует двум состояниям поляризации.

Теория переноса — кинетическая, статистическая теория. Она оперирует не с напряженностями поля, а с квадратичными по ним (энергетическими) величинами. Примерлм является функция распределения $f(\mathbf{r}, t, \mathbf{p})$. Она зависит от семи аргументов: трех пространственных координат, времени и трех составляющих импульса. Нормировка этой функции обычная: интеграл по всему импульсному пространству

$$\int f(\mathbf{r}, t, \mathbf{p})\mathrm{d}^3p = n_{\text{фот}}(\mathbf{r}, t) \tag{1}$$

равен *концентрации* фотонов, т.е. числу их в единице объема. Другой интеграл

$$\int h\nu f(\mathbf{r}, t, \mathbf{p})\mathrm{d}^3p = \rho(\mathbf{r}, t) \tag{2}$$

представляет собой *пространственную плотность* лучистой энергии.

В качестве основной характеристики поля излучения в теории переноса принимается интенсивность. Она определяется следующим образом [31,44,70]. Лучистая энергия, протекающая через перпендикулярную площадку площадью $\mathrm{d}^2\Sigma$ в телесном угле $\mathrm{d}^2\omega$ в направлении $\boldsymbol{\omega}$ за время $\mathrm{d}t$ в интервале частот от ν до $\nu + \mathrm{d}\nu$, представляется в виде произведения

$$\mathrm{d}E = I_\nu(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\omega})\mathrm{d}^2\Sigma\mathrm{d}^2\omega\mathrm{d}t\mathrm{d}\nu. \tag{3}$$

Коэффициент пропорциональности произведению дифференциалов и есть интенсивность излучения, точнее — *спектральная, или удельная, интенсивность*. Она связана простым равенством с функцией распределения, через которую лучистая энергия (3) выражается так:

$$\mathrm{d}E = h\nu f\mathrm{d}^3pc\mathrm{d}t\mathrm{d}^2\Sigma. \tag{4}$$

Так как элемент импульсного объема $\mathrm{d}^3p = p^2\mathrm{d}p\mathrm{d}^2\omega$, то

$$h\nu cf\mathrm{d}^3p = I_\nu\mathrm{d}^2\omega\mathrm{d}\nu, \quad I_\nu = \frac{h^4}{c^2}\nu^3 f. \tag{5}$$

Поскольку интенсивность — квадратичная по полю величина, считается, что пучки излучения некогерентны и складываются не напряженности их электромагнитных полей, а интенсивности.

3. Поток и плотность лучистой энергии. Интенсивность описывает поле излучения наиболее полно. Однако наряду с интенсивностью в теории переноса используются и другие величины, связанные с ней.

Возьмем единичную площадку с нормалью к ней — единичным вектором $\mathbf{n}$. Величина

$$H_{\mathbf{n}} = \int h\nu f \mathbf{n}\boldsymbol{\omega} c\mathrm{d}^3p = \int I_\nu \mathbf{n}\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}^2\omega\mathrm{d}\nu \tag{6}$$

называется *потоком лучистой энергии* в направлении $\mathbf{n}$. Он является проекцией на это направление *вектора потока*

$$\mathbf{H} = \int I_\nu \boldsymbol{\omega}\mathrm{d}^2\omega\mathrm{d}\nu. \tag{7}$$

Здесь надо брать три интеграла: по частоте и по полярным углам θ, φ, причем

$$\boldsymbol{\omega} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \quad \mathrm{d}^2\omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \tag{8}$$

Без интеграла по частоте поток называется спектральным. Интеграл от него по частоте — интегральный поток. Те же названия применяются и к другим величинам, в частности к интенсивности. Ясно, что

$$\mathbf{H}_\nu = \int I_\nu \boldsymbol{\omega}\mathrm{d}^2\omega, \quad \mathbf{H} = \int \mathbf{H}_\nu \mathrm{d}\nu. \tag{9}$$

Интегралы по углам отдельно с каждой стороны определенной площадки

$$\mathcal{E}^+_{\nu\mathbf{n}} = \int\limits_{\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}\geq 0} I_\nu \mathbf{n}\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}^2\omega \text{ и } \mathcal{E}^-_{\nu\mathbf{n}} = -\int\limits_{\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}\leq 0} I_\nu \mathbf{n}\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}^2\omega \tag{10}$$

представляют *монохроматические освещенности* этой площадки. Поток в направлении вектора $\mathbf{n}$ равен разности освещенностей:

$$H_{\nu\mathbf{n}} = \mathcal{E}^+_{\nu\mathbf{n}} - \mathcal{E}^-_{\nu\mathbf{n}}. \tag{11}$$

Спектральная и интегральная *плотности излучения* определяются согласно соотношениям (2) и (5):

$$\rho_\nu = \frac{1}{c}\int I_\nu \mathrm{d}^2\omega, \quad \rho = \frac{1}{c}\int I\mathrm{d}^2\omega, \quad \rho = \int \rho_\nu \mathrm{d}\nu = \int h\nu f\mathrm{d}^3p = \frac{1}{c}\int I_\nu \mathrm{d}^2\omega\mathrm{d}\nu. \tag{12}$$

Множители c перед интегралами по направлениям в (12) отражают тот факт, что интенсивность — характеристика текущей энергии, а плотность рассчитывается на единицу объема.

4. Частные случаи. 1) Если интенсивность не зависит от координат $I_\nu(t, \boldsymbol{\omega})$, то поле излучения называют *однородным*.

2) Мы будем изучать только поля излучения, не зависящие от времени, т. е. *стационарные*. В противном случае поля называются *нестационарными*.

3) Если интенсивность $I_\nu(\mathbf{r}, t)$ не зависит от направления, поле излучения *изотропно* и

$$\rho_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu, \quad \mathcal{E}^+_{\nu\mathbf{n}} = 2\pi I_\nu \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = \pi I_\nu. \tag{13}$$

4) Когда $I_\nu = I_{\nu_0}\delta(\nu - \nu_0)$, поле излучения — *монохроматическое*.

5) Интенсивность может изменяться с частотой достаточно медленно, тогда говорят о *непрерывном спектре* излучения. В случае наличия резких изменений в интенсивности или потоке вблизи частоты, соответствующей какому-либо дискретному переходу в излучающей системе, говорят о спектральной детали, в частности, о *спектральной линии*.

6) Когда рассматривается состояние поляризации излучения, приходится иметь дело с матрицами или векторами, характеризующими поляризацию. Если поляризацией пренебрегают, то достаточно ограничиться одной интенсивностью.

§ 1.2. Уравнение переноса

1. Феноменологический вывод. Уравнение переноса, как и другие кинетические уравнения, можно получить дедуктивно из классических уравнений Максвелла или квантовомеханического уравнения Лиувилля. Мы, следуя книгам по теории переноса [44,70], дадим простой вывод, который приводит к правильному результату, хотя и не позволяет оценить область применимости полученного уравнения.

Рассмотрим единичную площадку и излучение, идущее в телесном угле $\mathrm{d}^2\omega$ почти перпендикулярно к ней. В интервале частот $\mathrm{d}\nu$ за единицу времени через площадку пройдет энергия $I_\nu \mathrm{d}^2\omega \mathrm{d}\nu$. Будем считать, что частота излучения, свободно идущего вдоль луча, не изменяется. На расстоянии $\mathrm{d}s$ количество этой энергии может измениться в результате воздействия двух групп конкурирующих процессов. Часть фотонов может изменить свое направление или частоту или же вообще перестать существовать (т. е. перейти в другие виды энергии). Обозначим их долю от всего протекшего количества через $\alpha_\nu \mathrm{d}s$. Величина α_ν имеет размерность обратной длины и называется *объемным коэффициентом поглощения* (или ослабления) или просто *коэффициентом поглощения*.

Другие процессы, напротив, увеличивают энергию пучка излучения в этой частоте. Количество энергии ε_ν, которое излучает единичный объем в единицу времени в единичном интервале частот в единичном телесном угле, называется *излучательной способностью* среды или *коэффициентом излучения*. На протяжении пути $\mathrm{d}s$ к рассматриваемому пучку добавится энергия $\varepsilon_\nu \mathrm{d}s \mathrm{d}^2\omega \mathrm{d}\nu$.

Обозначим изменение интенсивности на том же пути через $\mathrm{d}I_\nu$. Ясно, что

$$\mathrm{d}I_\nu = -\alpha_\nu \mathrm{d}s I_\nu + \varepsilon_\nu \mathrm{d}s, \tag{14}$$

так как все остальные дифференциалы сокращаются. Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = -\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu. \tag{15}$$

Поскольку

$$I_\nu(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\omega}) + \mathrm{d}I_\nu = I_\nu(\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\mathrm{d}s, t + \mathrm{d}s/c, \boldsymbol{\omega}), \tag{16}$$

то

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nabla} I_\nu, \tag{17}$$

т. е. получается обычная комбинация производных в левой части кинетического уравнения. Производной по импульсу нет, ибо на фотоны не действуют никакие силы. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ считается постоянным, а величина скорости света c — вообще мировая константа.

Далее рассматриваем только стационарные поля излучения, так что производная по времени не появляется.

Коэффициент α_ν определяется истинным поглощением, когда фотон полностью исчезает из процесса переноса, и рассеянием, т. е. изъятием фотонов определенного импульса и переизлучением их в других частотах и направлениях.

Коэффициент ε_ν характеризует излучение, возникающее как вследствие рассеяния, так и за счет других механизмов, поставляющих фотоны.

2. Формальное решение. Предположим, что нам известны величины α_ν и ε_ν. Тогда легко разрешить линейное уравнение (15) относительно интенсивности:

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0)\exp\left(-\int\limits_{s_0}^{s} \alpha_\nu(s')\mathrm{d}s'\right) + \int\limits_{s_0}^{s} \varepsilon_\nu(s')\exp\left(-\int\limits_{s'}^{s} \alpha_\nu(s'')\mathrm{d}s''\right)\mathrm{d}s'. \tag{18}$$

Здесь интегралы берутся вдоль луча, соединяющего точки с координатами по этому лучу s_0 и s.

Выражение (18) называется *формальным решением*, так как в коэффициент излучения может входить искомая интенсивность излучения. В формуле (18) первое слагаемое соответствует излучению, подошедшему к точке с координатой s_0 и ослабленному на пути к точке s. Второе слагаемое содержит информацию об излучении, испущенном в точках s' между s_0 и s и ослабленном по дороге к той же точке наблюдения s.

Если $\alpha_\nu = 0$ и $\varepsilon_\nu = 0$, то интенсивность вдоль луча остается постоянной. Это означает, что при отсутствии поглощения и излучения по пути интенсивность от сколь угодно удаленного источника та же, что и в непосредственной близости к нему. Объяснение такого парадоксального на первый взгляд факта заключается в том, что интенсивность рассчитывается на единицу телесного угла. С увеличением расстояния r от источника полная энергии от него, т. е. поток, уменьшается пропорционально $1/r^2$. Однако и телесный угол, под которым виден источник, уменьшается точно так же.

3. Плоская геометрия. Если излучение распространяется в среде с плоской геометрией, т. е. все величины зависят от глубины z, формула (18) конкретизируется. Обозначим угол между направлением импульса фотонов и направлением роста глубины через θ. Тогда вдоль луча $s = r/\cos\theta$, и формула (18) перепишется так:

$$I_\nu(z) = I_\nu(z_0)\exp\left(-\frac{1}{\cos\theta}\int\limits_{z_0}^{z}\alpha_\nu(z')\mathrm{d}z'\right) + \frac{1}{\cos\theta}\int\limits_{z_0}^{z}\varepsilon_\nu(z')\exp\left(-\frac{1}{\cos\theta}\int\limits_{z'}^{z}\alpha_\nu(z'')\mathrm{d}z''\right)\mathrm{d}z'. \tag{19}$$

Пропорциональность величин, стоящих в показателях экспонент, $1/\cos\theta$ называется *законом Бугера*.

4. Сферическая геометрия. В этом случае все величины зависят от расстояния от начала координат r и от угла между лучом и радиальным направлением θ. В отличие от случая плоской геометрии, при которой вектор направления, а значит, и угол θ вдоль луча постоянны, при сферической геометрии радиальное направление изменяет свой угол с направлением луча, если только сам луч не радиальный. Очевидно, что вдоль луча $s = r\cos\theta$, а произведение $r\sin\theta = r_0$ постоянно, т. е. является интегралом уравнения переноса. Выразим производную по s через производные по r и θ. Для этого свяжем сферические переменные с s:

$$r = \sqrt{r_0^2 + s^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{r_0}{s}, \tag{20}$$

и найдем производные по s от них:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{s}{\sqrt{r_0^2+s^2}} = \frac{s}{r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{1}{1+r_0^2/s^2}\frac{-r_0}{s^2} = -\frac{r_0}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r}. \tag{21}$$

Тогда производная по s

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial}{\partial\theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{22}$$

Эту производную следует подставить в левую часть уравнения переноса (15). Формальное решение находится путем составления формулы для решения линейного уравнения в частных производных, причем первым интегралом его служит r_0:

$$I_\nu(r,\theta) = I_\nu(r_1,\theta_1)\exp\left(-\int\limits_{r_1\cos\theta_1}^{r\cos\theta}\alpha_\nu\left(\sqrt{s^2+r^2\sin^2\theta}\right)\mathrm{d}s\right) +$$
$$+\int\limits_{r_1\cos\theta_1}^{r\cos\theta}\varepsilon_\nu\left(\sqrt{s^2+r^2\sin^2\theta}\right)\exp\left(-\int\limits_{s}^{r\cos\theta}\alpha_\nu\left(\sqrt{s'^2+r^2\sin^2\theta}\right)\mathrm{d}s'\right)\mathrm{d}s. \tag{23}$$

§ 1.3. Баланс лучистой энергии

1. Уточнение коэффициентов. В этом параграфе уточним понятия коэффициентов излучения и поглощения. В довольно общем случае первый из них можно записать в виде

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu^0 + \int R(\nu',\boldsymbol{\omega}' \to \nu,\boldsymbol{\omega}) I_{\nu'}(\mathbf{r},t,\boldsymbol{\omega}')\mathrm{d}\nu'\mathrm{d}^2\omega'. \tag{24}$$

Первое слагаемое характеризует *источники излучения*, т. е. вклад в излучение, происходящий независимо от излучения, уже имевшегося в среде. Второе слагаемое дает вклад излучения, состоящего из тех фотонов, которые возникают из других фотонов, и описывает процесс, называемый *рассеянием*. Функция R называется *функцией перераспределения* по направлениям и частоте при рассеянии.

Функция перераспределения нормирована:

$$\int R(\nu',\boldsymbol{\omega}' \to \nu,\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}\nu\mathrm{d}^2\omega = \sigma_{\nu'}, \tag{25}$$

где σ_ν — (объемный) *коэффициент рассеяния*. Он составляет часть коэффициента поглощения

$$\alpha_\nu = \sigma_\nu + æ_\nu, \tag{26}$$

где вторая часть $æ_\nu$ — *коэффициент истинного поглощения*, при котором фотон выбывает из процесса рассеяния.

2. Уравнение переноса как кинетическое. Уравнение переноса (15) с учетом определений (24) и (26) записывается так:

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = -(\sigma_\nu + æ_\nu)I_\nu + \varepsilon_\nu^0 + \int R(\nu', \boldsymbol{\omega}' \to \nu, \boldsymbol{\omega}) I_{\nu'}(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\omega}')\mathrm{d}\nu'\mathrm{d}^2\omega'. \tag{27}$$

Если в это уравнение подставить соотношение (25) с переставленными штрихованными и нештрихованными переменными, то уравнение примет вид

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = -æ_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu^0 + \int \left[R(\nu', \boldsymbol{\omega}' \to \nu, \boldsymbol{\omega}) I_{\nu'}(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\omega}') - R(\nu, \boldsymbol{\omega} \to \nu', \boldsymbol{\omega}') I_\nu(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\omega})\right] \mathrm{d}\nu'\mathrm{d}^2\omega'. \tag{28}$$

В таком представлении уравнение переноса имеет вид уравнения Больцмана, а интеграл можно отождествить с интегралом столкновений. Различие, как уже говорилось, заключается в том, что на фотоны не действуют силы и что скорость фотонов постоянна и равна скорости света. Коэффициент истинного поглощения и функция перераспределения являются интегралами от сечений соответствующих процессов по распределениям частиц, с которыми взаимодействуют фотоны.

Отметим, что, строго говоря, под интегралом в (28) к слагаемым в квадратных скобках должны быть добавлены множители, учитывающие принцип вынужденного излучения, выполняющийся для фотонов как для бозонов. Эти множители выражаются суммами 1 и средних чисел заполнения фотонных состояний: для первого слагаемого это $\left(1 + \dfrac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu\right)$, а для второго — такой же множитель, но с частотой ν'. Первый множитель должно содержать и слагаемое, описывающее излучение фотонов не за счет рассеяния ε_ν^0. С указанными множителями уравнение переноса принимает вид

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nabla}\right] I_\nu(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\omega}) = -æ_\nu I_\nu(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\omega}) + \varepsilon_\nu^0 \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\omega})\right) +$$
$$+ \int \left[R(\nu', \boldsymbol{\omega}' \to \nu, \boldsymbol{\omega}) I_{\nu'}(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\omega}') \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu\right) - \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu'^3} I_{\nu'}\right) R(\nu, \boldsymbol{\omega} \to \nu', \boldsymbol{\omega}') I_\nu(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\omega})\right] \mathrm{d}\nu'\mathrm{d}^2\omega'. \tag{29}$$

Однако в дальнейшем, как правило, вынужденное излучение мы не учитываем, предполагая, что поле излучения не очень сильное и средние числа заполнения состояний малы по сравнению с единицей.

Из уравнения переноса в форме (29) вытекает соотношение, выражающее баланс энергии. Оно получается после интегрирования (27) по частотам и направлениям и имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{H} = \int \left[\varepsilon_\nu^0 - æ_\nu I_\nu \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\omega})\right)\right] \mathrm{d}\nu\mathrm{d}^2\omega. \tag{30}$$

Здесь левая часть равенства имеет тот же вид, что и в уравнении неразрывности, а правая есть разность между излученной первичными источниками энергией и энергией, перешедшей в другие виды вследствие истинного поглощения.

3. Два вида рассеяния. В курсе подробно будут рассмотрены два вида рассеяния и соответственно два вида функций перераспределения.

1) *Монохроматическое рассеяние*, когда

$$R(\nu', \boldsymbol{\omega}' \to \nu, \boldsymbol{\omega}) = \sigma_\nu \delta(\nu' - \nu) \frac{x(\gamma)}{4\pi}, \tag{31}$$

где γ — угол рассеяния, $\cos\gamma = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}'$, а $x(\gamma)$ — функция, называемая *индикатрисой рассеяния* и нормированная на 1:

$$\int x(\gamma) \frac{\mathrm{d}^2\omega}{4\pi} = 1. \tag{32}$$

Такое рассеяние происходит на молекулах газа (или, точнее, на флуктуациях плотности) и более крупных частицах (пылинках).

2) *Рассеяние с полным перераспределением по частоте*, т. е. при

$$R(\nu', \boldsymbol{\omega}' \to \nu, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{4\pi} C_\sigma \sigma_\nu \sigma_{\nu'}, \tag{33}$$

где C_σ — нормировочная константа:

$$C_\sigma \int \sigma_\nu \mathrm{d}\nu = 1. \tag{34}$$

Такая функция перераспределения является хорошим приближением для описания рассеяния в спектральных линиях атомов. Здесь не принимается во внимание отдача, т. е. изменение энергии фотона из-за того, что часть ее уходит на изменение скорости атома. Это изменение вследствие большой массы атомов очень мало.

§ 1.4. Поле излучения при термодинамическом равновесии

1. Состояние термодинамического равновесия. При термодинамическом равновесии (ТДР) выполняется условие детального баланса, когда все процессы уравновешиваются обратными им. Тогда состояние всех ансамблей частиц характеризуется одним параметром — температурой T. В этом случае справедливы следующие четыре закона, называемые по формулам, которыми они выражаются (см., например, [40] или [31]).

1) ***Формула Максвелла***. Справедлива формула Максвелла, дающая распределение частиц по скоростям. Это означает, что число частиц $\mathrm{d}n$ любого сорта массой m со скоростями от v до $v+\mathrm{d}v$ определяется формулой

$$\mathrm{d}n = n\frac{4\pi m^3 v^2 \mathrm{d}v}{(2\pi m k_\mathrm{B} T)^{3/2}} e^{-mv^2/(2k_\mathrm{B}T)}, \tag{35}$$

где $k_\mathrm{B} = 1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К — постоянная Больцмана.

2) ***Формула Больцмана***. Распределение атомов (или ионов, или молекул) по состояниям возбуждения определяется формулой Больцмана. Степень возбуждения (т. е. отношение населенностей уровней — концентраций атомов в двух энергетических состояниях) верхнего уровня с энергией E_u и статистическим весом g_u по отношению к нижнему уровню с энергией $E_\mathrm{l} < E_\mathrm{u}$ и весом g_l такова:

$$\frac{n_\mathrm{u}}{n_\mathrm{l}} = \frac{g_\mathrm{u}}{g_\mathrm{l}} e^{-(E_\mathrm{u}-E_\mathrm{l})/k_\mathrm{B}T}. \tag{36}$$

3) ***Формула ионизации Саха***. Относительные населенности двух последовательных стадий ионизации (n^+ — концентрация ионов, n_1 — концентрация “атомов” в основном состоянии) некоторого элемента определяются формулой ионизации, или формулой Саха:

$$n_\mathrm{e}\frac{n^+}{n_1} = 2\frac{g^+}{g_1}\frac{(2\pi m k_\mathrm{B} T)^{3/2}}{h^3} e^{-\chi_1/k_\mathrm{B}T}. \tag{37}$$

Здесь g^+ и g_1 — статистические веса иона и атома в основном состоянии, $\chi_1 > 0$ — энергия ионизации атома из основного состояния.

4) ***Формула Планка***. Распределение излучения по частоте дается формулой Планка. Для интенсивности эта формула следующая:

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/k_\mathrm{B}T} - 1}. \tag{38}$$

Формула Планка следует из уравнения переноса излучения. Действительно, при ТДР интенсивность во всем объеме, где имеется поле излучения, не зависит ни от времени, ни от направления, ни от места в этом объеме. Поэтому вдоль луча $\mathrm{d}I_\nu/\mathrm{d}s = 0$, $\mathbf{H} = 0$ и $\varepsilon_\nu^0[1 + c^2 I_\nu/(2h\nu^3)]) = æ_\nu I_\nu$. Функция же перераспределения в самом общем случае удовлетворяет соотношению

$$\frac{R(\nu', \boldsymbol{\omega}' \to \nu, \boldsymbol{\omega})}{R(\nu, \boldsymbol{\omega} \to \nu', \boldsymbol{\omega}')} = \frac{\nu^3}{\nu'^3}\exp\left(\frac{-h(\nu-\nu')}{k_\mathrm{B}T}\right). \tag{39}$$

Множители ν^3 возникают из-за того, что элемент объема в пространстве импульсов пропорционален ν^2, а энергия фотона пропорциональна ν (см. также формулу (5)). Экспонента учитывает изменение энергии фотона вследствие отдачи, которой обычно пренебрегают, как было сделано в (28).

С учетом (39), а также множителей, отражающих принцип вынужденного излучения, о которых говорилось в предыдущем параграфе, из условия детального баланса, примененного к уравнению переноса (27), вытекает равенство нулю подынтегрального выражения в интеграле столкновений. Разделив в этом равенстве дроби с одинаковыми частотами, найдем

$$\frac{[c^2/(2h\nu^3)]I_\nu}{1 + [c^2/(2h\nu^3)]I_\nu}\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) = \frac{[c^2/(2h\nu'^3)]I_{\nu'}}{1 + [c^2/(2h\nu'^3)]I_{\nu'}}\exp\left(\frac{h\nu'}{k_\mathrm{B}T}\right). \tag{40}$$

Следовательно, дроби равны общей постоянной. Обозначив ее $e^{\mu/k_\mathrm{B}T}$, получим для интенсивности формулу Бозе—Эйнштейна. То обстоятельство, что это не обязательно формула Планка, отражает сохранение числа фотонов при рассеянии. Однако коэффициенты первичного излучения и истинного поглощения фотонов во внеинтегральных слагаемых подчиняются соотношению Кирхгофа, которое при учете вынужденного излучения в уравнении имеет вид $\varepsilon_\nu^0/\text{æ}_\nu = (2h\nu^3/c^2)e^{-h\nu/k_\text{B}T}$. Из указанного соотношения следует, что химический потенциал фотонного газа $\mu = 0$ и интенсивность определяется формулой Планка (38).

2. Свойства равновесного излучения. Из (38) как предельные случаи при $h\nu/(k_\text{B}T) \ll 1$ и $h\nu/(k_\text{B}T) \gg 1$ соответственно следуют формулы Рэлея—Джинса и Вина.

Согласно формуле (13), связывающей плотность энергии с изотропной интенсивностью, эта плотность в состоянии равновесия

$$\rho_\nu = \frac{4\pi}{c}B_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k_\text{B}T} - 1}, \tag{41}$$

а интегральная плотность

$$\rho = \int\limits_0^\infty \rho_\nu \mathrm{d}\nu = a_\S BT^4, \quad a_\text{SB} = \frac{8\pi^5 k_\text{B}^4}{15h^3c^3}. \tag{42}$$

Наконец, освещенность площадки в равновесном поле излучения, или, что то же самое, интегральный поток, выходящий из полости с равновесным излучением, составляет

$$\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_- = \pi\frac{c\rho}{4\pi} = \frac{a_\text{SB}c}{4}T^4. \tag{43}$$

Формулы (42) и (43) называются законами Стефана—Больцмана, а константа a — постоянной Стефана. Выполняется также закон смещения Вина, согласно которому максимум функции Планка достигается при $\nu_\text{мкс} = 2.821439372122 k_\text{B}T/h$.

Иногда в качестве основной переменной используется не частота, а длина волны λ. Тогда спектральная плотность излучения, например, дается формулой

$$\rho_\lambda^* = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/(\lambda k_\text{B}T)} - 1}. \tag{44}$$

Дополнительный множитель c/λ^2 возникает из-за замены дифференциалов. Функция (44) принимает максимальное значение при $hc/(\lambda_\text{мкс}k_\text{B}T) = 4.965114231744$. Точки максимумов по частоте и длине волны не соответствуют друг другу, так как это максимумы разных функций. Точка же, разделяющая площадь под планковской кривой на две равные части, одна, т.е. частота и длина волны этой точки определяются одной формулой: $h\nu_{1/2}/(k_\text{B}T) = hc/(\lambda_{1/2}k_\text{B}T) = 3.503018826$. С ростом температуры кривая ρ_ν смещается вправо вверх и становится шире, а кривая ρ_λ^* смещается влево вверх и сужается (в целом).

Глава 2. Монохроматическое рассеяние

Монохроматическое рассеяние — это простейший случай, когда в ходе рассеяния частота излучения не изменяется. С его исследования началось развитие теории переноса, и довольно долгое время он оставался единственным объектом изучения этой теории. Полученные результаты изложены в ряде монографий, например [70,76,85].

Предположение о монохроматичности рассеяния является хорошим приближением к реальности для случаев рассеяния излучения в континууме на молекулярных газах и частицах. С высокой точностью оно выполняется в атмосферах планет (и в частности, Земли) в видимом диапазоне спектра. Методы решения задач о монохроматическом рассеянии послужили фундаментом для исследования более сложных случаев рассеяния и представляют большой исторический и методологический интерес. Поэтому начнем курс теории переноса, как это обычно делается, с изложения методов и результатов решения задач, связанных с монохроматическим рассеянием.

Поскольку частота излучения в ходе рассеяния не изменяется, ее можно фиксировать и рассматривать поле излучения в каждой частоте независимо от других. В таком случае можно не указывать частоту ν в индексах характеристик поля излучения и обозначать интенсивность не I_ν, а просто I, коэффициент поглощения не α_ν, а α и т. д.

Рассмотрим сначала, от каких величин зависит характер монохроматического переноса излучения.

§ 2.1. Поглощение и рассеяние

1. Рассеяние на молекулах. Изучение рассеяния этого вида было начато Д. Рэлеем примерно сто лет назад. Он получил выражения для коэффициента рассеяния на молекулах и для индикатрисы рассеяния. Для газов в обычных условиях формулу Рэлея для коэффициента рассеяния можно записать в виде

$$\sigma_{\text{мол}} = \frac{24\pi^3 R^2_{\text{мол}}}{N_A^2} \left(\frac{\nu}{c}\right)^4 n_{\text{мол}}, \tag{1}$$

где ν — частота рассеиваемого излучения, c — скорость света, $n_{\text{мол}}$ — концентрация молекул, $N_A = 6.06 \cdot 10^{23}$ 1/моль — число Авогадро. Величина $R_{\text{мол}}$ — так называемая поляризуемость молекул газа. Например, для углекислого газа CO_2 эта величина $R_{\text{мол}} = 6.66$, а для воздуха ее значение $R_{\text{мол}} = 4.40$ получается как среднее из значений для составляющих газов.

Впоследствии Ж. Кабанн показал, что в выражение (1) надо добавить поправочный множитель $(6+3\delta)/(6-7\delta)$, где δ — фактор деполяризации. Однако этот множитель очень близок к единице, так как в обычных условиях $\delta \approx (3 \div 9) \cdot 10^{-2}$, т. е. достаточно мал.

Отметим, что отношение c/ν — это длина волны излучения, для которой мы здесь, однако, не вводим традиционного обозначения λ, резервируя эту букву для другой величины, играющей большую роль именно в теории переноса. Обратная пропорциональность коэффициента рассеяния четвертой степени длины волны лежит в основе объяснения голубого цвета неба земной атмосферы.

Рэлеем было получено и выражение для индикатрисы рассеяния:

$$x_{\text{R}}(\gamma) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\gamma). \tag{2}$$

Такая индикатриса называется *рэлеевской.*

Необходимо заметить, что формально рассуждения Рэлея были неверны, так как фактически рассеяния на молекулах не происходит. На самом деле рассеяние в газовой среде, как было показано после построения статистической физики, происходит на флуктуациях концентрации молекул. Известно, что в нормальных условиях в 1 кубическом сантиметре газа находится в среднем $\approx 2.7 \cdot 10^{19}$ молекул. Число флуктуирует, и характерная величина флуктуации составляет 10^{10} молекул. Эта большая сама по себе величина совершенно ничтожна по сравнению со средним числом молекул. Однако именно такие флуктуации и определяют рассеяние в газовой среде. При этом формулы для коэффициента рассеяния и индикатрисы оказались справедливыми. Более подробно об этом см. в книге [44].

2. Рассеяние на частицах. Под частицами понимаются образования, содержащие большое число молекул. Это могут быть частицы, состоящие из жидкости, например воды, или пылинки, т. е. твердые тела. Общее их название — *золь.* Золь в жидкостях называют гидрозоль, в воздухе — аэрозоль.

Изучению рассеяния на частицах посвящено множество работ, в том числе несколько монографий (см., например, [25,81, 86]). Сначала оно изучалось в предположении, что частицы — однородные шарики. Коэффициент рассеяния обычно представляется в виде

$$\sigma_{\text{чст}} = k_{\text{sca}} n_{\text{чст}}, \tag{3}$$

где $n_{\text{чст}}$ — концентрация частиц, а k_{sca} — сечение рассеяния. В свою очередь сечение рассеяния, т. е. величина, рассчитываемая для одной частицы, записывается так:

$$k_{\text{sca}} = \pi a^2 Q_{\text{sca}}(\beta). \tag{4}$$

Здесь a — радиус частицы, $\beta = 2\pi a\nu/c$ — отношение длины окружности с таким радиусом к длине волны рассеиваемого излучения. Безразмерная величина Q показывает, насколько сечение отличается от геометрического сечения частицы (т. е. площади круга радиусом a) и называется *фактором эффективности.* Величина Q_{sca} — фактор эффективности рассеяния.

Если радиус частицы мал по сравнению с длиной волны, т. е. величина $\beta \ll 1$, то для фактора эффективности может быть получена общая формула

$$Q_{\text{sca}}(\beta) = \frac{8}{3}\beta^4 \left|\frac{n^2-1}{n^2+2}\right|^2, \tag{5}$$

где $n = n_{\text{r}} + in_{\text{i}}$ — комплексный показатель преломления вещества частицы. Его мнимой части n_{i} пропорционален коэффициент истинного поглощения $æ_{\text{чст}}$. В сумме с коэффициентом рассеяния он составляет коэффициент ослабления, называемый также, как уже отмечалось, и коэффициентом поглощения:

$$\alpha_{\text{чст}} = \sigma_{\text{чст}} + æ_{\text{чст}}. \tag{6}$$

Соответственно сумма двух факторов эффективности: рассеяния Q_{sca} и истинного поглощения $Q_{\text{abs}} = \dfrac{æ_{\text{чст}}}{n_{\text{чст}}\pi a^2}$ — называется *фактором эффективности ослабления (экстинкции)*: $Q_{\text{ext}} = Q_{\text{sca}} + Q_{\text{abs}}$.

Отметим, что рассеяние на частицах, размер которых значительно меньше длины волны рассеиваемого излучения, близко́ по характеристикам к молекулярному. Коэффициент рассеяния, так же как и в случае газов, пропорционален четвертой степени частоты. Индикатриса в обоих случаях также одинаковая — рэлеевская.

В случае более крупных частиц, т. е. при $\beta \sim 1$ или $\beta > 1$, расчет факторов эффективности более труден. Для сферических частиц приходится суммировать ряды по бесселевым функциям. Чем больше β, тем больше слагаемых в разложениях необходимо просуммировать. Теория рассеяния на шарах произвольного размера и само это рассеяние по традиции связывается с именем одного из первых создателей этой теории Г. Ми. Массовые расчеты для рассеяния Ми оказалось возможным производить только после создания быстродействующих электронных вычислительных машин. Для частиц другой формы расчеты еще сложнее.

Надо заметить, что индикатриса Рэлея симметрична относительно рассеяния вперед и назад. При увеличении β растет вытянутость индикатрисы вперед. Это объясняется тем, что при рассеянии излучения с длиной волны, меньшей размера частицы, происходит дифракция на ее поверхности, что и приводит к увеличению доли излучения, идущего в направлении падающего.

С ростом β наблюдается и другой эффект, а именно, закон пропорциональности четвертой степени частоты сменяется более слабой зависимостью от частоты вплоть до первой степени. Водяные частицы вообще рассеивают свет нейтрально, и поэтому облака выглядят белыми.

Характеристики рассеяния рассчитываются и для более сложных случаев. Рассматривались неоднородные частицы, например, состоящие из силикатного ядра и ледяной оболочки. Имеются также расчеты для цилиндрических и сфероидальных частиц [108,109]. Сфероидальные частицы рассматривались как сплюснутые, так и вытянутые, в частности, их предельные случаи — частицы лепешки и иголки. В работе [108] дана информация о расчетах оптических свойств пылинок различной формы.

Большой интерес для изучения космической пыли представляет модель пылинки, состоящей из силиката, оптические свойства которого, в частности показатель преломления, определены по наблюдениям (астрономический силикат). Представление о ходе изменения факторов эффективности пылинок астрономического силиката (астросил) размером $a = 0.1$ мкм в зависимости от обратной длины волны дает рис. 1. На рис. 2 отражено изменение с длиной волны альбедо частицы λ и величины g, о которой будет сказано несколько ниже, тех же пылинок.

После расчетов для частицы определенного радиуса, вообще говоря, необходимо усреднить результаты по распределению частиц по размерам. В качестве плотности распределения по размерам в разное время брались различные функции, например нормально-логарифмическое распределение

$$f(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\beta\,\beta} \exp\left(-\frac{\ln^2(\beta/\overline{\beta})}{2(\Delta\beta)^2}\right). \tag{7}$$

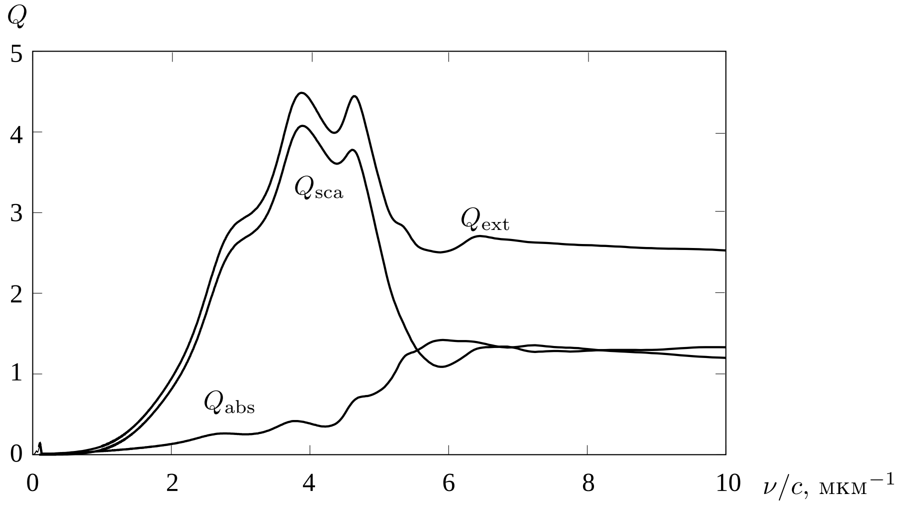


Рис. 1. Факторы эффективности поглощения, рассеяния и ослабления частиц астросила радиусом 0.1 мкм.

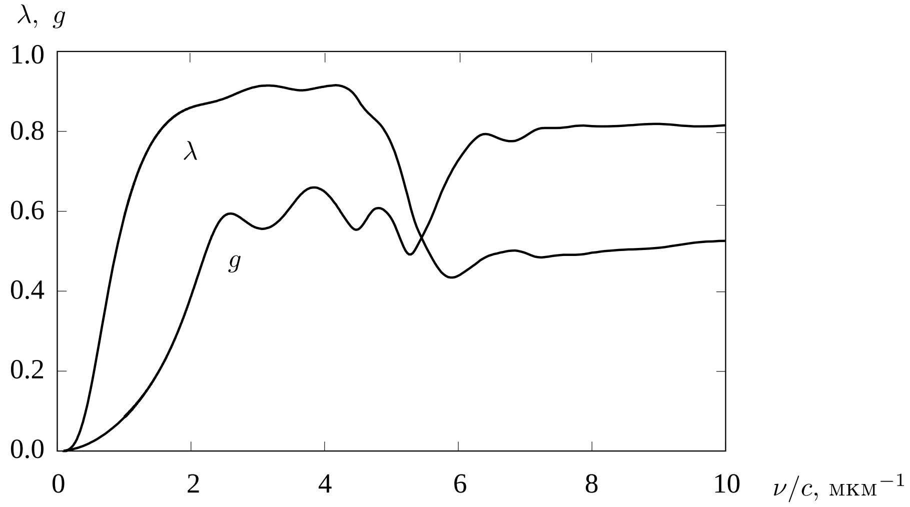


Рис. 2. Альбедо частицы и средний косинус индикатрисы рассеяния частиц астросила радиусом 0.1 мкм.

Здесь средней величиной является не $\overline{\beta}$, а ее логарифм $\ln\overline{\beta}$, а стандартом $\Delta\beta$ — также отклонение в логарифме. В последние годы широко используется распределение

$$f(\beta) = \frac{(s+1)^{s+1}}{s!\overline{\beta}}\left(\frac{\beta}{\overline{\beta}}\right)^s e^{-(s+1)\beta/\overline{\beta}}. \tag{8}$$

Для получения средних коэффициентов и индикатрис необходимо вычислить интегралы с приведенными весовыми функциями. Более подробное изложение истории создания теории однократного рассеяния можно найти в книге И. Н. Минина [44].

3. Модельные индикатрисы рассеяния. Индикатрисы рассеяния определяются как теоретически, путем расчетов, так и путем лабораторных измерений, для чего используются лазеры. Для дальнейшего применения индикатрисы рассеяния представляют в виде разложений по многочленам Лежандра:

$$x(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_i(\cos\gamma). \tag{9}$$

В силу нормировки индикатрис всегда $x_0 = 1$.

Перечислим некоторые виды модельных индикатрис, наиболее употребительных в теории переноса.

1) *Сферическая индикатриса*

$$x(\gamma) = 1. \tag{10}$$

Рассеяние с такой индикатрисой называется изотропным.

2) ***Простейшая несферическая индикатриса***

$$x(\gamma) = 1 + x_1 \cos\gamma,\ \ |x_1| \leq 3. \tag{11}$$

Ее также называют двучленной.

3) $n+1$**–*членная индикатриса***

$$x(\gamma) = \sum_{i=0}^{n} x_i P_i(\cos\gamma). \tag{12}$$

4) ***Рэлеевская индикатриса***

$$x(\gamma) = x_{\mathrm{R}}(\gamma) = \frac{3}{4}(1+\cos^2\gamma) = 1 + \frac{1}{2}P_2(\cos\gamma). \tag{13}$$

Она является частным случаем трехчленной.

Приведенные до сих пор индикатрисы имели конечное (в частности, малое) число слагаемых в разложении вида (9). Однако применяются модельные индикатрисы и с бесконечным числом слагаемых. Таким примером является следующая индикатриса.

5) ***Индикатриса Хеньи—Гринстейна:***

$$x_{\mathrm{HG}}(\gamma) = \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g\cos\gamma)^{3/2}} = \sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)g^i P_i(\cos\gamma). \tag{14}$$

Здесь $|g| < 1$. Чем ближе $|g|$ к единице, тем эта индикатриса более вытянута: при $g > 0$ вперед, при $g < 0$ — назад.

6) ***Игольчатая индикатриса***

$$x(\gamma) = 2\delta(\cos\gamma - 1) \tag{15}$$

предписывает рассеяние только вперед. Она представляет собой, как видно из формул (14) и (15), предельный случай индикатрисы Хеньи—Гринстейна при $g \to 1$.

7) ***Индикатриса “вперед–назад”***

$$x(\gamma) = 2x\delta(\cos\gamma - 1) + 2(1-x)\delta(\cos\gamma + 1). \tag{16}$$

Эта индикатриса является линейной комбинацией двух предельных случаев (14): при $g \to 1$ и $g \to -1$. Форма весовых множителей x и $1-x$, где $x \geq 0$ — параметр, определяется условием нормировки.

Как и в последнем случае, всегда можно взять линейную комбинацию двух или большего числа частных индикатрис с весами, подчиняющимися условию нормировки.

Т а б л и ц а 1. Индикатрисы рассеяния

	Параметры β и g											
γ	0	0.0	1	0.18	2	0.67	3	0.77	6	0.84	12	0.95
0°	1.5000		2.2406		5.5234		10.5692		35.8138		59.8164	
30°	1.3125		1.8672		3.9278		5.3228		1.6166		1.9346	
60°	0.9375		1.1530		1.4566		0.5322		0.2686		0.3242	
90°	0.7500		0.7240		0.2996		0.0998		0.1020		0.1110	
120°	0.9375		0.7006		0.0282		0.0910		0.0780		0.1700	
150°	1.3125		0.8334		0.0318		0.0302		0.1324		0.6764	
180°	1.5000		0.9010		0.0612		0.0518		0.1002		0.6240	

Еще один способ приближенного представления индикатрис заключается в вычислении для реальной индикатрисы среднего косинуса

$$g = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos\gamma x(\gamma)\sin\gamma \mathrm{d}\gamma \tag{17}$$

и замена этой индикатрисы модельной индикатрисой (14).

В табл. 1 представлено несколько индикатрис рассеяния, а именно: рэлеевская и индикатрисы Ми при значении показателя преломления 1.33, соответствующем воде в видимой части спектра, и различных значениях параметра β. Зависимость величины g от длины волны для пылинок из астросила изображена на рис. 2.

§ 2.2. Уравнения переноса излучения

1. Модель. Как уже говорилось, в этой главе рассматривается монохроматическое рассеяние, т. е. считается, что функция перераспределения излучения по частоте при рассеянии пропорциональна $\delta(\nu' - \nu)$. Таким образом, частота излучения фиксирована и не будет указываться в качестве аргумента всех функций. Перечислим основные предположения, которые обычно делаются при рассмотрении этого вида рассеяния.

1) ***Изотропия среды.*** Это означает, что коэффициенты рассеяния и истинного поглощения, а следовательно, и коэффициент поглощения не зависит от направления.

2) ***Плоская геометрия***. Рассматривается плоская атмосфера с параллельными нижней и верхней граничными плоскостями. Уровни в атмосфере задаются глубиной z, отсчитываемой от некоторого уровня. Нижняя граница соответствует значению $z = z_0$. Что касается верхней границы, то условно сопоставим ей значение $z = 0$. Условность этого заключается в том, что иногда геометрическую протяженность атмосферы считают бесконечной. В таком случае будем предполагать, что глубина изменяется от $-\infty$ через 0 до $z_0 > 0$.

3) ***Горизонтальная однородность поля излучения***. Вдобавок к предположению о плоской геометрии атмосферы предполагаем, что вообще все характеристики поля излучения зависят только от одной пространственной координаты — глубины. Таким образом, предполагается плоская симметрия поля излучения.

Вводятся два угла, характеризующие направления в атмосфере: зенитное расстояние θ — угол, отсчитываемый от направления возрастания глубины, и азимут φ по отношению к некоторому фиксированному направлению. Тогда единичный вектор, задаваемый этими углами, представляется такими координатами:

$$\boldsymbol{\omega} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta). \tag{18}$$

Интенсивность излучения является функцией глубины и направления: $I(z, \boldsymbol{\omega})$.

2. Интегродифференциальное уравнение переноса. Уравнение переноса излучения для монохроматического рассеяния принимает вид

$$\cos\theta\frac{\partial I(z,\boldsymbol{\omega})}{\partial z} = -\alpha(z)I(z,\boldsymbol{\omega}) + \varepsilon(z,\boldsymbol{\omega}). \tag{19}$$

Уравнение баланса энергии записывается через индикатрису:

$$\varepsilon(z,\boldsymbol{\omega}) = \varepsilon_0(z,\boldsymbol{\omega}) + \sigma\int x(\gamma)I(z,\boldsymbol{\omega}')\frac{\mathrm{d}^2\omega'}{4\pi}. \tag{20}$$

Интеграл берется по всем направлениям рассеиваемого излучения $\boldsymbol{\omega}'$. Угол рассеяния определяется своим косинусом

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'). \tag{21}$$

Объединение двух уравнений дает одно интегродифференциальное уравнение переноса. Поскольку оно дифференциальное, к нему надо добавить некоторые условия. В теории переноса в соответствии с характером задач это, как правило, не начальные, а граничные условия, т. е. эти задачи являются не задачами Коши, а краевыми задачами, решать которые труднее. Обычно задаются внешние источники излучения, т. е. интенсивности излучения, падающего на границы атмосферы извне. Это две функции направления

$$I(0,\boldsymbol{\omega}) = I_0(\boldsymbol{\omega}), \quad 0 \le \theta \le \pi/2, \tag{22}$$

$$I(z_0,\boldsymbol{\omega}) = I_r(\boldsymbol{\omega}), \quad \pi/2 \le \theta \le \pi. \tag{23}$$

Вообще говоря, граничные поверхности (в случае планетных атмосфер только нижняя) могут отражать падающее на них излучение. Тогда функции I_0 и I_r сами зависят от I. Однако мы предположим, что отражение отсутствует и эти две функции известны.

3. Другие обозначения. Для упрощения уравнений и уменьшения числа входящих в них функций вводятся специальные обозначения. Косинус зенитного угла обозначается одной буквой: $\cos\theta = \eta$. Тогда элемент телесного угла $\mathrm{d}^2\omega' = \mathrm{d}\eta'\mathrm{d}\varphi'$, а косинус угла рассеяния

$$\cos\gamma = \eta\eta' + \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-(\eta')^2}\cos(\varphi - \varphi'). \tag{24}$$

Вводится безразмерная величина — *оптическая глубина* слоев атмосферы. Она связывается с геометрической глубиной через дифференциалы:

$$\mathrm{d}\tau = \alpha(z)\mathrm{d}z, \tag{25}$$

так что

$$\tau = \int\limits_{0(-\infty)}^{z} \alpha(z')\mathrm{d}z'. \tag{26}$$

Второй нижний предел соответствует случаю протяженности атмосферы до бесконечности. Наибольшее значение глубины называется *оптической толщиной* атмосферы:

$$\tau_0 = \int\limits_0^{z_0} \alpha(z')\mathrm{d}z'. \tag{27}$$

Далее уравнения (19) и (20) делятся на α и вводятся обозначения для двух отношений. Отношение коэффициентов рассеяния и поглощения

$$\frac{\sigma}{\alpha} = \frac{\sigma}{\sigma + æ} = \lambda \leq 1 \tag{28}$$

называется либо *вероятностью выживания фотона*, либо *альбедо однократного рассеяния*, либо *альбедо частицы*. Наиболее удачно второе название, хотя оно несколько длинновато. Будем предполагать, что величина λ не зависит от глубины. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы зависимости коэффициентов рассеяния и истинного поглощения от глубины были пропорциональны одной и той же функции глубины.

Отношение коэффициентов излучения и поглощения

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = B \tag{29}$$

также имеет в теории переноса специальное название — *функция источников*. Смысл этого названия в том, что известная величина ε_0, как и известные интенсивности падающего извне излучения I_0 и I_r, являются источниками первичного излучения, которое затем в ходе рассеяний преобразуется в излучение других направлений, частично переходит в другие виды энергии, но при этом может накапливаться в атмосфере. Функция B определяется этими источниками, что и оправдывает ее название. Очевидно и обозначение

$$\frac{\varepsilon_0}{\alpha} = B_0. \tag{30}$$

В то время как коэффициенты излучения ε_0 и ε рассчитываются на единичный объем, функции источников рассчитываются на единичную горизонтальную площадку и единицу оптической глубины, что следует из соотношений $\varepsilon_0\mathrm{d}z = B_0\mathrm{d}\tau$ и $\varepsilon\mathrm{d}z = B\mathrm{d}\tau$.

После введения указанных обозначений в качестве аргументов интенсивности и функции источников примем оптическую глубину и два угла: $I = I(\tau, \eta, \varphi),\ B = B(\tau, \eta, \varphi)$. Хотя, конечно, от z и от τ интенсивность зависит по-разному, мы не изменяем ее обозначение.

В результате введения новых обозначений уравнения (19) и (20) перепишутся так:

$$\eta\frac{\partial I(\tau,\eta,\varphi)}{\partial \tau} = -I(\tau,\eta,\varphi) + B(\tau,\eta,\varphi), \tag{31}$$

$$B(\tau,\eta,\varphi) = B_0(\tau,\eta,\varphi) + \lambda\int x(\gamma)I(\tau,\eta',\varphi')\frac{\mathrm{d}^2\omega'}{4\pi}. \tag{32}$$

Соответственно и граничные условия представятся через значения оптической глубины:

$$I(0,\eta,\varphi) = I_0(\eta,\varphi),\ \eta > 0, \qquad I(\tau_0,\eta,\varphi) = I_r(\eta,\varphi),\ \eta < 0. \tag{33}$$

4. Отделение прямого излучения от диффузного. Удобно отделить излучение, которое идет непосредственно от источников, от испытавшего хотя бы одно рассеяние. Для этого запишем в новых обозначениях формальное решение уравнения переноса

$$I(\tau,\eta,\varphi) = \begin{cases} I_0(\eta,\varphi)e^{-\tau/\eta} + \int\limits_0^{\tau} B(\tau',\eta,\varphi)e^{-(\tau-\tau')/\eta}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta},\ \eta > 0, \\ I_r(\eta,\varphi)e^{-(\tau-\tau_0)/\eta} - \int\limits_{\tau}^{\tau_0} B(\tau',\eta,\varphi)e^{-(\tau-\tau')/\eta}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta},\ \eta < 0. \end{cases} \tag{34}$$

Выделим излучение, идущее от источников. Его интенсивность состоит из двух слагаемых. Во-первых, это внеинтегральные слагаемые в формулах (34), а во-вторых, интегралы в тех же формулах, но только от источниковой части функции источников, т.е. от B_0. Таким образом, представим полную интенсивность суммой интенсивностей излучения от источников (со значком *) и диффузного излучения (с индексом "диф"). Так же поступим и с функцией $B(\tau,\eta,\varphi)$, выделив из нее источниковое слагаемое. Итак,

$$I(\tau,\eta,\varphi)=I_*(\tau,\eta,\varphi)+I_{\text{диф}}(\tau,\eta,\varphi), \tag{35}$$

$$B(\tau,\eta,\varphi)=B_0(\tau,\eta,\varphi)+B_{\text{диф}}(\tau,\eta,\varphi). \tag{36}$$

Здесь $I_*(\tau,\eta,\varphi)$ — интенсивность, определяемая непосредственно источниками:

$$I_*(\tau,\eta,\varphi)=\begin{cases} I_0(\eta,\varphi)e^{-\tau/\eta}+\displaystyle\int\limits_0^\tau B_0(\tau',\eta,\varphi)e^{-(\tau-\tau')/\eta}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta},\ \eta>0,\\ I_r(\eta,\varphi)e^{(\tau_0-\tau)/\eta}-\displaystyle\int\limits_\tau^{\tau_0} B_0(\tau',\eta,\varphi)e^{-(\tau-\tau')/\eta}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta},\ \eta<0. \end{cases} \tag{37}$$

Интенсивность же диффузного излучения определяется только диффузной частью функции источников, т. е. подчиняется уравнению

$$\eta\frac{\partial I_{\text{диф}}(\tau,\eta,\varphi)}{\partial\tau}=-I_{\text{диф}}(\tau,\eta,\varphi)+B_{\text{диф}}(\tau,\eta,\varphi), \tag{38}$$

которое имеет формальное решение, не содержащее внеинтегральных слагаемых:

$$I_{\text{диф}}(\tau,\eta,\varphi)=\begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^\tau B_{\text{диф}}(\tau',\eta,\varphi)e^{-(\tau-\tau')/\eta}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta}, \quad \eta>0,\\ -\displaystyle\int\limits_\tau^{\tau_0} B_{\text{диф}}(\tau',\eta,\varphi)e^{-(\tau-\tau')/\eta}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta}, \quad \eta<0. \end{cases} \tag{39}$$

Очевидно, что интенсивность $I_{\text{диф}}$ подчиняется нулевым граничным условиям:

$$I_{\text{диф}}(0,\eta,\varphi)=0,\ 0\le\eta\le1,\quad I_{\text{диф}}(\tau_0,\eta,\varphi)=0,\ -1\le\eta\le0, \tag{40}$$

которые отражают отсутствие диффузного излучения, падающего извне.

В свою очередь функция источников

$$B_{\text{диф}}(\tau,\eta,\varphi)=\frac{\lambda}{4\pi}\int x(\gamma)[I_*(\tau,\eta',\varphi')+I_{\text{диф}}(\tau,\eta',\varphi')]\mathrm{d}^2\omega' \tag{41}$$

представляется интегралом, перед которым имеется множитель λ, а под знаком его стоит индикатриса рассеяния, что и означает "по крайней мере одно рассеяние". Впредь мы будем интересоваться только диффузным излучением и для простоты опустим индекс "диф" у его характеристик.

5. Разделение азимутальных гармоник. Представление индикатрисы рассеяния в виде разложения по многочленам Лежандра позволяет разделить поля излучения, соответствующие различным гармоникам азимута. Такое разделение основывается на теореме сложения для многочленов Лежандра, выражаемой формулой

$$P_i\left(\eta\eta'+\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-(\eta')^2}\cos(\varphi-\varphi')\right)=\sum_{m=0}^{i}(2-\delta_{m0})\frac{(i-m)!}{(i+m)!}P_i^m(\eta)P_i^m(\eta')\cos m(\varphi-\varphi'). \tag{42}$$

Здесь $P_i^m(\eta)$ — присоединенные функции Лежандра.

Подставив эту формулу в выражение для индикатрисы с $n+1$ слагаемым

$$x(\gamma)=\sum_{i=0}^{n}x_iP_i(\cos\gamma) \tag{43}$$

и переставив порядок суммирования, получим ее разложение по азимутальным гармоникам:

$$x(\gamma)=\sum_{m=0}^{n}(2-\delta_{m0})p_m(\eta,\eta')\cos m(\varphi-\varphi'). \tag{44}$$

Здесь введено обозначение

$$p_m(\eta,\eta')=\sum_{i=m}^{n}x_i\frac{(i-m)!}{(i+m)!}P_i^m(\eta)P_i^m(\eta'). \tag{45}$$

Теперь предположим, что интенсивность прямого излучения $I_*(\tau,\eta,\varphi)$, определяемая формулой (37), является четной функцией азимута. Тогда ее можно разложить по косинусам:

$$I_*(\tau,\eta,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{m0})I_m^*(\tau,\eta)\cos(m\varphi). \tag{46}$$

Таким же разложением можно представить и интенсивность диффузного излучения:

$$I(\tau,\eta,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{m0})I_m(\tau,\eta)\cos(m\varphi). \tag{47}$$

Покажем, что тогда и функция источников записывается в таком же виде. Действительно,

$$B(\tau,\eta,\varphi)=\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\eta'\sum_{m=0}^{n}(2-\delta_{m0})p_m(\eta,\eta')\sum_{m'=0}^{\infty}(2-\delta_{m'0})[I_{m'}^*(\tau,\eta')+I_{m'}(\tau,\eta')]\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\cos(m'\varphi')\cos m(\varphi'-\varphi)=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}(2-\delta_{m0})B_m(\tau,\eta)\cos(m\varphi). \tag{48}$$

При переходе к последнему выражению вычислен интеграл по φ':

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\cos(m'\varphi')\cos m(\varphi'-\varphi)=\frac{\delta_{mm'}}{2-\delta_{m0}}\cos(m\varphi), \tag{49}$$

который отличен от нуля только при $m'=m$. Из двух сумм в (48) остается лишь одна, причем ее верхний предел равен n. При этом

$$B_m(\tau,\eta)=\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\eta' p_m(\eta,\eta')[I_m^*(\tau,\eta')+I_m(\tau,\eta')]. \tag{50}$$

Разделение азимутальных гармоник происходит и в дифференциальном уравнении (38):

$$\eta\frac{\partial I_m(\tau,\eta)}{\partial\tau}=-I_m(\tau,\eta)+B_m(\tau,\eta,\varphi). \tag{51}$$

Отсюда ясно, что верхний предел в сумме (47) на самом деле равен n, так как имеется только n слагаемых в разложении (48). Составляющие прямого излучения, соответствующие слагаемым в разложении интенсивности (46) с номерами $m>n$, не рассеиваются. Не рассеиваются и компоненты прямого излучения, интенстивности которых являются нечетными функциями η.

§ 2.3. Интегральные уравнения

1. Общий случай. В предыдущем параграфе было показано, что основными уравнениями в теории монохроматического рассеяния являются уравнение переноса диффузного излучения

$$\eta\frac{\partial I(\tau,\eta,\varphi)}{\partial\tau}=-I(\tau,\eta,\varphi)+B(\tau,\eta,\varphi) \tag{52}$$

и уравнение баланса энергии

$$B(\tau,\eta,\varphi)=B_*(\tau,\eta,\varphi)+\frac{\lambda}{4\pi}\int x(\gamma)I(\tau,\eta',\varphi')\mathrm{d}^2\omega'. \tag{53}$$

Здесь внеинтегральное слагаемое определяется источниками и в обозначениях § 2.2 имеет вид

$$B_*(\tau,\eta,\varphi)=\frac{\lambda}{4\pi}\int x(\gamma)I_*(\tau,\eta',\varphi')\mathrm{d}^2\omega'. \tag{54}$$

Интенсивность удовлетворяет нулевым граничным условиям.

Из приведенных уравнений можно получить одно интегральное уравнение для функции источников. Для этого еще раз напишем формальное решение дифференциального уравнения переноса с учетом нулевых граничных условий:

$$I(\tau,\eta,\varphi)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_0^{\tau} B(\tau',\eta,\varphi)e^{-(\tau-\tau')/\eta}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta}, & \eta>0,\\ \displaystyle-\int\limits_{\tau}^{\tau_0} B(\tau',\eta,\varphi)e^{-(\tau-\tau')/\eta}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta}, & \eta<0.\end{cases} \tag{55}$$

Подставив эти выражения в уравнение (53), получим искомое интегральное уравнение

$$B(\tau,\eta,\varphi)=B_*(\tau,\eta,\varphi)+$$
$$+\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\left[\int\limits_0^1 x(\gamma)\mathrm{d}\eta'\int\limits_0^{\tau}B(\tau',\eta',\varphi')e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}-\int\limits_{-1}^0 x(\gamma)\mathrm{d}\eta'\int\limits_{\tau}^{\tau_0}B(\tau',\eta',\varphi')e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}\right]. \tag{56}$$

Это уравнение включает в себя все граничные условия и не требует никаких дополнений. После определения функции источников интенсивность находится по формулам (55).

2. Интегральные уравнения для азимутальных гармоник. Они получаются точно так же, как (56). Следует исходить из уравнений для отдельных гармоник интенсивности и функции источников, записанных в конце предыдущего параграфа. Дифференциальные уравнения выглядят абсолютно так же, как и (52), а уравнения баланса не содержат интеграла по азимуту. В результате той же процедуры, что и выше, получим уравнения для каждой гармоники:

$$B_m(\tau,\eta)=B_m^*(\tau,\eta)+\frac{\lambda}{2}\left[\int\limits_0^1\mathrm{d}\eta' p_m(\eta,\eta')\int\limits_0^{\tau}B_m(\tau',\eta')e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}-\int\limits_{-1}^0 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_{\tau}^{\tau_0}B_m(\tau',\eta')e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}\right]. \tag{57}$$

3. Случай изотропного рассеяния. Этот простейший случай часто оказывается достаточным для качественных заключений о полях излучения в различных объектах. Он также интересен тем, что первым изучался в теории и наиболее подробно изучен.

В приведенных уравнениях положим $x(\gamma)=1$. Тогда останется только одна азимутальная гармоника с $m=0$, а уравнение для нее очень сильно упростится. Действительно, при $x(\gamma)=1$ в разложении (44) остается только одно слагаемое $p_0(\eta,\eta')=1$, а все остальные аннулируются: $p_m(\eta,\eta')=0,\ m>0$. Индекс 0 писать не будем. Поле диффузного излучения не зависит от азимута, даже если источники от азимута зависели. Далее, равенство $p_0(\eta,\eta')=1$ приводит к тому, что функция источников (ее диффузная часть) не зависит и от η, так что единственным ее аргументом остается оптическая глубина τ. Уравнение превращается в одномерное.

При изотропном рассеянии два интеграла в (57) объединяются, так как функция источников, как уже отмечалось, теперь не зависит от η и интегралы по η' можно взять. Они получаются одинаковыми:

$$\int\limits_0^1 e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\eta'}{\eta'}=E_1(\tau-\tau'),\ \tau>\tau', \tag{58}$$

$$-\int\limits_{-1}^0 e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\eta'}{\eta'}=E_1(\tau'-\tau),\ \tau<\tau'. \tag{59}$$

В обоих случаях правую часть можно записать как $E_1(|\tau-\tau'|)$. Здесь использована функция, называемая *интегральной экспонентой*:

$$E_1(\tau)=\int\limits_1^{\infty}e^{-y\tau}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\limits_0^1\exp(-\tau/\eta)\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta}. \tag{60}$$

В результате интегральное уравнение (57) для $B_0=B(\tau)$ переходит в уравнение

$$B(\tau)=B_*(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\tau_0}E_1(|\tau-\tau'|)B(\tau')\mathrm{d}\tau'. \tag{61}$$

Это уравнение было получено О. Д. Хвольсоном [83] примерно сто лет назад и носит его имя. Частный случай уравнения, когда свободного слагаемого нет и $\lambda = 1$, называется *уравнением Милна*, а задача его решения — *задачей Милна* [77]. Мы будем называть однородное уравнение уравнением Милна и при $\lambda < 1$.

Прежде чем говорить о решении уравнений, перечислим некоторые свойства функции E_1 и связанных с ней [85].

4. Функции E_n. Функция E_1 — это частный случай функций

$$E_\alpha(\tau) = \int\limits_1^\infty e^{-y\tau}\frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha} = \int\limits_0^1 \exp(-\tau/\eta)\eta^{\alpha-2}\mathrm{d}\eta. \tag{62}$$

Будем называть их *интегрально-показательными*.

Интегрально-показательные функции связаны с неполной гамма-функцией. Действительно, после замены переменной интегрирования $y = t/\tau$ получаем

$$E_\alpha(\tau) = \tau^{\alpha-1}\int\limits_\tau^\infty e^{-t}t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \tau^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha,\tau). \tag{63}$$

Эти функции можно рассматривать при любых значениях порядка. Значения аргумента нам понадобятся только положительные.

Изучаемые функции раскладываются в степенные ряды, если выделить одно слагаемое. Для этого в формуле (63) прибавим и вычтем интеграл от 0 до τ:

$$E_\alpha(\tau) = \tau^{\alpha-1}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{-\alpha}\mathrm{d}t - \tau^{\alpha-1}\int\limits_0^\tau e^{-t}t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \tau^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) - \tau^{\alpha-1}\int\limits_0^\tau e^{-t}t^{-\alpha}\mathrm{d}t. \tag{64}$$

Во втором слагаемом раскладываем в ряд экспоненту, интегрируем ряд почленно и получаем

$$E_\alpha(\tau) = \tau^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) - \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m\tau^m}{m!(m+1-\alpha)}. \tag{65}$$

Такое разложение имеет смысл при $\alpha \neq 1, 2, ...$, т. е. при всех числах, кроме натуральных. При натуральных значениях α в ряду обращается в нуль один из знаменателей, а гамма-функция тоже обращается в бесконечность, так как отрицательные целые числа и нуль являются ее полюсами. Однако можно раскрыть эту неопределенность, в результате чего получится

$$E_n(\tau) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^{m-1}\tau^m}{m!}\left[\frac{1-\delta_{m,n-1}}{m+1-n} - \left(\ln\frac{1}{\tau} - C + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)\delta_{m,n-1}\right]. \tag{66}$$

Здесь $C = 0.5772156649015325$ — постоянная Эйлера, а пустая сумма, т. е. сумма при верхнем пределе, большем нижнего (эта сумма возникает при $n = 1$), считается равной нулю. Таким образом, интегрально-показательная функция целого порядка $n = 1, 2, ...$ имеет при $\tau = 0$ разрыв в производной порядка, на единицу меньшего. В частности, функция $E_1(\tau)$ сама при $\tau \to 0$ стремится к бесконечности, как $-\ln\tau$.

Ряды (65) и (66) сходятся при всех значениях аргумента, так как радиус сходимости их из-за наличия в знаменателе факториала равен бесконечности. Отметим еще значение функций в нуле: $E_\alpha(0) = 1/(\alpha-1)$.

При больших значениях аргумента для этих функций можно получить асимптотическое разложение. Для этого в (63) производится замена $t = \tau + u$, а затем под интеграл вносится множитель τ^α и делается разложение по степеням $1/\tau$:

$$\begin{aligned} E_\alpha(\tau) &= \frac{e^{-\tau}}{\tau}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}\mathrm{d}u}{(1+u/\tau)^\alpha} = \frac{e^{-\tau}}{\tau}\int\limits_0^\infty e^{-u}\mathrm{d}u\sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\Gamma(\alpha)}(-1)^m\frac{u^m}{\tau^m} = \\ &= \frac{e^{-\tau}}{\tau}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{m=0}^\infty (-1)^m\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\tau^m} = \frac{e^{-\tau}}{\tau}\sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-m)\tau^m}. \end{aligned} \tag{67}$$

В частности, $E_1(\tau) = \dfrac{e^{-\tau}}{\tau}\sum\limits_{m=0}^\infty (-1)^m\dfrac{m!}{\tau^m}$.

Хотя асимптотические разложения (67) расходятся, при больших τ первые слагаемые дают хорошее приближение к функции. Суммировать их надо до последнего слагаемого, которое меньше по модулю предыдущего. Особенность асимптотических разложений заключается в том, что погрешность суммирования их, в отличие от сходящихся рядов, нельзя сделать сколь угодно малой.

Из выражения (67) видно, что при отрицательных целых $\alpha = -n$, $n = 0, 1, 2, ...$, эти функции являются элементарными, а именно, произведениями экспоненты и многочленов от $1/\tau$:

$$E_{-n}(\tau) = n!\frac{e^{-\tau}}{\tau^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\frac{\tau^m}{m!}, \tag{68}$$

так как ряд (67) обрывается. В частности, $E_0(\tau) = e^{-\tau}/\tau$.

Интегрально-показательные функции подчиняются двучленному рекуррентному соотношению, которое получается путем интегрирования в интеграле (62) по частям: $\alpha E_{\alpha+1}(\tau) + \tau E_\alpha(\tau) = e^{-\tau}$. Взятие производной понижает порядок функции: $E'_\alpha(\tau) = -E_{\alpha-1}(\tau)$.

5. Основные задачи. Две задачи являются стандартными в теории монохроматического рассеяния.

а) Задача об отражении и пропускании. Наиболее важной задачей с точки зрения теории планетных атмосфер является задача об отражении и пропускании атмосферой падающего извне потока излучения, моделирующего солнечное. Сформулируем эту задачу.

Пусть на верхнюю границу атмосферы падает параллельный (мононаправленный) поток излучения под углом $\arccos\zeta$, $0 < \zeta \le 1$, к направлению возрастания глубины. Всегда можно считать, что азимут падающего излучения равен нулю, т. е. отсчитывать азимут от направления его падения. Обозначим освещенность площадки, перпендикулярной направлению падения, через πS (в случае земной атмосферы величина S — это монохроматическая солнечная постоянная). Тогда интенсивность прямого излучения в атмосфере

$$I_*(\tau, \eta, \varphi) = \pi S e^{-\tau/\zeta}\delta(\eta - \zeta)\delta(\varphi). \tag{69}$$

Соответствующая мощность первичных источников, т. е. часть функции источников, отвечающая однократному рассеянию, составит

$$B_*(\tau, \eta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi}\int \mathrm{d}^2\omega' x(\gamma) I_*(\tau, \eta', \varphi') = \frac{\lambda S}{4} x(\gamma_*) e^{-\tau/\zeta}, \tag{70}$$

где косинус угла первого рассеяния

$$\cos\gamma_* = \eta\zeta + \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi. \tag{71}$$

В этой задаче появляется ряд параметров, однако не все из них существенны. Азимут падающего излучения мы уже отбросили ввиду его несущественности. Величина падающего потока S также не имеет определяющего значения для решения задачи, так как все характеристики поля излучения просто пропорциональны ему. Единственный важный параметр падающего излучения — угол падения или его косинус ζ (как известно, его значения определяют время суток и времена года на Земле). Поэтому ζ будем указывать в качестве дополнительного аргумента у функции источников и интенсивности и писать $B(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$ и $I(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$. Соответствующие азимутальные гармоники будем обозначать $B_m(\tau, \eta, \zeta)$ и $I_m(\tau, \eta, \zeta)$, причем индекс 0 будем опускать. Заметим, что еще один существенный параметр задачи, а именно, оптическая толщина атмосферы, которая меняется в зависимости от частоты излучения и от состояния атмосферы (наличие облачного покрова и/или пыли в ней), нами также не отмечается, но подразумевается. Не отмечается также параметр λ.

Итак, рассматривается задача об определении поля излучения в плоской атмосфере, на которую падает параллельный поток излучения. Иногда эту задачу называют основной.

Наибольший интерес представляет излучение, выходящее из атмосферы. В случае Земли нас больше интересует прошедшее через атмосферу излучение, в случае планет мы наблюдаем отраженное излучение. Соответствующие интенсивности получаются из общих формул (55) при $\tau = 0$ (вторая формула) и $\tau = \tau_0$ (первая формула). При этом отражение происходит под углами, косинус которых отрицателен, поэтому сразу заменим в интенсивности отраженного излучения η на $-\eta$, $\eta > 0$. Для описания выходящего излучения вводятся две специальные величины, пропорциональные интенсивности, но с выделенными множителями S и ζ:

$$I(0, -\eta, \zeta, \varphi) = \int_0^{\tau_0} B(\tau', -\eta, \zeta, \varphi) e^{-\tau'/\eta}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta} = S\zeta\rho(\eta, \zeta, \varphi), \tag{72}$$

$$I(\tau_0, \eta, \zeta, \varphi) = \int_0^{\tau_0} B(\tau', \eta, \zeta, \varphi) e^{-(\tau_0-\tau')/\eta}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta} = S\zeta\sigma(\eta, \zeta, \varphi). \tag{73}$$

Величины ρ и σ называются *коэффициентами отражения и пропускания* соответственно, а вместе — *коэффициентами яркости.*

Часто рассматривается также предельный случай этой задачи, когда формально полагается $\zeta = \infty$, а $x(\gamma_*) = 1$. Такой случай соответствует равномерному распределению изотропных внутренних источников излучения.

б) Задача Милна. К этой задаче приводит рассмотрение переноса излучения в атмосферах звезд [77]. В их атмосферах выполняется локальное термодинамическое равновесие (ЛТР), при котором действуют три закона ТДР: в равновесии находится вещество, но не излучение, которое может выходить через границу. Остается справедливым лишь соотношение Кирхгофа—Планка, согласно которому отношение коэффициента излучения и поглощения равно функции Планка, т. е. отсутствует рассеяние: излучение испытывает только истинное поглощение.

Считается, что источники излучения располагаются в глубине звезды, а через атмосферу излучение только проходит. При этом спектр излучения изменяется, но полный (интегральный) поток $|H| = \pi F$ остается постоянным. Вследствие выхода излучения температура вещества понижается к границе. Интенсивность не зависит от азимута, но зависит от зенитного угла. Функция Планка (кроме закрепленной частоты) зависит только от глубины, так как с глубиной изменяется температура. Поскольку геометрическая толщина атмосфер большинства звезд составляет лишь малую долю их радиуса, т. е. атмосфера — это тонкий поверхностный слой, их в большинстве случаев считают плоскими. При этом, так как оптическая толщина атмосфер велика, их можно моделировать плоской полубесконечной средой.

Уравнение переноса излучения для плоской чистопоглощающей среды записывается так:

$$\eta\frac{\partial I_\nu(z,\eta)}{\partial z} = -\alpha_\nu I_\nu(z,\eta) + \varepsilon_\nu. \tag{74}$$

Соотношение Кирхгофа—Планка позволяет переписать его иначе:

$$\eta\frac{\partial I_\nu(z,\eta)}{\partial z} = -\alpha_\nu[I_\nu(z,\eta) - B_\nu(T)]. \tag{75}$$

Уравнение лучистого равновесия выражает тот факт, что вся излучаемая лучистая энергия возникает из поглощаемой в том же месте атмосферы:

$$4\pi\int\limits_0^\infty \varepsilon_\nu \mathrm{d}\nu = \int\limits_0^\infty \alpha_\nu \mathrm{d}\nu \int I_\nu \mathrm{d}^2\omega \tag{76}$$

или

$$\int\limits_0^\infty \alpha_\nu[\mathcal{J}_\nu(z) - B_\nu(T)]\mathrm{d}\nu = 0, \tag{77}$$

где средняя интенсивность

$$\mathcal{J}_\nu(z) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 I(z,\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{78}$$

Граничное условие нулевое: $I_\nu(0,\eta) = 0$ при $\eta > 0$.

Из двух уравнений (75) и (77) вытекает сохранение полного потока излучения:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z} = 0, \quad H = 2\pi\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\nu \int\limits_{-1}^1 I_\nu(z,\eta)\eta\mathrm{d}\eta = -\pi F. \tag{79}$$

Поток отрицателен, так как вектор потока направлен наружу, а величина H представляет его проекцию на положительное направление отсчета глубины z.

Следующим существенным предположением, приводящим к задаче Милна, является допущение, что коэффициент поглощения в атмосфере не зависит от частоты $\alpha_\nu = \alpha$. Такая атмосфера называется *серой.*

В случае серой атмосферы обычной формулой естественно ввести единую для всех частот оптическую глубину τ, которую будем считать аргументом всех величин вместо геометрической глубины z. Уравнение переноса монохроматического излучения

$$\eta\frac{\partial I_\nu(\tau,\eta)}{\partial \tau} = -I_\nu(\tau,\eta) + B_\nu(T(\tau)) \tag{80}$$

можно проинтегрировать по всем частотам, что дает

$$\eta\frac{\partial I(\tau,\eta)}{\partial \tau} = -I(\tau,\eta) + B(T(\tau)). \tag{81}$$

Здесь интегральные величины

$$I(\tau,\eta)=\int\limits_0^\infty I_\nu(\tau,\eta)\mathrm{d}\nu,\quad B(T)=\int\limits_0^\infty B_\nu(T)\mathrm{d}\nu=\frac{a_{\mathrm{SB}}c}{4\pi}T^4. \tag{82}$$

Второе равенство является следствием закона Стефана—Больцмана.

Условие сохранения полного потока приводит к равенству

$$\frac{\mathrm{d}H(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-4\pi[\mathcal{J}(\tau)-B(T(\tau))]=0,\quad \mathcal{J}(\tau)=B(T(\tau)), \tag{83}$$

где интегральная средняя интенсивность

$$\mathcal{J}(\tau)=\int\limits_0^\infty \mathcal{J}_\nu(\tau)\mathrm{d}\nu=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 I(\tau,\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{84}$$

Из уравнения переноса (81) вместе с равенством (83) и граничным условием $I(\tau,\eta)=0$ при $\eta>0$ следует интегральное уравнение

$$B(T(\tau))=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty E_1(|\tau-\tau'|)B(T(\tau'))\mathrm{d}\tau'. \tag{85}$$

Решение этого уравнения и составляет задачу Милна [77]. Оно является однородным уравнением, соответствующим уравнению Хвольсона (61) при $\lambda=1$. Отметим, что в этом уравнении формально значение λ равно 1, как при чистом рассеянии, хотя в атмосфере происходит только истинное поглощение. Условие сохранения энергии излучения выполняется только в целом по спектру. Как уже говорилось, мы будем рассматривать задачу Милна и при $\lambda<1$.

§ 2.4. Приближенные методы

1. Метод последовательных рассеяний. Начнем изложение методов решения задач о монохроматическом рассеянии с исторически первых методов, а именно, приближенных, позволяющих довольно просто получить качественное представление о характере решений. Сначала рассмотрим наиболее естественный с физической точки зрения метод — расчет *последовательных рассеяний*.

Запишем интегральное уравнение переноса излучения для функции источников в операторном виде:

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_*+\lambda\widehat{K}\,\mathbf{B}. \tag{86}$$

Здесь $\mathbf{B}_*$ — вектор из некоторого функционального пространства, изображающий известную функцию (источники), а $\mathbf{B}$ — искомый вектор, т. е. функция источников. Через $\widehat{K}$ обозначен один из операторов, ядра которых были выписаны при формулировке интегральных уравнений.

Самым распространенным методом решения таких уравнений является метод последовательных приближений по схеме

$$\mathbf{B}_0=\mathbf{B}_*,\quad \mathbf{B}_{n+1}=\mathbf{B}_*+\lambda\widehat{K}\,\mathbf{B}_n. \tag{87}$$

Многократное применение этой схемы дает

$$\mathbf{B}=[1+\lambda\widehat{K}+(\lambda\widehat{K})^2+...+(\lambda\widehat{K})^n+...]\mathbf{B}_*=(1-\lambda\widehat{K})^{-1}\mathbf{B}_*, \tag{88}$$

т. е. ряд Неймана, который формально суммируется как геометрическая прогрессия. Точно в такой же форме решение получается непосредственно из уравнения (86), если второе слагаемое из правой части перенести в левую и применить к результату оператор, стоящий справа в (88).

Заметим, что при конечных оптических толщинах слоя интегральные уравнения переноса являются уравнениями Фредгольма [66]. Покажем это на примере случая изотропного рассеяния. Найдем модуль (точнее, его квадрат) оператора:

$$||\widehat{K}||^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau' E_1(|\tau-\tau'|)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau\left[\int\limits_0^{\tau}\mathrm{d}\tau' E_1(\tau-\tau')+\int\limits_\tau^{\tau_0}\mathrm{d}\tau' E_1(\tau'-\tau)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau\left[\int\limits_0^{\tau}\mathrm{d}\tau'' E_1(\tau'')+\int\limits_0^{\tau_0-\tau}\mathrm{d}\tau'' E_1(\tau'')\right]=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau[1-E_2(\tau)+1-E_2(\tau_0-\tau)]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\tau_0-2\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau E_2(\tau)\right]=\tau_0+E_3(\tau_0)-\frac{1}{2}. \tag{89}$$

Последняя величина конечна при любых конечных τ_0, однако при $\tau_0 \to \infty$ стремится к бесконечности. Это означает, что уравнение при $\tau_0 = \infty$ перестает быть фредгольмовским и становится сингулярным. Тем не менее, можно доказать, что и при $\tau_0 = \infty$ ряд Неймана сходится при достаточно хороших внеинтегральных слагаемых.

Ряд Неймана в принципе дает возможность получить решение. Последовательные приближения быстро сходятся, если достаточно мала величина λ и/или модуль оператора, т. е. τ_0. Если же λ близка к единице, а τ_0 велико, ряд сходится чрезвычайно медленно. При этом решение оказывается гораздо больше, чем функция первичных источников. Все это означает, что в поле излучения вносят вклад рассеяния высоких порядков. При расчетах многократных рассеяний приходится вычислять кратные (повторные) интегралы, что является само по себе непростой задачей. К тому же даже далекие слагаемые в ряде Неймана дают вклад, а вычисляются они все хуже вследствие ошибок округления, которые накапливаются, так что этот способ в таком случае непригоден [103].

Тем не менее, найдем выходящее излучение после первого рассеяния в задаче об отражении и пропускании.

2. Коэффициенты яркости в первом приближении. В первом приближении по числу рассеяний функция источников $B(\tau, \eta, \zeta, \varphi) = B_*(\tau, \eta, \varphi) = (\lambda S/4)x(\gamma_*)e^{-\tau/\zeta}$. Тогда из формул, выражающих коэффициенты яркости через функцию источников, т. е.

$$\rho(\eta, \zeta, \varphi) = \frac{1}{S\eta\zeta}\int\limits_0^{\tau_0} B(\tau, -\eta, \zeta, \varphi)e^{-\tau/\eta}\mathrm{d}\tau, \tag{90}$$

$$\sigma(\eta, \zeta, \varphi) = \frac{1}{S\eta\zeta}\int\limits_0^{\tau_0} B(\tau, \eta, \zeta, \varphi)e^{-(\tau_0-\tau)/\eta}\mathrm{d}\tau, \tag{91}$$

получаем

$$\begin{aligned} \rho(\eta, \zeta, \varphi) &= \frac{\lambda}{4}\frac{1 - e^{-\tau_0(1/\eta+1/\zeta)}}{\eta+\zeta}x(\overline{\gamma}_{\mathrm{s}}), \\ \sigma(\eta, \zeta, \varphi) &= \frac{\lambda}{4}\frac{e^{-\tau_0/\eta} - e^{-\tau_0/\zeta}}{\eta-\zeta}x(\gamma_{\mathrm{s}}). \end{aligned} \tag{92}$$

Здесь косинусы углов рассеяния в стороны верхней и нижней границ таковы:

$$\cos\overline{\gamma}_* = -\eta\zeta + \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi, \tag{93}$$

$$\cos\gamma_* = \eta\zeta + \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi. \tag{94}$$

Приведенные формулы часто использовались для интерпретации наблюдений безоблачной земной атмосферы, оптическая толщина которой в видимой части спектра примерно 0.2–0.3.

Другие методы приближенно учитывали именно многократные рассеяния. Первые (исторически) такие методы использовали усреднение интенсивности излучения по направлениям. Рассмотрим два таких метода [70].

3. Двухпотоковое приближение. Иначе это приближение, которое использовалось вплоть до семидесятых годов, а иногда применяется и сейчас, называется приближением Шварцшильда—Шустера. Понятие о нем дадим на примере классической задачи Милна.

При этом варианте задачи рассматривается полубесконечная атмосфера, т. е. считается, что $\tau_0 = \infty$. В ней происходит чистое рассеяние со сферической индикатрисой. На верхнюю границу излучение не падает, и не ставится условие на нижней границе. Требуется лишь, чтобы сохранялся полный поток излучения.

Уравнение переноса имеет вид

$$\eta\frac{\mathrm{d}I(\tau, \eta)}{\mathrm{d}\tau} = -I(\tau, \eta) + B(\tau), \quad B = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} I(\tau, \eta)\mathrm{d}\eta. \tag{95}$$

В этом уравнении написана не частная, а обыкновенная производная по оптической глубине. Так часто пишут в работах по теории переноса излучения, считая угловые переменные параметрами.

Применение метода начинается с введения двух интегралов

$$I_+(\tau) = \int\limits_0^1 \mathrm{d}\eta I(\tau, \eta), \quad I_-(\tau) = \int\limits_{-1}^0 \mathrm{d}\eta I(\tau, \eta). \tag{96}$$

Эти интегралы представляют полные интенсивности излучения, идущего вниз и вверх соответственно. Приближение заключается в оценке двух других интегралов, отличающихся от (96) тем, что содержат дополнительный множитель η:

$$\int_0^1 \eta \mathrm{d}\eta I(\tau, \eta) = \frac{1}{2} I_+(\tau), \quad \int_{-1}^0 \eta \mathrm{d}\eta I(\tau, \eta) = -\frac{1}{2} I_-(\tau). \tag{97}$$

Здесь из-под знаков интегралов вынесены приближенно средние значения косинуса η на промежутках $[0, 1]$ и $[-1, 0]$.

Введем обозначения, которые будем использовать и далее:

$$\mathcal{J}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \eta) \mathrm{d}\eta, \quad h(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \eta) \eta \mathrm{d}\eta. \tag{98}$$

Первая величина есть средняя интенсивность, вторая пропорциональна потоку излучения, идущему вниз, т. е. проекции вектора потока на направление возрастания глубины: $H(\tau) = 4\pi h(\tau)$. Через введенные выше односторонние интенсивности (96) величины (98) выражаются так:

$$\mathcal{J}(\tau) = \frac{1}{2}[I_+(\tau) + I_-(\tau)], \quad h(\tau) = \frac{1}{4}[I_+(\tau) - I_-(\tau)]. \tag{99}$$

Здесь первое равенство точное, а второе написано с учетом приближения (97). Формулы, обратные (99), дают

$$I_+(\tau) = \mathcal{J}(\tau) + 2h(\tau), \quad I_-(\tau) = \mathcal{J}(\tau) - 2h(\tau). \tag{100}$$

Проинтегрировав уравнение переноса (95) по η сначала по промежутку $[0, 1]$, а затем по $[-1, 0]$, получим в том же приближении (97)

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}I_+(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = -I_+(\tau) + B(\tau), \quad -\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}I_-(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = -I_-(\tau) + B(\tau). \tag{101}$$

Граничное условие, выражающее отсутствие диффузного излучения, падающего сверху, имеет вид $I_+(0) = 0$.

Составив сумму и разность уравнений (101), найдем приближенные уравнения для средней интенсивности и потока:

$$\frac{\mathrm{d}h(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{J}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = -4h(\tau). \tag{102}$$

Граничное условие для этих величин выглядит так:

$$\mathcal{J}(0) = \frac{1}{2} I_-(0) = -2h(0). \tag{103}$$

Здесь также первое равенство точное, а второе приближенное.

Обозначим постоянный в силу первого уравнения поток лучистой энергии, идущей сквозь атмосферу, через πF. Тогда решение получается таким:

$$h = -\frac{\pi F}{4\pi} = -\frac{F}{4}, \quad \mathcal{J}(\tau) = F\left(\tau + \frac{1}{2}\right). \tag{104}$$

Напомним, что это решение соответствует задаче о серой звездной атмосфере, где источники излучения находятся не в самой атмосфере, а в глубине звезды, откуда идет наружу постоянный поток излучения πF.

4. Метод сферических гармоник. Простейший случай этого метода был применен А. Эддингтоном и носит его имя. Здесь также ограничимся изотропным рассеянием, но в плоском слое оптической толщины τ_0 с альбедо частицы λ.

В уравнении переноса

$$\eta \frac{\mathrm{d}I(\tau, \eta)}{\mathrm{d}\tau} = -I(\tau, \eta) + B(\tau) \tag{105}$$

функция источников $B = \lambda \mathcal{J} + B_\mathrm{s} = B(\tau)$ не зависит от направления, но интенсивность зависит не только от τ, но и от η. Раскладываем интенсивность в ряд по многочленам Лежандра с аргументом η:

$$I(\tau, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\tau) P_n(\eta), \quad I_n(\tau) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \eta) P_n(\eta) \mathrm{d}\eta. \tag{106}$$

В левой части уравнения (105) имеется множитель η. Чтобы разложить в ряд произведение ηI, воспользуемся соотношением из теории многочленов Лежандра [13]:

$$\eta P_n(\eta) = \frac{(n+1)P_{n+1}(\eta) + nP_{n-1}(\eta)}{2n+1}. \tag{107}$$

Подстановка (106) в уравнение (105) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)P_{n+1}(\eta) + nP_{n-1}(\eta)}{2n+1} \frac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}\tau} = -\sum_{n=0}^{\infty} I_n(\tau)P_n(\eta) + B. \tag{108}$$

После сдвига индекса суммирования в сумме в левой части равенства получится

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n}{2n-1}\frac{\mathrm{d}I_{n-1}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{n+1}{2n+3}\frac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}\tau}\right] P_n(\eta) = -\sum_{n=0}^{\infty} I_n(\tau)P_n(\eta) + B. \tag{109}$$

В уравнении (109) приравниваются коэффициенты при многочленах одного порядка:

$$\frac{n}{2n-1}\frac{\mathrm{d}I_{n-1}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{n+1}{2n+3}\frac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}\tau} = -I_n(\tau) + B\delta_{n\,0}. \tag{110}$$

Система дифференциальных уравнений (110) бесконечна. Ее надо как-то замкнуть. Проще всего ряд (106) заменить конечной суммой, т. е. положить равными нулю все коэффициенты, начиная с какого-то.

В методе Эддингтона рассматриваются первые два уравнения

$$\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}\tau} = -I_0 + B, \quad \frac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}\tau} + \frac{2}{5}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}\tau} = -I_1 \tag{111}$$

и считается, что $I_2 = 0$. Это условие означает, что

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3\eta^2 - 1)I(\tau,\eta)\mathrm{d}\eta = 0, \quad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\eta^2 I(\tau,\eta)\mathrm{d}\eta = \frac{1}{3}\mathcal{J}. \tag{112}$$

Его можно получить, вынеся в первом интеграле за его знак среднее значение квадрата косинуса, равное 1/3.

Применим опять обозначения (98), а именно:

$$I_0 = \mathcal{J}, \quad I_1 = 3h. \tag{113}$$

В этих обозначениях уравнения (111) записываются так:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} = -(1-\lambda)\mathcal{J} + B_0, \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\tau} = -3h. \tag{114}$$

Если исключить поток, получается одно уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{J}}{\mathrm{d}\tau^2} - 3(1-\lambda)\mathcal{J} + 3B_0 = 0. \tag{115}$$

Это линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет очевидное решение однородного уравнения

$$\mathcal{J} = C_1 e^{k\tau} + C_2 e^{-k\tau}, \tag{116}$$

где $k = \sqrt{3(1-\lambda)}$. Для получения частного решения необходимо воспользоваться граничными условиями, которые выводятся следующим образом: выносятся средние значения косинуса в направлении вниз и вверх. Граничные интенсивности определяются формулами

$$\mathcal{J}(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} I(0,\eta)\mathrm{d}\eta, \quad \mathcal{J}(\tau_0) = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} I(\tau_0,\eta)\mathrm{d}\eta, \tag{117}$$

а потоки: на верхней границе

$$h(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} I(0,\eta)\eta\mathrm{d}\eta = -\frac{1}{4}\int_{-1}^{0} I(0,\eta)\mathrm{d}\eta = -\frac{1}{2}\mathcal{J}(0), \tag{118}$$

а на нижней

$$h(\tau_0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 I(\tau,\eta)\eta\mathrm{d}\eta = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^0 I(\tau_0,\eta)\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\mathcal{J}(\tau_0). \tag{119}$$

С учетом второго уравнения (114) граничные условия переписываются для средней интенсивности:

$$\left(\mathcal{J} - \frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\tau}\right)\Bigg|_{\tau=0} = 0, \quad \left(\mathcal{J} + \frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\tau}\right)\Bigg|_{\tau=\tau_0} = 0. \tag{120}$$

Доведем решение до конца для классической задачи Милна, когда $\lambda = 1$, $B_* = 0$, $\tau_0 = \infty$. Уравнения (114) принимают форму

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\tau} = -3h. \tag{121}$$

Их решение с учетом граничного условия при $\tau = 0$

$$h = -\frac{F}{4}, \quad \mathcal{J} = \frac{3}{4}F\left(\tau + \frac{2}{3}\right). \tag{122}$$

Еще один классический приближенный метод основан не на усреднении интенсивности, а на приближенном представлении интеграла по углу, хотя в сущности идея та же.

5. Метод дискретных ординат. Этот метод в теории переноса был разработан и широко применялся С. Чандрасекаром [85] и носит его имя.

В основе метода лежит применение квадратурной формулы. Интеграл по углу представляется суммой

$$\int\limits_{-1}^1 I(\tau,\eta)\mathrm{d}\eta = \sum_{j=1}^n a_j I(\tau,\eta_j), \tag{123}$$

которой и заменяется интеграл в уравнении. Затем в уравнение вместо η подставляются значения η_j, и получается система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Граничные условия при этом очень просты и совпадают с точными. Если на границы не падает излучение, то при $\tau = 0$ равны нулю интенсивности с положительными η_j, при $\tau = \tau_0$ — с отрицательными.

Разработана обширная теория квадратурных формул, приспособленных для различных подынтегральных функций и промежутков интегрирования (см., например, [38]). Поскольку формула (123) содержит $2n$ параметров (n узлов η_j и n весов a_j), можно выполнить $2n$ условий. Условия могут быть различными. Например, возможены выбор равномерной сетки узлов или закрепление граничных узлов. Если потребовать, чтобы формула давала точные результаты для многочленов порядка до $2n-1$, т. е. для степеней аргумента $0, 1, 2, ..., 2n-1$, то получится так называемая формула наивысшей точности. В случае интегралов вида (123) такая формула называется формулой Гаусса—Лежандра. Выведем ее для случая $n = 2$.

Формула наивысшей точности второго порядка для интеграла вида (123) имеет вид

$$\int\limits_{-1}^1 f(\eta)\mathrm{d}\eta = a_1 f(\eta_1) + a_2 f(\eta_2). \tag{124}$$

Должны выполняться равенства

$$\begin{gathered}\int\limits_{-1}^1 \mathrm{d}\eta = a_1 + a_2 = 2, \quad \int\limits_{-1}^1 \eta^2\mathrm{d}\eta = a_1\eta_1^2 + a_2\eta_2^2 = \frac{2}{3}, \\ \int\limits_{-1}^1 \eta\mathrm{d}\eta = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 = 0, \quad \int\limits_{-1}^1 \eta^3\mathrm{d}\eta = a_1\eta_1^3 + a_2\eta_2^3 = 0.\end{gathered} \tag{125}$$

Из свойств симметрии очевидно, что $a_1 = a_2$, $\eta_1 = -\eta_2$. Ясно, что $a_1 = a_2 = 1$, $\eta_1 = -\eta_2 = -1/\sqrt{3}$.

Применим выведенную формулу к интегралу (123):

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 I(\tau,\eta)\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\left[I\left(\tau, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + I\left(\tau, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]. \tag{126}$$

Опять обратимся к задаче Милна. После подстановки в систему значений η_j получится

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}I\left(\tau,-1/\sqrt{3}\right)}{\mathrm{d}\tau}=-I\left(\tau,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\mathcal{J},\tag{127}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}I\left(\tau,1/\sqrt{3}\right)}{\mathrm{d}\tau}=-I\left(\tau,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\mathcal{J}.\tag{128}$$

Действуя аналогично предыдущему с использованием граничного условия $I(0,1/\sqrt{3})=0$, находим решение

$$\mathcal{J}=\frac{3}{4}F\left(\tau+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).\tag{129}$$

Таким образом, решение задачи Милна получено тремя приближенными методами. Для наглядности запишем эти решения рядом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}&=F\left(\tau+\frac{1}{2}\right) && \text{— метод Шварцшильда—Шустера,}\\
\mathcal{J}&=\frac{3}{4}F\left(\tau+\frac{2}{3}\right) && \text{— метод Эддингтона,}\\
\mathcal{J}&=\frac{3}{4}F\left(\tau+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) && \text{— метод Чандрасекара.}
\end{aligned}\tag{130}$$

Первые два метода дают одинаковые значения средней интенсивности на границе, вторые два — при больших значениях оптической глубины, т. е. в глубоких слоях атмосферы. Который из трех методов более точен, выясним впоследствии. Заметим, что вторые два метода, в отличие от первого, допускают непосредственное обобщение (с большими значениями n). Заметим также, что метод Эддингтона был бы тождествен методу Чандрасекара, если бы при формулировании граничных условий в первом из них в представляющих поток интегралах из равенств (118) и (119) выносились не средние косинусы, а среднеквадратичные их значения.

Найдя решение уравнения (95), мы получили приближенное распределение температуры в атмосфере:

$$T(\tau)=\left[\left(\frac{4\pi}{ac}\right)B(T(\tau))\right]^{1/4}=\left[\left(\frac{4\pi}{ac}\right)\mathcal{J}(\tau)\right]^{1/4}.\tag{131}$$

6. Метод Соболева. Этот метод был разработан В. В. Соболевым для задачи о диффузном отражении и пропускании [70]. Изложим его для полубесконечной среды, т. е. для задачи об отражении. Перенос его на случай конечного слоя нетруден, но громоздок. Как обычно, для простоты считаем, что азимут падающего излучения равен нулю, т. е. отсчитываем азимуты от направления этого внешнего потока.

Метод разбивается на два этапа. Сначала рассматривается рассеяние при простейшей несферической индикатрисе. Уравнение переноса решается методом, близким к методу Эддингтона.

При индикатрисе

$$x_{\mathrm{apr}}(\gamma)=1+x_1\cos\gamma=1+x_1\left[\eta\eta'+\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta'^2}\cos(\varphi-\varphi')\right]\tag{132}$$

интенсивность и функция источников состоят из двух азимутальных гармоник

$$I(\tau,\eta,\varphi,\zeta)=I_0(\tau,\eta,\zeta)+2I_1(\tau,\eta,\zeta)\cos\varphi,\tag{133}$$

$$B(\tau,\eta,\varphi,\zeta)=B_0(\tau,\eta,\zeta)+2B_1(\tau,\eta,\zeta)\cos\varphi.\tag{134}$$

Коэффициенты 2 перед вторыми слагаемыми введены для того, чтобы обратные формулы были одинаковы:

$$I_n(\tau,\eta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}I(\tau,\eta,\varphi,\zeta)\cos(n\varphi)\mathrm{d}\varphi,\tag{135}$$

$$B_n(\tau,\eta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}B(\tau,\eta,\varphi,\zeta)\cos(n\varphi)\mathrm{d}\varphi.\tag{136}$$

Соответственно имеем два уравнения переноса

$$\eta\frac{\mathrm{d}I_0(\tau,\eta,\zeta)}{\mathrm{d}\tau}=-I_0(\tau,\eta,\zeta)+B_0(\tau,\eta,\zeta),\tag{137}$$

$$\eta\frac{\mathrm{d}I_1(\tau,\eta,\zeta)}{\mathrm{d}\tau}=-I_1(\tau,\eta,\zeta)+B_1(\tau,\eta,\zeta).\tag{138}$$

Запишем уравнение баланса энергии, подставив в него индикатрису (132):

$$B(\tau,\eta,\varphi,\zeta)=\frac{\lambda S}{4}(1+x_1\eta\zeta)e^{-\tau/\zeta}+\lambda\mathcal{J}+\lambda x_1\eta h+$$
$$+\frac{\lambda S x_1}{4}\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi e^{-\tau/\zeta}+\lambda x_1\sqrt{1-\eta^2}g\cos\varphi. \tag{139}$$

Здесь введены обозначения: для средней интенсивности

$$\mathcal{J}(\tau,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\int I(\tau,\eta,\varphi,\zeta)\mathrm{d}^2\omega=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}I_0(\tau,\eta,\zeta)\mathrm{d}\eta, \tag{140}$$

для величины, пропорциональной потоку излучения вниз,

$$h(\tau,\zeta)=\frac{H}{4\pi}=\frac{1}{4\pi}\int\eta I(\tau,\eta,\varphi,\zeta)\mathrm{d}^2\omega=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\eta I_0(\tau,\eta,\zeta)\mathrm{d}\eta, \tag{141}$$

а также для новой величины, характеризующей горизонтальный поток в направлении падающего излучения,

$$g(\tau,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\int\sqrt{1-\eta^2}\cos\varphi I(\tau,\eta,\varphi,\zeta)\mathrm{d}^2\omega=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-\eta^2}I_1(\tau,\eta,\zeta)\mathrm{d}\eta. \tag{142}$$

В свою очередь азимутальные гармоники выражаются через введенные величины. Для интенсивностей эти выражения гласят

$$I_0(\tau,\eta,\zeta)=\mathcal{J}(\tau,\zeta)+3h(\tau,\zeta)\eta,\quad I_1(\tau,\eta,\zeta)=\frac{3}{2}\sqrt{1-\eta^2}g(\tau,\zeta), \tag{143}$$

в то время как для функций источников они следует из равенства (139)) и имеют вид

$$B_0(\tau,\eta,\zeta)=\frac{\lambda S}{4}(1+x_1\eta\zeta)e^{-\tau/\zeta}+\lambda\mathcal{J}(\tau,\zeta)+\lambda x_1\eta h(\tau,\zeta), \tag{144}$$

$$B_1(\tau,\eta,\zeta)=\frac{\lambda S}{8}x_1\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\zeta^2}e^{-\tau/\zeta}+\frac{\lambda}{2}x_1\sqrt{1-\eta^2}g(\tau,\zeta). \tag{145}$$

Решаем уравнение для нулевой гармоники. Проинтегрировав (137) по η с весовыми множителями 1 и η и применив приближение Эддингтона, получим два уравнения

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau}=-(1-\lambda)\mathcal{J}+\frac{\lambda S}{4}e^{-\tau/\zeta},$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\tau}=-(3-\lambda x_1)h+\frac{\lambda S}{4}x_1\zeta e^{-\tau/\zeta}. \tag{146}$$

Из них получается одно уравнение для средней интенсивности

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{J}}{\mathrm{d}\tau^2}-(1-\lambda)(3-\lambda x_1)\mathcal{J}=-\frac{\lambda S}{4}[3+(1-\lambda)x_1]e^{-\tau/\zeta}. \tag{147}$$

Решение линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами слагается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Поскольку свободное слагаемое представляет собой экспоненту, частное решение ищем в виде такой же экспоненты с другим множителем. Решениями однородного уравнения также являются экспоненты $e^{\pm k\tau}$, $k\geq 0$, где показатель $k=\sqrt{(1-\lambda)(3-\lambda x_1)}$. В случае полубесконечной атмосферы растущую экспоненту следует отбросить, так как поле излучения в задаче об отражении ослабевает с глубиной. Коэффициент перед убывающей экспонентой определяется из граничного условия, которое имеет вид первого равенства в (120), что характерно для метода Эддингтона. В результате решение получается в форме суммы двух слагаемых:

$$\mathcal{J}(\tau,\zeta)=Ce^{-k\tau}-De^{-\tau/\zeta}. \tag{148}$$

Коэффициенты при экспонентах

$$C=\frac{\lambda S}{4}\frac{\zeta}{3-\lambda x_1+2k}\left\{\frac{3+(1-\lambda)x_1}{1-k^2\zeta^2}[2+(3-\lambda x_1)\zeta]-2x_1\right\}, \tag{149}$$

$$D=\frac{\lambda S}{4}[3+(1-\lambda)x_1]\frac{\zeta^2}{1-k^2\zeta^2}. \tag{150}$$

По найденной средней интенсивности из (146) легко найти и поток:

$$h(\tau,\zeta)=\frac{1}{3-\lambda x_1}\left[\frac{\lambda S}{4}x_1e^{-\tau/\zeta}+kCe^{-k\tau}-\frac{D}{\zeta}e^{-\tau/\zeta}\right]. \tag{151}$$

Переходим к первой гармонике. При интегрировании уравнения (138) по направлениям зенитного угла интеграл под знаком производной ввиду наличия нечетного множителя η можно положить равным нулю, так что уравнение для g получается алгебраическим и решение находится просто:

$$g(\tau,\zeta)=\frac{\lambda S}{4}\sqrt{1-\zeta^2}\frac{x_1}{3-\lambda x_1}e^{-\tau/\zeta}. \tag{152}$$

Заметим, что (148) и (151) содержат две экспоненты, у одной из которых ($e^{-k\tau}$) коэффициент перед τ меньше 1, а у другой ($e^{-\tau/\zeta}$) — больше 1. Поэтому вторая, описывающая прямое падающее излучение, ослабленное в атмосфере, убывает гораздо быстрее, чем первая. Это и означает, что диффузное излучение внутри атмосферы значительно сильнее, чем падающее. Азимутальная часть излучения, описываемая функцией g, убывает так же, как и поток первичного излучения. Она обращается в нуль при $x_1=0$, когда рассеяние изотропно, и при $\zeta=1$, когда освещение не зависит от азимута.

По формулам (143)–(145) можно найти интенсивность и функцию источников в этом приближении. Впрочем, интенсивность можно еще уточнить, подставив функцию источников в выражения интенсивности через нее, т. е. в формальное решение. Поскольку функция источников представлена простыми экспонентами, взятие интегралов не представляет труда.

Таким образом, приближенно найдены функция источников и интенсивность при простейшей индикатрисе (132). На втором этапе метода Соболева предлагается однократное рассеяние учесть точно, а приближение сделать только при определении многократного. Для этого из интенсивности (или функции источников) вычитается часть, соответствующая однократному рассеянию с индикатрисой (132), и добавляется интенсивность при однократном рассеянии с точной индикатрисой. При этом для коэффициентов яркости используются формулы (92).

Опыт применения метода показал достаточную его точность для многих приложений. Причина успеха метода в том, что с каждым рассеянием излучение, первоначально шедшее в одном направлении, расплывается, так как индикатриса итерируется и тем самым становится ближе к сферической (см. ниже). Все же метод нельзя применять, если индикатриса очень вытянута вперед, так как тогда размывание излучения по углам происходит только после многих рассеяний.

Метод был разработан в сороковых годах. В семидесятых была предложена модификация метода, позволяющая распространение его на сильно вытянутые индикатрисы [27,78]. Для таких индикатрис можно выделить вытянутый вперед участок, представив их суммой игольчатой индикатрисы и регуляризованного слагаемого:

$$x(\gamma)=2b\delta(\cos\gamma-1)+(1-b)x_*(\gamma). \tag{153}$$

Такое представление не приводит к усложнениям, так как рассеяние с игольчатой индикатрисой, при которой направление излучения в результате рассеяния не изменяется, фактически приводит к тому, что уменьшается коэффициент поглощения. Действительно, при индикатрисе (153) функция источников представляется выражением

$$\begin{aligned}B(\tau,\eta,\varphi,\zeta)&=B_*+\frac{\lambda}{4\pi}\int \mathrm{d}^2\omega'[2b\delta(\cos\gamma-1)+(1-b)x_*(\gamma)]I(\tau,\eta',\varphi',\zeta)+\\&=B_*+\lambda bI(\tau,\eta,\varphi,\zeta)+\frac{\lambda}{4\pi}(1-b)\int \mathrm{d}^2\omega' x_*(\gamma)I(\tau,\eta',\varphi',\zeta).\end{aligned} \tag{154}$$

Второе слагаемое справа просто вычитается из интенсивности, стоящей справа в уравнении переноса (слагаемое, описывающее поглощение), и коэффициент при ней превращается в $1-\lambda b$ (после введения оптической глубины; до введения было бы $æ+\sigma+\sigma b$). Изменится и вероятность выживания фотона: она приобретет множитель $1-b$. Добавочный множитель $1-\lambda b$ можно внести в оптическую глубину. Тогда вероятность выживания фотона еще раз изменится и станет $\lambda(1-b)/(1-\lambda b)=\sigma(1-b)/[æ+\sigma(1-b)]$. После такой перенормировки оптических глубин и λ можно применять методы решения задач с несильно вытянутыми индикатрисами, в частности метод Соболева. Способ выбора множителя b зависит от свойств реальной индикатрисы. Прием, основанный на выделении дельтаобразной части из индикатрисы, называется иногда транспортным приближением.

7. Сходимость итерированных индикатрис к сферической. В конце этого параграфа сделаем одно общее замечание. Как мы видели, многократные рассеяния соответствуют итерациям интегрального уравнения переноса. При этом итерируется индикатриса рассеяния. При не слишком ограничительных предположениях об индикатрисе такие итерации довольно быстро сходятся к изотропному рассеянию.

Для демонстрации сказанного найдем сначала выражение для итерации индикатрис. Пусть фотон, движущийся в направлении вектора $\boldsymbol{\omega}$, рассеивается с индикатрисой $x(\gamma)$ в направлении вектора $\boldsymbol{\omega}'$. Затем рассеянный фотон еще раз рассеивается при другой индикатрисе $x_{(1)}(\gamma)$ в направление $\boldsymbol{\omega}_1$. Обозначим $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_1 = \cos\gamma$, $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}' = \cos\theta$. Введем также некоторый азимут φ вектора $\boldsymbol{\omega}'$ по отношению к $\boldsymbol{\omega}$. Тогда общая вероятность указанного процесса рассеяния фотона

$$x_{(2)}(\gamma) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2\omega' x(\theta) x_{(1)}(\arccos(\cos\gamma\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta\cos\varphi)). \tag{155}$$

После усреднения по азимуту получается свертка двух индикатрис:

$$x_{(2)}(\gamma) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta x(\theta) p_{(1)}(\cos\gamma, \cos\theta), \tag{156}$$

где $p_{(1)}$ — усредненная по азимуту индикатриса $x_{(1)}(\gamma)$.

Применим выражение (156) к итерациям одной индикатрисы $x(\gamma)$, которые связаны рекуррентным соотношением

$$x^{(n)}(\gamma) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta x^{(n-1)}(\theta) p_0(\cos\gamma, \cos\theta), \tag{157}$$

где теперь p_0 — результат усреднения по азимуту рассматриваемой индикатрисы.

Исходя из разложения по многочленам Лежандра индикатрисы (9) и ее азимутального среднего (равенство (45) при $m = 0$), легко показать, что коэффициенты разложения n-й итерированной индикатрисы

$$x^{(n)}(\gamma) = \sum_{m=0}^\infty x_m^{(n)} P_m(\cos\gamma), \quad x^{(0)}(\gamma) = x(\gamma), \quad x_m^{(0)} = x_m, \tag{158}$$

при всех $n \geq 1$ подчиняются следующему рекуррентному соотношению:

$$x_m^{(n)} = \frac{x_m}{2m+1} x_m^{(n-1)}, \tag{159}$$

из которого вытекает, что

$$x_m^{(n)} = \left(\frac{x_m}{2m+1}\right)^n x_m. \tag{160}$$

Поскольку у неслишком сильно вытянутой индикатрисы $x_m < 2m+1$ (равенство при всех m отвечает игольчатой индикатрисе (15)), все коэффициенты (160), кроме $x_0^{(n)} = 1$, быстро стремятся к нулю, а сама итерированная индикатриса — к сферической.

Отмеченное обстоятельство объясняет высокую точность метода Соболева.

§ 2.5. Эвристические методы

Эвристическими называются такие методы получения решения задач, которые на основе непосредственного рассмотрения процесса рассеяния, минуя уравнение переноса, позволяют получать известные из традиционной теории или новые соотношения. При этом поскольку непосредственное решение интегродифференциальных или интегральных уравнений теории переноса представляется трудной задачей, эвристическими методами создатели теории переноса стремились вывести более удобные для решения уравнения или выяснить структуру решений до их вычисления. Здесь рассмотрим три таких подхода: принцип инвариантности, метод сложения слоев и вероятностный метод.

1. Принцип инвариантности. Этот метод был разработан В. А. Амбарцумяном в сороковых годах [4]. Изложим один из его вариантов на примере задачи об отражении от полубесконечной атмосферы при изотропном рассеянии [44,70].

Пусть на границу атмосферы падает поток параллельных лучей с интенсивностью πS под углом $\arccos\zeta$. Обозначим, как обычно, интенсивность отраженного излучения $I(\eta, \zeta)$ (при изотропном рассеянии имеется только нулевая азимутальная гармоника).

Добавим к атмосфере слой такого же вещества малой оптической толщины $\Delta\tau \ll 1$. От такой добавки свойства атмосферы в целом не изменятся, т. е. в отраженном потоке интенсивность будет точно та же. Однако можно рассмотреть, какие процессы происходят в добавочном слое. Это позволит получить уравнение для интенсивности выходящего излучения.

Прежде чем рассматривать поставленную задачу, напомним некоторые факты теории переноса. Если излучение проходит слой толщиной τ под углом $\arccos\zeta$, оно ослабляется в $e^{-\tau/\zeta}$ раз. Тот же слой поглощает долю $1-e^{-\tau/\zeta}$ от падающего пучка. Падающее излучение с интенсивностью πS под углом $\arccos\zeta$ поставляет на единичную площадку границы энергию $\pi S\zeta$, так как это излучение распространяется не на единичную, а на большую площадь: $1/\zeta$ (как известно, этим объясняется похолодание зимой). Напротив, излучаемая энергия с единицы площади ε под углом $\arccos\zeta$ дает интенсивность ε/ζ, так как на перпендикулярную единичную площадку попадает при этом энергии в $1/\zeta$ раз больше. Рассеяние единичного объема в единичный телесный угол происходит с вероятностью $\lambda/4\pi$.

Теперь рассмотрим, что происходит в добавленном слое. Необходимо учесть пять процессов, при которых в этом слое происходит не более одного рассеяния.

1) Падающее излучение проходит через добавленный слой, ослабляясь в нем, и отражается полубесконечной атмосферой под углом $\arccos\eta$, как будто добавочного слоя нет. По пути через него оно еще раз ослабляется. Результирующая интенсивность

$$\pi S\left(1-\frac{\Delta\tau}{\zeta}\right)\frac{I(\eta,\zeta)}{\pi S}\left(1-\frac{\Delta\tau}{\eta}\right). \tag{161}$$

Здесь ослабление в тонком слое разложено по толщине слоя: $e^{-\Delta\tau/\eta}\sim 1-\Delta\tau/\eta$. Слагаемое, пропорциональное $(\Delta\tau)^2$, следует отбросить.

2) Добавленный слой поглощает и рассеивает часть падающего излучения в сторону границы под заданным углом $\arccos\eta$. Рассеянное излучение просто выходит. Это дает интенсивность

$$\pi S\zeta\frac{\Delta\tau}{\zeta}\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{\eta}. \tag{162}$$

3) Часть поглощенного излучения слой рассеивает в сторону среды под произвольным углом $\arccos\eta'$. Это излучение отражается от нее, как будто слоя нет. По промежуточному углу следует произвести интегрирование. Интенсивность, соответствующая этому процессу, представляется формулой

$$\int\limits_0^1 \pi S\zeta\frac{\Delta\tau}{\zeta}\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{\eta'}2\pi\mathrm{d}\eta'\frac{I(\eta,\eta')}{\pi S}. \tag{163}$$

4) Отраженное под произвольным углом от внутренней (находящейся под слоем) границы излучение поглощается слоем и рассеивается под нужным углом. Эта интенсивность

$$\int\limits_0^1 I(\eta',\zeta)\eta' 2\pi\mathrm{d}\eta'\frac{\Delta\tau}{\eta'}\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{\eta}. \tag{164}$$

5) Отраженное внутренней поверхностью излучение после поглощения слоем рассеивается им в сторону среды, а затем отражается от нее. Здесь два произвольных угла, поэтому в этом слагаемом интенсивности появляется двойной интеграл:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 I(\eta',\zeta)\eta' 2\pi\mathrm{d}\eta'\frac{\Delta\tau}{\eta'}\frac{\lambda}{4\pi}\frac{2\pi\mathrm{d}\eta''}{\eta''}\frac{I(\eta,\eta'')}{\pi S}. \tag{165}$$

Конечно, проходящее через добавочный слой излучение ослабляется в нем. Однако это ослабление, как и процессы рассеяния выше первого порядка, вносит в интенсивность вклад более высокого порядка малости по $\Delta\tau$.

Сумма всех записанных слагаемых дает ту же отраженную интенсивность $I(\eta,\zeta)$. После сокращения слагаемых без множителя $\Delta\tau$ и деления на указанный множитель получаем

$$I(\eta,\zeta)\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{\lambda S}{4}\frac{1}{\eta}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 I(\eta,\eta')\frac{\mathrm{d}\eta'}{\eta'}+\frac{\lambda}{2\eta}\int\limits_0^1 I(\eta',\zeta)\mathrm{d}\eta'+\frac{\lambda}{S}\int\limits_0^1 I(\eta,\eta'')\frac{\mathrm{d}\eta''}{\eta''}\int\limits_0^1 I(\eta',\zeta)\mathrm{d}\eta'. \tag{166}$$

Если от интенсивности перейти к коэффициенту отражения

$$I(\eta,\zeta)=S\rho(\eta,\zeta)\zeta, \tag{167}$$

уравнение (166) после сокращения на S и умножения на η примет более простой и симметричный вид:

$$\rho(\eta,\zeta)(\eta+\zeta)=\frac{\lambda}{4}\left[1+2\eta\int\limits_0^1\rho(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\right]\left[1+2\zeta\int\limits_0^1\rho(\eta'',\zeta)\mathrm{d}\eta''\right]. \tag{168}$$

Как видно из уравнения (168), его правая часть разбивается на произведение трех множителей. Множители в квадратных скобках очень схожи между собой, но порядок аргументов в них различен. В дальнейшем будет показано, что коэффициент отражения является симметричной функцией своих аргументов. Воспользовавшись этим свойством уже сейчас, из уравнения (168) получаем представление коэффициента через одну функцию (не путать с азимутом)

$$\rho(\eta,\zeta)=\frac{\lambda}{4}\frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta)}{\eta+\zeta}. \tag{169}$$

При получении представления (169) из уравнения (168) было введено обозначение для интеграла

$$\varphi(\eta)=1+2\eta\int\limits_0^1\rho(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'. \tag{170}$$

Подставив в это определение выражение (169), получим уравнение для функции φ:

$$\varphi(\eta)=1+\frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\int\limits_0^1\frac{\varphi(\eta')}{\eta+\eta'}\mathrm{d}\eta'. \tag{171}$$

Функция φ и уравнение (171) носят имя В. А. Амбарцумяна. Оказалось, что это нелинейное уравнение сравнительно просто решается итерациями. Приведем численные значения функции Амбарцумяна при $\lambda=1$ ($\varphi(0)=1$ при всех λ):

η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\varphi(\eta)$	1.25	1.45	1.64	1.83	2.01	2.19	2.38	2.55	2.73	2.91

(172)

На рис. 3 приведены графики функций $\varphi(\mu)$ при различных значениях λ.

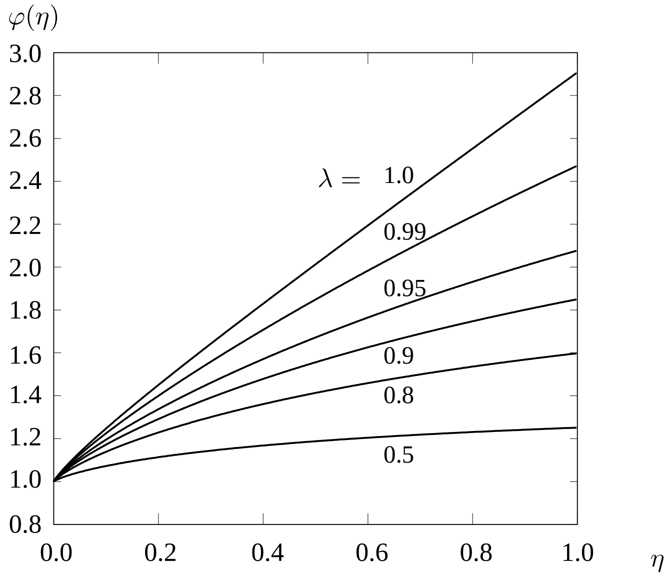


Рис. 3. Функции $\varphi(\eta)$ при некоторых значениях λ.

Примененный принцип инвариантности позволил без подробного рассмотрения процесса рассеяния в среде и без определения функции источников или какой-либо другой характеристики поля излучения внутри среды получить формулу (169), отражающую структуру интенсивности выходящего излучения и выражающую эту функцию двух аргументов через функцию одного аргумента, а также уравнение (171), решение которого дает возможность рассчитать эту интенсивность.

2. Сложение слоев. Это вариант принципа инвариантности, но в отношении слоев конечной толщины.

Рассмотрим опять задачу об отражении излучения от полубесконечной среды с изотропным рассеянием. Обозначим интенсивность излучения на глубине τ в этой задаче, как и ранее, через $I(\tau,\eta,\zeta)$.

Отсечем мысленно от полубесконечной среды слой толщиной τ_1. Этот слой будем называть отсеченным, а оставшуюся часть атмосферы — усеченной атмосферой. Ясно, что нижнему слою (усеченной атмосфере) безразлично, что его освещает: лежащий сверху отсеченный слой или просто такое же излучение без самого слоя. Иначе говоря, если усеченную полубесконечную среду осветить внешним потоком, ослабленным, как будто он прошел отсеченный слой, а также тем излучением, которое создавалось в этом верхнем слое, то для нижнего слоя как бы ничего не изменится. Изменится только начало отсчета глубин в усеченной атмосфере.

Таким образом, интенсивность излучения на глубине $\tau+\tau_1$ исходной атмосферы слагается из трех составляющих: 1) интенсивности в усеченной атмосфере на глубине τ от ослабленного падающего первичного потока; 2) из аналогичной интенсивности, но от излучения, которое образуется в отсеченном слое и падает на границу усеченной атмосферы; 3) наконец, в случае излучения, идущего вниз, падающее на границу диффузное излучение верхнего слоя, ослабляясь по дороге, попадает на глубину τ нижнего слоя как прямое излучение. В результате получается соотношение [31]

$$I(\tau+\tau_1,\eta,\zeta)=e^{-\tau_1/\zeta}I(\tau,\eta,\zeta)+\frac{2\pi}{\pi S}\int\limits_0^1 I(\tau_1,\eta',\zeta)I(\tau,\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'+I(\tau_1,\eta,\zeta)e^{-\tau/\eta}\Theta(\eta). \tag{173}$$

Здесь $\Theta(\eta)=[\mathrm{sgn}(\eta)+1]/2$ — функция единичного скачка. Множитель 2π перед интегралом возникает вследствие интегрирования по азимуту, а множитель в знаменателе — из-за того, что на слой падает поток, равный не πS, а $I(\tau_1,\eta',\zeta)$.

Соотношение (173) позволяет вычислить интенсивность на глубине $\tau+\tau_1$, если известна интенсивность излучения на глубинах τ и τ_1. Если в (173) положить $\tau=\tau_1$, то получится формула удвоения глубин: по излучению на некоторой глубине можно рассчитать излучение на двойной глубине. В таком виде соотношение (173) было применено к расчету внутреннего поля излучения в задаче о диффузном отражении. Сначала итерациями рассчитывалась интенсивность на малых глубинах, а затем глубина удваивалась и доводилась до больших значений [26]. Метод оказался устойчивым и давал достаточную точность.

3. Вероятностная трактовка. Теория переноса допускает истолкование многих своих соотношений в терминах теории вероятностей. Его можно начать уже с формулы для ослабления интенсивности: множитель $e^{-\tau}=e^{-\alpha z}$ равен вероятности того, что фотон пройдет расстояние z без поглощения или рассеяния. Тогда разность $1-e^{-\alpha z}$ есть вероятность, что фотон испытает поглощение, т. е. либо погибнет, либо рассеится на расстоянии z. Эта разность есть, таким образом, интегральная функция распределения вероятности поглощения фотона на пути z. Дифференциальная функция распределения получается дифференцированием: произведение $e^{-\alpha z}\alpha\mathrm{d}z$ — вероятность того, что фотон, излученный в каком-либо месте, поглотится на расстоянии от z до $z+\mathrm{d}z$.

Математическое ожидание

$$\overline{z}=\int\limits_0^\infty z\alpha e^{-\alpha z}\mathrm{d}z=\frac{1}{\alpha} \tag{174}$$

есть среднее расстояние, которое фотон проходит без поглощения. Таким образом, оптическое расстояние $\tau=\alpha z$ — это длина, измеренная в средних свободных пробегах фотона.

Допускает вероятностную интерпретацию и ядро основного интегрального уравнения. Функция

$$E_1(\tau)=\int\limits_0^1 e^{-\tau/\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} \tag{175}$$

есть вероятность того, что излученный в определенную сторону фотон дойдет по какому-либо пути, т. е. по отрезку, наклоненному все равно под каким углом $\arccos\eta$ к нормали к слоям плоской среды, до слоя, отстоящего по глубине от слоя его излучения на τ. Произведение $E_1(\tau)\mathrm{d}\tau$ — вероятность, что фотон, излученный на границе в сторону среды, дойдет до глубины τ и поглотится в слое толщиной $\mathrm{d}\tau$. Поэтому интеграл

$$\int\limits_0^\infty E_1(\tau)\mathrm{d}\tau=1, \tag{176}$$

так как он равен полной вероятности поглощения фотона на какой-нибудь глубине.

В. В. Соболев ввел в теорию понятие вероятности выхода фотона из среды [70]. Это понятие определяется следующим образом. Произведение $2\pi p(\tau,\eta)\mathrm{d}\eta$ обозначает вероятность, что фотон, находившийся в поглощенном состоянии на глубине τ в полубесконечной атмосфере с изотропным рассеянием, выйдет из этой среды под углом $\arccos\eta$ в телесном угле $2\pi\mathrm{d}\eta$ после любого числа рассеяний. Тогда $p(\tau,\eta)$ называется вероятностью выхода фотона из полубесконечной среды (точнее, это плотность вероятности).

Для введенной величины легко получать уравнения и соотношения. Например, справедливо уравнение

$$p(\tau,\eta)=\frac{\lambda}{4\pi}e^{-\tau/\eta}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty E_1(|\tau-\tau_1|)p(\tau',\eta)\mathrm{d}\tau'. \tag{177}$$

Здесь первое слагаемое справа есть вероятность того, что фотон излучится и сразу выйдет из среды (без рассеяний), а второе — вероятность того, что он выйдет из среды, испытав по крайней мере одно рассеяние, т. е. $\lambda/2$ — вероятность рассеяться в определенную сторону (возрастания или убывания глубины), $E_1(|\tau-\tau'|)\mathrm{d}\tau'$ — вероятность пройти непоглощенным с глубины τ на глубину τ' и поглотиться там в слое толщиной $\mathrm{d}\tau'$ и, наконец, $p(\tau',\eta)$ — вероятность выйти после этого из среды в нужном направлении. Сумма дает полную вероятность события.

Уравнение (177) по виду совпадает с уравнением для функции источников в задаче о диффузном отражении от полубесконечной среды. Сравнение двух уравнений устанавливает связь между определяемыми ими величинами:

$$p(\tau,\eta)=\frac{B(\tau,\eta)}{\pi S}. \tag{178}$$

Подчеркнем, что связываемые соотношением (178) функции имеют совершенно различный смысл. Справа стоит функция, равная энергии, излучаемой в единичном телесном угле на глубине τ, если под углом $\arccos\eta$ на границу атмосферы падает единичный поток излучения. Слева же — вероятность выйти фотону из такой же атмосферы под углом $\arccos\eta$, если этот фотон был поглощен на глубине τ. Совпадение таких величин называется принципом взаимности и является проявлением обратимости оптических явлений.

Помимо эвристического значения, т. е. возможности выводить новые уравнения из вероятностных соображений, величина $p(\tau,\eta)$ имеет и прикладное значение. Если найти вероятность выхода, то оказывается возможным по известной мощности первичных источников $B_*(\tau)$ вычислить интенсивность выходящего излучения простым интегрированием. Действительно, очевидно, что по смыслу вероятности выхода указанная интенсивность [70]

$$I(\eta)=\frac{4\pi}{\lambda}\int\limits_0^\infty B_*(\tau)p(\tau,\eta)\frac{\mathrm{d}\tau}{\eta}. \tag{179}$$

4. Применение эвристических методов. Плодотворные результаты дает одновременное применение различных эвристических методов. Например, добавление малого слоя к полубесконечной атмосфере позволяет получить соотношение для вероятности выхода [70]

$$p(\tau+\mathrm{d}\tau,\eta)=p(\tau,\eta)\left(1-\frac{\mathrm{d}\tau}{\eta}\right)+\int\limits_0^1 p(\tau,\eta')\frac{\mathrm{d}\tau}{\eta'}2\pi\mathrm{d}\eta' p(0,\eta). \tag{180}$$

Соотношение означает, что вероятность выхода с глубины $\tau+\mathrm{d}\tau$ равна сумме двух вероятностей: 1) выйти с этой глубины на глубину $\mathrm{d}\tau$ и испытать ослабление в слое толщиной $\mathrm{d}\tau$, 2) после выхода на глубину $\mathrm{d}\tau$ под произвольным углом поглотиться в этом тонком слое и рассеяться в сторону среды в телесном угле $2\pi\mathrm{d}\eta'$ с последующим выходом из среды под заданным углом. Обычные преобразования приводят к уравнению

$$\frac{\partial p(\tau,\eta)}{\partial\tau}=-\frac{1}{\eta}p(\tau,\eta)+2\pi p(0,\eta)\int\limits_0^1 p(\tau,\eta')\frac{\mathrm{d}\eta'}{\eta'}. \tag{181}$$

Интенсивность выходящего излучения в задаче об отражении, в которой $B_*(\tau,\zeta)=\dfrac{\lambda S}{4}e^{-\tau/\zeta}$, выражается через функцию источников этой задачи и через вероятность выхода:

$$I(\eta,\zeta)=S\rho(\eta,\zeta)\zeta=\int\limits_0^\infty B(\tau,\zeta)e^{-\tau/\eta}\frac{\mathrm{d}\tau}{\eta}=\frac{4\pi}{\lambda}\int\limits_0^\infty\frac{\lambda S}{4}e^{-\tau/\zeta}p(\tau,\eta)\frac{\mathrm{d}\tau}{\eta}. \tag{182}$$

Коэффициент отражения также выражается через функцию источников и вероятность выхода:

$$\rho(\eta,\zeta)=\frac{\pi}{\eta\zeta}\int\limits_0^\infty e^{-\tau/\zeta}p(\tau,\eta)\mathrm{d}\tau. \tag{183}$$

Соотношения (178) и (183) доказывают использованную нами выше симметричность функции $\rho(\eta,\zeta)$.

В свою очередь и вероятность выхода с нулевой глубины выражается через коэффициент отражения и функцию Амбарцумяна. Это следует из уравнения (177) при $\tau = 0$ и связи (183):

$$p(0,\eta) = \frac{\lambda}{4\pi}\left[1 + 2\eta\int\limits_0^1 \rho(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\right] = \frac{\lambda}{4\pi}\varphi(\eta). \tag{184}$$

Выведенное равенство показывает вероятностный смысл функции Амбарцумяна: это плотность вероятности выхода фотона, излученного на нулевой глубине, под определенным углом к поверхности.

Вероятностным методом могут быть получены и многие другие соотношения.

Принцип инвариантности и метод сложения слоев были впоследствии развиты, обобщены и широко применялись для решения разных задач отдельно и в комбинации с вероятностным подходом С. Чандрасекаром [85], В. В. Соболевым [70] и его школой [31,88], бюраканскими учениками В. А. Амбарцумяна и другими (см. сборник трудов Симпозиума, посвященного 40 летию принципа инвариантности [62]).

5. Альбедо полубесконечной атмосферы. Хотя рассматриваемые в двух последних в этом параграфе пунктах вопросы прямо не связаны с описанными выше методами, эти вопросы примыкают к методам по подходу. Речь пойдет о характеристиках свечения планетных атмосфер [77].

Атмосфера представляет собой тонкую оболочку над поверхностью планеты. Например, земная атмосфера имеет высоту порядка 10 км, в то время как радиус Земли 6400 км. Поэтому атмосферу локально можно моделировать плоским слоем. Ее оптическая толщина при отсутствии облаков в видимом участке спектра порядка 0.2–0.4. Однако облачный слой может иметь оптическую толщину, измеряемую сотнями. Такую атмосферу, рассматриваемую извне или с поверхности Земли, можно считать полубесконечной. Еще более оптически толсты атмосферы Венеры, Юпитера и планет, расположенных за Юпитером. Атмосферы почти всех планет (за исключением, может быть, Меркурия), включая и марсианскую, оптически толсты в инфракрасной области.

Альбедо планеты — это отраженная часть падающей на нее энергии. Нас интересует диффузное отражение излучения атмосферой планеты. Пусть, как обычно, S — солнечная постоянная, т. е. πS — освещенность перпендикулярной площадки в рассматриваемой частоте. Тогда на единичную площадь плоской атмосферы падает количество энергии $E_{\text{пад}} = \pi S\zeta$, где $\arccos\zeta$ — угол падения внешнего излучения. Отражается от атмосферы под углом $\arccos\eta$ и азимутом φ излучение интенсивности $I(0,-\eta,\varphi,\zeta)$, а количество энергии с единичной площади $I(0,-\eta,\varphi,\zeta)\eta$. Полная отраженная энергия представляется интегралом

$$E_{\text{отр}} = \int I(0,-\eta,\varphi,\zeta)\eta\mathrm{d}^2\omega = 2\pi S\zeta\int\limits_0^1 \rho(\eta,\zeta)\eta\mathrm{d}\eta. \tag{185}$$

Ясно, что в полное отраженное излучение дает вклад только нулевая гармоника в разложении по косинусам кратных азимутов (индекс 0 не пишется). Согласно определению альбедо

$$A(\zeta) = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} = 2\int\limits_0^1 \rho(\eta,\zeta)\eta\mathrm{d}\eta. \tag{186}$$

Выражение (186) преобразуем с помощью формулы для коэффициента отражения. Подставив в (186) представление (169), получим выражение альбедо через функцию Амбарцумяна:

$$A(\zeta) = \frac{\lambda}{2}\varphi(\zeta)\int\limits_0^1 \varphi(\eta)\frac{\eta\mathrm{d}\eta}{\eta+\zeta}. \tag{187}$$

Теперь воспользуемся уравнением Амбарцумяна (171). Для этого сначала введем обозначение для моментов функции $\varphi(\eta)$

$$\alpha_n = \int\limits_0^1 \eta^n\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta \tag{188}$$

и преобразуем подынтегральную дробь следующим образом: $\eta/(\eta+\zeta) = 1 - \zeta/(\eta+\zeta)$. Затем выразим интеграл от второй дроби через функцию $\varphi(\eta)$ с помощью уравнения (171). Тогда получим, что альбедо полубесконечной атмосферы

$$A(\zeta) = \frac{\lambda}{2}\varphi(\zeta)\left[\int\limits_0^1 \varphi(\eta)\mathrm{d}\eta - \zeta\int\limits_0^1 \varphi(\eta)\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta+\zeta}\right] = \varphi(\zeta)\left[\frac{\lambda}{2}\alpha_0 + \frac{1}{\varphi(\zeta)} - 1\right]. \tag{189}$$

Для нулевого момента легко найти простое выражение. Проинтегрируем уравнение (171) по η от нуля до 1, а затем поменяем обозначения переменных интегрирования η и η':

$$\alpha_0 = 1 + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \mathrm{d}\eta\mathrm{d}\eta'\varphi(\eta)\varphi(\eta')\frac{\eta}{\eta+\eta'} = 1 + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \mathrm{d}\eta\mathrm{d}\eta'\varphi(\eta)\varphi(\eta')\frac{\eta'}{\eta+\eta'}. \tag{190}$$

Взяв сумму двух выражений для момента, получим соотношение

$$2\alpha_0 = 2 + \frac{\lambda}{2}\alpha_0^2. \tag{191}$$

Из этого квадратного уравнения находим

$$\alpha_0 = \frac{2}{\lambda}\left[1 - \sqrt{1-\lambda}\right]. \tag{192}$$

Здесь выбран знак минус, так как при $\lambda \to 0$ функция $\varphi(\eta)$ согласно уравнению (171) стремится к 1 и ее нулевой момент тоже стремится к 1. При знаке плюс предел получается бесконечным.

Подставив выражение (192) в (189), найдем окончательную формулу

$$A(\zeta) = 1 - \sqrt{1-\lambda}\varphi(\zeta). \tag{193}$$

При предельных значениях λ получаются естественные значения альбедо. При $\lambda = 1$ все падающее излучение отражается и $A(\zeta) = 1$, а при $\lambda = 0$ сама функция $\varphi(\eta) = 1$ и $A(\zeta) = 0$. На рис. 4 отражен ход изменения альбедо $A(\zeta)$ при различных значениях λ.

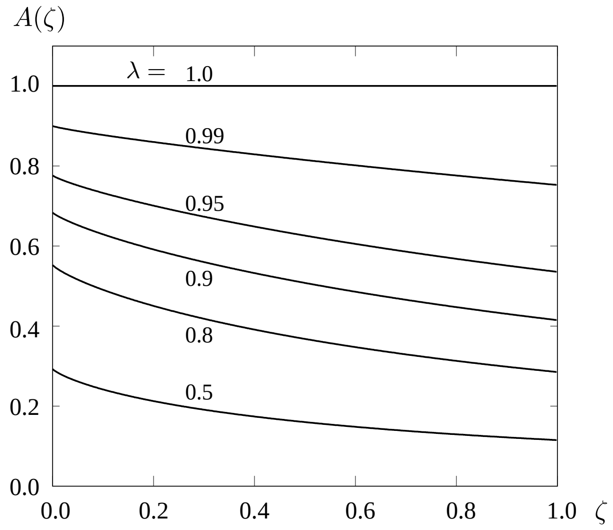


Рис. 4. Плоское альбедо $A(\zeta)$ при некоторых значениях λ.

Альбедо плоского слоя часто называют плоским альбедо. Наряду с ним рассматривается и интегральная величина, характеризующая излучение от всей планеты. Выражение для нее мы найдем в следующем пункте.

6. Сферическое альбедо планеты. Обозначим радиус планеты через R. Альбедо планеты определяется так же, как и выше определялось альбедо слоя. Это отношение количества отраженной энергии к количеству падающей. На поверхность планеты падает, очевидно, $E_{\text{пад}} = \pi S \pi R^2$. Полное количество отраженной лучистой энергии дается формулой

$$E_{\text{отр}} = \pi S \int\limits_0^R A(\zeta) 2\pi r \mathrm{d}r. \tag{194}$$

Здесь ζ — угол между направлением на наблюдателя и радиусом, проведенным в определенной точке на полусфере, обращенной к наблюдателю, т. е. угол падения внешнего излучения. Произведение $2\pi r \mathrm{d}r$ равно площади кольца при закрепленном угле падения. Ясно, что $r = R\sqrt{1-\zeta^2}$, $r\mathrm{d}r = -R^2\zeta\mathrm{d}\zeta$ и

$$E_{\text{отр}} = 2\pi^2 S R^2 \int\limits_0^1 A(\zeta)\zeta\mathrm{d}\zeta. \tag{195}$$

Таким образом,

$$A_{\text{сфр}} = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} = 2\int\limits_0^1 A(\zeta)\zeta\mathrm{d}\zeta = 1 - 2\sqrt{1-\lambda}\alpha_1. \tag{196}$$

К сожалению, первый момент не имеет простого выражения. Его можно было бы попытаться найти тем же способом, что и нулевой момент. Легко убедиться, что умножение уравнения (171) на $\eta\mathrm{d}\eta$ и интегрирование ничего не дает. Проинтегрируем обе части этого уравнения после умножения его на $\eta^2\mathrm{d}\eta$. Затем сложим полученное равенство с его модификацией после взаимного изменения обозначений переменных в двойном интеграле справа. Тогда после подстановки выражения для α_0 найдем

$$2\sqrt{1-\lambda}\,\alpha_2 = \frac{2}{3} - \frac{\lambda}{2}\,\alpha_1^2. \tag{197}$$

Только при $\lambda = 1$ получается $\alpha_1 = 2/\sqrt{3}$. Однако для сферического альбедо этот результат бесполезен.

Приведем таблицу значений сферического альбедо:

λ	0.0	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A_{\text{сфр}}$	0.0	0.11	0.15	0.19	0.26	0.34	0.48	1.0

(198)

Отметим быстрое убывание альбедо при уменьшении λ.

§ 2.6. Решение основных задач для плоских сред

1. Бесконечная среда. В этом параграфе рассмотрим основные задачи, представляющие как теоретический интерес, так и имеющие непосредственное прикладное значение. В отличие от предыдущего параграфа, где рассматривалось изотропное рассеяние, здесь будет изучаться рассеяние при произвольной индикатрисе. Ограничимся, как и во всем курсе, плоскими средами и начнем с самого простого случая среды без границ, т. е. бесконечной в обе стороны [4].

Конечно, такая среда невозможна, это — сильная абстракция. Однако если наблюдения производятся в оптически очень толстой среде вдали от ее границ, то с хорошей точностью можно считать, что реализуется случай бесконечной среды.

Уравнения переноса и баланса энергии для нашего случая имеют стандартный вид. Они записываются одинаково для любой азимутальной гармоники. Поэтому не будем указывать номер m в индексе у всех величин кроме гармоники индикатрисы:

$$\eta\frac{\mathrm{d}I(\tau,\eta)}{\mathrm{d}\tau} = -I(\tau,\eta) + B(\tau,\eta), \tag{199}$$

$$B(\tau,\eta) = B_*(\tau,\eta) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{1} p_m(\eta,\eta')I(\tau,\eta')\mathrm{d}\eta'. \tag{200}$$

В случае бесконечной среды нет граничных условий, так как нет границ. Однако обычно накладываются условия на бесконечности, т. е. определенные требования на характер поведения решений при $\tau \to \pm\infty$. Если задача описывает реальное поле излучения, то необходимо требовать, чтобы его интенсивность на бесконечности убывала или, по крайней мере, не очень сильно возрастала.

Наибольший интерес в случае бесконечной среды представляет задача без источников на конечном расстоянии, т. е. случай, когда $B_*(\tau,\eta) = 0$ [76]. У решений этой задачи будем писать индекс ∞. Они определяются теми же уравнениями (199) и (200) с $B_*(\tau,\eta) = 0$. Полное отсутствие источников не должно создавать никакого поля, поэтому для существования нетривиального решения предполагают, что первичные источники излучения находятся на бесконечном расстоянии. Будем считать, что они расположены на $\tau = -\infty$. Чтобы бесконечно удаленные источники создавали конечное поле излучения, их мощность должна быть бесконечной. Ясно, что при приближении к бесконечным источникам порождаемое ими поле излучения становится все сильнее и тоже стремится к бесконечности. В противоположном направлении, т. е. при $\tau \to +\infty$, поле излучения должно ослабевать. Это и есть условия на бесконечности для такого случая.

Запишем для функций источников интегральное уравнение

$$B_\infty(\tau,\eta) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_{-\infty}^{\tau} B_\infty(\tau',\eta')e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'} - \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{0} p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_{\tau}^{\infty} B_\infty(\tau',\eta')e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}. \tag{201}$$

Уравнение переноса не меняет своего вида.

Будем искать решения в виде

$$I_\infty(\tau,\eta) = i(\eta)e^{-k\tau}, \quad B_\infty(\tau,\eta) = b(\eta)e^{-k\tau}. \tag{202}$$

Здесь $i(\eta)$, $b(\eta)$ — искомые функции, а k — искомая постоянная. Такая форма решения подсказывается следующим соображением. В бесконечной среде нет выделенного уровня глубины, поэтому за нулевую можно принять любую глубину. Форма решения в виде экспоненты соответствует этому, так как переход к другому уровню отсчета можно записать в виде $e^{-k(\tau-\tau_1)}e^{-k\tau_1}$. Последняя экспонента переходит множителем к функциям $i(\eta)$ и $b(\eta)$, и форма решения сохраняется.

Число k определяется из условия разрешимости задачи. Оказывается, что решение поставленной задачи существует только для нулевой азимутальной гармоники, что физически совершенно понятно, так как азимутальной зависимости решений неоткуда взяться при источниках на бесконечности. Поэтому ниже считаем $m = 0$.

Подставив (202) в уравнение (199) (с индексом у решений ∞), получим

$$(1-k\eta)i(\eta) = b(\eta), \quad i(\eta) = \frac{b(\eta)}{1-k\eta}, \tag{203}$$

так что функции $b(\eta)$ и $i(\eta)$ не являются независимыми. Подстановка (202) в уравнение (200) при $B_*(\tau,\eta) = 0$ приводит к соотношению

$$b(\eta) = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} p_0(\eta,\eta')i(\eta')\mathrm{d}\eta' \ \text{ или } \ b(\eta) = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} p_0(\eta,\eta')\frac{b(\eta')}{1-k\eta'}\mathrm{d}\eta'. \tag{204}$$

Это основное уравнение для определения искомых функций. Точно такое же уравнение получается, если формулу для $B_\infty(\tau,\eta)$ подставить в однородное интегральное уравнение вида (201) с $m = 0$.

Отметим, что постоянные k, удовлетворяющие условию разрешимости уравнения (204), всегда встречаются парами: $\pm k$. Действительно, из (204) следует, что при одновременной замене k на $-k$ и $b(\eta)$ на $b(-\eta)$ уравнение остается в силе (так как $p_0(-\eta,-\eta') = p_0(\eta,\eta')$). Поэтому ясно, что решением задачи (204) являются также функции

$$B_\infty(-\tau,-\eta) = b(-\eta)e^{k\tau}, \quad I_\infty(-\tau,-\eta) = \frac{b(-\eta)}{1+k\eta}e^{k\tau}. \tag{205}$$

Фактически, это то же самое решение, что и (202), но с источниками на $\tau = +\infty$. При таком перемещении источников просто изменяется отсчет глубин и углов на противоположный.

Пусть индикатриса рассеяния разложена по многочленам Лежандра

$$x(\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} x_l P_l(\cos\gamma). \tag{206}$$

Тогда, как было показано в одном из предыдущих параграфов, усредненная по азимутам индикатриса

$$p_0(\eta,\eta') = \sum_{l=0}^{\infty} x_l P_l(\eta)P_l(\eta'). \tag{207}$$

Подстановка этого разложения в уравнение (204) приводит к заключению, что по многочленам Лежандра раскладывается и функция $b(\eta)$:

$$b(\eta) = \sum_{l=0}^{\infty} x_l b_l P_l(\eta), \tag{208}$$

где введены коэффициенты

$$b_l = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} \frac{b(\eta)P_l(\eta)}{1-k\eta}\mathrm{d}\eta. \tag{209}$$

Из (209) и (208) получаем систему для определения коэффициентов b_l, $l = 0, 1, 2...$:

$$b_l = \frac{\lambda}{2}\sum_{j=0}^{\infty} x_j b_j \int_{-1}^{1} P_l(\eta)P_j(\eta)\frac{\mathrm{d}\eta}{1-k\eta}. \tag{210}$$

Поскольку эта система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных однородна, ее определитель должен быть равен нулю. Из этого условия находится постоянная k. Именно это условие не выполняется при $m > 0$.

Ясно, что из уравнения (204) нельзя определить $b(\eta)$ полностью, так как это уравнение однородно и к решению можно дописать произвольный множитель. По этой причине для полного определения функций $i(\eta)$ и $b(\eta)$ надо подчинить их какой-либо нормировке. Удобно сделать это условием

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} b(\eta)\mathrm{d}\eta = 1. \tag{211}$$

Эта нормировка обеспечивает и нормировку интенсивности. Действительно, подставив (204) в (211), находим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} b(\eta)\mathrm{d}\eta = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\eta' i(\eta')\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} p_0(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{1} i(\eta')\mathrm{d}\eta' = 1. \tag{212}$$

При переходе к предпоследнему выражению учтено условие нормировки индикатрисы

$$\int x(\gamma)\frac{\mathrm{d}^2\omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} p_0(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta = 1. \tag{213}$$

Условие нормировки (211) равносильно утверждению, что $b_0 = 1$.

Аналитическое решение бесконечной системы вряд ли возможно, поэтому на практике ограничиваются каким-либо приближением. Естественным приближением является замена ряда (206) суммой до $l = n$. Продемонстрируем схему решения на примере $n = 1$.

2. Двучленная индикатриса. Пусть

$$x(\gamma) = 1 + x_1\cos\gamma, \quad p_0(\eta,\eta') = 1 + x_1\eta\eta', \quad x_1 > -1. \tag{214}$$

Верхний левый минор второго порядка матрицы коэффициентов системы (210) содержит функцию

$$a(k) = \frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k} \tag{215}$$

и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda a(k) & \lambda x_1\dfrac{1-a(k)}{k} \\ \lambda\dfrac{1-a(k)}{k} & 1+\lambda x_1\dfrac{1-a(k)}{k^2} \end{pmatrix}. \tag{216}$$

Система с учетом того, что $b_0 = 1$, записывается в виде (второе уравнение умножено на k)

$$1-\lambda a(k) + \lambda x_1\frac{1-a(k)}{k}b_1 = 0, \quad \lambda[1-a(k)] + \left[k + \lambda x_1\frac{1-a(k)}{k}\right]b_1 = 0. \tag{217}$$

Вычтя одно уравнение из другого, найдем второй коэффициент:

$$b_1 = \frac{1-\lambda}{k}, \tag{218}$$

а подставив в них этот результат, получим уравнение для определения k:

$$\lambda\left[1 + x_1\frac{1-\lambda}{k^2}\right]a(k) = 1 + \lambda x_1\frac{1-\lambda}{k^2}, \tag{219}$$

которое называется характеристическим. Его можно записать и иначе:

$$1-\lambda-\lambda[a(k)-1]-\lambda x_1(1-\lambda)\frac{a(k)-1}{k^2} = 0. \tag{220}$$

В случае изотропного рассеяния $x_1 = 0$. Тогда характеристическое уравнение выглядит совсем просто

$$\lambda a(k) = \frac{\lambda}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k} = 1. \tag{221}$$

Последнее уравнение было получено еще О. Д. Хвольсоном [83].

Исследуем решения характеристического уравнения (220). Как видно непосредственно из самого уравнения, его решения располагаются симметрично относительно нуля. Действительно, так как функция $a(k)$ четная, то наряду с корнем $k > 0$ обязательно имеется корень $-k$. Очевиден корень $k = 0$ при $\lambda = 1$. Этот корень двукратный, т. е. в нуль обращается не только сама функция, стоящая слева в (220), но и ее производная по k. Это утверждение следует из того, что $a(0) = 1$, а производная

$$a'(k) = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{1-k^2} - a(k)\right] \tag{222}$$

в нуле также обращается в нуль, а вместе с ней и производная левой части (219), так как при $|k| < 1$

$$a(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^{2j}}{2j+1} \sim 1 + \frac{k^2}{3} + \frac{k^4}{5}. \tag{223}$$

Изучим поведение положительного корня вблизи концов промежутка изменения λ. При $1-\lambda \ll 1$ корень мал. Используя разложение (223), находим с точностью до k^2

$$1 - \lambda - \frac{k^2}{3} - x_1\frac{1-\lambda}{3} = 0, \tag{224}$$

откуда

$$k \sim \sqrt{(3-x_1)(1-\lambda)}. \tag{225}$$

Эта асимптотика совпадает с полученным выражением для k при приближенном решении задачи о диффузном отражении методом Соболева. Однако, как мы теперь видим, выражение (225) справедливо только при значениях λ, близких к единице, т. е. при почти чистом рассеянии, когда происходит много рассеяний. В противоположном случае при $\lambda \to +0$ корень $k \to 1-0$ и

$$1 - \lambda a(k) - \lambda x_1 a(k) = 0, \quad a(k) \sim \frac{1}{2}\ln\frac{2}{1-k}. \tag{226}$$

Сходимость корня k к 1 очень быстрая:

$$k \sim 1 - 2\exp\left(-\frac{2}{\lambda(1+x_1)}\right). \tag{227}$$

Все результаты для изотропного рассеяния получаются простой подстановской $x_1 = 0$.

Таким образом, мы показали, как находится поле излучения в бесконечной среде с источниками на бесконечности. Для простейшей несферической (и для сферической) индикатрисы рассеяния задача решена до конца.

3. Задача о диффузном отражении. Формулировка этой задачи для полубесконечной атмосферы уже давалась. Здесь ее только напомним и получим некоторые сведения о решении [44,76]. Математическое обоснование задач о рассеянии в плоских средах дано в работах [9,43].

Основное интегральное уравнение для функции источников m-й гармоники имеет вид

$$B_m(\tau,\eta,\zeta) = \frac{\lambda S}{4}p_m(\eta,\zeta)e^{-\tau/\zeta} + \\ + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int_0^\tau B_m(\tau',\eta',\zeta)e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'} - \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^0 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int_\tau^\infty B_m(\tau',\eta',\zeta)e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}. \tag{228}$$

Как уже говорилось, основной интерес представляет отраженное излучение, интенсивность которого определяется коэффициентом отражения

$$\rho_m(\eta,\zeta) = \frac{I_m(0,-\eta,\zeta)}{S\zeta} = \frac{1}{S\eta\zeta}\int_0^\infty B_m(\tau,-\eta,\zeta)e^{-\tau/\eta}\mathrm{d}\tau. \tag{229}$$

Нам понадобится частное значение функции источников на границе среды. Положим в уравнении (228) $\tau = 0$:

$$B_m(0,\eta,\zeta) = \frac{\lambda S}{4}p_m(\eta,\zeta) - \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^0 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int_0^\infty B_m(\tau',\eta',\zeta)e^{\tau'/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}. \tag{230}$$

Как следует из (229), значение функции источников на границе выражается через коэффициент отражения:

$$B_m(0,\eta,\zeta)=\frac{\lambda S}{4}\left[p_m(\eta,\zeta)+2\zeta\int\limits_0^1 p_m(\eta,-\eta')\mathrm{d}\eta'\rho_m(\eta',\zeta)\right]. \qquad (231)$$

Можно получить и отдельное уравнение для определения коэффициента отражения. Для этого сначала проделаем довольно длинную выкладку и получим уравнение, связывающее производную от $B_m(\tau,\eta,\zeta)$ с самой этой функцией и $\rho_m(\eta,\zeta)$. В интегралах уравнения (228) произведем замены переменных интегрирования: в первом $\tau'=\tau-\tau''$, а во втором $\tau'=\tau+\tau''$. Тогда уравнение запишется так:

$$B_m(\tau,\eta,\zeta)=\frac{\lambda S}{4}p_m(\eta,\zeta)e^{-\tau/\zeta}+$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_0^\tau B_m(\tau-\tau'',\eta',\zeta)e^{-\tau''/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau''}{\eta'}-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^0 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_0^\infty B_m(\tau+\tau'',\eta',\zeta)e^{\tau''/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau''}{\eta'}. \qquad (232)$$

Продифференцируем обе части уравнения (232) по τ. При этом производную справа надо брать от функции источников, а также и по переменному верхнему пределу у первого интеграла. В результате получится уравнение (производную по τ пишем прямую, рассматривая другие переменные как параметры)

$$\frac{\mathrm{d}B_m(\tau,\eta,\zeta)}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{1}{\zeta}\frac{\lambda S}{4}p_m(\eta,\zeta)e^{-\tau/\zeta}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta' B_m(0,\eta',\zeta)e^{-\tau/\eta'}\frac{1}{\eta'}+$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_0^\tau \frac{\mathrm{d}B_m(\tau-\tau'',\eta',\zeta)}{\mathrm{d}\tau}e^{-\tau''/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau''}{\eta'}-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^0 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}B_m(\tau+\tau'',\eta',\zeta)}{\mathrm{d}\tau}e^{\tau''/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau''}{\eta'}. \qquad (233)$$

Теперь вернемся к старым переменным интегрирования. При этом производные следует брать по первому аргументу независимо от того, как он обозначен. Уравнение (233) перейдет в соотношение

$$\frac{\mathrm{d}B_m(\tau,\eta,\zeta)}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{1}{\zeta}\frac{\lambda S}{4}p_m(\eta,\zeta)e^{-\tau/\zeta}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta' B_m(0,\eta',\zeta)e^{-\tau/\eta'}\frac{1}{\eta'}+$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_0^\tau \frac{\mathrm{d}B_m(\tau',\eta',\zeta)}{\mathrm{d}\tau'}e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^0 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_\tau^\infty \frac{\mathrm{d}B_m(\tau',\eta',\zeta)}{\mathrm{d}\tau'}e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}. \qquad (234)$$

Видно, что производная от функции источников удовлетворяет уравнению с точно тем же интегральным оператором, что и в уравнении для самой этой функции. Свободные же слагаемые отличаются: во-первых, дополнительным множителем $-1/\zeta$, а во-вторых, тем, что появилось дополнительное слагаемое, представляющее суперпозицию внеинтегральных слагаемых в (228). По принципу суперпозиции, справедливому для линейных уравнений, производная от решения уравнения [76] выражается через само это решение:

$$\frac{\mathrm{d}B_m(\tau,\eta,\zeta)}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{1}{\zeta}B_m(\tau,\eta,\zeta)+\frac{2}{S}\int\limits_0^1 B_m(0,\eta',\zeta)B_m(\tau,\eta,\eta')\frac{\mathrm{d}\eta'}{\eta'}. \qquad (235)$$

Найденное уравнение является аналогом уравнения (177) для вероятности выхода фотона из полубесконечной среды, полученного для изотропного рассеяния эвристическим методом.

Эвристически можно получить и уравнение (235). Для этого добавим к полубесконечной среде, освещенной параллельным потоком под углом $\arccos\zeta$, слой оптической толщины $\mathrm{d}\tau\ll 1$ и рассмотрим его влияние. Функция источников на глубине $\tau+\mathrm{d}\tau$ будет почти равна исходной, но падающее излучение будет слегка ослаблено в добавочном слое, а кроме того, излучаемая энергия на границе слоя под углом $\arccos\eta'$ в телесном угле $2\pi\mathrm{d}\eta'$ будет собрана на пути $\mathrm{d}\tau/\eta'$ и упадет на него, что создаст дополнительное излучение на глубине τ. Запись этого утверждения в виде равенства гласит

$$B_m(\tau+\mathrm{d}\tau,\eta,\zeta)=B_m(\tau,\eta,\zeta)\left(1-\frac{\mathrm{d}\tau}{\zeta}\right)+\int\limits_0^1 B_m(0,\eta',\zeta)2\pi\mathrm{d}\eta'\frac{\mathrm{d}\tau}{\eta'}\frac{B_m(\tau,\eta,\eta')}{\pi S}. \qquad (236)$$

Выражая левую часть через производную, вычеркивая функцию источников без множителя $\mathrm{d}\tau$ справа и слева и сокращая на этот множитель, получаем уравнение (235).

Следующая операция заключается в умножении (235) с измененным знаком у η на $e^{-\tau/\eta}\mathrm{d}\tau$ и интегрировании по τ от 0 до ∞. Имеем

$$\int_0^\infty e^{-\tau/\eta}\mathrm{d}\tau\frac{\mathrm{d}B_m(\tau,-\eta,\zeta)}{\mathrm{d}\tau}=e^{-\tau/\eta}B_m(\tau,-\eta,\zeta)\Big|_0^\infty+\frac{1}{\eta}\int_0^\infty e^{-\tau/\eta}\mathrm{d}\tau B_m(\tau,-\eta,\zeta)=$$

$$-B_m(0,-\eta,\zeta)+S\zeta\rho_m(\eta,\zeta)=-S\eta\rho_m(\eta,\zeta)+2\eta\int_0^1 B_m(0,\eta',\zeta)\mathrm{d}\eta'\rho_m(\eta,\eta'). \quad (237)$$

Поменяв местами слагаемые, придем к уравнению

$$S(\eta+\zeta)\rho_m(\eta,\zeta)=B_m(0,-\eta,\zeta)+2\eta\int_0^1 B_m(0,\eta',\zeta)\mathrm{d}\eta'\rho_m(\eta,\eta'). \quad (238)$$

Поскольку входящее сюда значение функции источников на границе среды $B_m(0,\eta,\zeta)$ формулой (231) выражается через $\rho_m(\eta,\zeta)$, подстановка этой формулы в (238) приводит к независимому уравнению для коэффициента отражения. Уравнение (238) также можно было бы получить из принципа инвариантности, как было получено (168) для случая изотропного рассеяния.

На этом развитие теории не закончилось. Еще В. А. Амбарцумян [4] для случая $n+1$-членной индикатрисы представил m-ю азимутальную гармонику коэффициента отражения в виде билинейного разложения по набору $n-m+1$ функций $\varphi_j(\mu)$ и для этих функций получил нелинейные уравнения. Линейные уравнения для них выведены В. В. Соболевым [70]. Впоследствии С. Чандрасекар [85] для частных случаев индикатрис, а В. В. Соболев для общего случая [76] показали, что все функции $\varphi_j(\mu)$ для произвольной индикатрисы и произвольной гармоники с номером m выражаются через одну функцию: $H_m(z)$. Для функций $H_m(z)$ получены определяющие их уравнения и точные выражения. Точные решения найдены также для функций источников полубесконечной среды. Произведено обобщение теории и на случай конечного плоского слоя [76]. Там также возможно введение двух наборов функций, через которые выражаются коэффициенты яркости, и сведение их к двум функциям для каждой гармоники, для которых имеются уравнения (но не точные выражения). Теория, однако, довольно громоздка, и мы здесь ограничимся изложением асимптотической теории и рассмотрением изотропного рассеяния.

4. Задача Милна. Эта задача, как говорилось выше, была поставлена Милном для расчета переноса излучения в серой атмосфере, но формально она свелась к однородному интегральному уравнению, описывающему изотропное консервативное рассеяние в полубесконечной среде с источниками на бесконечно большой глубине. По аналогии задачей Милна называют и все случаи, когда источники в полубесконечной среде бесконечно удалены от границы независимо от значения вероятности выживания фотона и индикатрисы рассеяния. Во всех таких случаях функция источников определяется однородным интегральным уравнением.

Так же как в случае бесконечной среды с бесконечно удаленными источниками, поле излучения в задаче Милна не зависит от азимута. Отсутствует и аргумент ζ, так как отсутствует внешнее облучение среды. Таким образом, интегральное уравнение задачи Милна имеет вид [76]

$$B_{\mathrm{M}}(\tau,\eta)=\frac{\lambda}{2}\int_0^1 p_0(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int_0^\tau B_{\mathrm{M}}(\tau',\eta')e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}-\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^0 p_0(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int_\tau^\infty B_{\mathrm{M}}(\tau',\eta')e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}. \quad (239)$$

Поведение решения при приближении к источникам, т. е. в глубоких слоях, в этом случае аналогично тому, какое имело место в бесконечной среде. Однако теперь источники находятся при $\tau=+\infty$, поэтому ясно, что при $\tau\to\infty$ будет $B_{\mathrm{M}}(\tau,\eta)\propto e^{k\tau}$, где $k\geq 0$ — то же самое число — корень характеристического уравнения.

В задаче Милна на выходе из атмосферы создается определенное распределение выходящего излучения по углам. Очевидно, что и это распределение не зависит от азимута, так как бесконечно удаленные источники не могут сформировать такой зависимости. Обозначим указанное распределение через $u(\eta)$. Оно связано с функцией источников обычной формулой

$$u(\eta)=\int_0^\infty B_{\mathrm{M}}(\tau,-\eta)e^{-\tau/\eta}\frac{\mathrm{d}\tau}{\eta}. \quad (240)$$

Несмотря на глубокое различие задач об отражении и Милна, происходящее от различного расположения источников, эти задачи формально очень похожи, так как оператор в уравнениях (228) и (239) один и тот же. Как и в случае отражения, поверхностное значение функции источников выражается через интенсивность выходящего излучения. Действительно, из (239) находим

$$B_{\mathrm{M}}(0,\eta) = -\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{0} p_0(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta' \int\limits_{0}^{\infty} B_{\mathrm{M}}(\tau,\eta')e^{\tau/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau}{\eta'} =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{1} p_0(\eta,-\eta')\mathrm{d}\eta' \int\limits_{0}^{\infty} B_{\mathrm{M}}(\tau,-\eta')e^{-\tau/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau}{\eta'} = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{1} p_0(\eta,-\eta')u(\eta')\mathrm{d}\eta'. \tag{241}$$

Ясно, что решение задачи Милна может содержать произвольный множитель, так как оно определяется однородным уравнением. Обычно функцию $u(\eta)$ удобно нормировать условием, включающим функцию $i(\eta)$:

$$2\int\limits_{0}^{1} u(\eta)i(\eta)\eta\mathrm{d}\eta = 1. \tag{242}$$

Получим уравнение для производной от функции источников. Его вывод совершенно аналогичен выводу уравнения (235), поэтому мы опустим подробности. Различие заключается в том, что в случае задачи Милна отсутствует внеинтегральное слагаемое в (239). Однако производная по τ должна содержать решение однородного уравнения, которым и является функция $B_{\mathrm{M}}(\tau,\eta)$. При этом коэффициент пропорциональности совпадает с k, так как $B_{\mathrm{M}}(\tau,\eta) \propto e^{k\tau}$. Поэтому

$$\frac{\mathrm{d}B_{\mathrm{M}}(\tau,\eta)}{\mathrm{d}\tau} = kB_{\mathrm{M}}(\tau,\eta) + \frac{2}{S}\int\limits_{0}^{1} B_{\mathrm{M}}(0,\eta')B(\tau,\eta,\eta')\frac{\mathrm{d}\eta'}{\eta'}. \tag{243}$$

Функция источников в задаче об отражении здесь и далее соответствует нулевой азимутальной гармонике. Индекс 0 для краткости не пишем.

Точно так же, как для $\rho(\eta,\zeta)$, получается и уравнение для $u(\eta)$. Умножение (243) с измененным знаком у η на $e^{-\tau/\eta}\mathrm{d}\tau$ и интегрирование с последующим преобразованием дает

$$u(\eta)(1-k\eta) = B_{\mathrm{M}}(0,-\eta) + 2\eta\int\limits_{0}^{1} B_{\mathrm{M}}(0,\eta')\rho(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'. \tag{244}$$

Как и выше, это соотношение совместно с (241) является уравнением для функции $u(\eta)$. Отметим, что уравнения для задачи об отражении замкнуты, в то время как уравнения для задачи Милна содержат характеристики задачи об отражении.

5. Связь трех задач. В этом пункте установим соотношения, связывающие решения трех рассмотренных задач [76]. Это задачи о свечении бесконечной и полубесконечной атмосфер с источниками на бесконечности и нулевая гармоника задачи об отражении.

Пусть в бесконечной среде источники находятся на $-\infty$. Проведем разрез плоскостью $\tau = 0$. Тогда при $\tau > 0$ справедливо соотношение

$$B_\infty(\tau,\eta) = \int\limits_{0}^{1} i(\eta')2\pi\mathrm{d}\eta'\frac{B(\tau,\eta,\eta')}{\pi S} \tag{245}$$

или

$$b(\eta)e^{-k\tau} = \frac{2}{S}\int\limits_{0}^{1} i(\eta')B(\tau,\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'. \tag{246}$$

Это соотношение является следствием сложения слоев и принципа инвариантности. Если от бесконечной среды отсекается верхняя часть, но оставшаяся часть подсвечивается тем же излучением, которое создавала отсеченная часть, то внутри усеченной среды ничего не изменится. Уравнение (246) можно вывести и формально. Для этого в уравнении (201) при $m = 0$ разобьем интеграл по τ в первом слагаемом справа на два: от $-\infty$ до 0 и от 0 до τ. Затем, считая $\tau > 0$, подставим в первый из указанных двух интегралов решение $B_\infty(\tau',\eta') = b(\eta')e^{-k\tau'}$ и вычислим получающийся интеграл. Тогда придем к уравнению

$$B_\infty(\tau,\eta) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{1} p_0(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta' b(\eta')\frac{e^{-k\tau}}{1-k\eta'} +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 p_0(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_0^\tau B_\infty(\tau',\eta')e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^0 p_0(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_\tau^\infty B_\infty(\tau',\eta')e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}. \tag{247}$$

По форме полученное равенство является уравнением для полубесконечной среды с источниками, представленными суперпозицией источников в задаче об отражении. Из этого соображения и находится уравнение (246).

Если поместить источники на глубину $\tau=+\infty$ и считать по-прежнему $\tau>0$, то рассуждение остается тем же самым, но теперь к излучению, создаваемому за счет отражения, добавится и излучение, возникающее в самой полубесконечной среде от глубинных источников. В результате получается

$$B_\infty(-\tau,-\eta)=b(-\eta)e^{k\tau}=MB_{\mathrm{M}}(\tau,\eta)+\frac{2}{S}\int\limits_0^1 i(-\eta')\mathrm{d}\eta' B(\tau,\eta,\eta'). \tag{248}$$

Здесь постоянная M подлежит определению, так как мы заранее не знаем, как связаны нормировки решений двух однородных уравнений. Конечно, и соотношение (248) можно вывести из уравнения (201).

От функций источников можно перейти к интенсивностям, связь между которыми выглядит более наглядно. Для этого следует, как обычно, после изменения знака у η умножить соотношения (246) и (248) на $e^{-\tau/\eta}$ и проинтегрировать результат. Получится два соотношения

$$i(-\eta)=2\int\limits_0^1 i(\eta')\rho(\eta,\eta')\eta'\mathrm{d}\eta', \tag{249}$$

$$i(\eta)=Mu(\eta)+2\int\limits_0^1 i(-\eta')\rho(\eta,\eta')\eta'\mathrm{d}\eta'. \tag{250}$$

Коэффициент пропорциональности M определяется из условия нормировки (242). Действительно, умножив (250) на $2i(\eta)\eta$ и проинтегрировав по η, получим

$$2\int\limits_0^1 i^2(\eta)\eta\mathrm{d}\eta=2\int\limits_0^1 i(-\eta')\eta'\mathrm{d}\eta' 2\int\limits_0^1 i(\eta)\rho(\eta,\eta')\eta\mathrm{d}\eta+2M\int\limits_0^1 i(\eta)u(\eta)\eta\mathrm{d}\eta=2\int\limits_0^1 i^2(-\eta')\eta'\mathrm{d}\eta'+M. \tag{251}$$

При переходе к последнему выражению использовано условие (242) и соотношение (249). Сделав в последнем интеграле замену $\eta'=-\eta$ и объединив результат с интегралом, стоящим слева, получим

$$M=2\int\limits_{-1}^1 i^2(\eta)\eta\mathrm{d}\eta. \tag{252}$$

Доведем решение до конца для случая изотропного рассеяния.

6. Изотропное рассеяние. Для него $b(\eta)=1$ и

$$M=2\int\limits_{-1}^1\frac{\eta}{(1-k\eta)^2}\mathrm{d}\eta=\frac{4}{k}\left[-a(k)+\frac{1}{1-k^2}\right]=\frac{4}{\lambda k}\frac{\lambda-1+k^2}{1-k^2}. \tag{253}$$

Подставив в (250) выражение для интенсивности

$$i(\eta)=\frac{1}{1-k\eta} \tag{254}$$

и формулу для коэффициента отражения (169), найдем

$$Mu(\eta)=\frac{1}{1-k\eta}-\frac{\lambda}{2}\varphi(\eta)\int\limits_0^1\frac{\eta'}{(1+k\eta')(\eta'+\eta)}\varphi(\eta')\mathrm{d}\eta'=$$

$$=\frac{1}{1-k\eta}\left[1-\frac{\lambda}{2}\varphi(\eta)\int\limits_0^1\left(\frac{1}{1+k\eta'}-\frac{\eta}{\eta'+\eta}\right)\varphi(\eta')\mathrm{d}\eta'\right]=\frac{1}{1-k\eta}\left[\varphi(\eta)-\varphi(\eta)\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1\frac{\varphi(\eta')}{1+k\eta'}\mathrm{d}\eta'\right]=\frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta}\frac{1}{\varphi(1/k)}. \tag{255}$$

Здесь при проведении выкладки сначала дробь под интегралом разложена на простейшие дроби, а затем дважды использовано уравнение Амбарцумяна. В результате получается выражение для распределения выходящего излучения по углам в задаче Милна:

$$u(\eta) = \frac{\lambda}{4}\frac{k}{\varphi(1/k)}\frac{1-k^2}{\lambda-1+k^2}\frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta}. \tag{256}$$

Функция $u(\eta)$ играет большую роль в теории, появляясь в формулах для различных величин.

7. Плоский слой. Рассмотрим задачу об отражении и пропускании излучения плоским слоем [76]. Для характеристик поля излучения в слое, имеющих аналог в случае полубесконечной среды, будем использовать те же обозначения, но с дополнительным аргументом τ_0.

Основное интегральное уравнение для функции источников имеет вид

$$B_m(\tau,\eta,\zeta,\tau_0) = \frac{\lambda S}{4}p_m(\eta,\zeta)e^{-\tau/\zeta} +$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_0^\tau B_m(\tau',\eta',\zeta,\tau_0)e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'} - \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^0 p_m(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'\int\limits_\tau^{\tau_0} B_m(\tau',\eta',\zeta,\tau_0)e^{-(\tau-\tau')/\eta'}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\eta'}. \tag{257}$$

Для плоского слоя наряду с коэффициентом отражения ρ вводится и коэффициент пропускания σ. Эти коэффициенты связаны с интенсивностями выходящего через две границы излучения и выражаются через функцию источников:

$$\rho_m(\eta,\zeta,\tau_0) = \frac{I_m(0,-\eta,\zeta,\tau_0)}{S\zeta} = \frac{1}{S\eta\zeta}\int\limits_0^{\tau_0} e^{-\tau/\eta}B_m(\tau,-\eta,\zeta,\tau_0)\mathrm{d}\tau, \tag{258}$$

$$\sigma_m(\eta,\zeta,\tau_0) = \frac{I_m(\tau_0,\eta,\zeta,\tau_0)}{S\zeta} = \frac{1}{S\eta\zeta}\int\limits_0^{\tau_0} e^{-\tau/\eta}B_m(\tau_0-\tau,\eta,\zeta,\tau_0)\mathrm{d}\tau. \tag{259}$$

Для этого случая можно получить почти все уравнения и соотношения, являющиеся аналогами уравнений для полубесконечной среды. Например, справедливо уравнение

$$\frac{\partial B_m(\tau,\eta,\zeta,\tau_0)}{\partial\tau} = -\frac{1}{\zeta}B_m(\tau,\eta,\zeta,\tau_0) +$$
$$+\frac{2}{S}\int\limits_0^1 B_m(0,\eta',\zeta,\tau_0)B_m(\tau,\eta,\eta',\tau_0)\frac{\mathrm{d}\eta'}{\eta'} - \frac{2}{S}\int\limits_0^1 B_m(\tau_0,-\eta',\zeta,\tau_0)B_m(\tau_0-\tau,-\eta,\eta',\tau_0)\frac{\mathrm{d}\eta'}{\eta'}. \tag{260}$$

Из него и из основного уравнения могут быть выведены уравнения для коэффициентов отражения и пропускания.

Но имеются и другие соотношения, невозможные для полубесконечной среды. Это прежде всего уравнения, содержащие производные по оптической толщине τ_0. Для получения такого уравнения для функции источников продифференцируем (257) по τ_0. Получится уравнение для производной от функции источников по τ_0 такого же вида, что и исходное. При этом исчезнет исходное внеинтегральное слагаемое, но добавится слагаемое, происходящее от дифференцирования второго интеграла справа по верхнему пределу. Это слагаемое имеет вид суперпозиции внеинтегральных слагаемых исходного уравнения, так что

$$\frac{\partial B_m(\tau,\eta,\zeta,\tau_0)}{\partial\tau_0} = \frac{2}{S}\int\limits_0^1 B_m(\tau_0,-\eta',\zeta,\tau_0)B_m(\tau_0-\tau,-\eta,\eta',\tau_0)\frac{\mathrm{d}\eta'}{\eta'}. \tag{261}$$

Поскольку в интеграл в правой части последнего равенства, как и в (259), входит значение функции источников при $\tau_0-\tau$, то полезно получить производную и от него:

$$\frac{\partial B_m(\tau_0-\tau,\eta,\zeta,\tau_0)}{\partial\tau_0} = -\frac{1}{\zeta}B_m(\tau_0-\tau,\eta,\zeta,\tau_0) + \frac{2}{S}\int\limits_0^1 B_m(0,\eta',\zeta,\tau_0)B_m(\tau_0-\tau,\eta,\eta',\tau_0)\frac{\mathrm{d}\eta'}{\eta'}. \tag{262}$$

Конечно, эти соотношения выводятся и из эвристических соображений.

Как видно из приведенных уравнений, они появляются парами. Впрочем, достаточно выводить только одно уравнение из двух, так как второе всегда можно получить, используя следующее из основного уравнения (257) соотношение

$$B_m(\tau_0-\tau,\eta,\zeta,\tau_0)=e^{-\tau_0/\zeta}B_m(\tau,-\eta,-\zeta,\tau_0). \tag{263}$$

Еще один вид уравнений, характерных для плоского слоя, — уравнения, связывающие характеристики конечной и полубесконечной сред, а также двух конечных слоев. Приведем и их.

Проведем разрез в полубесконечной среде на уровне $\tau=\tau_0$. Верхний слой освещается сверху параллельным потоком πS, а также снизу тем излучением, которое выходит из низлежащей усеченной полубесконечной среды. Тогда можно написать два соотношения, следующих из сложения слоев и принципа инвариантности. Для коэффициентов отражения

$$\zeta\rho_m(\eta,\zeta)=\zeta\rho_m(\eta,\zeta,\tau_0)+\frac{2}{S}\int\limits_0^1 I_m(\tau_0,-\eta',\zeta)\sigma_m(\eta,\eta',\tau_0)\eta'\mathrm{d}\eta'. \tag{264}$$

Отражение от полубесконечной среды складывается из отражения от слоя и диффузно пропущенного излучения полубесконечной же среды, падающего на нижнюю границу слоя. Аналогично излучение полубесконечной среды, идущее вниз через нижнюю границу слоя, равно сумме пропущенного слоем излучения и отраженного от него излучения полной среды, идущего вверх. Сделанное утверждение записывается в виде равенства

$$I_m(\tau_0,\eta,\zeta)=S\zeta\sigma_m(\eta,\zeta,\tau_0)+2\int\limits_0^1 \eta'\rho_m(\eta,\eta',\tau_0)I_m(\tau_0,-\eta',\zeta)\mathrm{d}\eta'. \tag{265}$$

В заключение этого параграфа запишем еще одно соотношение, выражающее сложение двух слоев конечной толщины τ_1 и τ_2. Рассуждение, почти тождественное использованному ранее, позволяет написать при $\tau\le\tau_1$

$$I_m(\tau,\eta,\zeta,\tau_1+\tau_2)=I_m(\tau,\eta,\zeta,\tau_1)+\frac{2}{S}\int\limits_0^1 I_m(\tau_1,-\eta',\zeta,\tau_1+\tau_2)\mathrm{d}\eta' I_m(\tau_1-\tau,-\eta,\eta',\tau_1). \tag{266}$$

Предыдущие два соотношения являются частными случаями (266), получающимися, если положить в нем $\tau_2=\infty$, $\tau_1=\tau_0$, а τ соответственно равным 0 и τ_0.

Последние три соотношения применяются для расчета полей излучения в конечных слоях. В частности, равенства (264) и (265) мы используем в следующем параграфе при выводе асимптотических выражений для коэффициентов яркости плоского слоя большой оптической толщины.

§ 2.7. Асимптотические методы

1. Глубокие слои полубесконечной среды. Асимптотические методы дают асимтотики различных величин в так называемых асимптотических областях. Такими областями являются глубокие слои сред. Чтобы такие слои присутствовали, надо, чтобы и сама среда была оптически толстой. В случае плоских сред это — оптически толстый слой и полубесконечная атмосфера. Начнем с последней и для определенности рассмотрим задачу об отражении. Индикатрису сначала считаем произвольной.

Когда рассматривается поле излучения в глубоких слоях полубесконечной среды, влияние границы должно быть несущественно. Следуя В. А. Амбарцумяну [4], сделаем несколько предположений, которые уже были видны из приближенных решений. Именно, будем считать, что 1) прямое излучение совершенно незначительно по сравнению с диффузным; 2) интенсивность излучения в глубоких слоях не зависит от азимута; 3) распределение излучения по углам и зависимость от глубины разделены, т. е. интенсивность представляется произведением функций от η,ζ и τ. Далее, приближенные решения подсказывают, что множитель, описывающий зависимость от глубины, надо искать в форме экспоненты.

Итак, ищем решение уравнений для нулевой гармоники в пренебрежении прямым излучением (индекс 0 у решений для краткости не пишем). Ясно, что эти уравнения совпадают по форме с уравнениями для бесконечной среды с источниками при $\tau=-\infty$ [76]. Поэтому нам уже известна форма асимптотического поведения поля излучения с точностью до множителя, и решения рассматриваемой задачи при $\tau\gg1$ можно представить в виде

$$I(\tau,\eta,\zeta)=Sc(\zeta)i(\eta)e^{-k\tau},\quad B(\tau,\eta,\zeta)=Sc(\zeta)b(\eta)e^{-k\tau}. \tag{267}$$

Здесь $i(\eta)$, $b(\eta)$ — известные уже функции, k — положительный корень характеристического уравнения. Остается определить функцию $c(\zeta)$.

Для определения этого множителя воспользуемся соотношением (235). Подставив в него асимптотику (267), найдем

$$(1-k\zeta)\frac{c(\zeta)}{\zeta}=\frac{2}{S}\int\limits_0^1 B(0,\eta',\zeta)\frac{c(\eta')}{\eta'}\mathrm{d}\eta'. \tag{268}$$

Разность $1-k\zeta$ встречалась ранее: такой множитель стоит в уравнении (244), определяющем распределение по углам выходящего излучения в задаче Милна, после функции $u(\zeta)$. Однако правые части двух уравнений различаются. Покажем, что на самом деле они тождественны. Проделаем выкладку, подставив в (244) выражение (241) и воспользовавшись равенством (231):

$$(1-k\eta)u(\eta)=B_{\mathrm{M}}(0,-\eta)+2\eta\int\limits_0^1 B_{\mathrm{M}}(0,\eta')\rho(\eta,\eta')\mathrm{d}\eta'=$$

$$=\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 p_0(\eta,\eta')u(\eta')\mathrm{d}\eta'+2\eta\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1\rho(\eta,\eta'')\mathrm{d}\eta''\int\limits_0^1 p_0(\eta'',-\eta')u(\eta')\mathrm{d}\eta'=$$

$$=\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 u(\eta')\mathrm{d}\eta'\left[p_0(\eta,\eta')+2\eta\int\limits_0^1 p_0(\eta'',-\eta')\rho(\eta,\eta'')\mathrm{d}\eta''\right]=\frac{2}{S}\int\limits_0^1 u(\eta')B(0,\eta',\eta)\mathrm{d}\eta'. \tag{269}$$

Сравнивая два соотношения: (268) и только что выведенное (269), обнаруживаем, что с точностью до множителя коэффициент $c(\zeta)$ совпадает с функцией $u(\zeta)$:

$$c(\zeta)=Cu(\zeta)\zeta. \tag{270}$$

Постоянная C не может быть найдена из однородного уравнения (268), и для ее определения следует привлечь еще одно соотношение. Это соотношение (246), которое верно для всех глубин полубесконечной среды. Применим его к глубоким слоям $\tau\gg 1$:

$$b(\eta)e^{-k\tau}=\frac{2}{S}\int\limits_0^1 B(\tau,\eta,\eta')i(\eta')\mathrm{d}\eta'\sim 2Cb(\eta)e^{-k\tau}\int\limits_0^1 u(\eta')i(\eta')\eta'\mathrm{d}\eta'. \tag{271}$$

После сокращения на общие множители получается соотношение, совпадающее с условием нормировки функции $u(\eta)$ при $C=1$.

Окончательно асимптотики функции источников и интенсивности в глубоких слоях полубесконечной среды в задаче об отражении имеют вид

$$I(\tau,\eta,\zeta)=Si(\eta)e^{-k\tau}u(\zeta)\zeta,\quad B(\tau,\eta,\zeta)=Sb(\eta)e^{-k\tau}u(\zeta)\zeta. \tag{272}$$

Таким образом, мы показали, как находится асимптотический режим поля излучения в глубоких слоях полубесконечной атмосферы. Теперь перейдем к определению асимптотик интенсивностей излучения, отраженного и пропущенного конечной толстой атмосферой.

2. Асимптотики для толстого слоя. Ясно, что интенсивность пропущенного толстым слоем излучения не зависит от азимута. Не будем учитывать зависимости от азимута и у отраженного излучения.

Для получения асимптотик коэффициентов отражения и пропускания воспользуемся соотношениями (264) и (265), связывающими плоский слой и полубесконечную атмосферу [76]. Считая, что $\tau_0\gg 1$, подставим в указанные соотношения асимптотику (272) интенсивности излучения в полубесконечной среде. Получатся два новых, теперь уже асимптотических уравнения

$$\rho(\eta,\zeta)=\rho(\eta,\zeta,\tau_0)+2u(\zeta)e^{-k\tau_0}\int\limits_0^1\sigma(\eta,\eta',\tau_0)i(-\eta')\eta'\mathrm{d}\eta', \tag{273}$$

$$i(\eta)e^{-k\tau_0}u(\zeta)=\sigma(\eta,\zeta,\tau_0)+2u(\zeta)e^{-k\tau_0}\int\limits_0^1\rho(\eta,\eta',\tau_0)i(-\eta')\eta'\mathrm{d}\eta'. \tag{274}$$

Запишем полученные уравнения короче, введя обозначения для входящих в них интегралов:

$$\overline{\sigma}(\eta,\tau_0)=2\int\limits_0^1\sigma(\eta,\eta',\tau_0)i(-\eta')\eta'\mathrm{d}\eta', \tag{275}$$

$$\overline{\rho}(\eta,\tau_0)=2\int\limits_0^1\rho(\eta,\eta',\tau_0)i(-\eta')\eta'\mathrm{d}\eta'. \tag{276}$$

Короткая запись выглядит так:

$$\rho(\eta,\zeta)=\rho(\eta,\zeta,\tau_0)+u(\zeta)e^{-k\tau_0}\overline{\sigma}(\eta,\tau_0), \tag{277}$$

$$i(\eta)e^{-k\tau_0}u(\zeta)=\sigma(\eta,\zeta,\tau_0)+u(\zeta)e^{-k\tau_0}\overline{\rho}(\eta,\tau_0). \tag{278}$$

Для получения окончательных выражений найдем интегралы (275)–(276). Для этого умножим равенства (277)–(278) на $2i(-\zeta)\zeta\mathrm{d}\zeta$ и возьмем интеграл по ζ. В левых частях обоих равенств получатся выражения, которые можно упростить. В первом получается интеграл, входящий в соотношение (250), а во втором интеграл по ζ обозначим

$$N=2\int\limits_0^1 u(\zeta)i(-\zeta)\zeta\mathrm{d}\zeta. \tag{279}$$

В результате находим два уравнения с двумя неизвестными

$$i(\eta)-\overline{\rho}(\eta,\tau_0)=Mu(\eta)+Ne^{-k\tau_0}\overline{\sigma}(\eta,\tau_0), \tag{280}$$

$$Ne^{-k\tau_0}[i(\eta)-\overline{\rho}(\eta,\tau_0)]=\overline{\sigma}(\eta,\tau_0). \tag{281}$$

Исключив из уравнений разность $i(\eta)-\overline{\rho}(\eta,\tau_0)$, найдем $\overline{\sigma}$, а затем и $\overline{\rho}$:

$$\overline{\sigma}(\eta,\tau_0)=N\frac{Mu(\eta)}{1-N^2e^{-2k\tau_0}}e^{-k\tau_0}, \tag{282}$$

$$\overline{\rho}(\eta,\tau_0)=i(\eta)-\frac{Mu(\eta)}{1-N^2e^{-2k\tau_0}}. \tag{283}$$

После подстановки интегралов (282)–(283) в уравнения (277)–(278) придем к окончательным формулам [11,76]:

$$\rho(\eta,\zeta,\tau_0)=\rho(\eta,\zeta)-N\frac{Me^{-2k\tau_0}}{1-N^2e^{-2k\tau_0}}u(\eta)u(\zeta), \tag{284}$$

$$\sigma(\eta,\zeta,\tau_0)=\frac{Me^{-k\tau_0}}{1-N^2e^{-2k\tau_0}}u(\eta)u(\zeta). \tag{285}$$

Видно, что между симметичными относительно η и ζ коэффициентами яркости имеется асимптотическое соотношение

$$\rho(\eta,\zeta,\tau_0)=\rho(\eta,\zeta)-Ne^{-k\tau_0}\sigma(\eta,\zeta,\tau_0). \tag{286}$$

Опять рассмотрим отдельно случай сферической индикатрисы рассеяния. В этом случае, как обычно, все соотношения сильно упрощаются.

3. Изотропное рассеяние. Нам требуется получить выражение для постоянной N, так как все остальные величины уже были найдены ранее. Для этого сначала выведем одно тождество, следующее из соотношения (249), которое для изотропного рассеяния записывается так:

$$\frac{1}{1+k\eta}=\frac{\lambda}{2}\varphi(\eta)\int\limits_0^1\frac{\eta'\mathrm{d}\eta'}{1-k\eta'}\frac{\varphi(\eta')}{\eta'+\eta}. \tag{287}$$

Разложим подынтегральную дробь относительно η' на простейшие:

$$\frac{\eta'}{(1-k\eta')(\eta'+\eta)}=\frac{1}{1+k\eta}\left[\frac{1}{1-k\eta'}-\frac{\eta}{\eta'+\eta}\right], \tag{288}$$

Сократив полученное равенство на дробь $1/(1+k\eta)$ и перенеся слагаемое с интегралом от второй дроби налево, дальнейшие несложные тождественные преобразования проделаем с использованием уравнения Амбарцумяна (171):

$$1+\frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\int\limits_0^1\frac{\varphi(\eta')\mathrm{d}\eta'}{\eta'+\eta}=\varphi(\eta)=\frac{\lambda}{2}\varphi(\eta)\int\limits_0^1\frac{\varphi(\eta')}{1-k\eta'}\mathrm{d}\eta'. \tag{289}$$

Отсюда вытекает, что для функции Амбарцумяна выполняется условие

$$\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta}\mathrm{d}\eta = 1. \tag{290}$$

Выражение для коэффициента N получается после подстановки формулы (256) для $u(\eta)$, использования условия (290) и вновь уравнения Амбарцумяна (171):

$$\begin{aligned} N = 2\int\limits_0^1 u(\eta)i(-\eta)\eta\mathrm{d}\eta &= \frac{\lambda}{2}\frac{k}{\varphi(1/k)}\frac{1-k^2}{\lambda-1+k^2}\int\limits_0^1 \varphi(\eta)\frac{\eta\mathrm{d}\eta}{1-k^2\eta^2} = \\ &= \frac{\lambda}{2}\frac{k}{\varphi(1/k)}\frac{1-k^2}{\lambda-1+k^2}\frac{1}{2k}\int\limits_0^1 \varphi(\eta)\mathrm{d}\eta\left[\frac{1}{1-k\eta}-\frac{1}{1+k\eta}\right] = \\ &= \frac{1}{2\varphi(1/k)}\frac{1-k^2}{\lambda-1+k^2}\left[1-\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1\frac{\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta}{1+k\eta}\right] = \frac{1}{2}\frac{1-k^2}{\lambda-1+k^2}\frac{1}{\varphi^2(1/k)}. \end{aligned} \tag{291}$$

Еще один вид асимптотик — разложение функций по малому параметру $\sqrt{1-\lambda}$ при рассеянии, близком к консервативному [76].

4. О численных методах решения задач о монохроматическом рассеянии. О некоторых из них мы дали представление, когда говорили о приближенных методах, назвав приближенные методы так же, как называются численные. Так, метод дискретных ординат — продолжение метода Чандрасекара, сферических гармоник — метода Эддингтона, двухпотоковое приближение — метода Шварцшильда—Шустера.

Оригинальный метод решения интегродифференциального уравнения переноса был разработан группой специалистов по теории переноса нейтронов [12]. Этот метод заключается в том, что сначала делается несколько итераций уравнения переноса. Рассчитанное решение еще очень далеко от истинного. После этого используется какая-нибудь, пусть даже приближенная, оценка точного решения. Итерированное решение "подтягивается" к приближенному с сохранением угловой зависимости. Такой прием, который может быть повторен, очень сильно убыстряет процесс сходимости итераций к настоящему решению. Другие методы и программы расчета полей излучения, включая поляризацию, применительно к атмосферам планет изложены в книге [78].

Применялись различные вариационные методы, основанные на разных функционалах [70], и итерационно-вариационные методы, при которых итерации чередуются с применением какого-либо функционала [12]. В качестве пробных можно использовать как некоторые фиксированные функции, так и получающиеся в ходе итераций. Обычно каждая ступень в итерационно-вариационной схеме дает уменьшение погрешности на порядок. Следует упомянуть также методы типа Монте-Карло [42]. Ряд методов, разработанных для решения задач о переносе излучения в спектральных линиях, о которых мы скажем далее, могут быть применены и к задачам монохроматического рассеяния.

Метод удвоения слоев основан на соотношениях вида (266). Согласно этому методу сначала рассчитывается поле излучения в слоях малой оптической толщины, а затем — для слоев последовательно удваемой толшины. Для этого в равенстве (266) полагают $\tau_1 = \tau_2$ и получающееся уравнение для интенсивности в слое двойной толщины решают методом последовательных приближений. Опыт расчетов этим методом показал его быструю сходимость и устойчивость.

На этом мы временно заканчиваем рассмотрение монохроматического рассеяния. Некоторые новые результаты для случая изотропного рассеяния будут получены в следующей главе.

Глава 3. Резольвентный метод

В этой главе изложены точные аналитические методы решения уравнений теории переноса излучения, объединенные под общим названием резольвентного. Конечно, такие методы могут быть применены только к идеализированным моделям рассеивающих сред. Среда считается неподвижной, плоской, однородной и изотропной.

Результаты, полученные в настоящей главе, мы применим к двум видам рассеяния, а именно, к монохроматическому изотропному рассеянию (§ 3.4.) и к рассеянию в линии с полным перераспределением по частоте, о котором речь пойдет в главе 4.

§ 3.1. Ядерная функция и резольвента

1. Основное интегральное уравнение. Основное интегральное уравнение теории переноса излучения имеет вид

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int_{\tau_*}^{\tau_0} K(|\tau-\tau'|)S(\tau')\,\mathrm{d}\tau'. \tag{1}$$

Здесь $S_0(\tau)$ — заданная, а $S(\tau)$ — искомая функции, $-\infty \le \tau_* < \tau_0 \le \infty$, λ — заданное число.

Ядерная функция $K(\tau)$ определяется конкретным видом рассеяния. Предположим, что она представляется суперпозицией (наложением, суммой) экспонент:

$$K(\tau) = \int_a^b A(y)\,e^{-y\,\tau}\,\mathrm{d}y, \quad 0 \le a < b \le +\infty, \tag{2}$$

причем весовая функция $A(y)$ на промежутке (a, b) неотрицательна и кусочно дифференцируема. Будем считать также, что существует интеграл

$$\int_0^\infty K(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_a^b A(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{y} < \infty. \tag{3}$$

Симметричное разностное ядро выражается через неотрицательную ядерную функцию $K(\tau)$. Такие уравнения встречаются в различных разделах математики и физики. В теории переноса излучения, терминологии которой мы будем придерживаться, уравнение (1) описывает многократное рассеяние излучения в плоскопараллельной среде. При этом τ — оптическая глубина, $\tau_0 - \tau_*$ — оптическая толщина среды, $0 < \lambda \le 1$ — вероятность выживания фотона при однократном рассеянии, $S_0(\tau)$ — функция, характеризующая мощность первичных источников излучения, а $S(\tau)$ — функция источников, пропорциональная энергии, излучаемой на глубине τ после всех рассеяний.

Уравнение (1) является обобщением уравнения Хвольсона, соответствующего изотропному монохроматическому рассеянию. Ядерная функция для такого рассеяния — интегральная показательная функция

$$K(\tau) = E_1(\tau) = \int_1^\infty e^{-y\tau}\frac{\mathrm{d}y}{y}. \tag{4}$$

Тот факт, что ядро зависит только от модуля разности аргументов, означает, что свойства среды везде одинаковы и для характеристики процесса переноса излучения от источника к приемнику один раз существенно лишь расстояние между их глубинами. Такое свойство ядра называют еще *трансляционной инвариантностью*. Зависимость ядра от модуля разности глубин (*симметричность*) показывает, что безразлично также направление распространения излучения: в сторону возрастания или убывания глубины.

Исследованию и решению уравнения вида (1) посвящено множество работ математиков, физиков и астрофизиков (см., например, обзор [56]). Большой вклад в его исследование внесли академики В. А. Амбарцумян и В. В. Соболев и их ученики.

2. Определение резольвенты и уравнения для нее. *Резольвента* уравнения (1) определяется как функция двух аргументов, знание которой позволяет найти решение при произвольном свободном слагаемом:

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \int_{\tau_*}^{\tau_0} \Gamma(\tau,\tau')S_0(\tau')\,\mathrm{d}\tau'. \tag{5}$$

Два аргумента резольвенты объясняются тем, что один из них указывает на расположение источника излучения (глубины плоского источника), а другой — на расположение приемника.

Для вывода уравнений, которым удовлетворяет резольвента, перепишем уравнение (1) и соотношение (5) в операторной форме:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \widehat{K}\,\mathbf{S}, \qquad \mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \widehat{\Gamma}\,\mathbf{S}_0. \tag{6}$$

Подставив второе равенство в первое, получим

$$\mathbf{S}_0 + \widehat{\Gamma}\,\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_0 + \widehat{K}\,(\mathbf{S}_0 + \widehat{\Gamma}\,\mathbf{S}_0). \tag{7}$$

Поскольку функция S_0, а следовательно и вектор $\mathbf{S}_0$, произвольны, выполняется уравнение

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{K} + \widehat{K}\,\widehat{\Gamma}. \tag{8}$$

Это и есть уравнение для резольвенты. Запишем его в обычных обозначениях:

$$\Gamma(\tau,\tau_1) = \frac{\lambda}{2}\,K(|\tau-\tau_1|) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\tau_*}^{\tau_0} K(|\tau-\tau'|)\,\Gamma(\tau',\tau_1)\,\mathrm{d}\tau'. \tag{9}$$

Резольвента удовлетворяет еще одному уравнению. Для его вывода снова применим операторные обозначения. Выразим из первого уравнения в (6) вектор $\mathbf{S}_0$ через $\mathbf{S}$ и подставим во второе уравнение (6):

$$\mathbf{S} = \mathbf{S} - \widehat{K}\,\mathbf{S} + \widehat{\Gamma}\,(\mathbf{S} - \widehat{K}\,\mathbf{S}). \tag{10}$$

Отсюда следует операторное уравнение

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{K} + \widehat{\Gamma}\,\widehat{K}. \tag{11}$$

Его вид в обычных обозначениях

$$\Gamma(\tau,\tau_1) = \frac{\lambda}{2}\,K(|\tau-\tau_1|) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\tau_*}^{\tau_0} \Gamma(\tau,\tau')K(|\tau'-\tau_1|)\,\mathrm{d}\tau'. \tag{12}$$

Наличие двух уравнений для резольвенты отражает тот факт (который, строго говоря, надо доказывать), что левый и правый обратные операторы для оператора $1-\widehat{K}$ совпадают. Действительно, из первого и второго уравнений находим соответственно

$$(1-\widehat{K}\,)(\widehat{\Gamma}+1) = 1, \qquad (\widehat{\Gamma}+1)(1-\widehat{K}\,) = 1. \tag{13}$$

3. Три типа плоских сред. Среда с плоской симметрией, как мы видели в главе о монохроматическом рассеянии, может быть трех существенно различных типов. Рассмотрим их применительно к общему уравнению (1).

Если $\tau_0 = -\tau_* = +\infty$, то среда называется бесконечной, при $\tau_* = 0$ и $\tau_0 = +\infty$ — полубесконечной, а при $\tau_* = 0$, $\tau_0 < \infty$ — конечным слоем. Заметим, что, как и при монохроматическом рассеянии, в случае плоского слоя (1) — это уравнение Фредгольма, для бесконечной и полубесконечной сред оно сингулярно.

Для каждого из случаев употребляются специальные обозначения резольвенты. Соответственно конкретизируются определяющие ее уравнения. Резольвента для бесконечной среды обозначается $\Gamma_\infty(\tau,\tau_1)$. Поскольку такая среда не имеет границ, ее слои вообще идентичны. Поэтому от модуля разности зависит не только ядро, но и резольвента. Формулой это выражается так:

$$\Gamma_\infty(\tau,\tau_1) = \Gamma_\infty(|\tau-\tau_1|,0) = \Phi_\infty(|\tau-\tau_1|). \tag{14}$$

У полубесконечной среды имеется граница, через которую излучение может покидать среду, тем самым выходя из процесса рассеяния. Поэтому идентичность слоев выполняется только один раз, т.е. при первом рассеянии. Резольвента полубесконечной среды $\Gamma(\tau,\tau_1)$ зависит от своих аргументов более сложно. Однако она, как легко показать непосредственно из уравнения, является симметричной функцией этих аргументов. Это свойство означает, что источник и приемник могут меняться местами. Частное значение резольвенты, когда источник или приемник располагаются на границе, имеет специальное обозначение $\Gamma(\tau,0) = \Phi(\tau)$ и называется *резольвентной функцией*, или *функцией Соболева*.

Плоский слой ограничен с двух сторон, и для него тем более нет трансляционной инвариантности. Однако симметричность и изотропность среды сохраняются и отражаются в таких равенствах для резольвенты:

$$\Gamma(\tau,\tau_1,\tau_0) = \Gamma(\tau_1,\tau,\tau_0) = \Gamma(\tau_0-\tau,\tau_0-\tau_1,\tau_0). \tag{15}$$

Частное значение с источником на границе также обозначается особо: $\Gamma(\tau, 0, \tau_0) = \Phi(\tau, \tau_0)$ и имеет те же названия, что и для полубесконечной среды. Функции Φ отвечают плоскому источнику (или приемнику), расположенному на глубине $\tau = 0$, что в случае сред с границей отвечает его расположению на границе. Симметричность резольвент есть проявление упоминавшейся в главе 2 обратимости оптических явлений.

Три резольвенты связаны предельными переходами. Если закрепить расстояние между глубинами источника и приемника, а одну или обе границы устремить на бесконечное расстояние от них, то, исходя непосредственно из интегральных уравнений для резольвент, легко убедиться, что при $\tau_* \to -\infty$ и $\tau_0 \to \infty$

$$\Gamma(\tau - \tau_*, \tau_1 - \tau_*) \to \Gamma_\infty(\tau, \tau_1), \quad \Gamma(\tau, \tau_1, \infty) = \Gamma(\tau, \tau_1), \quad \Gamma(\tau - \tau_*, \tau_1 - \tau_*, \tau_0 - \tau_*) \to \Gamma_\infty(\tau, \tau_1). \tag{16}$$

4. Преобразования Лапласа. Резольвентный метод решения уравнений вида (1) связан с применением интегральных преобразований, в основном преобразования Лапласа. Поэтому в теорию вводятся специальные обозначения для них.

Преобразование Лапласа будем отмечать чертой над обозначением функции:

$$\overline{S}(p) = \int\limits_0^\infty S(\tau) e^{-p\tau} \mathrm{d}\tau. \tag{17}$$

Наряду с обычным (односторонним) преобразованием вводится двустороннее

$$\overline{\overline{S}}(p) = \int\limits_{-\infty}^\infty S(\tau) e^{-p\tau} \mathrm{d}\tau. \tag{18}$$

В случае четных функций оно сводится к односторонним. Действительно, разобьем интеграл в (18) на два: от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞. В первом интеграле сделаем замену $\tau' = -\tau$, в результате чего пределы интегрирования у обоих интегралов совпадут. Знак аргумента функции в первом интеграле в силу ее четности можно опустить, и интеграл будет отличаться от второго только знаком показателя экспоненты:

$$\overline{\overline{S}}(p) = \int\limits_0^\infty S(\tau) e^{p\tau} \mathrm{d}\tau + \int\limits_0^\infty S(\tau) e^{-p\tau} \mathrm{d}\tau = \overline{S}(-p) + \overline{S}(p). \tag{19}$$

Одностороннее преобразование можно понимать как двустороннее от функции, равной нулю при отрицательных значениях аргумента.

Преобразование Лапласа тесно связано с преобразованием Фурье, отличаясь от него тем, что параметр преобразования p имеет дополнительный множитель — мнимую единицу i. Таким образом, различие между этими двумя функциями комплексного аргумента заключается в том, что их аргументы повернуты в комплексной плоскости относительно друг друга на угол $\pi/2$. Поэтому можно сразу написать обращение преобразования Лапласа как следствие интеграла Фурье:

$$S(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \overline{S}(p) e^{p\tau} \mathrm{d}p. \tag{20}$$

Имеется аналогия между преобразованием Лапласа и степенными рядами [29]. Как известно, степенной ряд сходится в некотором круге — круге сходимости. Радиус круга сходимости равен расстоянию от точки, относительно которой идет разложение в ряд, до ближайшей особой точки разлагаемой функции. Интеграл, являющийся (односторонним) преобразованием Лапласа, вообще говоря, сходится в полуплоскости комплексной плоскости, лежащей справа от некоторой прямой, параллельной мнимой оси. Сказанное не означает, что преобразование имеет смысл только там, где сходится интеграл (как и в случае рядов). Часто функцию можно аналитически продолжить, иногда на все точки комплексной плоскости, кроме некоторых, особых. Ясно, что на прямой, являющейся границей сходимости интеграла, обязательно лежит особая точка преобразования как функции комплексного аргумента.

Мы последовательно рассмотрим случаи бесконечной, полубесконечной сред и плоского слоя, но сначала введем ряд функций, связанных с ядерной.

5. Ядерная функция и ее преобразования. В теории переноса излучения, как уже говорилось, рассматриваются симметричные разностные ядра, т. е. с четными ядерными функциями, представимыми в виде (2). Интеграл, представляющий преобразование Лапласа такой функции,

$$\overline{K}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-p\,\tau}\, K(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int\limits_a^b A(y') \frac{\mathrm{d}y'}{y' + p}, \tag{21}$$

сходится при $\mathrm{Re} > -a$. Такой интеграл называется интегралом типа Коши. Он напоминает интеграл Коши

$$\oint_L f(z')\frac{\mathrm{d}z'}{z'-z} = 2\pi i\, f(z), \tag{22}$$

берущийся по некоторому замкнутому контуру L в комплексной плоскости. Но в интеграле Коши стоит функция $f(z)$, регулярная в области, целиком содержащей контур интегрирования. Поэтому указанный интеграл всегда выражается через саму функцию. В интеграле типа Коши функция лишь непрерывна, а контур не обязательно замкнут, и для него равенство (22) не выполняется.

Вместе с тем то обстоятельство, что преобразование Лапласа от ядерной функции есть интеграл типа Коши, сильно облегчает решение задач теории переноса, так как известны аналитические свойства этого интеграла [10,29].

Введем еще две функции, связанные с ядерной, а именно двустороннее преобразование Лапласа, точнее полусумму односторонних

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{2}[\overline{K}(p) + \overline{K}(-p)] = \int_a^b A(y)\frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2-p^2} \tag{23}$$

и косинус-преобразование Фурье от ядерной функции

$$V(u) = \mathcal{U}(i\,u) = \int_0^\infty \cos(u\tau)K(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_a^b \frac{A(y)\,y\,\mathrm{d}y}{y^2+u^2}. \tag{24}$$

Обе эти функции четны относительно своих аргументов. Их общее значение в нуле $V(0) = \mathcal{U}(0) = \overline{K}(0)$ равно интегралу (3). В силу наших предположений о функции $A(y)$, в частности ее неотрицательности, функция $V(u)$ непрерывна и строго убывает на промежутке $[0,\infty)$. Последнее следует из того, что производная там

$$V'(u) = -2u\int_a^b \frac{A(y)\,y\,\mathrm{d}y}{(y^2+u^2)^2} < 0. \tag{25}$$

Введенные преобразования придется рассматривать на комплексной плоскости. Поэтому изучим их аналитические свойства на ней.

6. Формулы Сохоцкого—Племеля. Преобразование Лапласа от ядерной функции (первый интеграл в (21)), как уже отмечалось, является интегралом типа Коши (второй интеграл в том же равенстве), который можно вычислять не только при тех значениях p, при которых сходится преобразование. Тем самым интеграл аналитически продолжает преобразование на всю комплексную плоскость. Функция $\overline{K}(p)$ регулярна везде, кроме точек промежутка $[-b,-a]$. В окрестности этих точек ее поведение определяется формулами Сохоцкого—Племеля (см., например, [10]), краткий вывод которых мы сейчас приведем.

Нерегулярность преобразования Лапласа $\overline{K}(p)$ на промежутке $[-b,-a]$ объясняется тем, что в его точках обращается в нуль знаменатель у подынтегральной функции в интеграле типа Коши в (21). Чтобы исследовать поведение интеграла (21) вблизи точки $p = -y \in [-b,-a]$, рассмотрим его значения на комплексной плоскости чуть выше или чуть ниже выбранной точки, выделим небольшой промежуток около нее и добавим и вычтем интеграл по малому промежутку от дроби с множителем — функцией $A(y)$ в точке $y \in [a,b]$:

$$\overline{K}(-y\pm i\varepsilon) = \int_a^b \frac{A(y')}{y'-y\pm i\varepsilon}\mathrm{d}y' = \int_a^{y-\delta} \frac{A(y')}{y'-y\pm i\varepsilon}\mathrm{d}y' + \int_{y+\delta}^b \frac{A(y')}{y'-y\pm i\varepsilon}\mathrm{d}y' + \int_{y-\delta}^{y+\delta} \frac{A(y')-A(y)}{y'-y\pm i\varepsilon}\mathrm{d}y' + A(y)\int_{y-\delta}^{y+\delta}\frac{\mathrm{d}y'}{y'-y\pm i\varepsilon}. \tag{26}$$

Считаем, что $\delta > \varepsilon > 0$. В таком представлении интегралы по промежуткам, не содержащим точки y, и интеграл с разностью значений функции A остаются сходящимися и при $\varepsilon \to 0$. Последний же в (26) интеграл вычисляется. При знаке $+$

$$\int_{y-\delta}^{y+\delta} \frac{\mathrm{d}y'}{y'-y+i\varepsilon} = \ln\frac{\delta+i\varepsilon}{-\delta+i\varepsilon} = \ln\frac{e^{i\phi}}{e^{i\pi-i\phi}} = -i\pi + 2i\phi, \tag{27}$$

где

$$\cos\phi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+\varepsilon^2}}, \quad \sin\phi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta^2+\varepsilon^2}}. \tag{28}$$

При изменении знака перед ε в (27) получится комплексно сопряженное выражение.

Теперь можно ε устремить к нулю. Тогда в пределе получится $\phi = 0$ и

$$\overline{K}(-y \pm i0) = \int\limits_a^{y-\delta} \frac{A(y')}{y'-y}\mathrm{d}y' + \int\limits_{y+\delta}^{b} \frac{A(y')}{y'-y}\mathrm{d}y' + \int\limits_{y-\delta}^{y+\delta} \frac{A(y')-A(y)}{y'-y}\mathrm{d}y' \mp i\pi A(y). \tag{29}$$

Наконец, устремим к нулю и δ. Интеграл от дроби с разностью в числителе при этом стремится к нулю, так как его подынтегральная функция непрерывна, а предел суммы двух интегралов существует и называется главным значением интеграла в смысле Коши. Мы будем обозначать это значение просто интегралом без каких-либо дополнительных значков.

Итак, формулы Сохоцкого—Племеля имеют вид

$$\overline{K}(-y \pm i0) = \overline{K}(-y) \mp i\pi A(y), \tag{30}$$

где $a < y < b$, а $\overline{K}(-y)$ — интеграл вида (21), в котором знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль и интеграл надо понимать в смысле главного значения по Коши.

Поскольку функция $\mathcal{U}(p)$ является полусуммой преобразований Лапласа (21), формулы Сохоцкого для нее следуют из (30) и выглядят так:

$$\mathcal{U}(y \pm i0) = \mathcal{U}(y) \pm \frac{i\pi}{2} A(|y|)\,\mathrm{sgn}\, y. \tag{31}$$

Здесь $|y| \in [a, b]$, а интеграл (23) при таких $p = y$ понимается как главное значение.

§ 3.2. Бесконечная среда

1. Преобразование Лапласа от резольвенты. Уравнение для бесконечной среды содержит интеграл по всей оси. Как уже отмечалось, вследствие однородности среды и отсутствия границ, т. е. выделенного уровня глубины, не только ядро, но и резольвента будут функциями от модуля разности аргументов: $\Gamma_\infty(\tau, \tau_1) = \Gamma_\infty(|\tau - \tau_1|, 0) = \Phi_\infty(|\tau - \tau_1|)$. Это следует и формально из уравнения. Будем считать функцию $\Phi_\infty(\tau)$ четной, тогда знак модуля можно не ставить. Функция $\Phi_\infty(\tau)$ определяется уравнением

$$\Phi_\infty(\tau) = \frac{\lambda}{2} K(|\tau|) + \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(|\tau - \tau'|)\, \Phi_\infty(\tau')\, d\tau'. \tag{32}$$

Уравнение для бесконечной среды является уравнением типа свертки, и естественно применить к нему преобразование Фурье или, что в сущности то же самое, двустороннее преобразование Лапласа. Обозначая результат применения обычного преобразования Лапласа чертой сверху, ввиду четности резольвентной функции непосредственно из (32) находим [66]

$$\overline{\Phi}_\infty(p) + \overline{\Phi}_\infty(-p) = \frac{1}{1 - \lambda \mathcal{U}(p)} - 1. \tag{33}$$

Функция, стоящая в знаменателе этого выражения, играет важную роль и называется *характеристической*.

2. Обращение преобразования. Обращение преобразования Лапласа дается, как уже говорилось, контурным интегралом вдоль мнимой оси вида (20). После приведения интеграла к вещественному виду согласно преобразованию (33) резольвента выразится через функцию (24):

$$\Phi_\infty(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \left[\frac{1}{1 - \lambda \mathcal{U}(p)} - 1\right] e^{p\tau} \mathrm{d}p = \frac{\lambda}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{V(u)\mathrm{d}u}{1 - \lambda\, V(u)} \cos(u\tau). \tag{34}$$

При таком представлении резольвенты для расчета ее значений придется вычислять интегралы от колеблющихся знакопеременных функций. Это достаточно неприятная процедура, при которой возможны большие потери точности.

При использовании представления ядра в виде суперпозиции экспонент интеграл (34) может быть представлен в другом виде, с вещественной экспонентой. Для этого необходимо преобразовать контур интегрирования к особенностям $\mathcal{U}(p)$, которые лежат на вещественной оси. При $\tau > 0$ контур интегрирования можно преобразовывать только налево, так как в эту сторону экспонента убывает. При отрицательных τ контур преобразовывается направо. Рассмотрим для определенности положительные τ.

3. Преобразование обращения. Особенности характеристической функции в левой полуплоскости комплексной плоскости p состоят из линии ветвления — отрезка $[-b,-a]$ — и возможных точек полюсов, где знаменатель в (33) обращается в нуль, т.е. решений *характеристического уравнения*

$$1-\lambda\mathcal{U}(k)=0. \tag{35}$$

Таких корней уравнение может и не иметь. Покажем, что при положительной функции $A(y)$ возможны либо два простых корня этого уравнения, которые могут лежать только на промежутке $[-a,a]$ симметрично относительно нуля, либо двукратный корень $k=0$. Действительно, в выражении

$$1-\lambda\mathcal{U}(k_1+ik_2)=1-\lambda\int\limits_a^b A(y)y\mathrm{d}y\frac{y^2-k_1^2+k_2^2+2ik_1k_2}{(y^2-k_1^2+k_2^2)^2+4k_1^2k_2^2} \tag{36}$$

мнимая часть может обратиться в нуль лишь в случаях, если либо $k_1=0$, либо $k_2=0$, т.е. корни лежат на мнимой или вещественной осях. Но значения $k_1=0$ невозможны, так как $\mathcal{U}(iu)=V(u)$, а это монотонная функция, всегда меньшая своего значения при $u=0$. Раз корни могут быть только вещественными, то они должны лежать либо между точками $-a$ и a, либо быть большими по модулю, чем b, так как остальные точки вещественной оси составляют линию ветвления. Однако значения $|k|>b$ также невозможны, ибо при $|k|>b$ функция $\mathcal{U}(k)$ отрицательна. Невозможны и отличные от нуля кратные корни вследствие того, что производная

$$\mathcal{U}'(p)=p\int\limits_a^b A(y)\frac{y\,\mathrm{d}y}{(y^2-p^2)^2} \tag{37}$$

обращается в нуль только при $p=0$. В силу неотрицательности производной (37) при $0<p<a$ функция $\mathcal{U}(p)$ на этом промежутке монотонна, и второго корня уравнения (35) там быть не может. При знакопеременных функциях $A(y)$ возможны другие ситуации. В дальнейшем для определенности будем считать, что имеется именно два простых корня $\pm k$, $0<k<a$.

Составим контур интегрирования в первом интеграле в равенстве (34) из следующих частей. Часть мнимой оси от $-iR$ до iR, где R — достаточно большое число, далее левая полуокружность радиусом R с центром в нуле и линией сечения — мнимой осью, прямолинейные отрезки над и под линией ветвления $[-b,-a]$ и незамкнутые окружности малых радиусов, обходящие крайние точки ветвления и соединяющие верхний и нижний участки контура вдоль линии ветвления. Направление интегрирования — вверх по мнимой оси, затем вниз по полуокружности; по отрезкам: по верхнему направо, по нижнему налево.

Внутри выбранного контура преобразование Лапласа (33) регулярно везде за исключением точки $-k$ (если существует корень k характеристического уравнения (35)), где имеется простой полюс. Поэтому интеграл равен произведению $2\pi i$ на вычет в полюсе.

Устремим радиус R к бесконечности, а радиусы малых окружностей к нулю. Тогда интеграл по большой окружности стремится к нулю по лемме Жордана [29]. Интегралы по малым окружностям также обращаются в нули. В результате функция (34) окажется равной сумме упомянутого вычета и интегралов по отрезкам около линии ветвления, взятых в направлениях, противоположных указанным выше. Вычет равен $1/[-\lambda\mathcal{U}'(-k)]=1/\lambda\mathcal{U}'(k)$, так как производная от четной функции нечетна. Интеграл же, при вычислении которого, как и при нахождении вычета, слагаемое -1 несущественно (оно обеспечивает выполнение условий леммы Жордана), преобразуется следующим образом:

$$\int\limits_{-b}^{-a}\frac{e^{p\tau}\mathrm{d}p}{1-\lambda\mathcal{U}(p-i0)}+\int\limits_{-a}^{-b}\frac{e^{p\tau}\mathrm{d}p}{1-\lambda\mathcal{U}(p+i0)}=\int\limits_a^b\left[\frac{1}{1-\lambda\mathcal{U}(y+i0)}-\frac{1}{1-\lambda\mathcal{U}(y-i0)}\right]e^{-y\tau}\mathrm{d}y=$$

$$=\int\limits_a^b\left[\frac{1}{1-\lambda\mathcal{U}(y)-\dfrac{\lambda\pi i}{2}A(y)}-\frac{1}{1-\lambda\mathcal{U}(y)+\dfrac{\lambda\pi i}{2}A(y)}\right]e^{-y\tau}\mathrm{d}y. \tag{38}$$

При переходе ко второму выражению сделана замена $p=-y$. При этом у первого интеграла минус от дифференциала компенсировался переменой порядка пределов. При переходе к третьему выражению использованы формулы (31).

Окончательно при $\tau>0$ находим

$$\Phi_\infty(\tau)=C_\infty e^{-k\tau}+\int\limits_a^b R(y)e^{-\tau\,y}\,dy, \tag{39}$$

где

$$C_\infty = \frac{1}{\lambda\,\mathcal{U}'(k)}, \quad R(y) = \frac{\lambda}{2}\frac{A(y)}{[1-\lambda\,\mathcal{U}(y)]^2 + [\lambda\,\pi\,A(y)/2]^2}. \tag{40}$$

Если полюса у $\overline{\Phi}_\infty(p)$ нет, т. е. не существует корня (35), то внеинтегральное слагаемое в (39) отсутствует. Если бы полюсов оказалось несколько (при неположительной функции $A(y)$), то вместо одного слагаемого должна была бы в (39) стоять сумма.

4. Однородное уравнение. Решения однородного уравнения, соответствующего (32), существуют только при наличии корней у характеристического уравнения. Тогда каждой паре корней $\pm k$ отвечают два решения: $e^{\pm k\tau}$. При λ, имеющих обычный физический смысл, т. е. заключенных между нулем и единицей, как отмечалось выше, корни k вещественны. Напомним, что при неотрицательной весовой функции $A(y)$ может существовать только одна пара корней $\pm k$.

Однородное уравнение, вообще говоря, всегда имеет решения при некоторых нефизических, в том числе комплексных λ. Чтобы в этом убедиться, достаточно выразить λ из уравнения через функцию $S(\tau)$ и интеграл — ее свертку с ядром. Для произвольной функции $S(\tau)$ можно вычислить значение λ, для которого эта функция будет решением уравнения. Однако один набор значений λ выделен тем, что соответствующие решения ограничены. Эти значения λ заполняют промежуток $[1/V(0), +\infty)$, и можно положить $\lambda = 1/V(u)$, $u \in [0,\infty)$. Тогда решениями являются экспоненты $e^{\pm i\,u\,\tau}$. Указанные значения λ образуют непрерывный спектр уравнения, а решения представляют собой собственные функции этого спектра.

§ 3.3. Полубесконечная среда

1. Соотношение Соболева. Из-за наличия границы резольвента уравнения для полубесконечной среды $\Gamma(\tau,\tau_1)$ зависит от двух своих аргументов в отдельности. Однако и она, хотя сложнее, чем в случае бесконечной среды, все же выражается через свое частное значение $\Phi(\tau) = \Gamma(\tau, 0)$, что было показано В. В. Соболевым в работе [72]. Воспроизведем вывод этого соотношения.

Продифференцируем уравнение для резольвенты

$$\Gamma(\tau,\tau_1) = \frac{\lambda}{2}K(|\tau-\tau_1|) + \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\,\Gamma(\tau',\tau_1)\mathrm{d}\tau' \tag{41}$$

по аргументу τ_1, который является параметром. Получим соотношение

$$\frac{\partial\Gamma(\tau,\tau_1)}{\partial\tau_1} = \frac{\lambda}{2}K'(|\tau-\tau_1|)\,\mathrm{sgn}(\tau_1-\tau) + \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\frac{\partial\Gamma(\tau',\tau_1)}{\partial\tau_1}\mathrm{d}\tau'. \tag{42}$$

Теперь продифференцируем уравнение по τ. Однако желательно, чтобы результат содержал производные не от ядра, а от резольвенты. Поэтому преобразуем интеграл, разбив его на два:

$$\int_0^\tau K(\tau-\tau')\,\Gamma(\tau',\tau_1)\mathrm{d}\tau' + \int_\tau^\infty K(\tau'-\tau)\,\Gamma(\tau',\tau_1)\mathrm{d}\tau' = \int_0^\tau K(\tau'')\,\Gamma(\tau-\tau'',\tau_1)\mathrm{d}\tau'' + \int_0^\infty K(\tau'')\,\Gamma(\tau+\tau'',\tau_1)\mathrm{d}\tau''. \tag{43}$$

Здесь в первом интеграле сделана замена переменной интегрирования $\tau' = \tau - \tau''$, а во втором $\tau' = \tau + \tau''$. Дифференцирование уравнения по τ с таким представлением интеграла дает

$$\frac{\partial\Gamma(\tau,\tau_1)}{\partial\tau} = \frac{\lambda}{2}K'(|\tau-\tau_1|)\,\mathrm{sgn}(\tau-\tau_1) + \frac{\lambda}{2}\left[K(\tau)\Gamma(0,\tau_1) + \int_0^\tau K(\tau'')\frac{\partial\Gamma(\tau-\tau'',\tau_1)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau'' + \int_0^\infty K(\tau'')\,\frac{\partial\Gamma(\tau+\tau'',\tau_1)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau''\right]. \tag{44}$$

Вернемся к старым переменным интегрирования. Тогда интеграл примет вид исходного с заменой резольвенты на ее производную. Сложив результат с уравнением (42), получим

$$\frac{\partial\Gamma(\tau,\tau_1)}{\partial\tau} + \frac{\partial\Gamma(\tau,\tau_1)}{\partial\tau_1} = \frac{\lambda}{2}K(\tau)\Gamma(0,\tau_1) + \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\left[\frac{\partial\Gamma(\tau',\tau_1)}{\partial\tau'} + \frac{\partial\Gamma(\tau',\tau_1)}{\partial\tau_1}\right]\mathrm{d}\tau'. \tag{45}$$

Первые внеинтегральные слагаемые в (42) и (44) сократились, так как у них противоположные знаки.

Из (45) следует, что сумма производных от резольвенты по обоим ее аргументам удовлетворяет уравнению с тем же ядром, что и сама резольвента. При этом свободное слагаемое состоит из двух множителей. Второй из них вообще не зависит от основной переменной уравнения, по которой берется интеграл, и на него можно разделить уравнение, так что он войдет в окончательный результат таким же множителем. Первый же множитель соответствует значению параметра резольвенты $\tau_1 = 0$. Таким образом,

$$\frac{\partial\Gamma(\tau,\tau_1)}{\partial\tau} + \frac{\partial\Gamma(\tau,\tau_1)}{\partial\tau_1} = \Gamma(\tau,0)\Gamma(0,\tau_1) = \Phi(\tau)\Phi(\tau_1). \tag{46}$$

Это и есть соотношение Соболева. Дальнейшее изложение основано на его работах [72,73] (см. также [31,56,76]).

2. Выражение резольвенты через резольвентную функцию. Пусть $\tau > \tau_1$. Сделаем в линейном дифференциальном уравнении первого порядка замену переменных $\tau-\tau_1 = s,\ \tau_1 = t$. Пересчитаем производные

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial\tau_1} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}. \tag{47}$$

Тогда уравнение (46) перепишется короче:

$$\frac{\partial\Gamma(s+t,t)}{\partial t} = \Phi(s+t)\Phi(t). \tag{48}$$

Решение уравнения (48) имеет вид

$$\Gamma(s+t,t) = C(s) + \int_0^t \Phi(s+t')\Phi(t')\mathrm{d}t'. \tag{49}$$

При $t = 0$ должно быть $\Gamma(s,0) = C(s) = \Phi(s)$. Возвращаясь к старым переменным, получаем

$$\Gamma(\tau,\tau_1) = \Phi(\tau-\tau_1) + \int\limits_0^{\tau_1} \Phi(t')\,\Phi(\tau-\tau_1+t')\mathrm{d}t'. \tag{50}$$

Замена переменной интегрирования $t' = \tau_1 - \tau'$ приводит к формуле

$$\Gamma(\tau,\tau_1) = \Phi(\tau-\tau_1) + \int\limits_0^{\tau_1} \Phi(\tau_1-\tau')\,\Phi(\tau-\tau')\mathrm{d}\tau' \text{ при } \tau > \tau_1. \tag{51}$$

Так как резольвента от своих аргументов зависит совершенно одинаково, формулу (51) можно переписать в симметричном виде, верном при любом соотношении между τ и τ_1:

$$\Gamma(\tau,\tau_1) = \Phi(|\tau-\tau_1|) + \int\limits_0^{\min(\tau,\tau_1)} \Phi(\tau-t)\,\Phi(\tau_1-t)\,\mathrm{d}t. \tag{52}$$

Таким образом, доказано, что резольвента выражается через свое граничное значение.

Итак, найдя указанное частное значение резольвенты, т.е. резольвентную функцию, можно рассчитать и саму резольвенту. Однако в этом нет необходимости. Действительно, формулу (5) для решения уравнения (1) в случае полубесконечной среды после подстановки выражения для резольвенты (52) можно преобразовать, поменяв порядок интегрирования:

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \int\limits_0^\infty S_0(\tau_1)\Phi(|\tau-\tau_1|)\mathrm{d}\tau_1 + \int\limits_0^\tau \Phi(\tau-t)\mathrm{d}t \int\limits_t^\infty S_0(\tau_1)\Phi(\tau_1-t)\mathrm{d}\tau_1. \tag{53}$$

Отсюда видно, что при любой функции $S_0(\tau)$ для нахождения решения при любых источниках достаточно вычислить один однократный и один повторный интегралы.

Резольвентная функция определяется уравнением, следующим из (41) при $\tau_1 = 0$:

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2}K(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\Phi(\tau')\mathrm{d}\tau'. \tag{54}$$

3. Преобразования Лапласа. Большую роль в теории играет преобразование Лапласа от резольвенты, точнее, величина, отличающаяся от него на слагаемое — экспоненту:

$$D(\tau,p) = e^{-p\tau} + \int\limits_0^\infty e^{-p\tau_1}\Gamma(\tau,\tau_1)\mathrm{d}\tau_1. \tag{55}$$

Из определения резольвенты следует, что функция $D(\tau,p)$ является решением уравнения (41) при свободном члене $e^{-p\tau}$. Так как ядерная функция представляется суперпозицией экспонент с весовой функцией $A(y)$, а резольвентная функция удовлетворяет уравнению (54) со свободным слагаемым, равным ядерной функции, то в силу линейности уравнения справедливо соотношение

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)D(\tau,y)\mathrm{d}y. \tag{56}$$

Частное значение преобразования резольвенты, являющееся преобразованием Лапласа резольвентной функции, имеет специальное обозначение

$$D(0,p) = 1 + \overline{\Phi}(p) = H(p) \tag{57}$$

и называется H-*функцией* (заметим, что традиционное обозначение H-функции $H(1/p)$, но мы здесь его изменили для упрощения записи формул).

Получим дифференциальное уравнение для функции $D(\tau,p)$. Применим для этого преобразование Лапласа к соотношению (46). Так как преобразование от производной путем интегрирования по частям выражается через преобразование самой функции

$$\int\limits_0^\infty e^{-p\tau}f'(\tau)\mathrm{d}\tau = p\overline{f}(p) - f(0), \tag{58}$$

то (переходим от частной производной по τ к обычной, считая p параметром)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[D(\tau,p) - e^{-p\tau}] + p[D(\tau,p) - e^{-p\tau}] - \Gamma(\tau,0) = \Phi(\tau)[H(p)-1] \tag{59}$$

или после сокращений

$$\frac{\mathrm{d}D(\tau,p)}{\mathrm{d}\tau} = -pD(\tau,p) + H(p)\Phi(\tau). \tag{60}$$

Отсюда можно найти выражение функции $D(\tau,p)$ через $\Phi(\tau)$. Тот же результат получится, если подставить в (55) формулу (52):

$$D(\tau,p) = H(p)\,\Psi(\tau,p), \tag{61}$$

где решение уравнения вида (54) со свободным слагаемым $e^{-p\tau}/H(p)$

$$\Psi(\tau,p) = e^{-p\tau}\left[1 + \int_0^\tau e^{p\tau'}\,\Phi(\tau')\,d\tau'\right]. \tag{62}$$

Наконец, двойное (по обоим аргументам) преобразование Лапласа от резольвенты получается из (61):

$$R(p,q) = \overline{D}(p,q) = \frac{H(p)\,H(q)}{p+q}. \tag{63}$$

4. Нелинейное уравнение для H-функции. H-функция определяется несколькими уравнениями. Нелинейное уравнение получается, если произвести преобразование Лапласа в соотношении (56), а затем подставить в результат двойное преобразование от резольвенты (63):

$$H(p) = 1 + \frac{\lambda}{2}H(p)\int\limits_a^b A(y)H(y)\frac{\mathrm{d}y}{y+p}. \tag{64}$$

Впервые такое уравнение было получено В. А. Амбарцумяном в упоминавшейся выше его работе для монохроматического изотропного рассеяния другим способом, а затем обобщено С. Чандрасекаром [85] на случай неизотропного рассеяния. Для произвольного ядра — суперпозиции экспонент оно выведено В. В. Соболевым [72].

Уравнение (64) можно переписать в несколько другом виде:

$$\frac{1}{H(p)} = 1 - \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)H(y)\frac{\mathrm{d}y}{y+p}. \tag{65}$$

5. Линейное уравнение для H-функции. Линейное уравнение получается непосредственно из (54) с учетом представимости ядерной функции в виде суперпозиции экспонент.

Применим преобразование Лапласа к уравнению (54). После разбиения интеграла по τ' на два и перемены порядка интегрирования получим

$$H(p) - 1 = \overline{K}(p) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\tau'\Phi(\tau')\left[\int\limits_{\tau'}^\infty e^{-p\tau}K(\tau-\tau')\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_0^{\tau'} e^{-p\tau}K(\tau'-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]. \tag{66}$$

Подставим представление ядерной функции через экспоненты. Интеграл по переменной y после этого можно вынести вперед, а интегралы по τ от экспонент взять. Получится

$$H(p) = 1 + \overline{K}(p) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)\mathrm{d}y\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\tau'\Phi(\tau')\left[e^{y\tau'}\frac{e^{-(y+p)\tau'}}{y+p} + e^{-y\tau'}\frac{e^{(y-p)\tau'}-1}{y-p}\right]. \tag{67}$$

Теперь берутся и интегралы по τ'. Результаты выражаются через преобразование Лапласа от резольвентной функции, т. е. через H-функцию, а преобразование $\overline{K}(p)$ сокращается:

$$H(p) = 1 + \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)\mathrm{d}y\left[\frac{H(p)}{y+p} + \frac{H(p)-H(y)}{y-p}\right]. \tag{68}$$

В таком виде уравнение не имеет особенностей, так как при p из промежутка интегрирования неопределенность дроби раскрывается и подынтегральная функция остается непрерывной. Однако линейное уравнение (68) обычно записывают в другом виде, перенося все слагаемые, пропорциональные $H(p)$, налево. Тогда выделяются преобразования Лапласа от ядерной функции, причем интегралы при аргументе из основного промежутка $a < p < b$ следует понимать в смысле главного значения:

$$[1 - \lambda\mathcal{U}(p)]H(p) = 1 - \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)\mathrm{d}y\frac{H(y)}{y-p}. \tag{69}$$

Заметим, что если применить такую же процедуру к уравнению для резольвенты, то получится линейное уравнение для ее преобразования Лапласа, т. е. функции $D(\tau, p)$. В. В. Соболев предлагал для решения таких уравнений применять метод Карлемана [70].

Доказано, что нелинейное уравнение (64) и линейное уравнение (68) при наличии корня характеристического уравнения имеют неединственные решения. Однако решение, которое не содержит особенностей на положительной части вещественной оси, единственно. Именно это решение имеет физический смысл, и только им мы будем интересоваться. Подробнее об этом см. [56,91].

6. Соотношение Винера—Хопфа и явное выражение для H-функции. Сравним два уравнения для H-функции: линейное (69) и нелинейное (65). Видно, что их правые части отличаются только знаком аргумента p, так что из этих двух уравнений вытекает соотношение

$$[1 - \lambda\mathcal{U}(p)]\,H(p)\,H(-p) = 1. \tag{70}$$

Это соотношение факторизует выражение в квадратных скобках, называемое в теории сингулярных уравнений *символом*, а в теории переноса, как уже говорилось, — характеристической функцией. Заметим, что $H(p)$, являясь преобразованием Лапласа от достаточно “хорошей” (непрерывной, убывающей на бесконечности) функции $\Phi(\tau)$, регулярна справа от мнимой оси, а $H(-p)$ регулярна в левой полуплоскости комплексной плоскости p.

Факторизация символа, т. е. представление его в виде произведения функций комплексного аргумента, регулярных слева и справа от мнимой оси, является центральным пунктом метода Винера—Хопфа [46]. Для ядер вида суперпозиции экспонент факторизация получается естественным образом.

Из соотношения Винера—Хопфа (70) следует, что когда существуют корни $\pm k$ характеристического уравнения (35), $H(p)$ имеет простой полюс в точке $p = -k$. Оттуда же следует, что отрезок вещественной оси $[-b, -a]$ является линией ветвления $H(p)$.

Прологарифмируем соотношение (70) и запишем для $\ln H(p)$ при $\mathrm{Re}\,p > 0$ формулу Коши с интегралом вдоль мнимой оси:

$$\ln H(p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\{\ln[1-\lambda\mathcal{U}(p')] + \ln H(-p')\}\frac{\mathrm{d}p'}{p'-p}. \tag{71}$$

Минус перед логарифмом пропадает, так как контур интегрирования обходит точку p, лежащую в правой полуплоскости, в отрицательном направлении. Интеграл от второго слагаемого $\ln H(-p)$ равен нулю, так как вся подынтегральная функция в нем, т. е. $\ln H(-p')/(p'-p)$, регулярна в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,p' < 0$. Поэтому его можно отбросить. В первом же интеграле сделаем замену переменой интегрирования $p' = iu$. Тогда явное выражение для H-функции примет вещественный вид с функцией (24) под интегралом:

$$\ln H(p) = -\frac{p}{\pi}\int\limits_0^\infty \ln[1-\lambda V(u)]\frac{\mathrm{d}u}{p^2+u^2}. \tag{72}$$

Для монохроматического рассеяния эта формула была получена В. А. Фоком [80]. Формула (72) для общего ядра была написана В. В. Ивановым [30]. Здесь мы воспроизвели рассуждение, приведенное для случая монохроматического рассеяния в книге С. Чандрасекара [85].

Из точного выражения (72) вытекает, что

$$H(0) = \lim_{p\to 0}\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \ln[1-\lambda V(pv)]\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda V(0)}}. \tag{73}$$

Это предельное значение позволяет переписать уравнения для H-функции. Положив в (69) $p=0$, найдем, что

$$1 - \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)H(y)\frac{\mathrm{d}y}{y} = \sqrt{1-\lambda V(0)}. \tag{74}$$

Добавив и вычтя это соотношение из уравнений (69) и (65), запишем их по-другому: нелинейное

$$\frac{1}{H(p)} = \sqrt{1-\lambda V(0)} + \frac{\lambda}{2}p\int\limits_a^b A(y)\frac{H(y)}{y+p}\frac{\mathrm{d}y}{y} \tag{75}$$

и линейное

$$[1-\lambda\mathcal{U}(p)]H(p) = \sqrt{1-\lambda V(0)} - \frac{\lambda}{2}p\int\limits_a^b A(y)\frac{H(y)}{y-p}\frac{\mathrm{d}y}{y}. \tag{76}$$

Эти формы уравнений понадобятся нам в дальнейшем.

7. Явное выражение для резольвентной функции. После того, как найдена H-функция, становится возможным обратить и преобразование Лапласа (57). Для этого необходимо опять воспользоваться соотношением (70), выразив с его помощью $H(p)$ в (57) через характеристическую функцию. Тогда оказывается, что особенности у $\overline{\Phi}(p)$ в левой полуплоскости комплексного переменного те же, что и у $\overline{\Phi}_\infty(p)$. Все отличие заключается в наличии дополнительного регулярного слева множителя $H(-p)$, который после замены переменной интегрирования $p=-y$ превращается в $H(y)$. Таким образом, обращение преобразования легко выполняется и в этом случае, и мы получаем

$$\Phi(\tau) = Ce^{-k\tau} + \int\limits_a^b \frac{R(y)}{H(y)}\,e^{-\tau\,y}\mathrm{d}y, \tag{77}$$

где $R(y)$ дается формулой (40), а коэффициент при экспоненте внеинтегрального слагаемого

$$C = \operatorname*{res}_{p=-k} H(p). \tag{78}$$

Этот коэффициент может быть записан несколькими различными способами. Если вычет вычислять, исходя из соотношения (70), то получится, так же как и в интеграле (в согласии с формулой (40) для C_∞):

$$C = \frac{C_\infty}{H(k)}. \tag{79}$$

Значение $H(k)$ находится, например, из нелинейного уравнения (65). Можно исходить из нелинейного уравнения при вычислении вычета, тогда вычет находится по правилу Лопиталя и получается

$$C = \frac{1}{\dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int_a^b A(y)\mathrm{d}y\frac{H(y)}{(y-k)^2}}. \tag{80}$$

Так как по резольвентной функции находится и резольвента, задачу о свечении полубесконечной среды с произвольными первичными источниками, достаточно быстро убывающими с удалением от границы, можно считать решенной полностью.

8. Однородное уравнение для полубесконечной среды. Как и в случае бесконечной среды, однородное уравнение можно рассматривать при физических значениях λ, что соответствует расположению первичных источников излучения на бесконечной глубине и называется задачей Милна, который ее рассматривал для ядра $E_1(\tau)$. Этой задачей занимались многие исследователи, начиная с Винера и Хопфа, которые свой метод разработали именно для решения задачи Милна [46]. В общем случае однородное уравнение

$$S_{\mathrm{M}}(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\, S_{\mathrm{M}}(\tau')\mathrm{d}\tau' \tag{81}$$

рассмотрел В. В. Соболев [73].

Так же, как и для $D(\tau,p)$, легко показать, что производная от решения уравнения удовлетворяет уравнению, которое содержит точно такой же интегральный оператор, что и исходное, но свободное слагаемое только одно:

$$S'_{\mathrm{M}}(\tau) = \frac{\lambda}{2}K(\tau)\, S_{\mathrm{M}}(0) + \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\, S'_{\mathrm{M}}(\tau')\mathrm{d}\tau'. \tag{82}$$

Так как эта функция и ее производная могут быть неограниченными при $\tau\to\infty$ и таким образом пропорциональными, то, обозначая коэффициент пропорциональности через k, обнаруживаем, что $S_{\mathrm{M}}(\tau)$ удовлетворяет уравнению вида (60)

$$S'_{\mathrm{M}}(\tau) = kS_{\mathrm{M}}(\tau) + S_{\mathrm{M}}(0)\Phi(\tau) \tag{83}$$

и выражается через $\Psi(\tau,p)$ аналогично $D(\tau,p)$ (формула (61)), но с заменой p на $-k$:

$$S_{\mathrm{M}}(\tau)/S_{\mathrm{M}}(0) = \Psi(\tau,-k) = D(\tau,-k)/H(-k). \tag{84}$$

Чтобы эта функция удовлетворяла однородному уравнению (81), необходимо, чтобы $k\geq 0$ было характеристическим числом, т. е. решением характеристического уравнения (35). Тогда (и только тогда) $H(-k)$ обращается в бесконечность и свободное слагаемое в уравнении для Ψ исчезает. Окончательно из (62) при $p=-k$ получаем

$$\frac{S_{\mathrm{M}}(\tau)}{S_{\mathrm{M}}(0)} = H(k)e^{k\tau} - \frac{C}{2k}e^{-k\tau} - \int_a^b \frac{R(y)}{H(y)}\, e^{-y\tau}\,\frac{dy}{y+k}. \tag{85}$$

Если корня k не существует, то нет и решения задачи Милна. Однако возможен случай, когда характеристическая функция обращается в нуль на границе линии ветвления. Тогда решение задачи Милна может существовать. Однородное уравнение может иметь решения и при других значениях λ, в частности, ограниченные решения получаются при тех же значениях $1/V(0)\leq\lambda<\infty$, что и в случае бесконечной среды [51].

Отметим, что преобразование Лапласа от решения задачи Милна согласно (63) и (84)

$$\frac{\overline{S}_{\mathrm{M}}(p)}{S_{\mathrm{M}}(0)} = \frac{H(p)}{p-k}. \tag{86}$$

9. Экстраполированная длина. Иногда для величин, входящих во внеинтегральные слагаемые, используются обозначения, несколько отличающиеся от применявшихся нами до этого. Вместо постоянных C_∞ и C вводят две другие величины:

$$C_\infty = \operatorname*{res}_{p=-k}\frac{1}{1-\lambda\mathcal{U}(p)} = \frac{1}{\lambda\mathcal{U}'(k)} = \frac{C_0^2}{2k}, \tag{87}$$

$$C = \operatorname*{res}_{p=-k} H(p) = \frac{C_\infty}{H(k)} = C_0\exp(-k\tau_{\mathrm{e}}). \tag{88}$$

Легко получить обращения этих формул:

$$C_0=\sqrt{\frac{2k}{\lambda\mathcal{U}'(k)}},\quad \tau_\mathrm{e}=\frac{1}{2k}\ln[2k\lambda\mathcal{U}'(k)H^2(k)]. \tag{89}$$

Величина τ_e имеет специальное название — *экстраполированная длина*. Смысл этого названия виден из следующего. Запишем в новых обозначениях внеинтегральное слагаемое у решения однородного уравнения (85), которое является асимптотикой этого решения:

$$\frac{S_\mathrm{M}(\tau)}{S_\mathrm{M}(0)}\sim\frac{S_\mathrm{M}^\mathrm{as}(\tau)}{S_\mathrm{M}(0)}=C_0\frac{\mathrm{sh}[k(\tau+\tau_\mathrm{e})]}{k}. \tag{90}$$

Ясно, что функция (90) удовлетворяет асимптотическому уравнению

$$\frac{\mathrm{d}^2S_\mathrm{M}^\mathrm{as}(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2}-k^2S_\mathrm{M}^\mathrm{as}(\tau)=0 \tag{91}$$

и граничному условию

$$S_\mathrm{M}^\mathrm{as}(-\tau_\mathrm{e})=0. \tag{92}$$

Этого условия достаточно, чтобы определить асимптотику с точностью до постоянного множителя (значения в нуле). Для получения точной асимптотики граничное условие ставится вне промежутка изменения оптических глубин в полубесконечной среде, т. е. в точке вне самой среды. Это и оправдывает название величины τ_e.

В следующем параграфе, который по содержанию относится к главе 2, применим результаты настоящей главы к изотропному монохроматическому рассеянию.

§ 3.4. Изотропное монохроматическое рассеяние

1. Ядерные функции. Вся изложенная теория приложима к уравнению, описывающему это рассеяние, хотя результаты для него были получены до развития общей теории. При таком рассеянии $a=1$, $b=\infty$, т. е. основным промежутком является $[1,\infty)$, а функция $A(y)=1/y$. Преобразование Лапласа от ядерной функции выражается через элементарные функции. Действительно, при $K(\tau)=E_1(\tau)$

$$\overline{K}(p)=\int\limits_0^\infty e^{-p\tau}\mathrm{d}\tau\int\limits_1^\infty e^{-\tau y}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\limits_1^\infty\frac{\mathrm{d}y}{y(y+p)}=\frac{1}{p}\ln(1+p). \tag{93}$$

Двустороннее преобразование Лапласа и косинус-преобразование Фурье тоже элементарны

$$\mathcal{U}(p)=\frac{1}{2p}\ln\frac{1+p}{1-p},\quad V(u)=\frac{\mathrm{arctg}\,u}{u}. \tag{94}$$

Производная от функции $\mathcal{U}(p)$ и значения этой функции при y из промежутков ее ветвления $(-\infty,-1]$ и $[1,\infty)$ находятся по формулам

$$\mathcal{U}'(p)=-\frac{1}{p}\mathcal{U}(p)+\frac{1}{p}\frac{1}{1-p^2},\ \mathcal{U}(y)=\frac{1}{2y}\ln\frac{y+1}{y-1}. \tag{95}$$

Характеристическое уравнение (35) принимает привычный вид

$$1-\lambda\mathcal{U}(k)=1-\frac{\lambda}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}=0. \tag{96}$$

Напомним, что в главе 2 было выяснено, что если $0<\lambda<1$, то обязательно существуют два корня этого уравнения $\pm k$, а при $\lambda=1$ корни сливаются в один двукратный. Там же было показано, что при $\lambda\to1-0$ выполняются эквивалентности $k\sim\sqrt{3(1-\lambda)}$, $\lambda\sim1-k^2/3$. Значение производной $\mathcal{U}(p)$ в точке $p=k$

$$\mathcal{U}'(k)=-\frac{1}{k}\mathcal{U}(k)+\frac{1}{k}\frac{1}{1-k^2}=\frac{1}{k}\left[-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-k^2}\right]=\frac{\lambda-1+k^2}{\lambda k(1-k^2)}, \tag{97}$$

2. Резольвентные функции. С помощью последней формулы находим, что постоянная, входящая во внеинтегральное слагаемое резольвентной функции бесконечной среды:

$$C_\infty=\frac{k(1-k^2)}{\lambda-1+k^2}. \tag{98}$$

Заметим, что при уменьшении доли истинного поглощения, т. е. при $\lambda \to 1$, $k \to 0$, постоянная $C_\infty \sim k/(2k^2/3) = 3/(2k)$ стремится к бесконечности. Это означает, что в бесконечной чисто рассеивающей среде невозможно стационарное поле излучения при слоевом источнике, а значит, и при любом плоском их расположении. Если первоначально в такой среде поле излучения отсутствовало, а затем включился постоянный слоевой источник, то, поскольку при чистом рассеянии в бесконечной среде фотоны не гибнут и не исчезают (так как нет границ), с течением времени они только накапливаются. Интенсивность излучения становится все больше, и выхода на стационарный режим не происходит.

Преобразованием Лапласа от резольвентной функции является функция Амбарцумяна: $H(p) = \varphi(1/p)$. Нелинейное уравнение для нее — (уравнение Амбарцумяна) было выведено в главе 2, а линейное имеет вид (η — любое комплексное число)

$$\left[1 - \frac{\lambda}{2}\eta \ln\frac{\eta+1}{\eta-1}\right]\varphi(\eta) = 1 - \frac{\lambda}{2}\eta\int\limits_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta-\eta'}\mathrm{d}\eta', \tag{99}$$

При $0 \le \eta \le 1$ в аргументе логарифма надо поставить модуль, а интеграл справа понимать в смысле главного значения.

Точка $\eta = -1/k$ является полюсом функции $\varphi(\eta)$, что, как и в общем случае, следует из линейного уравнения (99) и характеристического уравнения (96). Из нелинейного уравнения Амбарцумяна при $\eta = -1/k$ или из линейного уравнения (99) при $\eta = 1/k$ вытекает равенство, которое было доказано нами в главе 2 другим способом:

$$\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta}\mathrm{d}\eta = 1. \tag{100}$$

Легко написать и точное выражение для функции Амбарцумяна, полученное В. А. Фоком [80]:

$$\varphi(\eta) = \exp\left(-\frac{\eta}{\pi}\int\limits_0^\infty \ln\left[1 - \lambda\frac{\operatorname{arctg} u}{u}\right]\frac{\mathrm{d}u}{1+\eta^2u^2}\right). \tag{101}$$

Приведем выражение для резольвентной функции полубесконечной среды, т.е. формулу (77) для случая монохроматрического рассеяния:

$$\Phi(\tau) = C_0 e^{-k(\tau+\tau_\mathrm{e})} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 \frac{\exp(-\tau/\eta)}{\left[1 - \frac{\lambda}{2}\eta\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right]^2 + \left[\frac{\lambda\pi}{2}\eta\right]^2}\frac{\mathrm{d}\eta}{\varphi(\eta)\eta}. \tag{102}$$

Постоянная при внеинтегральной экспоненте в формуле для резольвентной функции полубесконечной среды может быть записана по-разному:

$$C = C_0 e^{-k\tau_\mathrm{e}} = \frac{C_\infty}{\varphi(1/k)} = \frac{1}{\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{(1-k\eta)^2}\eta\mathrm{d}\eta}. \tag{103}$$

Постоянная C_0 остается конечной и при чистом рассеянии, так как $C_0 = \sqrt{2kC_\infty} \sim \sqrt{2k(3/2k)} = \sqrt{3}$. Из второго выражения для C следует, что при $\lambda = 1$ постоянная $C = 2/\alpha_1$, где α_1 — первый момент функции Амбарцумяна. В главе 2 было показано, что при чистом рассеянии $\alpha_1 = 2/\sqrt{3}$, так что в этом случае $C = C_0 = \sqrt{3}$. Отсюда следует, что входящая в (102) экстраполированная длина при $\lambda \to 1$ остается конечной. Ее предельное значение при этом $\tau_\mathrm{e} = 0.710446089$.

3. Задача Милна. Решение задачи Милна также легко записать. Оно имеет вид (85) с переменой обозначений. Здесь приведем формулу только для классической задачи, т.е. для $\lambda = 1$. Для этого случая его представляют в виде

$$\frac{S_\mathrm{M}(\tau)}{S_\mathrm{M}(0)} = \Psi(\tau) = \sqrt{3}[\tau + q(\tau)], \tag{104}$$

где так называемая функция Хопфа

$$q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int\limits_0^1 R(\eta)(1 - e^{-\tau/\eta})\frac{\mathrm{d}\eta}{\varphi(\eta)}. \tag{105}$$

Ее граничные значения: $q(0) = 1/\sqrt{3} = 0.5773502691896$, $q(\infty) = 0.710446089800$. Значение на бесконечности совпадает со значением экстраполированной длины. Функция Хопфа монотонна, так что все остальные ее значения заключены между крайними.

Заметим, что приближенные решения задачи Милна обсуждались в предыдущей главе. Теперь мы имеем возможность оценить их точность. Все они содержат множитель вида $\tau + c$, где постоянная c в решениях Шварцшильда—Шустера, Эддингтона и Чандрасекара равна соответственно $1/2$, $2/3$ и $1/\sqrt{3}$. Из сравнения с точным решением видно, что наименьшую точность имеет двухпотоковое приближение, в то время как на больших оптических глубинах два других решения эквивалентны. Как мы уже отмечали выше, решение Чандрасекара дает правильное значение на границе, т. е. при $\tau = 0$, а в глубине чуть точнее решение Эддингтона.

В заключение этого параграфа свяжем постоянные M и N, появившиеся в теории монохроматического рассеяния в предыдущей главе при нахождении углового распределения выходящего излучения в задаче Милна и асимптотик в задаче об отражении и пропускании плоским слоем, с постоянными резольвентного метода для случая изотропного рассеяния. Из сравнения формул для M и N с (98) и (103) находим

$$M = \frac{4}{\lambda C_\infty} = \frac{8k}{\lambda C_0^2}, \quad N = \exp(-2k\tau_{\mathrm{e}}). \tag{106}$$

Если подставить эти постоянные в таком виде в асимптотики коэффициентов яркости, то формулы сильно упростятся. Действительно, получится

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \frac{\lambda}{4}\frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta}\frac{\varphi(\zeta)}{1-k\zeta}\left[\frac{1+k^2\eta\zeta}{\eta+\zeta} - \frac{k}{\operatorname{th} k(\tau_0+2\tau_{\mathrm{e}})}\right], \tag{107}$$

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = \frac{\lambda}{4}\frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta}\frac{\varphi(\zeta)}{1-k\zeta}\frac{k}{\operatorname{sh} k(\tau_0+2\tau_{\mathrm{e}})}. \tag{108}$$

Такое представление асимптотических формул для коэффициентов яркости допускает простой предельный переход к чистому рассеянию. Действительно при $\lambda \to 1$ характеристическое число $k \to 0$, а $\tau_{\mathrm{e}} \to q(\infty)$, так что

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta)}{4}\left(\frac{1}{\eta+\zeta} - \frac{1}{\tau_0+2q(\infty)}\right), \quad \sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = \frac{1}{4}\frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta)}{\tau_0+2q(\infty)}. \tag{109}$$

§ 3.5. Конечный плоский слой

1. Резольвента и резольвентная функция. Теория интегральных уравнений переноса для случая плоского слоя развивалась почти одновременно с теорией для полубесконечной среды [73]. Многие соотношения для конечного слоя являются прямыми обобщениями соответствующих соотношений для полубесконечной среды. Рассмотрим резольвенту основного интегрального уравнения.

Резольвента для плоского слоя определяется уравнением

$$\Gamma(\tau, \tau_1, \tau_0) = \frac{\lambda}{2}K(|\tau-\tau_1|) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\tau_0} K(|\tau-\tau'|)\,\Gamma(\tau', \tau_1, \tau_0)\mathrm{d}\tau'. \tag{110}$$

Непосредственно из уравнения вытекают свойства симметрии резольвенты, о которых уже говорилось:

$$\Gamma(\tau, \tau_1, \tau_0) = \Gamma(\tau_1, \tau, \tau_0) = \Gamma(\tau_0-\tau, \tau_0-\tau_1, \tau_0). \tag{111}$$

Первое равенство является отражением симметричности ядра оператора уравнения, а второе — симметричности слоя относительно его границ, т. е. той же симметричности ядра.

Дифференцируя уравнение сначала по τ, а затем по τ_1 и суммируя результаты, получаем соотношение Соболева

$$\frac{\partial\Gamma(\tau, \tau_1, \tau_0)}{\partial\tau} + \frac{\partial\Gamma(\tau, \tau_1, \tau_0)}{\partial\tau_1} = \Phi(\tau, \tau_0)\Phi(\tau_1, \tau_0) - \Phi(\tau_0-\tau, \tau_0)\Phi(\tau_0-\tau_1, \tau_0). \tag{112}$$

Таким образом, и в случае слоя резольвента выражается через свое граничное значение $\Gamma(\tau, 0, \tau_0) = \Phi(\tau, \tau_0)$:

$$\Gamma(\tau, \tau_1, \tau_0) = \Phi(|\tau-\tau_1|, \tau_0) + \int\limits_0^{\min(\tau,\tau_1)} [\Phi(\tau-t, \tau_0)\Phi(\tau_1-t, \tau_0) - \Phi(\tau_0-\tau+t, \tau_0)\Phi(\tau_0-\tau_1+t, \tau_0)]\mathrm{d}t, \tag{113}$$

хотя выражение это сложнее, чем (46), что отражает наличие второй границы у слоя.

2. Преобразования Лапласа. Как и прежде, вводятся преобразования Лапласа от резольвенты и резольвентной функции, но теперь по конечному промежутку:

$$D(\tau, p, \tau_0) = e^{-p\tau} + \int\limits_0^{\tau_0} e^{-p\tau_1}\Gamma(\tau, \tau_1, \tau_0)\mathrm{d}\tau_1. \tag{114}$$

Это преобразование определяется уравнением вида (110) со свободным слагаемым $e^{-p\tau}$:

$$D(\tau, p, \tau_0) = e^{-p\tau} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|)D(\tau', p, \tau_0)\mathrm{d}\tau'. \tag{115}$$

Его граничные значения имеют специальные обозначения:

$$D(0, p, \tau_0) = X(p, \tau_0) = 1 + \int\limits_0^{\tau_0} e^{-p\tau}\Phi(\tau, \tau_0)\mathrm{d}\tau, \tag{116}$$

$$D(\tau_0, p, \tau_0) = Y(p, \tau_0) = e^{-p\tau_0} + \int\limits_0^{\tau_0} e^{-p\tau}\Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0)\mathrm{d}\tau. \tag{117}$$

Путем применения преобразования Лапласа к соотношению (112) или непосредственно из уравнения для $D(\tau, p, \tau_0)$ можно получить уравнение

$$\frac{\partial D(\tau, p, \tau_0)}{\partial \tau} = -pD(\tau, p\tau_0) + X(p, \tau_0)\Phi(\tau, \tau_0) - Y(p, \tau_0)\Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0) \tag{118}$$

и выразить функцию $D(\tau, p, \tau_0)$ через ее частные значения и резольвентную функцию:

$$D(\tau, p, \tau_0) = X(p, \tau_0)\Psi(\tau, p, \tau_0) + Y(p, \tau_0)\left[\Psi(\tau_0 - \tau, -p, \tau_0) - X(p, \tau_0)e^{p(\tau_0 - \tau)}\right]. \tag{119}$$

Здесь введено обозначение, аналогичное использованному в случае полубесконечной среды:

$$\Psi(\tau, p, \tau_0) = e^{-p\tau}\left[1 + \int\limits_0^{\tau} e^{p\tau'}\,\Phi(\tau', \tau_0)\mathrm{d}\tau'\right]. \tag{120}$$

Преобразование Лапласа по конечному промежутку, примененное к равенству (119), дает двойное преобразование

$$R(p, q) = \int\limits_0^{\tau_0} e^{-q\tau}D(\tau, p, \tau_0)\mathrm{d}\tau = \frac{X(p, \tau_0)X(q, \tau_0) - Y(p, \tau_0)Y(q, \tau_0)}{p + q}. \tag{121}$$

Очевидно, что при $\tau_0 \to \infty$ функции с дополнительным аргументом τ_0 перейдут в функции полубесконечной среды, X-функция перейдет в H-функцию, а $Y(p, \tau_0) \to 0$.

Поскольку ядерная функция является суперпозицией экспонент, то ввиду линейности наших уравнений и резольвентная функция является такой же суперпозицией функций $D(\tau, p, \tau_0)$:

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)D(\tau, y, \tau_0)\mathrm{d}y. \tag{122}$$

Для всех этих функций выводятся определяющие их уравнения.

3. Уравнения для X- и Y-функций. По той же схеме, что и в случае полубесконечной среды, можно получить нелинейные и линейные уравнения для введенных функций. Для их записи введем, следуя В. В. Соболеву, еще две функции:

$$N(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)e^{-y\tau}X(y, \tau_0)\mathrm{d}y, \tag{123}$$

$$M(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)e^{-y\tau}Y(y, \tau_0)\mathrm{d}y. \tag{124}$$

В отличие от резольвентной функции $\Phi(\tau,\tau_0)$, имеющей прямой смысл при $0 \le \tau \le \tau_0$, эти функции определены при всех $\tau > 0$, их преобразования Лапласа берутся по полупрямой и являются интегралами типа Коши:

$$\overline{N}(p,\tau_0) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)X(y,\tau_0)\frac{\mathrm{d}y}{y+p}, \tag{125}$$

$$\overline{M}(p,\tau_0) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)Y(y,\tau_0)\frac{dy}{y+p}. \tag{126}$$

Через эти преобразования записываются уравнения для X- и Y-функций, которые выводятся так же, как и уравнения для H-функции в случае полубесконечной среды. Линейные уравнения имеют вид

$$[1-\lambda\mathcal{U}(p)]X(p,\tau_0) = 1 - \overline{N}(-p,\tau_0) - e^{-p\,\tau_0}\overline{M}(p,\tau_0), \tag{127}$$

$$[1-\lambda\mathcal{U}(p)]Y(p,\tau_0) = e^{-p\tau_0}[1-\overline{N}(p,\tau_0)] - \overline{M}(-p,\tau_0), \tag{128}$$

а нелинейные

$$X(p,\tau_0)[1-\overline{N}(p,\tau_0)] = 1 - Y(p,\tau_0)\overline{M}(p,\tau_0), \tag{129}$$

$$Y(p,\tau_0)[1-\overline{N}(-p,\tau_0)] = e^{-p\tau_0} - X(p,\tau_0)\overline{M}(-p,\tau_0)). \tag{130}$$

Уравнения эти, как и для полубесконечной среды, были получены сначала для монохроматического изотропного, затем для неизотропного рассеяния, а потом и в общем случае.

4. Уравнения с производными по толщине слоя. Наряду с приведенными уравнениями, имеющими прямые аналоги в случае полубесконечной среды, введенные функции удовлетворяют еще нескольким видам уравнений, присущих только слою.

Это, во-первых, соотношения, отражающие симметричность слоя (одно такое соотношение уже было приведено для резольвенты). Легко показать непосредственно из уравнения (115), что

$$D(\tau_0-\tau,p,\tau_0) = e^{-p\tau_0}D(\tau,-p,\tau_0). \tag{131}$$

Из (131) при $\tau = 0$ получается следствие, связывающее X- и Y-функции:

$$Y(p,\tau_0) = e^{-p\tau_0}X(-p,\tau_0). \tag{132}$$

С помощью этого соотношения все уравнения для Y легко получаются из уравнений для X. Из него же следует наряду с первым, очевидным, второе граничное значение функции (120):

$$\Psi(0,p,\tau_0) = 1,\ \ \Psi(\tau_0,p,\tau_0) = e^{-p\tau_0}X(-p,\tau_0) = Y(p,\tau_0). \tag{133}$$

Еще один вид уравнений, характерных для конечного плоского слоя, — уравнения с производными по длине промежутка интегрирования в интеграле в (110), т. е. по оптической толщине слоя. Непосредственно дифференцируя (110) по τ_0 и применяя те же рассуждения, что и при выводе соотношения Соболева для полупространства, получаем

$$\frac{\partial\Gamma(\tau,\tau_1,\tau_0)}{\partial\tau_0} = \Phi(\tau_0-\tau,\tau_0)\Phi(\tau_0-\tau_1,\tau_0). \tag{134}$$

так что сумма трех производных от резольвенты по всем ее аргументам равна первому слагаемому справа в (112). Из (134) при $\tau_1 = 0$ следует

$$\frac{\partial\Phi(\tau,\tau_0)}{\partial\tau_0} = \Phi(\tau_0-\tau,\tau_0)\Phi(\tau_0,\tau_0). \tag{135}$$

Аналогично получаются уравнения для преобразований Лапласа. Так, для функции $D(\tau,p,\tau_0)$ после упомянутых рассуждений находим

$$\frac{\partial D(\tau,p,\tau_0)}{\partial\tau_0} = \Phi(\tau_0-\tau,\tau_0)Y(p,\tau_0), \tag{136}$$

а для X- и Y-функций отсюда и из (115) имеем

$$\frac{\partial X(p,\tau_0)}{\partial\tau_0} = \Phi(\tau_0,\tau_0)Y(p,\tau_0), \tag{137}$$

$$\frac{\partial Y(p,\tau_0)}{\partial\tau_0} = -pY(p,\tau_0) + \Phi(\tau_0,\tau_0)X(p,\tau_0). \tag{138}$$

Уравнения с производными по толщине слоя применялись для численного решения задач переноса монохроматического излучения группой Р. Белмана [90].

Другой вид уравнений, выполняющихся для слоя, — это уравнения, связывающие его характеристики с характеристиками слоев другой толщины и полубесконечной среды. Приведем примеры.

5. Формулы сложения. Разобьем интеграл в (115) на два: от нуля до τ_1 и от τ_1 до $\tau_0 = \tau_1 + \tau_2$. Считая, что $0 \le \tau \le \tau_1$, подставим во второй интеграл представление ядерной функции через суперпозицию экспонент:

$$D(\tau, p, \tau_0) = e^{-p\tau} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\tau_1} K(|\tau-\tau'|)D(\tau', p, \tau_0)\mathrm{d}\tau' + \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)\mathrm{d}y e^{y\tau}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_0} D(\tau', p, \tau_0)e^{-y\tau'}\mathrm{d}\tau'. \tag{139}$$

Получилось уравнение для функции $D(\tau, p, \tau_1)$, причем под знаком второго интеграла стоит экспонента, как свободное слагаемое в уравнении (115). Поэтому можно записать соотношение, выполняющееся при $0 \le \tau \le \tau_1 < \tau_1 + \tau_2 = \tau_0$:

$$D(\tau, p, \tau_1+\tau_2) = D(\tau, p, \tau_1) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b \mathrm{d}y A(y) D(\tau_1-\tau, y, \tau_1)\int\limits_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} D(\tau', p, \tau_1+\tau_2)e^{y(\tau_1-\tau')}\mathrm{d}\tau'. \tag{140}$$

Так же выводится соотношение для $\tau_1 \le \tau \le \tau_1 + \tau_2$. Оно имеет вид

$$D(\tau, p, \tau_1+\tau_2) = e^{-p\tau_1}D(\tau-\tau_1, p, \tau_2) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b \mathrm{d}y A(y) D(\tau-\tau_1, y, \tau_2)\int\limits_0^{\tau_1} D(\tau', p, \tau_1+\tau_2)e^{y(\tau'-\tau_1)}\mathrm{d}\tau'. \tag{141}$$

Соотношения (140) и (141) могут быть записаны для случая $\tau_2 = \infty$, т. е. для выражения связи между конечным слоем и полубесконечной средой. Их можно, конечно, получить эвристическим методом, так как функция $D(\tau, p, \tau_0)$ пропорциональна вероятности выхода фотона из среды. Однако здесь мы предпочли формальный вывод, чтобы показать, как он производится. Выведенные соотношения широко использовались при численных расчетах для монохроматического рассеяния [100]. При этом принималось $\tau_1 = \tau_2$, так что метод назывался методом удвоения, о чем уже говорилось в главе 2.

6. Заключение к главе 3. Уравнение (1) с конечными τ_* и τ_0 является уравнением фредгольмовского типа и для него выполняется альтернатива Фредгольма. Это означает, что при имеющих физический смысл значениях вероятности выживания фотона при рассеянии, т. е. при величине $0 \le \lambda \le 1$, имеет решение неоднородное уравнение, но не имеет решений однородное уравнение, в отличие от ситуации в случае бесконечной и полубесконечной сред, для которых основные интегральные уравнения сингулярны. Однородные уравнения с конечным промежутком интегрирования могут иметь решения, однако при определенных значениях величины $\lambda > 1$, которые называются *собственными значениями* уравнения. Соответствующие решения уравнения — *собственные функции* — ограничены и знакопеременны [52].

Заметим, что если для сингулярного уравнения с интегрированием по полуоси оказалось возможным получить точные решения, то для конечных промежутков интегрирования этого сделать, вообще говоря, нельзя. Поэтому усилия теоретиков сводились к получению из основного уравнения некоторых других, либо таких, которые легче решать, либо дающих непосредственно нужные для приложений величины.

Важная роль функций $X(p, \tau_0)$ и $Y(p, \tau_0)$ в теории переноса излучения объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, тем, что они входят в выражения для интенсивности выходящего из плоского слоя излучения в случаях, когда мощность первичных источников представляет комбинацию многочленов и экспонент от τ. В частности, к таким случаям относятся задачи об отражении и пропускании излучения и с равномерным распределением источников. Аналогичную роль играет H-функция для полубесконечной среды. Именно поэтому астрофизики стремились получить определяющие эти функции уравнения и их решения.

Во-вторых, как уже говорилось, невозможно получить точные решения всех приведенных уравнений в явном виде. Однако если найти X- и Y-функции, а следовательно, и функции N и M численно, то резольвентная функция $\Phi(\tau, \tau_0)$ через них и резольвенту бесконечной среды выражается точно:

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi_\infty(\tau) - \int\limits_0^\infty [\Phi_\infty(\tau+\tau')N(\tau', \tau_0) - \Phi_\infty(\tau_0+\tau')M(\tau', \tau_0)]\mathrm{d}\tau', \tag{142}$$

что было показано В. В. Ивановым эвристически [31]. Формальный вывод (142) основывается на рассуждениях, близких к проведенным при получении формул (140) и (141), но примененным к бесконечной среде.

Глава 4. Рассеяние в спектральной линии

Теория рассеяния излучения в спектральной линии — одна из важных глав теоретической астрофизики [77]. Она развивалась, начиная с двадцатых годов нашего столетия. Сначала рассматривалось образование фраунгоферовых линий поглощения без рассеяния. Согласно модели атмосферы звезды Шварцшильда—Шустера над фотосферой, где формируется непрерывный спектр, располагается слой, содержащий поглощающие в линиях атомы. При этом в центре линии поглощение наибольшее и убывает согласно профилю поглощения. Такая модель давала возможность качественно объяснить величины эквивалентных ширин линий. Однако профили линий этой теорией не воспроизводились. Необходимо было учесть рассеяние.

Долгое время принималось предположение о неизменности частоты при рассеянии. Модель Эддингтона, согласно которой континуум и линии образуются в атмосфере звезды одновременно, давала более реалистичные профили. Однако оставалась проблема центральных интенсивностей. Для разрешения этой проблемы в сороковых годах было предложено новое приближение — полное перераспределение по частоте. Оно долгое время оставалось единственным доступным для расчетов. Более точные законы перераспределения по частоте оказалось возможным применить только после появления быстродействующих вычислительных машин.

В этой главе излагаются основы аналитической теории образования спектральных линий. После изложения сведений о профилях поглощения выводятся законы перераспределения излучения по частоте при рассеянии. В остальной части главы изучается случай полного перераспределению по частоте. Рассмотрены те же плоские среды, что и при монохроматическом рассеянии: бесконечная и полубесконечная среды, а также конечный слой. Некоторые сведения о многократном рассеянии при более сложных законах перераспределения будут даны в следующей главе.

§ 4.1. Поглощение в спектральной линии

1. Описание профилей поглощения. Рассмотрим некоторую линию атомов определенного сорта. Все величины, относящиеся к верхнему уровню этой линии, будем отмечать индексом u, а к нижнему — индексом l.

Представим коэффициент поглощения в рассматриваемой линии в виде

$$\alpha_\nu^{\mathrm{L}} = n_{\mathrm{l}} k_\nu, \tag{1}$$

где n_{l} — концентрация поглощающих атомов на нижнем уровне линии, а k_ν — коэффициент поглощения, рассчитанный на один поглощающий атом. Он имеет размерность площади и часто называется сечением рассеяния. Этот коэффициент тоже разбиваем на два сомножителя:

$$k_\nu = k_{\nu_0} \alpha(x), \tag{2}$$

где x — безразмерное расстояние от центра линии, измеряемое в некоторых единицах частоты (ширинах) Δ:

$$x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta}, \tag{3}$$

а $\alpha(x)$ — так называемый *профиль поглощения*. Очевидно, что

$$\alpha(0) = 1. \tag{4}$$

Встречающиеся на практике функции $\alpha(x)$ всегда четные. Поэтому впредь мы будем рассматривать только четные по аргументу x профили.

Наряду с таким профилем употребляется и другой, $\phi(x)$, интеграл от которого по всей линии приравнивается единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \mathrm{d}x = 1. \tag{5}$$

Два этих профиля связаны константой

$$\phi(x) = A\alpha(x), \tag{6}$$

где постоянная нормировки определяется из условия (5):

$$A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{7}$$

Профиль $\phi(x)$ имеет смысл плотности вероятности поглощения фотона определенной частоты в пределах линии.

Наконец, мы будем использовать еще одно обозначение для профиля в размерных частотах $w(\xi)$, $\xi = \Delta\, x$, нормированного аналогично $\phi(x)$ и тоже имеющего вероятностный смысл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(\xi)\mathrm{d}\xi = 1,\ w(\xi) = \frac{1}{\Delta}\phi(\xi/\Delta). \tag{8}$$

Когда рассматривается одна линия, достаточно применять безразмерную частоту. Но при наличии двух линий или двух механизмов расширения приходится использовать обозначение $w(\xi)$.

2. Основные виды профилей. Простейшими и наиболее употребительными профилями поглощения являются следующие.

1) ***Бесконечно узкий профиль.*** Если считается, что линия не расширена никаким механизмом, т. е. оба ее уровня бесконечно тонкие, то ее ширина равна нулю, а профиль δ-образный. Нормировать профиль в таком случае его значением в центре нельзя, поэтому введение профиля α невозможно.

2) ***Лоренцевский профиль.*** Этот профиль получается при действии различных механизмов расширения линий, например, при естественном затухании излучения и при дисперсии на атомах с учетом столкновений. Профиль называется также *дисперсионным.* Частота измеряется в естественных Δ_{E} или дисперсионных Δ_{c} ширинах. Общее их обозначение Δ_{L}.

3) ***Доплеровский профиль.*** Он возникает вследствие теплового движения атомов и является отражением максвелловского их распределения по скоростям. Доплеровская ширина

$$\Delta_{\mathrm{D}} = \frac{\nu_0}{c}\overline{v}, \tag{9}$$

где $\overline{v}$ — средняя (тепловая) скорость движения атомов.

4) ***Фойгтовский профиль.*** Этот профиль пропорционален функции Фойгта, которая есть свертка лоренцевского и доплеровского профилей типа ϕ:

$$U(a,x) = \frac{a}{\pi^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(x-y)^2 + a^2}. \tag{10}$$

Для функции Фойгта можно вывести другое представление:

$$U(a,x) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\cos((x-y)t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\mathrm{d}t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos((x-y)t)e^{-y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-at-t^2/4}\cos(xt)\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Из него следует, что $U(a,0)$ выражается через функцию ошибок:

$$U(a,0) = \frac{2}{\pi}e^{a^2}\int\limits_{a}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y. \tag{12}$$

Предельными случаями функции Фойгта являются свертываемые профили. Действительно, при $a = 0$ получается доплеровский профиль $U(0,x) = \pi^{-1/2}e^{-x^2}$, так как

$$\lim_{a\to+0} \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2+a^2} = \delta(x). \tag{13}$$

В противоположном случае, когда $a \to \infty$, в лоренцевский профиль обращается произведение

$$aU(a,ax) \to \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1},\ \text{ибо}\ \lim_{a\to\infty}\frac{a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2y^2} = \delta(y). \tag{14}$$

Умножение функции и ее аргумента на a потребовалось потому, что при лоренцевском расширении линии частота измеряется не в доплеровских, а в лоренцевских ширинах.

Сведения об этих четырех профилях приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2. Основные виды профилей поглощения.

Вид профиля	Тип профиля		
	$\alpha(x)$	$\phi(x)$	$w(\xi)$
δ-образный	—	$\delta(x)$	$\delta(\xi)$
Лоренцевский	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{\pi}\ \dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{\Delta_{\rm L}}{\pi}\ \dfrac{1}{\Delta_{\rm L}^2+\xi^2}$
Доплеровский	e^{-x^2}	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	$\dfrac{1}{\Delta_{\rm D}\sqrt{\pi}}\ e^{-\xi^2/\Delta_{\rm D}^2}$
Фойгтовский	$\dfrac{U(a,x)}{U(a,0)}$	$U(a,x)$ $a=\Delta_{\rm L}/\Delta_{\rm D}$	$\dfrac{1}{\Delta_{\rm D}}\ U\left(\dfrac{\Delta_{\rm L}}{\Delta_{\rm D}},\dfrac{\xi}{\Delta_{\rm D}}\right)$

Наиболее полную сводку различных представлений функции Фойгта через интегралы и ряды содержит обзор [84].

3. Другие виды профилей. Кроме четырех простейших профилей различными механизмами расширения линий порождаются более сложные, о которых мы дадим только понятие (подробнее о них см. работы [45,77]).

1) *Профили, формирующиеся вследствие эффектов давления.* Под воздействием окружающих частиц энергетические уровни атомов смещаются и расширяются, что ведет к расширению линий. Смещения уровней $\Delta\nu$ зависят от расстояния, на котором находится возмущающая частица. Зависимость эта определяется силой взаимодействия между атомом и внешней частицей и на достаточно больших расстояниях r между ними носит степенной характер:

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{r^s}. \tag{15}$$

Значения показателя s могут быть следующими.

а) $s=2$. Такое значение имеет показатель при линейном эффекте Штарка, который наблюдается, например, у атома водорода под действием заряженных частиц. Влияние электронов и ионов различно. Ионы имеют большую массу, и их скорости гораздо меньше, чем у электронов. Поэтому их считают неподвижными и рассматривают приближение иона к атому как случайное событие. Теория такого статистического эффекта Штарка была развита Дж. Хольцмарком, а затем усовершенствована С. Чандрасекаром и др. Электроны движутся быстро, и их воздействие учитывается в приближении, которое называется ударным. Совместное действие статистического и ударного механизмов описано в книгах [7,21], где имеются таблицы значений образующихся профилей.

б) $s=3$. Это значение получается при резонансном расширении, которое происходит под воздействием на атомы таких же атомов.

в) $s=4$. Это значение отражает квадратичный эффект Штарка, когда заряженные частицы воздействуют на неводородоподобный атом.

г) $s=6$. Этот показатель отвечает случаю, когда сталкиваются нейтральные атомы или молекулы. Сила взаимодействия между ними убывает очень быстро.

2) *Профили молекулярных полос.* В молекулярных полосах содержатся тысячи линий, которые перекрываются. У края полосы происходит обрыв ее, так что вне полосы поглощение отсутствует. Имеются различные модели поглощения в полосах молекул. Многие из них описывают поглощение функциями, обращающимися в нуль на конечном расстоянии от центра полосы. Данный случай существенно отличается от случая спектров атомов, когда принимается, что линия имеет бесконечно протяженные крылья (об этом подробнее будет сказанго в главе 5).

3) *Чисто модельные профили.* Теоретически можно рассматривать очень разные профили, в том числе обращающиеся в отдельных точках в бесконечность. Единственным обязательным требованием к профилю является существование от него интеграла по всем частотам. В теории переноса в разное время рассматривались профили следующих видов:

а) прямоугольный профиль:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x|\le 1, \\ 0 & \text{при} \quad |x|>1; \end{cases} \tag{16}$$

б) степенные профили с бесконечными крыльями $\alpha(x)=\dfrac{1}{1+|x|^{æ}}$ или $\alpha(x)=\dfrac{1}{(1+|x|)^{æ}}$;

в) степенной профиль конечной протяженности $\alpha(x)=(1-|x|/x_0)^{æ_1},\ |x|\le x_0>0,\ æ_1>-1$.

4. Наложение механизмов расширения. Возможно несколько схем, когда разные причины расширения действуют совместно. Рассмотрим их по очереди.

1) *Расширение субординатной линии.* Строго говоря, лоренцевский профиль выведен для классического осциллятора, затухание которого происходит из-за его излучения и тем самым потери энергии. В квантовой механике и квантовой электродинамике показывается, что форма профиля получается в классической теории правильной, а ширина определяется коэффициентом спонтанного перехода. При этом в обоих случаях нижний уровень считается бесконечно узким. Для вывода профиля субординатных линий небходимо провести дополнительное рассуждение.

Пусть фотон частотой $\nu = \nu_0 + \xi$, близкой к частоте центра линии $\nu_0 = \nu_\mathrm{u} - \nu_\mathrm{l}$, падает на атом. Вероятность, что нижний уровень при этом будет находиться в положении со смещением $\xi' = \nu' - \nu_\mathrm{l}$ от своего несмещенного состояния ν_l, равна $w_\mathrm{l}(\xi')$. Атом, поглотив фотон, будет возбужден и перейдет на верхний уровень. Вероятность, что и этот, верхний уровень попадет в состояние со смещенной энергией $\nu'' = \nu_\mathrm{u} + \xi''$, равна $w_\mathrm{u}(\xi'')$. Поскольку уровни расположены на расстояниях по частоте, значительно больших указанных смещений, можно считать, что процессы попадания на определенные частоты нижнего и верхнего уровней независимы, так что вероятность совместного события есть просто произведение выписанных вероятностей. Ясно также, что должен выполняться закон сохранения энергии, т. е. $\nu'' - \nu' = \nu$ или $\nu_\mathrm{u} + \xi'' - (\nu_\mathrm{l} + \xi') = \nu_0 + \xi$. Таким образом, $\xi'' = \xi' + \xi$. Так как смещение ξ' может быть произвольно, для получения полной вероятности поглощения фотона с частотой ν надо проинтегрировать по всем ξ'. В результате получится профиль поглощения в субординатной линии:

$$w(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_\mathrm{u}(\xi' + \xi) w_\mathrm{l}(\xi') \mathrm{d}\xi'. \tag{17}$$

Так как профили четные, то эту формулу можно записать в виде свертки

$$w(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_\mathrm{u}(\xi - \xi') w_\mathrm{l}(\xi') \mathrm{d}\xi'. \tag{18}$$

Свертка профиля затухания с дисперсионным профилем получается при совместном действии двух механизмов расширения линии.

2) *Влияние теплового движения атомов.* Профили коэффициентов поглощения средствами электродинамики (классической или квантовой) рассчитываются в системе отсчета, связанной с атомом. Будем называть такую систему атомной и отмечать профили в этой системе, когда необходимо, индексом а.

В реальных условиях на луче зрения находится много атомов. Поэтому надо учесть их совместное действие. Согласно максвелловскому распределению по скоростям вероятность фотону встретить атом с проекцией скорости на луч зрения от u до $u + \mathrm{d}u$ равна $\exp(-u^2/\overline{v}^2)\mathrm{d}u/(\sqrt{\pi}\overline{v})$. Из-за своего движения атом будет поглощать фотоны в линии не с центральной частотой ν_0, а со смещенной на $\nu_0 u/c$. Поэтому результирующий профиль поглощения описывается формулой

$$w(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_a(\xi + \nu_0 u/c) e^{-u^2/\overline{v}^2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\pi}\overline{v}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_\mathrm{a}(\xi - \xi') w_D(\xi') \mathrm{d}\xi', \tag{19}$$

где при переходе в последнем равенстве сделана замена переменной интегрирования $u = -c\xi'/\nu_0$. Получилась опять свертка профилей, на этот раз один из них доплеровский.

3) *Сложение двух типов движения.* Часто атомы участвуют в движениях двух типов, например в обычном, тепловом и микротурбулентном. Микротурбулентность — это хаотическое движение так называемых турбулентных элементов, размер которых макроскопический, но значительно меньший размеров области, в которой существенно изменяется поле излучения. Если оба движения описываются распределениями Максвелла по скоростям, то повторяя почти дословно приведенное выше рассуждение, обнаружим, что результирующий профиль будет сверткой двух доплеровских.

5. Нахождение сверток. В этом пункте покажем, к чему приводит вычисление сверток простейших профилей поглощения. Рассмотрим несколько случаев. Сразу же отметим, что свертка любого профиля с δ-образным не изменяет исходного профиля.

1) *Свертка двух лоренцевских профилей.* Интеграл (17) в этом случае вычисляется при помощи теории вычетов [29]. Если для краткости ширины профилей обозначить a и b, он принимает вид

$$\frac{ab}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2 + a^2} \frac{\mathrm{d}y}{(y - \xi)^2 + b^2} = \frac{ab}{\pi^2} 2\pi i \left[\frac{1/(2ia)}{(\xi - ia)^2 + b^2} + \frac{1/(2ib)}{(\xi + ib)^2 + a^2}\right] = \frac{a + b}{\pi} \frac{1}{\xi^2 + (a + b)^2}. \tag{20}$$

Таким образом, свертка двух лоренцевских профилей, есть опять лоренцевский профиль с шириной, равной сумме ширин свертываемых.

2) ***Свертка двух доплеровских профилей.*** Эта свертка находится значительно проще:

$$\frac{1}{ab\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/a^2-(\xi-y)^2/b^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{ab\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\biggl(-\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\left[y-\frac{a^2}{a^2+b^2}\xi\right]^2-\frac{\xi^2}{b^2}+\frac{\xi^2a^2}{b^2(a^2+b^2)}\biggr)\mathrm{d}y=\frac{e^{-\xi^2/(a^2+b^2)}}{\sqrt{\pi(a^2+b^2)}}. \qquad (21)$$

Свертка двух доплеровских профилей дает доплеровский же профиль с шириной, равной квадратному корню из суммы квадратов ширин свертываемых профилей. Таким образом, здесь складываются энергии.

3) ***Свертка лоренцевского и доплеровского профилей.*** Она приводит к фойгтовскому профилю:

$$\frac{\Delta_{\mathrm{L}}}{\pi^{3/2}\Delta_{\mathrm{D}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\xi-\xi')^2+\Delta_{\mathrm{L}}^2}\exp(-(\xi')^2/\Delta_{\mathrm{D}}^2)\mathrm{d}\xi'=\frac{\Delta_{\mathrm{L}}}{\pi^{3/2}\Delta_{\mathrm{D}}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\xi/\Delta_{\mathrm{D}}-y)^2+\Delta_{\mathrm{L}}^2/\Delta_{\mathrm{D}}^2}\exp(-y^2)\mathrm{d}y. \qquad (22)$$

Это выражение совпадает с приводимым в табл. 2 для $w_{\mathrm{V}}(\xi)$.

4) ***Свертка двух фойгтовских профилей.*** При ее вычислении получается снова фойгтовский профиль. Такое утверждение основывается на равенстве

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}U(a_1,b_1y)U(a_2,b_2(x-y))\mathrm{d}y=\frac{1}{b_{12}}U\left(\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_{12}},\frac{b_1b_2}{b_{12}}x\right), \qquad (23)$$

где $b_{12}=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$. Доказательство этого тождества довольно сложно, и мы его только наметим. Если интеграл (11) подставить в свертку в левой части (23), заменить произведение косинусов на их сумму и вычислить интегралы от получающихся косинусов при помощи формулы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos xt\mathrm{d}t=2\pi\delta(x), \qquad (24)$$

то получится соотношение (23).

§ 4.2. Перераспределение по частоте в спектральной линии

1. Рассеяние и перераспределение по частоте. Рассеяние можно рассматривать как результат одного из двух событий. Атом может поглотить фотон в линии, а затем, через некоторое, хотя и небольшое время переизлучить его в той же линии. При этом при поглощении и излучении выполняется закон сохранения энергии. Но возможен единый процесс рассеяния, не разделимый на поглощение и излучение. Тогда возможны виртуальные переходы атома в любое связанное состояние с сохранением энергии лишь после окончания процесса.

Оба события описываются в квантовой механике и различаются принятием того или иного начального и конечного (а во втором случае и промежуточных) состояний. В этом курсе мы не будем различать два указанных процесса, рассматривая их оба как рассеяние.

При рассеянии переизлучается фотон не обязательно с той же частотой и направлением, какие имел поглощенный фотон. Происходит перераспределение фотонов по частотам и направлениям. В теории получено несколько модельных законов перераспределения, некоторые из которых мы здесь рассмотрим. Но сначала определим, какие факторы влияют на перераспределение.

Само расширение атомных уровней приводит к тому, что излучается фотон не со строго определенной частотой, а с некоторым распределением вероятностей получить ту или иную частоту. Размывание распределения вероятности происходит и за счет теплового движения атомов, так как фотон излучается не в том же направлении, из которого он был поглощен. Еще один фактор, влияющий на размывание распределения частоты излучаемых фотонов, — столкновения с другими частицами.

Рассеяние происходит не мгновенно. За время этого процесса ситуация вокруг атома может радикально измениться. Действительно, среднее время жизни атома в возбужденном состоянии при разрешенных переходах из этого состояния в состояния с меньшей энергией имеет порядок 10^{-8}–10^{-7} с. Даже в земных условиях средняя тепловая скорость молекул порядка 0.5 км/с. При самой низкой звездной температуре 2000 K средняя тепловая скорость атомов водорода достигает 8 км/с, так что за время рассеяния атом водорода проходит расстояние порядка $10^{-3}\div10^{-2}$ см, что намного превосходит как атомные размеры (порядка 10^{-8} см), так и межатомные расстояния ($10^{-5} \div 10^{-4}$ см). Еще быстрее движутся электроны. Таким образом, за время рассеяния происходит много столкновений. Каждое столкновение влияет на атом, вызывая смещение его уровней. В результате атом в той или иной степени “забывает”, какой частоты фотон был им поглощен.

Формулировка законов перераспределения зависит от того, в какой системе рассматривается рассеяние. Самые простые законы получаются в системе, связанной с поглощающим и излучающим атомом. После их формулировки следует перейти в систему, связанную с атомным газом как целым, т. е. сопутствующую, и усреднить по распределению атомных скоростей. Наконец, если газ участвует в макроскопическом движении, то необходимо перейти в систему отсчета наблюдателя.

Сначала рассмотрим, что происходит в системе координат, связанной с атомом. В этом параграфе в качестве частотной переменной в основном используем величину ξ. Окончательные выражения для функций перераспределения представим через частоту x.

2. Система атома. При рассеянии фотон изменяет свой импульс. Новые направление и частоту он получает с некоторым распределением вероятностей. Этот процесс называется перераспределением по направлениям и частоте.

Перераспределение по направлениям характеризуется некоторой индикатрисой рассеяния, зависящей от угла рассеяния, косинус которого $\mu = \boldsymbol{\omega\omega}_1$, а $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}$ — единичные векторы направлений падающего и рассеянного фотонов. Зависимость от косинуса угла рассеяния, а не от каждого направления в отдельности осуществляется в локально изотропных средах, где нет выделенных направлений. Вид индикатрисы зависит от величины момента (орбитального и спинового) верхнего и нижнего уровней. Наиболее употребительны индикатрисы сферическая (изотропное рассеяние) и рэлеевская. Мы примем, что рассеяние изотропно.

Две функции определяют перераспределение по частоте в системе атома: профиль коэффициента поглощения $w_{\mathrm{a}}(\xi)$ и новая величина $p_{\mathrm{a}}(\xi, \xi_1)$ — вероятность того, что фотон, поглощенный с частотой ξ_1, переизлучится в частоте ξ (при условии переизлучения, вероятность которого обычно обозначается λ и называется вероятностью выживания фотона). Тогда вероятность полного процесса рассеяния, т. е. совмещения поглощения и переизлучения, равна произведению этих функций, так как и профиль w_{a} имеет смысл вероятности (на самом деле обе функции — плотности вероятностей). Условная вероятность переизлучения нормирована по первому аргументу — частоте переизлучения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{a}}(\xi, \xi_1)\mathrm{d}\xi = 1. \tag{25}$$

Ясно, что интеграл от произведения $w_{\mathrm{a}}(\xi_1)p_{\mathrm{a}}(\xi, \xi_1)$ по ξ равен функции $w_{\mathrm{a}}(\xi_1)$.

Рассматриваются следующие основные случаи перераспределения по частотам в системе атома.

I. ***Оба уровня бесконечно тонкие.*** Это сильная идеализация, поскольку нулевые ширины уровней означают невозможность перехода между ними (вероятность равна нулю). Однако такой случай рассматривается как простейший модельный.

Очевидно, что при нулевых ширинах профиль поглощения $w_{\mathrm{a}}(\xi_1) = \delta(\xi_1)$, а рассеяние может быть только монохроматическим, так что вероятность переизлучения фотона в линии с частотой ξ равна $p_{\mathrm{a}}(\xi, \xi_1) = \delta(\xi - \xi_1)$. Полная вероятность рассеяния с изменением частоты $\xi_1 \to (\xi, \xi + \mathrm{d}\xi)$ есть $\delta(\xi - \xi_1)\delta(\xi_1)\mathrm{d}\xi = \delta(\xi)\delta(\xi_1)\mathrm{d}\xi$.

II. ***Бесконечно тонкий нижний уровень, естественное затухание и монохроматическое рассеяние.*** Профиль поглощения в таком случае лоренцевский. Возврат атома происходит в то же состояние, откуда он был выведен, так что излучается фотон с той же частотой, какую он имел до рассеяния. Никаких внешних воздействий на атом не оказывается. Итак, в этом случае $w_{\mathrm{a}}(\xi_1) = w_{\mathrm{L}}(\xi_1)$, а $p_{\mathrm{a}}(\xi, \xi_1) = \delta(\xi - \xi_1)$.

III. ***Полное перераспределение.*** Если, напротив, воздействие внешних частиц является определяющим, то атом полностью “забывает” частоту поглощенного фотона и излучает пропорционально профилю поглощения от частоты излучаемого фотона. Тогда и поглощение и излучение имеют одинаковые профили, и полная вероятность рассеяния $\xi_1 \to \xi$ равна произведению одинаковых функций от аргументов ξ_1 и ξ. Будем считать их лоренцевскими.

Рассматривались и другие, более сложные случаи, однако в курсе на этом не останавливаемся.

3. Усреднение по скоростям атомов. Поглощающие и излучающие атомы движутся. Движение атомов воздействует не только на поглощение, но и на процесс излучения.

Поправки за счет движения атомов пропорциональны $\overline{v}/c$, где $\overline{v}$ — тепловая скорость атомов. Скорости атомов не могут быть релятивистскими, так как при релятивистских температурах и релятивистских скоростях электронов все атомы будут ионизованы. Таким образом, поправки малы.

Движение атомов вызывает два эффекта. Один из них — аберрация, т. е. изменение направления движения фотона при переходе из системы атома в сопутствующую газу. Так как при рассеянии излучения атомами индикатрисы рассеяния гладкие, этот эффект незначителен, и им обычно пренебрегают.

Другой эффект — доплеровское смещение частоты фотона — имеет порядок доплеровской ширины линии и тоже мал по сравнению с центральной частотой. Доплеровские сдвиги по длине волны линий имеют порядок $\overline{v}/\nu_0$. При средних скоростях атомов порядка км/с (до десятков) в видимом участке спектра ($\nu_0 = 5\cdot 10^{14} \div 10^{15}$ 1/с) эти сдвиги составляют $\sim 10^{-9}$ см (десятые доли ангстрем). Однако доплеровский профиль очень быстро убывает с удалением от центра линии. Смещение в пределах линии на несколько доплеровских ширин приводит к изменению коэффициента поглощения на несколько порядков. Действительно, функция e^{-x^2} при $x = 2$ равна 0.02, а при $x = 3$ уже 0.0001. Такой же порядок изменения может быть и у функции перераспределения.

Таким образом, обычно считается, что индикатриса рассеяния не изменяется при усреднении по распределению атомов по скоростям. Перераспределение же по частоте сильно зависит от движения атомов. Кроме того, перераспределение по частоте может дать дополнительную зависимость от направления.

Получим сначала общие формулы для усредненной по скоростям функции перераспределения (ФП). Распределение по скоростям считаем по-прежнему максвелловским. Скорости атомов характеризуем безразмерным вектором $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\overline{v}$. Используем профили поглощения w с размерными смещениями от центра линии ξ.

Если направления падающего и рассеянного фотонов характеризовать соответственно единичными векторами $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}$, то при скорости атома $\mathbf{u}$ смещения частот указанных фотонов при переходе в систему отсчета атома будут $\Delta_{\mathrm{D}}\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}_1$ и $\Delta_{\mathrm{D}}\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}$. Вероятность поглощения фотона с частотой ξ_1 составит тогда $w_{\mathrm{a}}(\xi_1 - \Delta_{\mathrm{D}}\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}_1)$, а вероятность переизлучения при частоте ξ в соответствии с нашими обозначениями будет $p_{\mathrm{a}}(\xi - \Delta_{\mathrm{D}}\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}, \xi_1 - \Delta_{\mathrm{D}}\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}_1)$.

Вероятность всего процесса при фиксированной скорости атома равна произведению написанных функций, а результирующая ФП в переменных x_1 и x имеет вид

$$R(x, x_1, \mu) = \frac{\Delta_{\mathrm{D}}^2}{\pi^{3/2}} \int \mathrm{d}^3 u e^{-u^2} w_{\mathrm{a}}(\xi_1 - \Delta_{\mathrm{D}}\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}_1) p_{\mathrm{a}}(\xi - \Delta_{\mathrm{D}}\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}, \xi_1 - \Delta_{\mathrm{D}}\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}_1). \tag{26}$$

Множитель Δ_{D}^2 в (26) возник из-за того, что ФП нормирована интегралами по частотам x и x_1, а стоящие под интегралом функции — по ξ и ξ_1. Нормировка по x при сферической индикатрисе означает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x, x_1, \mu)\mathrm{d}x = \phi(x_1), \tag{27}$$

где $\phi(x_1)$ — коэффициент поглощения в сопутствующей системе отсчета. Интеграл от него по x_1, как мы знаем, равен 1.

В разных случаях оказываются удобны различные схемы интегрирования в (26). Приведем здесь две такие схемы.

а) Введем ортогональный базис, взяв за орт аппликат единичный вектор, перпендикулярный двум векторам направлений фотонов, а орт абсцисс направив по биссектрисе угла между ними, т. е.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_1}{\sqrt{2(1+\mu)}},\ \mathbf{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1}{\sqrt{2(1-\mu)}},\ \mathbf{e}_3 = \frac{\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-\mu^2}}. \tag{28}$$

Здесь, как и ранее, $\mu = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_1$.

Разложим по ортам выбранного базиса скорость атома:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3. \tag{29}$$

Тогда

$$\mathbf{u}\boldsymbol{\omega} = b_+ u_1 + b_- u_2,\ \mathbf{u}\boldsymbol{\omega}_1 = b_+ u_1 - b_- u_2,\ b_\pm = \sqrt{\frac{1\pm\mu}{2}}. \tag{30}$$

Если подставить эти скалярные произведения в (26), то окажется, что в подынтегральном выражении множитель при экспоненте не зависит от переменной u_3, по которой интеграл можно взять. Итак,

$$R(x, x_1, \mu) = \frac{\Delta_{\mathrm{D}}^2}{\pi} \int \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 e^{-u_1^2 - u_2^2} w_{\mathrm{a}}(\xi_1 - \Delta_{\mathrm{D}}(b_+ u_1 - b_- u_2)) p_{\mathrm{a}}(\xi - \Delta_{\mathrm{D}}(b_+ u_1 + b_- u_2), \xi_1 - \Delta_{\mathrm{D}}(b_+ u_1 + b_- u_2)). \tag{31}$$

В одних случаях полезна выведенная формула, в других лучше подходит другая.

б) Для второй формулы выбирается другой базис:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\omega} - \mu\boldsymbol{\omega}_1}{\sqrt{1-\mu^2}},\ \mathbf{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-\mu^2}},\ \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\omega}_1. \tag{32}$$

Тогда при том же представлении (29)

$$\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}_1 = u_3,\ \mathbf{u}\boldsymbol{\omega} = \mu u_3 + \sqrt{1-\mu^2} u_1. \tag{33}$$

Здесь берется интеграл по u_2, и формула (26) (после замены u_3 на u) преобразуется в

$$R(x,x_1,\mu)=\frac{\Delta_{\mathrm{D}}^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}ue^{-u^2}w_{\mathrm{a}}(\xi_1-\Delta_{\mathrm{D}}u)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u_1e^{-u_1^2}p_{\mathrm{a}}(\xi-\Delta_{\mathrm{D}}(\mu u+\sqrt{1-\mu^2}u_1),\xi_1-\Delta_{\mathrm{D}}u). \tag{34}$$

Формулы (31) и (34) пригодны в принципе для любых функций w_{a} и p_{a}. Но в двух из трех случаев перераспределения, рассмотренных в предыдущем пункте, функция $p_{\mathrm{a}}(\xi,\xi_1)=\delta(\xi-\xi_1)$. Поэтому подставим эту функцию в (31):

$$R(x,x_1,\mu)=\tfrac{\Delta_{\mathrm{D}}^2}{\pi}\int\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2e^{-u_1^2-u_2^2}w_{\mathrm{a}}(\xi_1-\Delta_{\mathrm{D}}(b_+u_1-b_-u_2))\delta(\xi-\xi_1-2\Delta_{\mathrm{D}}b_-u_2)=$$
$$=\frac{\Delta_{\mathrm{D}}^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u_1e^{-u_1^2}}{2\Delta_{\mathrm{D}}b_-}e^{-(\xi-\xi_1)^2/4\Delta_{\mathrm{D}}^2b_-^2}w_{\mathrm{a}}\left(\frac{\xi+\xi_1}{2}-\Delta_{\mathrm{D}}b_+u_1\right)=\frac{\Delta_{\mathrm{D}}}{2b_-\pi}e^{-(x-x_1)^2/4b_-^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}ue^{-u^2}w_{\mathrm{a}}\left(\frac{\xi+\xi_1}{2}-\Delta_{\mathrm{D}}b_+u\right). \tag{35}$$

Теперь рассмотрим три конкретных случая перераспределения по частоте.

4. Перераспределение в сопутствующей системе. Сохраним тот же порядок, что и в п. 2.

I. После подстановки в формулу (35) δ-функции вместо w_{a} получится выражение

$$R_{\mathrm{I}}(x,x_1,\mu)=\frac{\Delta_{\mathrm{D}}}{2\pi b_-}e^{-(x-x_1)^2/4b_-^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}ue^{-u^2}\delta\left(\frac{\xi+\xi_1}{2}-\Delta_{\mathrm{D}}b_+u\right)=\frac{e^{-(x-x_1)^2/4b_-^2-(x+x_1)^2/4b_+^2}}{2\pi b_-b_+}=\frac{e^{-(x^2+x_1^2-2xx_1\mu)/(1-\mu^2)}}{\pi\sqrt{1-\mu^2}}. \tag{36}$$

Этот закон дается элементарной функцией.

II. В данном случае выкладка несколько сложнее, так как в формулу (35) вместо w_{a} подставляется не δ-функция, а w_{L}:

$$R_{\mathrm{II}}(x,x_1,\mu)=\frac{\Delta_{\mathrm{D}}}{2b_-\pi}e^{-(x-x_1)^2/4b_-^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_{\mathrm{L}}}{\pi}\frac{e^{-u^2}\mathrm{d}u}{\Delta_{\mathrm{L}}^2+[(x+x_1)^2-b_+u]^2\Delta_{\mathrm{D}}^2}=$$
$$=\frac{1}{2\pi^2b_-b_+}\frac{\Delta_{\mathrm{L}}}{\Delta_{\mathrm{D}}}e^{-(x-x_1)^2/4b_-^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-u^2}\mathrm{d}u}{\left(\dfrac{\Delta_{\mathrm{L}}}{\Delta_{\mathrm{D}}b_+}\right)^2+\left(\dfrac{x+x_1}{2b_+}-u\right)^2}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-\mu^2}}e^{-(x-x_1)^2/2(1-\mu)}U\left(\frac{a}{\sqrt{(1+\mu)/2}},\frac{x+x_1}{\sqrt{2(1+\mu)}}\right). \tag{37}$$

Закон (37) выражен не элементарной функцией, как в первом случае, а пропорционален функции Фойгта.

III. Здесь целесообразнее воспользоваться вторым вариантом общей формулы. Вместо w_{a} и p_{a} подставим w_{L} с разными аргументами и, заменив u_3 на u, получим

$$R_{\mathrm{III}}(x,x_1,\mu)=\frac{\Delta_{\mathrm{D}}^2}{\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}\frac{\Delta_{\mathrm{L}}\mathrm{d}u}{\Delta_{\mathrm{L}}^2+\Delta_{\mathrm{D}}^2(x_1-u)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-u_1^2}\frac{\Delta_{\mathrm{L}}\mathrm{d}u_1}{\Delta_{\mathrm{L}}^2+\Delta_{\mathrm{D}}^2(x-\mu u-\sqrt{1-\mu^2}u_1)^2}=$$
$$=\frac{a}{\pi^{3/2}\sqrt{1-\mu^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-u^2}\mathrm{d}u}{a^2+(x_1-u)^2}U\left(\frac{a}{\sqrt{1-\mu^2}},\frac{x-\mu u}{\sqrt{1-\mu^2}}\right). \tag{38}$$

В выражение для функции перераспределения (ФП) (38), как и в (37), входит функция Фойгта, но теперь под знаком интеграла.

Можно проверить, что соотношение (27) выполняется. При интегрировании по x закона перераспределения $R_{\mathrm{I}}(x,x_1,\mu)$ получается $\phi_{\mathrm{D}}(x_1)=\pi^{-1/2}e^{-x^2}$, а интегрирование $R_{\mathrm{II}}(x,x_1,\mu)$ и $R_{\mathrm{III}}(x,x_1,\mu)$ по x дает $\phi_{\mathrm{V}}(x_1)=U(a,x_1)$. Легко убедиться также, что функции $R_{\mathrm{II}}(x,x_1,\mu)$ и $R_{\mathrm{III}}(x,x_1,\mu)$ при $a\to 0$ обе стремятся к функции $R_{\mathrm{I}}(x,x_1,\mu)$.

Во всех рассмотренных случаях ФП, как оказалось, зависят не от самих векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_1$, а только от угла между ними — угла рассеяния, косинус которого μ. Это свойство является отражением изотропии совокупности атомов, скорости которых распределены по Максвеллу. Оно сохраняется при любом изотропном распределении скоростей атомов.

5. Усреднение по направлениям. Часто оказывается, что интенсивность излучения слабо зависит от направления. Тогда не важна и зависимость функции перераспределения от косинуса угла рассеяния. Поэтому наряду с уже приведенными были получены и усредненные по углам функции.

В литературе приводились результаты усреднения с двумя индикатрисами: сферической и рэлеевской. Соответствующие средние функции отмечались индексами A или B в дополнение к одному из индексов, которые писались у неусредненных функций. Поскольку мы рассматриваем только сферичесекую индикатрису, усредненные функции будем различать теми же индексами I, II или III, но без аргумента μ.

Усреднение по направлениям можно провести путем интегрирования по μ окончательных выражений для функций перераспределения $R(x, x_1, \mu)$. Однако на этом пути возникают довольно сложные интегралы. Поэтому будем исходить из первоначальной формулы (26) и интегрировать отдельно по направлениям каждого из фотонов, усредняя фактически в системе атома. Тогда зависимость от направления скорости атома $\mathbf{u}$ исчезает:

$$R(x,x_1)=\frac{\Delta_{\rm D}^2}{\pi^{3/2}}\int \mathrm{d}^3u e^{-u^2}\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\eta_1 w_{\rm a}(\xi_1-\Delta_{\rm D}u\eta_1)\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\eta p_{\rm a}(\xi-\Delta_{\rm D}u\eta,\xi_1-\Delta_{\rm D}u\eta_1)=$$

$$=\frac{\Delta_{\rm D}^2}{\pi^{1/2}}\int\limits_0^\infty u^2\mathrm{d}u e^{-u^2}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\eta_1 w_{\rm a}(\xi_1-\Delta_{\rm D}u\eta_1)\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\eta p_{\rm a}(\xi-\Delta_{\rm D}u\eta,\xi_1-\Delta_{\rm D}u\eta_1). \tag{39}$$

Здесь при переходе к последнему равенству взят интеграл по направлениям скорости атомов, что дает множитель 4π.

Опять сначала рассматриваем первые два случая, т. е. подставляем в формулу (39) $p_{\rm a}(\xi,\xi_1)=\delta(\xi-\xi_1)$. Тогда

$$R(x,x_1)=\frac{\Delta_{\rm D}^2}{\pi^{1/2}}\int\limits_0^\infty u^2\mathrm{d}u e^{-u^2}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\eta_1 w_{\rm a}(\xi_1-\Delta_{\rm D}u\eta_1)\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\eta\delta\Big(\xi-\xi_1-\Delta_{\rm D}u(\eta-\eta_1)\Big). \tag{40}$$

Чтобы интеграл по η не был равен нулю, аргумент δ-функции должен содержать внутри себя точку 0, тогда $\eta=\eta_1+(x-x_1)/u$ будет попадать в промежуток $[-1,1]$. При $x\geq x_1$ должно быть $-1-(x-x_1)/u\leq -1\leq \eta\leq 1-(x-x_1)/u$. Верхний предел неравенства будет больше нижнего при $u\geq(x-x_1)/2$. В противоположном случае условие $x\leq x_1$ требует выполнения неравенств $-1-(x-x_1)/u\leq\eta\leq 1\leq 1-(x-x_1)/u$ и $u\geq(x_1-x)/2$. В обоих случаях $u\geq|x-x_1|/2$, и интеграл в (40) можно переписать так:

$$R(x,x_1)=\frac{\Delta_{\rm D}}{\pi^{1/2}}\int\limits_{|x-x_1|/2}^\infty u e^{-u^2}\mathrm{d}u\int\limits_{\max(-1,-1-(x-x_1)/u)}^{\min(1,1-(x-x_1)/u)}\mathrm{d}\eta_1 w_{\rm a}(\xi_1-\Delta_{\rm D}u\eta_1)=\frac{1}{\pi^{1/2}}\int\limits_{|x-x_1|/2}^\infty \mathrm{d}u e^{-u^2}\int\limits_{x_{\rm M}-u}^{x_{\rm m}+u}\mathrm{d}\xi' w_{\rm a}(\xi'). \tag{41}$$

Здесь

$$x_{\rm m}=\min(|x|,|x_1|),\ \ x_{\rm M}=\max(|x|,|x_1|). \tag{42}$$

Теперь рассматриваем по очереди три случая п. 2.

I. Подставив в равенство (41) в качестве профиля поглощения в системе атома $w_{\rm a}(\xi)=\delta(\xi)$, найдем

$$R_{\rm I}(x,x_1)=\frac{1}{\pi^{1/2}}\int\limits_{|x-x_1|/2}^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u\int\limits_{x_{\rm M}-u}^{x_{\rm m}+u}\delta(x')\mathrm{d}x'=\frac{1}{\pi^{1/2}}\int\limits_{x_{\rm M}}^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u. \tag{43}$$

Интеграл в последней формуле фактически представляет собой функцию ошибок. Изменение предела интегрирования по u объясняется тем, что требование отличия от нуля интеграла от δ-функции, выражаемое неравенством $u\geq x_{\rm M}$, накладывает более сильное ограничение на значения u, чем нижний предел в интеграле по u вначале. У границ этих неравенств есть только одна общая точка, т. е. уравнение $|x-x_1|/2=x_{\rm M}$ имеет только одно решение, а именно $x=x_1$.

II. При подстановке лоренцевского профиля формула (41) превращается в формулу

$$R_{\rm II}(x,x_1)=\frac{1}{\pi^{1/2}}\int\limits_{|x-x_1|/2}^\infty \mathrm{d}u e^{-u^2}\int\limits_{x_{\rm M}-u}^{x_{\rm m}+u}\mathrm{d}x'\frac{\Delta_{\rm L}}{\pi}\frac{\mathrm{d}\xi'}{\Delta_{\rm L}^2+\xi'^2}=\frac{1}{\pi^{3/2}}\int\limits_{|x-x_1|/2}^\infty \mathrm{d}u e^{-u^2}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{x_{\rm m}+u}{a}-\mathrm{arctg}\,\frac{x_{\rm M}-u}{a}\right]. \tag{44}$$

Здесь предел интегрирования по u не изменяется, так как проинтегрированная функция непрерывна.

III. Наконец, в третьем случае удобнее всего исходить из формулы (26). Проведя те же выкладки, что и при выводе предыдущих усредненных законов, получим

$$R_{\mathrm{III}}(x,x_1)=\frac{\Delta_{\mathrm{D}}^2}{\pi^{1/2}}\int\limits_0^\infty u^2\mathrm{d}ue^{-u^2}\int\limits_{-1}^1\mathrm{d}\eta_1 w_{\mathrm{L}}(\xi_1-\Delta_{\mathrm{D}}u\eta_1)\int\limits_{-1}^1\mathrm{d}\eta w_{\mathrm{L}}(\xi-\Delta_{\mathrm{D}}u\eta)=$$

$$=\frac{1}{\pi^{5/2}}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}ue^{-u^2}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{x-u}{a}-\mathrm{arctg}\,\frac{x+u}{a}\right]\left[\mathrm{arctg}\,\frac{x_1-u}{a}-\mathrm{arctg}\,\frac{x_1+u}{a}\right]. \tag{45}$$

Усредненные функции также подчиняются условию нормировки вида (27).

Изложение в этом параграфе основано на статье Д. Хаммера [101] и книге Д. Михаласа [45]. В русском издании последней много опечаток. Обзор теории ЧПЧ, содержащий различные функции перераспределения и их свойства, дан в статье автора [55].

6. Полное перераспределение по частоте (ППЧ). До сороковых-пятидесятых годов XX века в астрофизике и физике в теории образования линий господствовала гипотеза о монохроматическом рассеянии. При принятии этой гипотезы в общем получались правильными интегральные характеристики линий, такие как полное излучение или эквивалентная ширина линии, но профили линий выходили не похожими на наблюдаемые. Было высказано предположение, что при рассеянии происходит перераспределение излучения по частоте.

Некоторые из приведенных выше функций были получены еще в тридцатые годы. Однако из-за того, что все вычисления тогда производились вручную, применение этих функций в то время было невозможно. Даже вычисление их самих требовало значительных затрат труда. Поэтому физики и астрофизики искали приближение, которое было бы достаточно точным и в то же время приводило бы к более простым формулам.

И такое приближение было найдено. Им оказалось приближение полного перераспределения по частоте (ППЧ). Его открыли примерно в одно время (сороковые годы) несколько исследователей. Упомянем работы В. В. Соболева, стремившегося правильно оценить роль лучевого давления в туманностях [67] и дать правильную интерпретацию профилей линий в спектрах звезд [69], Л. М. Бибермана [5], который объяснял наблюдавшиеся в физическом эксперименте профили линий, и Т. Холстейна [99], изучавшего закон высвечивания газов, возбуждаемых при электрическом разряде.

Предположение полного перераспределения по частоте означает, что не в системе атома, как в третьем случае, а в сопутствующей газу системе отсчета вероятность фотону приобрести определенную частоту при рассеянии в линии не зависит от частоты, которую он имел до рассеяния. Эта вероятность пропорциональна коэффициенту поглощения, так как других функций, характеризующих рассеяние в линии, при этом не возникает.

Таким образом, предположение о ППЧ заключается в том, что сложные законы перераспределения заменяются более простым, выражаемым формулой:

$$R(x,x_1,\mu)=R(x,x_1)=\phi(x)\phi(x_1). \tag{46}$$

Ясно, что ППЧ осуществляется тогда, когда значительную роль играют столкновения излучающего атома с окружающими частицами. Это наводящее соображение. Но были предприняты усилия и по формальному обоснованию применения предположения ППЧ.

Во-первых, было показано, что некоторые ФП просто близки к ФП ППЧ. Например, функции $R_{\mathrm{I}}(x,x_1,\mu)$ и $R_{\mathrm{III}}(x,x_1,\mu)$ согласно формулам (36) и (38) при $\mu=0$, т. е. при рассеянии под прямым углом, распадаются на произведения профилей коэффициентов поглощения. Поскольку под углами, близкими к прямому, рассеивается бо́льшая доля излучения, эти функции и вообще близки к ППЧ. Было показано, что в ходе рассеяний происходит итерация ФП, и итерированные ФП приближаются к закону ППЧ. Этот процесс аналогичен изотропизации излучения при многократном монохроматическом рассеянии, о которой говорилось в конце § 2.4. Наконец, были произведены пробные расчеты полей излучения с настоящими ФП и при ППЧ [70,98]. Во многих случаях результаты оказались близки. Наибольшие отличия от ППЧ демонстрирует ФП R_{II}, но и при ней вблизи ядра линии профили ППЧ не очень отличаются от более точных, а в целом ППЧ может служить хорошим первым приближением. К обсуждению этого вопроса мы еще вернемся в главе 5.

§ 4.3. Уравнение переноса излучения в спектральной линии

,

1. Постановка задачи и предположения. В этом параграфе составим уравнения, описывающие перенос излучения в спектральной линии.

В самом общем виде задача о переносе излучения в линиях ставится так. В некотором объеме находится газ (плазма), состоящий из различных атомов (ионов или молекул) и электронов. Атомы возбуждаются какими-либо механизмами: внешним излучением, столкновениями или в результате каскадных переходов после рекомбинации. Мощность этих источников, называемых первичными, должна быть рассчитана путем решения уравнений других теорий (построения модели атмосферы звезды или другого астрофизического объекта) или из изучения условий опыта в физической лаборатории и считается известной. Для определенности будем говорить об атмосфере. Излучаемые фотоны затем вновь поглощаются, переизлучаются (рассеиваются) в той же линии или дробятся на фотоны других линий, переходят в другие виды энергии и т. д. Требуется рассчитать создающееся в объеме поле излучения или, что то же самое, состояние возбуждения атомов.

Такая общая задача не допускает аналитического рассмотрения и может решаться численными методами. Перечислим основные предположения, налагаемые на рассматриваемый процесс при аналитическом подходе к его изучению.

1) *Изолированность линии.* Будем изучать образование одной линии определенного атома (или иона) с центральной частотой ν_0. Линия образуется при переходах между уровнями, нижний из которых будем называть для определенности основным, а верхний — возбужденным. Величины, относящиеся к нижнему уровню, будем отмечать индексом l, а к верхнему — u, например, концентрации атомов n_u и n_l, энергии уровней $h\nu_\mathrm{u}$ и $h\nu_\mathrm{l}$, $\nu_0 = \nu_\mathrm{u} - \nu_\mathrm{l}$.

2) *Двухуровенные атомы.* Рассматриваемые атомы имеют только два дискретных уровня с разностью энергий $h\nu_0$ и континуум.

3) *Полное перераспределение по частоте.* При рассеянии происходит полное перераспределение по частоте, индикатриса рассеяния — сферическая. В этом случае надо использовать функцию перераспределения, указанную в конце предыдущего параграфа. Однако здесь удобнее принять для нее нормировку на профиль $\alpha(x_1)$, а не $\phi(x_1)$, т.е.

$$R(x, x_1) = A\alpha(x)\alpha(x_1), \tag{47}$$

где A — постоянная нормировки профиля поглощения.

Некоторые другие предположения сформулируем после составления уравнения переноса.

2. Уравнение переноса излучения. Уравнение переноса для стационарного поля излучения в плоской изотропной среде, выведенное в главе 1, записывается в виде [31,70]

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}I_\nu(z, \boldsymbol{\omega}) = -\alpha_\nu I_\nu(z, \boldsymbol{\omega}) + \varepsilon_\nu, \tag{48}$$

где z — геометрическая глубина, μ — косинус угла между направлением распространения излучения и внутренней нормалью к границе атмосферы.

Укажем, какие замены входящих в общее уравнение (48) функций следует произвести, чтобы получилось уравнение переноса излучения в линии при сделанных предположениях.

Коэффициент поглощения состоит из двух частей, описывающих поглощение в линии и в континууме. Коэффициент поглощения в непрерывном спектре можно считать не зависящим от частоты в пределах линии, так как ширина спектральных линий обычно мала по сравнению с интервалом частот, на котором существенно изменяется интенсивность континуума, так что

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu^\mathrm{L} + \alpha_\mathrm{c} = n_\mathrm{l}k_\nu + \alpha_\mathrm{c}. \tag{49}$$

Коэффициент излучения состоит также из нескольких слагаемых. Слагаемое, описывающее излучение в непрерывном спектре, обозначим ε_c. Зависимость коэффициента излучения в линии от частоты та же, что и у коэффициента поглощения, но различие их в том, что первый пропорционален населенности не нижнего, как второй, а верхнего уровня. Кроме того, необходимо учесть вынужденное излучение. Все вместе запишем так:

$$\varepsilon_\nu = [\varepsilon_\mathrm{c} + k_\nu n_\mathrm{u} C]\left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3}I_\nu\right). \tag{50}$$

Теперь уравнение (48) примет вид

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}I_\nu(z, \boldsymbol{\omega}) = -[n_\mathrm{l}k_\nu + \alpha_\mathrm{c}]I_\nu(z, \boldsymbol{\omega}) + [\varepsilon_\mathrm{c} + k_\nu n_\mathrm{u} C]\left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3}I_\nu\right). \tag{51}$$

Для определения постоянной C и выяснения связи между отдельными слагаемыми уравнения переноса применим его к случаю, когда выполняется условие термодинамического равновесия. Тогда фактически линия не образуется, интенсивность не зависит ни координат, ни от направления и равна функции Планка $B_{\nu_0}(T)$, населенности уровней подчиняются формуле Больцмана и выполняется условие детального баланса, т. е. процессы в линии и в континууме уравновешены порознь:

$$\varepsilon_\mathrm{c}\left(1+\frac{c^2}{2h\nu_0^3}B_{\nu_0}(T)\right)=\alpha_\mathrm{c}B_{\nu_0}(T), \tag{52}$$

$$k_\nu n_\mathrm{u}C\left(1+\frac{c^2}{2h\nu_0^3}B_{\nu_0}(T)\right)=k_\nu n_\mathrm{l}B_{\nu_0}(T). \tag{53}$$

Подставляя в соотношение (52) выражение для функции Планка, для континуума получаем

$$\frac{\varepsilon_\mathrm{c}}{\overline{\alpha}_\mathrm{c}}=B_{\nu_0}(T),\quad \overline{\alpha}_\mathrm{c}=\alpha_\mathrm{c}\left(1-e^{-h\nu_0/k_\mathrm{B}T}\right). \tag{54}$$

Это соотношение называется формулой Кирхгофа—Планка. Чертой сверху отмечен коэффициент поглощения, исправленный за вынужденное излучение, которое играет роль отрицательного поглощения. Впредь используем именно его.

Аналогично из формулы (53) находим для линии

$$C=\frac{2h\nu_0^3}{c^2}\frac{n_\mathrm{l}}{n_\mathrm{u}}e^{-h\nu_0/k_\mathrm{B}T}=\frac{2h\nu_0^3}{c^2}\frac{g_\mathrm{l}}{g_\mathrm{u}}, \tag{55}$$

где g_l и g_u — статистические веса (числа подуровней) нижнего и верхнего уровней.

В результате уравнение (51) можно записать в виде

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}I_\nu(z,\boldsymbol{\omega})=-\left[k_\nu n_\mathrm{l}\left(1-\frac{g_\mathrm{l}}{g_\mathrm{u}}\frac{n_\mathrm{u}}{n_\mathrm{l}}\right)+\overline{\alpha}_\mathrm{c}\right]I_\nu(z,\boldsymbol{\omega})+\varepsilon_\mathrm{c}+\frac{2h\nu_0^3}{c^2}\frac{g_\mathrm{l}}{g_\mathrm{u}}k_\nu n_\mathrm{u}. \tag{56}$$

К уравнению переноса, как обычно, добавляются граничные условия, отражающие заданность интенсивностей падающего на границы извне излучения.

3. Преобразование уравнения переноса. Для упрощения уравнения (56) введем безразмерные переменные. Коэффициент поглощения в линии представим, как в § 4.1. Определим оптическую глубину в атмосфере, рассчитывая ее для центра линии:

$$\tau=\int\limits_0^z n_l k_{\nu_0}\left(1-\frac{g_\mathrm{l}}{g_\mathrm{u}}\frac{n_\mathrm{u}}{n_\mathrm{l}}\right)\mathrm{d}z. \tag{57}$$

Разделим уравнение на $n_\mathrm{l}k_{\nu_0}$. Тогда поглощение в континууме будет характеризоваться отношением

$$\frac{\overline{\alpha}_\mathrm{c}}{n_\mathrm{l}k_{\nu_0}\left(1-\dfrac{g_\mathrm{l}}{g_\mathrm{u}}\dfrac{n_\mathrm{u}}{n_\mathrm{l}}\right)}=\beta. \tag{58}$$

Введем еще две величины, S_L и S_c, которые называются *функциями источников* в линии и в континууме соответственно:

$$S_\mathrm{L}=\frac{2h\nu_0^3}{c^2}\frac{1}{\dfrac{g_\mathrm{u}}{g_\mathrm{l}}\dfrac{n_\mathrm{l}}{n_\mathrm{u}}-1},\quad S_\mathrm{c}=\frac{\varepsilon_\mathrm{c}}{k_{\nu_0}n_\mathrm{l}}\frac{1}{1-\dfrac{g_\mathrm{l}}{g_\mathrm{u}}\dfrac{n_\mathrm{u}}{n_\mathrm{l}}}. \tag{59}$$

После этого уравнение переноса примет вид

$$\mu\frac{\mathrm{d}I_\nu(z,\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}\tau}=-[\alpha(x)+\beta]I_\nu(z,\boldsymbol{\omega})+S_\mathrm{c}+\alpha(x)S_\mathrm{L}. \tag{60}$$

4. Уравнение стационарности возбужденного уровня. Это уравнение является аналогом уравнения баланса энергии и по существу совпадает с ним, но для линии при рассеянии с ППЧ оно имеет некоторые особенности в физическом истолковании.

При условии стационарности населенность возбужденного уровня не изменяется со временем, т. е. числа переходов, населяющих этот уровень и опустошающих его, в каждом месте среды должны быть равны. Для простоты будем считать, что ионизации и рекомбинации не играют большой роли. Существенными процессами считаем радиативные переходы в линии и электронные удары. Запишем условие стационарности [31]

$$n_\mathrm{u}(A_\mathrm{ul}+B_\mathrm{ul}\overline{J}_\mathrm{lu}+n_\mathrm{e}a_\mathrm{ul})=n_\mathrm{l}(B_\mathrm{lu}\overline{J}_\mathrm{lu}+n_\mathrm{e}b_\mathrm{lu}). \tag{61}$$

Здесь $A_{\rm ul}$, $B_{\rm ul}$ и $B_{\rm lu}$ — эйнштейновские коэффициенты спонтанного, вынужденного излучения и поглощения соответственно. Величина $\overline{J}_{\rm lu}$ есть средняя по линии интенсивность, т. е.

$$\overline{J}_{\rm lu}=\frac{A}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x){\rm d}x\int{\rm d}^2\omega I_\nu(z,\boldsymbol{\omega}). \tag{62}$$

Коэффициент $b_{\rm lu}$ учитывает переходы с нижнего уровня на верхний за счет возбуждающих ударов, а $a_{\rm ul}$ — столкновительные переходы с возбужденного уровня на нижний (так называемые тушащие удары, или удары второго рода), $n_{\rm e}$ — электронная концентрация.

Рассмотрим, какой вид принимает равенство (61), если выполняется термодинамическое равновесие. Подстановка в равенство (61) функции Планка вместо средней интенсивности и использование формулы Больцмана для отношения населенностей уровней с одной и той же температурой T приводит к двум соотношениям между эйнштейновскими коэффициентами:

$$\frac{c^2}{2h\nu_0^3}A_{\rm ul}=B_{\rm ul}=\frac{g_{\rm l}}{g_{\rm u}}B_{\rm lu}, \tag{63}$$

а также к соотношению между коэффициентами ударов первого и второго рода:

$$b_{\rm lu}=\frac{g_{\rm u}}{g_{\rm l}}e^{-h\nu_0/k_{\rm B}T}a_{\rm ul}. \tag{64}$$

В то время как величины, входящие в соотношения (63), являются чисто атомными характеристиками, ударные коэффициенты связаны со свободными электронами. Выполнение соотношения (64) предполагает, что электроны распределены по скоростям по закону Максвелла с некоторой температурой T, что всегда справедливо. Понятно, что коээфициент $b_{\rm lu}$ всегда меньше, чем коэффициент $a_{\rm ul}$, так как при возбуждении атома электрон должен передать ему часть своей энергии, а при тушащем ударе — забрать энергию возбуждения.

Разделим равенство (61) на $(n_{\rm l}B_{\rm lu}-n_{\rm u}B_{\rm ul})[A_{\rm ul}+n_{\rm e}a_{\rm ul}(1-e^{-h\nu_0/k_{\rm B}T})]/A_{\rm ul}$ и применим равенства (63) и (64). Тогда после несложных преобразований в обозначениях предыдущего пункта найдем

$$S_{\rm L}=\lambda\overline{J}_{\rm lu}+(1-\lambda)B_{\nu_0}(T), \tag{65}$$

где введено еще одно обозначение

$$\lambda=\frac{A_{\rm ul}}{A_{\rm ul}+n_{\rm e}a_{\rm ul}(1-e^{-h\nu_0/k_{\rm B}T})},\ \ 1-\lambda=\frac{n_{\rm e}a_{\rm ul}(1-e^{-h\nu_0/k_{\rm B}T})}{A_{\rm ul}+n_{\rm e}a_{\rm ul}(1-e^{-h\nu_0/k_{\rm B}T})}. \tag{66}$$

Величина λ равна доле фотонов, которые после поглощения переизлучаются в линии, и называется *вероятностью выживания фотона*.

Подставив выражение для средней интенсивности (62) в (65), получим более подробную запись уравнения:

$$S_{\rm L}=\lambda\frac{A}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x){\rm d}x\int{\rm d}^2\omega I_\nu(z,\boldsymbol{\omega})+(1-\lambda)B_{\nu_0}(T). \tag{67}$$

Уравнение (67) в самом деле имеет вид уравнения баланса энергии (или лучистого равновесия). Если интенсивность равна функции Планка, то и функция источников равна ей.

Совместное решение уравнений переноса и статистического равновесия уровней дает возможность определить поле излучения в среде и состояние возбуждения атомов в ней.

Хотя уравнения переноса и лучистого равновесия сформулированы в привычном виде, на самом деле их недостаточно для полного решения задачи, так как надо еще задать общую концентрацию атомов рассматриваемого типа, т. е. сумму $n_{\rm l}+n_{\rm u}$=n.

Одновременное решение указанных уравнений — задача непростая, так как уравнения нелинейны и аргумент τ сам зависит от концентрации атомов в основном и возбужденном состояниях. Зависят от населенностей уровней и другие входящие в уравнения величины, а именно β и $S_{\rm c}$. Уравнения решаются методом последовательных приближений и, как правило, за исключением некоторых частных случаев, численно.

Уменьшение оптической глубины и толщины среды при увеличении населенности возбужденного уровня называется *просветлением среды*. В некоторых случаях оптическая толщина среды может стать отрицательной, т. е. при прохождении излучения через такую среду интенсивность его будет возрастать, что составляет лазерный (или мазерный) эффект. Для его осуществления необходимо создать перенаселенность верхнего уровня, что называется накачкой.

5. Линейное приближение. Обычно поле излучения в линии не очень сильное и возбуждение атомов не слишком велико, т. е. $n_{\rm u}\ll n_{\rm l}$. При таком предположении нет необходимости учитывать вынужденные процессы, и задача становится линейной. Тогда населенность основного уровня $n_\mathrm{u} \approx n$, т. е. ее можно считать заданной, в знаменателе (59) можно отбросить единицу, а функция источников оказывается просто пропорциональной степени возбуждения:

$$S_\mathrm{L} = \frac{2h\nu_0^3}{c^2}\frac{g_\mathrm{l}}{g_\mathrm{u}}\frac{n_\mathrm{u}}{n_\mathrm{l}}. \tag{68}$$

Оптические глубина и толщина перестают зависеть от степени возбуждения, так как и в (57) отбрасывается второе слагаемое в скобках. Упрощаются и другие выражения, а определяемые ими величины (кроме искомых) становятся не зависящими от решений. В частности, функция источников в континууме может считаться известной.

При переходе к линейному приближению теряются некоторые эффекты, например просветление среды. В равновесном состоянии интенсиность будет определяться не формулой Планка, а формулой Вина.

Уравнения (60) и (67) можно еще упростить, если отделить прямое излучение, определяемое внешним облучением слоя и внутренними источниками в континууме. Если это проделать, т. е. представить интенсивность в виде суммы

$$I_\nu(z,\boldsymbol{\omega}) = I_\nu^\mathrm{b} + I_\nu^\mathrm{c} + I(\tau,\mu,x), \tag{69}$$

где первое слагаемое соответствует внешнему облучению, второе — внутренним источникам в континууме, а третье — диффузному излучению в линии, то уравнение для последней величины примет вид

$$\mu\frac{\mathrm{d}I(\tau,\mu,x)}{\mathrm{d}\tau} = -[\alpha(x)+\beta]I(\tau,\mu,x) + \alpha(x)S(\tau), \tag{70}$$

где теперь S — функция источников, зависящая только от оптической глубины τ:

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \frac{\lambda}{2}A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)\mathrm{d}x\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu I(\tau,\mu,x). \tag{71}$$

Зависимость функций S_0 и S только от одного аргумента объясняется тем, что при итерации интенсивности как падающего излучения, так и происходящего от внутренних источников, т. е. при подстановке выражений для этих интенсивностей в формулу (67), вычисляются интегралы по всем переменным, кроме τ. То же самое происходит при подстановке в формулу (71) интенсивности диффузного излучения $I(\tau,\mu,x)$.

Интенсивность $I(\tau,\mu,x)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям и перестает зависеть от азимута, даже если источники зависели от него. Все это следствия ППЧ.

6. Интегральное уравнение. Как и при монохроматическом рассеянии, из двух уравнений (70) и (71) можно получить одно — интегральное. Для этого найдем формальное решение уравнения (70):

$$I(\tau,\mu,x) = \begin{cases} \alpha(x)\int\limits_0^\tau e^{-[\alpha(x)+\beta](\tau-\tau')/\mu}S(\tau')\dfrac{\mathrm{d}\tau'}{\mu}, & 0\le\mu\le 1,\\ -\alpha(x)\int\limits_\tau^{\tau_0} e^{-[\alpha(x)+\beta](\tau-\tau')/\mu}S(\tau')\dfrac{\mathrm{d}\tau'}{\mu}, & -1\le\mu\le 0, \end{cases} \tag{72}$$

и подставим его в (71). В результате рассуждений, аналогичных использованным при выводе уравнения Хвольсона, получится

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\tau_0}K(|\tau-\tau'|)S(\tau')\mathrm{d}\tau'. \tag{73}$$

Это основное интегральное уравнение, описывающее рассеяние в линии при ППЧ в плоских средах [31]. Ядро уравнения зависит от модуля разности аргументов, а ядерная функция имеет вид

$$K(\tau) = K(\tau,\beta) = A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha^2(x)E_1([\alpha(x)+\beta]\tau)\mathrm{d}x. \tag{74}$$

Отметим, что фактически интенсивность зависит не отдельно от частоты и угла, а только от их комбинации:

$$y = \frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}. \tag{75}$$

Действительно, формулу (72) можно записать в виде

$$I(\tau,\mu,x)=\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)+\beta}I\left(\tau,\frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}\right), \tag{76}$$

где

$$I(\tau,y)=\begin{cases} y\int\limits_0^\tau e^{-y(\tau-\tau')}S(\tau')\mathrm{d}\tau', & \beta\le y\le\infty,\\ -y\int\limits_\tau^{\tau_0} e^{-y(\tau-\tau')}S(\tau')\mathrm{d}\tau', & -\infty\le y\le-\beta. \end{cases} \tag{77}$$

Это свойство интенсивности позволяет ядерную функцию представить в виде суперпозиции экспонент, что в свою очередь дает возможность применить к рассеянию в линии всю аналитическую теорию, развитую в предыдущей главе.

7. Приведение к суперпозиции экспонент. Подставим в выражение для ядерной функции (74) формулу для интегральной экспоненты:

$$K(\tau,\beta)=2A\int\limits_0^\infty\alpha^2(x)\mathrm{d}x\int\limits_1^\infty e^{-\tau[\alpha(x)+\beta]u}\frac{\mathrm{d}u}{u}. \tag{78}$$

Сделаем замену переменных $y=[\alpha(x)+\beta]u$ и поменяем порядок интегрирования:

$$K(\tau)=2A\int\limits_0^\infty\alpha^2(x)\mathrm{d}x\int\limits_{\alpha(x)+\beta}^\infty e^{-\tau y}\frac{\mathrm{d}y}{y}=2A\int\limits_\beta^{1+\beta}\frac{\mathrm{d}y}{y}e^{-\tau y}\int\limits_{x(y-\beta)}^\infty\alpha^2(x)\mathrm{d}x+2A\int\limits_{1+\beta}^\infty\frac{\mathrm{d}y}{y}e^{-\tau y}\int\limits_0^\infty\alpha^2(x)\mathrm{d}x. \tag{79}$$

Здесь через $x(y)$ обозначена функция, обратная по отношению к профилю коэффициента поглощения, т. е. $\alpha(x(y))=y$, $x(\alpha(x))=x$. Если ввести обозначение

$$A(y)=A(y,\beta)=\frac{2A}{y}\begin{cases}\int\limits_{x(y-\beta)}^\infty\alpha^2(x)\mathrm{d}x, & \beta\le y\le1+\beta,\\ \int\limits_0^\infty\alpha^2(x)\mathrm{d}x, & 1+\beta\le y<\infty,\end{cases} \tag{80}$$

то ядерную функцию можно записать так:

$$K(\tau,\beta)=\int\limits_\beta^\infty A(y,\beta)e^{-\tau y}\mathrm{d}y. \tag{81}$$

Это и есть представление в виде суперпозиции экспонент.

Рассуждая точно так же, и формулу (71) можно записать через функцию $A(y)$:

$$S(\tau)=S_0(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int\limits_\beta^\infty A(y)\frac{\mathrm{d}y}{y}[I(\tau,y)+I(\tau,-y)]. \tag{82}$$

Формула (82) имеет вид, близкий к выражению функции источников через среднюю интенсивность при изотропном монохроматическом рассеянии.

Из формулы для ядерной функции (74) вытекает, что при прямоугольном профиле рассеяние при ППЧ оказывается равносильным изотропному монохроматическому рассеянию.

Таким образом, вся теория резольвентного метода применима к рассеянию излучения в спектральной линии при ППЧ в линейном приближении. К монохроматическому рассеянию мы ее уже применили в главе 3. Применения к общему случаю рассеяния при ППЧ сделаем в следующем параграфе, а здесь перечислим основные задачи, возникающие в теории.

8. Основные задачи. В сущности, это те же задачи, что и при монохроматическом рассеянии.

1) *Задача о диффузном отражении и пропускании.* На слой сверху падает излучение в некоторой частоте x_0 под углом $\arccos \mu_0$. Тогда источники излучения в линии с точностью до множителя, не существенного в линейном приближении, описываются функцией

$$S_0(\tau) = e^{-[\alpha(x_0)+\beta]\tau/\mu_0} = e^{-\tau y_0}, \quad y_0 = \frac{\alpha(x_0)+\beta}{\mu_0}. \tag{83}$$

При таком определении $y_0 \geq \beta$. Однако формально можно рассматривать не только такие (физические), но и произвольные $y_0 = p$, в том числе даже и комплексные, что оказывается необходимым в некоторых случаях.

2) *Задачи с внутренними источниками.* В таких задачах мощность источников обычно представляют какой-либо комбинацией элементарных функций, например произведениями целых степеней τ на экспоненты. С точки зрения математики эти задачи сводятся к предыдущей, так как произведение целой степени на экспоненту можно выразить через ту же экспоненту:

$$\tau^n e^{-p\tau} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial p^n} e^{-p\tau}. \tag{84}$$

Поскольку взятие производной есть линейная операция, то и решения соответствующих задач связаны той же самой операцией. Если источники представляются многочленом от τ, после вычисления производных надо положить $p = 0$.

Таким образом, задача при $S_0(\tau) = e^{-p\tau}$ в этом смысле является фундаментальной.

3) *Обобщение задачи Милна.* Решение однородного уравнения, соответствующего (73), по традиции называется задачей Милна, хотя физически это совсем другая задача и ее решение, как мы убедимся, совсем не похоже на классическое.

Об этих и других задачах теории переноса излучения в спектральных линиях можно прочитать в книгах [31,70,77] и обзорах [54,57].

В следующем параграфе используем теорию, развитую в предыдущей главе.

§ 4.4. Точные решения

1. Три представления ядерных функций. В настоящем параграфе применим точную теорию резольвентного метода к исследованию рассеяния в линии при полном перераспределении по частоте.

Как было показано, ядерная функция в этом случае определяется формулой

$$K(\tau) = K(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) \mathrm{d}x E_1([\alpha(x)+\beta]\tau), \tag{85}$$

которая может быть преобразована в суперпозицию экспонент:

$$K(\tau, \beta) = \int_{\beta}^{\infty} A(y, \beta) e^{-\tau y} \mathrm{d}y. \tag{86}$$

Входящая сюда весовая функция дается формулой

$$A(y,\beta) = \frac{2A}{y} \begin{cases} \displaystyle\int_{x(y-\beta)}^{\infty} \alpha^2(x)\mathrm{d}x, & \beta \leq y \leq 1+\beta, \\ \displaystyle\int_{0}^{\infty} \alpha^2(x)\mathrm{d}x, & 1+\beta \leq y < \infty. \end{cases} \tag{87}$$

Из этого следует, что все результаты точной теории применимы к рассеянию с ППЧ, следует только подставить $a = \beta$, $b = \infty$ и вместо $A(y)$ функцию $A(y, \beta)$. Заметим, что последняя выражается через свое частное значение:

$$A(y, \beta) = \frac{y-\beta}{y} A(y-\beta, 0). \tag{88}$$

Соответственно для ядерной функции справедлива формула, которая получается заменой переменной интегрирования в (86) $y' = y - \beta$:

$$K(\tau,\beta) = e^{-\tau\beta}\int\limits_0^\infty \frac{y}{y+\beta}A(y,0)e^{-y\tau}\mathrm{d}y. \tag{89}$$

Эти соотношения полезны при выводе различных формул, в частности асимптотических.

В дальнейшем у всех ядерных функций будем указывать β вторым аргументом. При $\beta = 0$ будем его опускать.

То обстоятельство, что ядерная функция имеет три представления, отражается и на многих дальнейших формулах: все функции, связанные с резольвентной (которые мы тоже называем резольвентными — в широком смысле), представляются тремя выражениями. Одно содержит интеграл по частоте, второе и третье связаны с представлением ядерной функции суперпозицией экспонент. От первого ко второму можно перейти, либо поменяв порядок интегрирования, либо проинтегрировав по частям в формуле вида (85). Третье представление возможно ввиду свойства весовой функции (88).

Отметим, что в при $\beta > 0$ интеграл от ядерной функции по всем глубинам меньше единицы, так как фотон может поглотиться не только в линии, но и в континууме:

$$\int\limits_0^\infty K(\tau,\beta)\mathrm{d}\tau = A\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\alpha^2(x)}{\alpha(x)+\beta}\mathrm{d}x = 1 - \Delta(\beta) \leq 1. \tag{90}$$

Здесь введено обозначение, равное вероятности поглощения фотона в непрерывном спектре:

$$\Delta(\beta) = A\beta\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)+\beta}\mathrm{d}x. \tag{91}$$

Преобразование Лапласа от (85) имеет вид

$$\overline{K}(p,\beta) = A\int\limits_{-\infty}^\infty \alpha^2(x)\mathrm{d}x\frac{1}{p}\int\limits_1^\infty \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y + p/(\alpha(x)+\beta)}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{A}{p}\int\limits_{-\infty}^\infty \alpha^2(x)\mathrm{d}x\ln\frac{\alpha(x)+\beta+p}{\alpha(x)+\beta} = \int\limits_\beta^\infty \frac{A(y,\beta)\mathrm{d}y}{p+y} = \int\limits_0^\infty \frac{A(y,0)}{y+\beta}\frac{y\mathrm{d}y}{y+\beta+p}. \tag{92}$$

Двустороннее преобразование Лапласа и преобразование Фурье получаются точно так же:

$$\mathcal{U}(p,\beta) = \frac{A}{2p}\int\limits_{-\infty}^\infty \alpha^2(x)\mathrm{d}x\ln\frac{\alpha(x)+\beta+p}{\alpha(x)+\beta-p} = \int\limits_\beta^\infty A(y,\beta)\frac{y\mathrm{d}y}{y^2-p^2} = \int\limits_0^\infty A(y,0)\frac{y\mathrm{d}y}{(y+\beta)^2-p^2}, \tag{93}$$

$$V(u,\beta) = \frac{A}{u}\int\limits_{-\infty}^\infty \alpha^2(x)\mathrm{d}x\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\alpha(x)+\beta} = \int\limits_\beta^\infty A(y,\beta)\frac{y\mathrm{d}y}{y^2+u^2} = \int\limits_0^\infty A(y,0)\frac{y\mathrm{d}y}{(y+\beta)^2+u^2}. \tag{94}$$

Значения этих функций соответственно при $p = 0$ и $u = 0$ равны и совпадает с величиной интеграла от ядерной функции:

$$\mathcal{U}(0,\beta) = V(0,\beta) = \overline{K}(0,\beta) = 1 - \Delta(\beta). \tag{95}$$

При вычислении функции $\mathcal{U}(p,\beta)$ с вещественными $p = y \geq \beta$ интеграл во втором представлении в (93) следует понимать как главное значение, а в первом под знаком логарифма поставить модуль.

Теперь у нас есть все для написания формул для точных решений.

2. Корни характеристического уравнения. При записи формул для точных решений необходимо проверить, имеет ли решение характеристическое уравнение. Покажем, что при имеющих прямой физический смысл значениях λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, корней у характеристического уравнения не существует.

Как мы убедились в предыдущей главе, в общем случае при неотрицательной функции $A(y)$ корни, если они имеются, обязательно вещественны. Раз корни могут быть только вещественными, то они должны лежать между точками $-\beta$ и β (в нашем случае $b = +\infty$), так как остальные точки вещественной оси составляют линию ветвления. Однако при $|k| < \beta$

$$\mathcal{U}(k,\beta) = \int\limits_0^\infty A(y,0)\frac{y\mathrm{d}y}{(y+\beta)^2-k^2} \leq \int\limits_0^\infty A(y,0)\frac{\mathrm{d}y}{y+2\beta}, \tag{96}$$

а последнее значение

$$\mathcal{U}(\beta,\beta) = \int\limits_0^\infty A(y,0)\frac{\mathrm{d}y}{y+2\beta} < \int\limits_0^\infty A(y,0)\frac{\mathrm{d}y}{y} = 1. \tag{97}$$

Поэтому разность $1 - \lambda\mathcal{U}(k,\beta)$ не может обратиться в нуль.

Величина $1 - \lambda\mathcal{U}(p,\beta)$ обращается в нуль лишь при $\beta = 0$ и $\lambda = 1$ в точке $p = 0$, но эта точка — не (изолированный) корень характеристического уравнения, так как она лежит на линии ветвления.

3. Резольвенты и H-функция. Формулы для них теперь могут быть легко записаны, если просто в общие формулы из главы 3 подставить выражения для входящих в них функций $A(y)$, $\mathcal{U}(p)$ и $V(u)$ со вторыми аргументами β, приведенные выше. При этом внеинтегральных слагаемых в формулах для резольвентных функций не будет. Запишем формулу для бесконечной среды:

$$\Phi_\infty(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_\beta^\infty \frac{A(y,\beta)e^{-\tau y}\mathrm{d}y}{[1-\lambda\mathcal{U}(y,\beta)]^2 + [(\lambda\pi/2)A(y,\beta)]^2} = \frac{\lambda}{2}e^{-\tau\beta}\int\limits_0^\infty \frac{A(y,0)e^{-\tau y}\mathrm{d}y}{[1-\lambda\mathcal{U}(y+\beta,\beta)]^2 + \left[\dfrac{\lambda\pi}{2}\dfrac{yA(y,0)}{y+\beta}\right]^2}\frac{y}{y+\beta}. \tag{98}$$

Формула для H-функции не сильно отличается от общей:

$$\ln H(p) = -\frac{p}{\pi}\int\limits_0^\infty \ln[1-\lambda V(u,\beta)]\frac{\mathrm{d}u}{u^2+p^2}, \tag{99}$$

а формула для резольвентной функции полубесконечной среды есть комбинация двух приведенных: в знаменателе ее подынтегрального выражения, соответствующего первому представлению $\Phi_\infty(\tau)$ в (98), добавляется множитель $H(y)$, а в знаменателе второго — $H(y+\beta)$.

Отметим частные значения этих функций и их преобразований. При $\tau \to 0$ резольвентные функции обращаются в бесконечность, так как их первое приближение — ядерная функция, а $E_1(0) = \infty$.

Двустороннее преобразование Лапласа от резольвентной функции бесконечной среды при $p = 0$

$$1 + \overline{\overline{\Phi}}_\infty(0) = \frac{1}{1-\lambda\mathcal{U}(0,\beta)} = \frac{1}{1-\lambda+\lambda\Delta(\beta)}. \tag{100}$$

Из соотношения Винера—Хопфа получается предельное значение H-функции:

$$H(0) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda+\lambda\Delta(\beta)}} = 1 + \overline{\Phi}(0) > 1. \tag{101}$$

Как видно из нелинейного уравнения, H-функция в наших обозначениях при вещественных неотрицательных аргументах строго убывает от значения (101) при $p = 0$ до 1 при $p = \infty$. Следовательно, H-функция на промежутке $[0,\infty)$ всегда конечна за исключением случая, когда происходит чистое рассеяние в линии и нет поглощения в континууме.

4. Вероятность выхода и интенсивности выходящего излучения. Рассмотрим еще одну величину, представляющую интерес, а именно функцию источников в задаче о диффузном отражении излучения полубесконечной атмосферой. Эта же функция является преобразованием Лапласа от резольвенты и, как и в случае монохроматического рассеяния, связана с вероятностью выхода фотона из атмосферы.

Упомянутая функция источников, как было показано в предыдущей главе, выражается через резольвентную функцию:

$$D(\tau,p) = H(p)\Psi(\tau,p), \quad \Psi(\tau,p) = e^{-p\tau}\left[1 + \int\limits_0^\tau e^{p\tau'}\Phi(\tau')\mathrm{d}\tau'\right]. \tag{102}$$

В частности, при постоянных в среде источниках $p = 0$ и

$$D(\tau,0) = H(0)\Psi(\tau,0) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda+\lambda\Delta(\beta)}}\left[1 + \int\limits_0^\tau \Phi(\tau')\mathrm{d}\tau'\right]. \tag{103}$$

Таким образом, функция $\Psi(\tau,0)$ является решением интегрального уравнения (73) со свободным слагаемым $S_0(\tau) = 1/H(0) = \sqrt{1-\lambda+\lambda\Delta(\beta)}$. Отсюда следует, что при $\lambda = 1$ и $\beta = 0$ эта функция удовлетворяет однородному уравнению как вырожденному случаю задачи с постоянными источниками.

Свяжем с этой функцией вероятность выхода фотона. Пусть $P(\tau, \mu, x)$ — вероятность фотону, находящемуся в поглощенном состоянии на глубине τ, выйти из среды после любого числа рассеяний под углом $\arccos\mu$ в частоте x. Из рассуждения, что фотон может выйти сразу и после рассеяний, совершенно аналогично случаю монохроматического рассеяния, выводим уравнение

$$P(\tau, \mu, x) = \frac{\lambda}{4\pi} A\alpha(x) e^{-[\alpha(x)+\beta]\tau/\mu} + \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)P(\tau', \mu, x)\mathrm{d}\tau'. \tag{104}$$

Уравнение показывает, что связь между двумя функциями следующая:

$$P(\tau, \mu, x) = \frac{\lambda}{4\pi} A\alpha(x) D\left(\tau, \frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}\right). \tag{105}$$

Так же как и при монохроматическом рассеянии, знание вероятности выхода позволяет находить выходящее излучение по первичным источникам:

$$I(0, -\mu, x) = \frac{4\pi}{\lambda}\int_0^\infty S_0(\tau)P(\tau, \mu, x)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mu}. \tag{106}$$

Вообще же интенсивность выходящего из полубесконечной среды диффузного излучения согласно формуле (72) для формального решения

$$I(0, -\mu, x) = \frac{\alpha(x)}{\mu}\int_0^\infty e^{-\tau[\alpha(x)+\beta]/\mu} S(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{107}$$

т. е. выражается через преобразование Лапласа от функции источников. В задаче об отражении с источниками $e^{-y_0\tau}$ интенсивность отраженного излучения

$$I(0, -\mu, x, y_0) = \frac{\alpha(x)}{\mu} I(0, -y, y_0) = \frac{\alpha(x)}{\mu}\frac{H(y)H(y_0)}{y+y_0}, \quad y = \frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}. \tag{108}$$

Отметим, что к задаче о рассеянии с ППЧ применимы и другие эвристические методы, о которых говорилось в главе 2. Например, уравнение, связывающее интенсивности $I(\tau, y, y_0)$ на разных глубинах в полубесконечной атмосфере в задаче об отражении, имеет вид

$$I(\tau+\tau_1, y, y_0) = I(\tau, y, y_0)e^{-\tau_1 y} + I(\tau_1, y, y_0)e^{-\tau y}\Theta(y) + \frac{\lambda}{2}\int_\beta^\infty A(y', \beta)I(\tau_1, y', y_0)I(\tau, y, y')\frac{\mathrm{d}y'}{y'}. \tag{109}$$

С помощью этого соотношения методом удвоения глубин было рассчитано поле излучения в задаче о диффузном отражении от полубесконечной среды для доплеровского профиля при $\beta = 0$ [87].

5. Профили линий. Проследим, какими получаются профили линий выходящего излучения в задаче с экспоненциальными (в частности, постоянными) источниками. Для простоты будем считать, что крылья линии простираются до бесконечности, а континуум отсутствует, т. е. $\beta = 0$. Положим также $\mu = 1$, т. е. рассмотрим излучение, выходящее перпендикулярно к границе.

Нормируем профиль, т. е. определим его следующим образом:

$$r(x) = \frac{I(0, -1, x)}{I(0, -1, 0)} = \frac{1+y_0}{1+y_0/\alpha(x)}\frac{H(\alpha(x))}{H(1)}. \tag{110}$$

Пусть сначала $\lambda = 1$. Проследим зависимость профиля линии от параметра y_0 (рис. 5*a*). Для этого используем таблицы H-функций, рассчитанных для доплеровского профиля в [34]. С удалением от центра линии первый сомножитель в (110) убывает, а второй возрастает и стремится к постоянной. Если y_0 достаточно велико, то влияние профиля поглощения наступает быстро и профиль линии близок к профилю поглощения. При уменьшении y_0 роль $\alpha(x)$ уменьшается, вступает в действие рост H-функции, и у профиля линии появляется горб. Симметричный горб образуется с другой стороны от центра линии. Такие характерные двугорбые профили впервые объяснила теория ППЧ. В отличие от монохроматического рассеяния, при котором фотоны не меняют частоты и поэтому профили линий получаются пропорциональными профилю коэффициента поглощения, фотоны при ППЧ переходят в крыло линии вследствие перераспределения по частоте. Хотя в центре линии вероятность излучения фотонов больше, среда более прозрачна в крыле, где поглощение меньше и фотоны выходят с больших

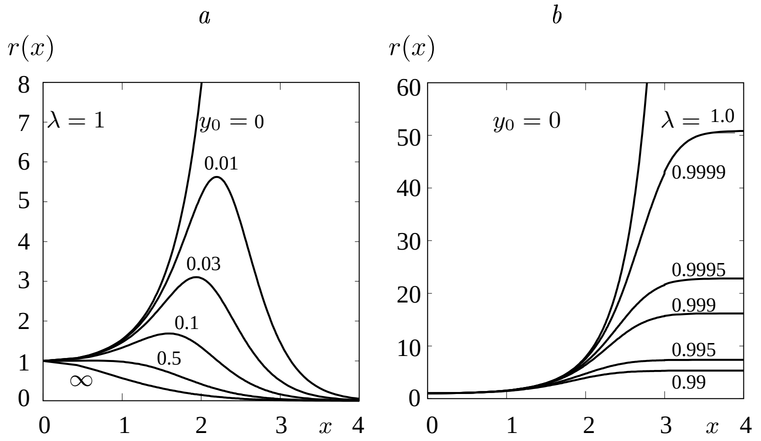


Рис. 5. Профили линий при доплеровском поглощении:
a — при $\lambda = 1.0$ и различных значениях y_0;
b — при $y_0 = 0$ и различных значениях λ.

глубин. Конкуренция этих двух обстоятельств и объясняет образование горбов. Чем ближе λ к единице, тем более мощный рост профиля происходит в крыле линии. Тем не менее, даже при чистом рассеянии и $y_0 > 0$ в далеком крыле профиль обязательно спадает к нулю. Лишь при $y_0 = 0$ и $\lambda = 1$ это не так (см. ниже).

Пусть теперь $y_0 = 0$, т. е. источники в среде постоянны, и изменяется значение λ (рис. 5*б*). Первый множитель обращается в единицу, и все определяется H-функцией. При $\lambda < 1$ величина $r(x)$ монотонно возрастает от 1 в центре до некоторого конечного значения в далеком крыле, так что при постоянных источниках образуется линия поглощения, хотя никакого континуума по нашему предположению нет. Если же $\lambda = 1$, то H-функция возрастает неограниченно и образуется глубокая линия поглощения с бесконечно мощными крыльями. При постоянных источниках и чистом рассеянии, конечно, поле излучения бесконечно велико. Однако поскольку мы нормировали профиль на центр линии, этот профиль отвечает решению однородного уравнения, т. е. источникам на бесконечности. Функция источников возрастает с глубиной, а с удалением от центра линии в крыло излучение выходит все с бо́льших глубин.

Подробные таблицы фойгтовских H-функций с учетом поглощения в континууме составлены в работе [50]. Там же приводятся таблицы некоторых вспомогательных функций, позволяющих строить профили спектральных линий при многих видах источников в линии и континууме.

В следующих параграфах изучим асимптотическое поведение решений.

§ 4.5. Асимптотические формулы для профилей и ядерных функций

1. Асимптотические области, асимптотические константы и функции. Большое место в теории переноса излучения занимает асимптотическая теория. Как мы видели, решения интегральных уравнений представляются в виде сложных интегралов. Однако в так называемых асимптотических областях эти интегралы сильно упрощаются. В этом и следующем параграфах мы изложим основы асимптотической теории переноса излучения в спектральной линии при полном перераспределении по частоте. Для краткости асимптотические формулы будем называть асимптотиками. Сначала обсудим, в каких случаях получаются асимптотические формулы для тех функций, которые характеризуют поля излучения и возбуждение атомов.

Мы рассмотрим асимптотические зависимости двух типов. Асимптотики первого типа осуществляются для достаточно глубоких слоев бесконечной или полубесконечной сред. В обоих случаях должно выполняться неравенство $\tau \gg 1$. Другая асимптотическая область — крылья линии, т. е. большие значения безразмерной частоты $x \gg 1$.

Параметрами задач переноса излучения в линии помимо толщины плоских сред являются вероятность выживания фотона при рассеянии λ и доля поглощения в континууме β. Большую роль многократные рассеяния в линии играют тогда, когда среда оптически толстая, β мало, а λ близко к единице. Именно такое положение чаще всего осуществляется на практике для достаточно сильных линий в спектрах астрофизических объектов. В противном случае фотоны в основном гибнут, т. е. либо не переизлучаются в линии вследствие тушащих ударов или ионизаций, либо поглощаются в полете другими составляющими среды, либо быстро выходят из тонкой среды и выбывают из процесса рассеяния. Таким образом, асимптотические области характеризуются неравенствами $1 - \lambda \ll 1$ и $\beta \ll 1$, которые в дальнейшем будем считать выполненными. В то же время мы будем стараться не накладывать ограничений на соотношения между $1 - \lambda$, β, τ и x, хотя наиболее простые и законченные результаты удается получить в предельных случаях соотношений между этими величинами.

Как оказалось, в асимптотических областях осуществляется своего рода автомодельный режим: характеристики полей излучения в существенной части зависят не от каждой из переменных по отдельности, а от некоторых их попарных комбинаций, например $\tau\beta$ и т. п. Обычно число существенных переменных сокращается на одну. Упрощение заключается и в том, что часто эти комбинации переменных в асимптотиках становятся аргументами известных специальных функций, в идеале элементарных.

Поскольку асимптотики получаются для крыла линии и для глубоких слоев среды, куда фотоны могут проникать напрямую только в крыле линии, существенно поведение профиля коэффициента поглощения именно в крыле. В общем случае будем считать его степенным, рассматривая более быстрое убывание как предельный случай. При этом в асимптотической теории появляется ряд асимптотических функций, зависящих от некоторых параметров. В простейших случаях это один параметр, определяемый показателем степени убывания профиля в крыле линии.

Начиная с работ Ю. Ю. Абрамова, А. М. Дыхне и А. П. Напартовича [1,28], в асимптотической теории переноса используется понятие медленно меняющейся функции (сокращенно ММФ). Бесконечно большая или бесконечно малая вблизи точки x_0 справа функция $\varphi(x)$ называется медленно меняющейся, если при любых $\varepsilon > 0$ существует

$$\lim_{t\to+0} \frac{\varphi(x_0+\varepsilon t)}{\varphi(x_0+t)} = \lim_{t\to+0} \frac{\varphi'(x_0+\varepsilon t)}{\varphi'(x_0+t)}\varepsilon = 1. \tag{111}$$

Аналогично определяется ММФ при $x \to \infty$. Примерами могут служить $\ln x$ и его степени при $x \to 0$ и $x \to +\infty$ и другие функции, обратные функциям, изменяющимся быстрее степенных.

Упомянутыми авторами был разработан способ обращения с ММФ при выводе асимптотик, который по существу сводится к замене под знаком интеграла функций вида $\varphi(xy)$, где $x \to 0$ или $x \to \infty$, а y — переменная интегрирования, на $\varphi(x)$, а $\varphi'(xy)$ на $\varphi'(x)/y$, если это не приводит к расходимости интеграла.

2. Асимптотики профилей поглощения. Теперь введем асимптотические константы и некоторые функции. Как говорилось, основная константа в асимптотической теории ППЧ — это показатель степени, характеризующий степенное изменение профиля поглощения. Так как профиль поглощения — четная функция, то для упрощения записи формул везде считаем $x > 0$. Рассматриваем подробно три случая профилей поглощения.

1) *Степенной профиль с бесконечно протяженными крыльями.* При $x \to \infty$

$$\alpha(x) \sim \alpha_*(x)x^{-æ}, \tag{112}$$

где $æ > 1$ — постоянная, α_* — постоянная или ММФ. Функция, обратная $y = \alpha(x)$, в этой области

$$x = x(y) \sim x_{\rm as}(y) = (\alpha_*/y)^{1/æ}, \;\; y \to 0. \tag{113}$$

2) *Степенной профиль, обращающийся в нуль на конечной частоте* x_0***.*** При $x \to x_0 - 0$

$$\alpha(x) \sim \alpha_*(x_0 - x)(x_0 - x)^{æ_1}, \tag{114}$$

где опять α_* — постоянная или ММФ, а $æ_1 > 0$. Обратная функция

$$x = x_*(y) \sim x_0 + x_{\rm as}(y) = x_0 - (y/\alpha_*)^{1/æ_1}, \;\; y \to 0. \tag{115}$$

3) *Профили, убывающие быстрее степенных.* Для них обратная функция $x = x(y)$ (и следовательно ее асимптотика) меняется медленнее степенной, т. е. это ММФ. Примером такого профиля является доплеровский.

Вообще говоря, можно рассматривать и другие случаи профилей на конечном расстоянии, например, обращающиеся в нуль медленнее степенных или даже стремящиеся к бесконечности при приближении к некоторой частоте (не очень быстро, например, как профили второго типа с $-1 < æ_1 < 0$), но такие профили не встречаются на практике. Три же перечисленных случая имеют широкое распространение. Первый характерен для спектральных линий. Например, фойгтовскому профилю

$$\alpha(x) = \frac{U(a,x)}{U(a,0)},\; U(a,x) = \frac{a}{\pi^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \frac{{\rm d}y}{(x-y)^2 + a^2} \sim \frac{a}{\pi x^2} \tag{116}$$

отвечают $A = U(a,0),\; æ = 2,\; \alpha_* = a/[\pi U(a,0)]$. Другие степени в (112) соответствуют профилям, определяемым столкновениями атомов с окружающими частицами. В этих случаях $æ = (s+3)/s$, где s — показатель степенного закона, согласно которому смещение уровня энергии атома под действием посторонней частицы убывает с расстоянием до этой частицы. Характерным значениям $s = 2, 3, 4, 6$ соответствуют показатели $æ = 5/2,\ 2,\ 7/4,\ 3/2$. Предельный вид фойгтовского профиля при $a \to 0$ — доплеровский профиль

$$U(0,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},\; \alpha(x) = e^{-x^2} \tag{117}$$

убывает быстрее степенного. Для него $A = 1/\sqrt{\pi}$, $x_{\rm D}(y) = \sqrt{\ln(1/y)}$, $æ = \infty$. Профили второго типа встречаются при рассмотрении переноса излучения в молекулярных полосах. В случае прямоугольного профиля (16) $æ_1 = 0$.

Перейдем к подробному исследованию асимптотик ядерных функций.

3. Асимптотики ядра и ядерных функций. Рассмотрим сначала простейший случай — линию с бесконечными крыльями, наиболее интересный для астрофизики. Асимптотики ядерной функции $K(\tau)$ при больших τ требуют знания функции $A(y)$ при малых y. Сделав в выражении для этой функции при $y \le 1$ замену переменной интегрирования $\alpha(x') = y'$, получим при $y \to 0$

$$A(y) = \frac{2A}{y}\int\limits_{x(y)}^{\infty}\alpha^2(x')\mathrm{d}x' \sim \frac{2A}{y}\alpha_*^2\int\limits_{x_{\rm as}(y)}^{\infty}(x')^{-2æ}\mathrm{d}x' = \frac{2A}{y}\alpha_*^2\frac{[x_{\rm as}(y)]^{1-2æ}}{2æ-1} = \frac{2A}{2æ-1}\alpha_*^{1/æ}y^{1-1/æ}. \tag{118}$$

Таким образом,

$$A(y) \sim A_* y^{2\gamma}, \tag{119}$$

где введены еще две величины, выражающиеся через уже известные. Одна из них —

$$\gamma = \frac{æ-1}{2æ} < \frac{1}{2}, \quad æ = \frac{1}{1-2\gamma}, \tag{120}$$

постоянная. Вторая —

$$A_* = 2A\frac{1-2\gamma}{1+2\gamma}\alpha_*^{1-2\gamma} \tag{121}$$

может быть константой или ММФ в зависимости от того, чем является α_*.

Точно так же находятся асимптотики для профиля на конечном промежутке. Действительно, при таком профиле

$$A(y) = \frac{2A}{y}\int\limits_{x(y)}^{x_0}\alpha^2(x')\mathrm{d}x' \sim \frac{2A}{y}\alpha_*^2\int\limits_{x_0+x_{\rm as}(y)}^{x_0}(x_0-x')^{2æ_1}\mathrm{d}x' = \frac{2A}{y}\alpha_*^2\frac{[-x_{\rm as}(y)]^{2æ_1+1}}{2æ_1+1} = \frac{2A}{2æ_1+1}\alpha_*^{-1/æ_1}y^{1+1/æ_1}. \tag{122}$$

Следовательно,

$$A(y) \sim A_* y^{2\zeta}. \tag{123}$$

И в этом случае появляются одна константа и одна медленно меняющаяся функция (или тоже константа):

$$\zeta = \frac{æ_1+1}{2æ_1} > \frac{1}{2}, \quad æ_1 = \frac{1}{2\zeta-1}, \tag{124}$$

$$A_* = 2A\frac{2\zeta-1}{2\zeta+1}\alpha_*^{2\zeta-1}. \tag{125}$$

В обоих случаях асимптотики функции $A(y)$ одинаковы с точностью до обозначений, так что можно оперировать с любой из них. Выберем, как более общую, вторую в качестве основной (распространив ее на все $\zeta > 0$). Для такой асимптотики получается следующая асимптотика ядерной функции при $\beta = 0$:

$$K(\tau) = \int\limits_0^{\infty}A(y)e^{-y\tau}\mathrm{d}y \sim K_{\rm as}(\tau) = A_*\int\limits_0^{\infty}e^{-y\tau}y^{2\zeta}\mathrm{d}y = A_*\frac{\Gamma(2\zeta+1)}{\tau^{2\zeta+1}}. \tag{126}$$

Кроме самой ядерной функции нам понадобится еще интеграл от нее:

$$L(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\infty}K(\tau')\mathrm{d}\tau'. \tag{127}$$

Ясно, что $L(0) = 1$. При больших τ

$$L(\tau) \sim L_{\rm as}(\tau) = A_*\Gamma(2\zeta+1)\int\limits_{\tau}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\tau'}{(\tau')^{2\zeta+1}} = A_*\frac{\Gamma(2\zeta)}{\tau^{2\zeta}}. \tag{128}$$

Напомним, что при $\zeta < 1/2$ следует принять $\zeta = \gamma$.

Случай более быстрого, чем степенное, убывания рассмотрим на примере доплеровского профиля. Для него получаем

$$A(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}y}\int\limits_{x_{\rm D}(y)}^{\infty}e^{-2x^2}{\rm d}y=\frac{2}{\sqrt{\pi}y}\int\limits_0^y\frac{(y')^2{\rm d}y'}{2y'x_{\rm D}(y')}=\frac{y}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1\frac{t{\rm d}t}{\sqrt{\ln(1/y)+\ln(1/t)}}\sim\frac{y}{\sqrt{\pi\ln(1/y)}}\int\limits_0^1 t{\rm d}t=\frac{y}{2\sqrt{\pi}x_{\rm D}(y)}. \quad (129)$$

Здесь приближенно при $y \ll 1$ из-под знака интеграла вынесена большая величина $\sqrt{\ln(1/y)}$. Второе слагаемое под знаком корня тоже может быть большим, но только при малых t, когда мал множитель, стоящий в числителе. Таким образом, формулу (129) можно записать в виде (119) при $\gamma = 1/2$ и $A_*(y) = 1/[2\sqrt{\pi}x_{\rm D}(y)]$. Напомним, что $x_{\rm D}(y) = \sqrt{\ln(1/y)}$.

Далее, для ядерной функции получаем

$$K(\tau)=\int\limits_0^\infty A(y)e^{-y\tau}dy\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-y\tau}\frac{y{\rm d}y}{\sqrt{\ln(1/y)}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau^2}\int\limits_0^\infty e^{-t}\frac{t{\rm d}t}{\sqrt{\ln\tau+\ln 1/t}}\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau^2\sqrt{\ln\tau}}. \quad (130)$$

Аналогично и в других случаях более быстрого убывания профиля, чем степенной, получается $\gamma = \zeta = 1/2$, причем обязательно присутствует ММФ.

4. Асимптотики преобразований. Теперь получим асимптотики преобразований Лапласа и Фурье от ядерной функции при $\beta = 0$. Начнем со случая бесконечно протяженных крыльев, когда $\gamma < 1/2$. Тогда

$$\overline{K}(p)=\int\limits_0^\infty e^{-p\tau}K(\tau){\rm d}\tau=\int\limits_0^\infty A(y)\frac{{\rm d}y}{y+p}=1-p\int\limits_0^\infty\frac{A(y)}{y}\frac{{\rm d}y}{y+p}\sim 1-pA_*\int\limits_0^\infty\frac{y^{2\gamma-1}}{y+p}=1-A_*p^{2\gamma}\int\limits_0^\infty\frac{z^{2\gamma-1}}{z+1}{\rm d}z=1-\frac{A_*\pi}{\sin(2\pi\gamma)}p^{2\gamma}. \quad (131)$$

Здесь нельзя подставлять асимптотику функции $A(y)$ сразу в исходный интеграл, так как он сходится при $p = 0$. Поэтому сначала сходящаяся часть была выделена, а асимптотика находилась у расходящейся части. Представляющий ее интеграл зависит только от γ и вычисляется либо с преобразования контура интегрирования к особенностям степенной функции и применением теории вычетов, либо сведением к бета-функции Эйлера подстановкой $x = 1/(z+1)$ и использованием формулы дополнения для гамма-функции.

Остальные асимптотики для $\gamma < 1/2$ находятся алгебраическим образом. Так, при p не вещественных

$$\mathcal{U}(p)=\frac{1}{2}[\overline{K}(p)+\overline{K}(-p)]\sim 1-\frac{A_*\pi}{2\sin(2\pi\gamma)}[p^{2\gamma}+(-p)^{2\gamma}]. \quad (132)$$

При вещественных значениях $y > 0$

$$\mathcal{U}(y)\sim\frac{1}{2}\left[\overline{K}(y)+\frac{\overline{K}(e^{\pi i}y)+\overline{K}(e^{-\pi i}y)}{2}\right]=1-\frac{A_*\pi\cos(\pi\gamma)}{2\sin(\pi\gamma)}y^{2\gamma}. \quad (133)$$

Наконец, асимптотика преобразования Фурье получается из (132) подстановкой $p = e^{\pi i/2}u$:

$$V(u)=\mathcal{U}(iu)\sim 1-\frac{A_*}{2}\frac{\pi u^{2\gamma}}{\sin(2\pi\gamma)}(e^{\pi i\gamma}+e^{-\pi i\gamma})=1-\frac{A_*}{2}\frac{\pi u^{2\gamma}}{\sin(\pi\gamma)}. \quad (134)$$

Если профиль обращается в нуль на конечном расстоянии, то дело обстоит сложнее. Перестает быть справедливой асимптотика (131), так как в этом случае ядерная функция имеет по крайней мере первый момент, который необходимо выделить. Выделение таких слагаемых надо продолжать в зависимости от количества сходящихся моментов ядерной функции

$$K_n=\int\limits_0^\infty\tau^nK(\tau){\rm d}\tau=\int\limits_0^\infty\tau^n{\rm d}\tau\int\limits_0^\infty A(y)e^{-\tau y}{\rm d}y=n!\int\limits_0^\infty\frac{A(y)}{y^{n+1}}{\rm d}y. \quad (135)$$

В формальном разложении преобразования ядерной функции в ряд при малых p

$$\overline{K}(p)=\int\limits_0^\infty A(y)\frac{{\rm d}y}{y+p}=\int\limits_0^\infty\frac{A(y)}{y}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{p^n}{y^n}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{K_n}{n!}p^n \quad (136)$$

регулярная ее часть содержит слагаемые до такой степени p, сколько существует конечных моментов $K(\tau)$. Это число зависит от значения ζ, а именно, так как интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\tau y}y^{2\zeta}\frac{{\rm d}y}{y^{n+1}}$ сходится при $\zeta > n/2$, то при таких ζ

сходится n-ный момент. При $1/2 < \zeta < 1$ достаточно выделить только первый момент, подставить асимптотику $A(y)$ и получить

$$\overline{K}(p) = 1 - p\int\limits_0^\infty \frac{A(y)}{y^2}\mathrm{d}y + p^2\int\limits_0^\infty \frac{A(y)}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{y+p} \sim 1 - K_1 p + A_* p^{2\zeta}\int\limits_0^\infty z^{2\zeta-2}\frac{\mathrm{d}z}{z+1} = 1 - K_1 p - A_* p^{2\zeta}\frac{\pi}{\sin(2\pi\zeta)}. \tag{137}$$

Формулы для $V(u)$ и $\mathcal{U}$ сохраняют свой вид (первая степень p пропадает). Просто нужно считать, что $\gamma = \zeta$. Если же $\zeta > 1$, то у ядерной функции существует и второй момент K_2, преобразования имеют вторую производную в нуле и при сколь угодно больших $\zeta > 1$

$$\overline{K}(p) \sim 1 - K_1 p + \frac{K_2}{2}p^2, \quad \mathcal{U}(p) \sim 1 + \frac{K_2}{2}p^2, \quad V(u) \sim 1 - \frac{K_2}{2}u^2. \tag{138}$$

Следовательно, можно принять $\gamma = 1$. Такой режим мы будем называть диффузионным.

Таким образом, в общем случае можно положить

$$\gamma = \begin{cases} \gamma, & \gamma \le 1/2, \\ \zeta, & \zeta < 1, \\ 1, & \zeta \ge 1. \end{cases} \tag{139}$$

Обычно основной асимптотикой считается асимптотика преобразования Фурье $V(u)$ от ядерной функции $K(\tau)$ при $\beta = 0$, записываемая в виде

$$1 - V(u) \sim V_0 u^{2\gamma}, \tag{140}$$

а основной асимптотической константой (или ММФ) наряду с γ — величина V_0. При $\gamma = 1$ принимается $V_0 = K_2/2$, а при $\gamma < 1$

$$V_0(u) = \frac{\pi A_*}{2\sin(\pi\gamma)}. \tag{141}$$

В частности, для доплеровского профиля функция

$$V_0(u) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\ln(1/u)}} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{x_{\mathrm{D}}(u)}. \tag{142}$$

Все другие функции при $0 < \gamma < 1$ выражаются через эту константу и V_0:

$$A(y) \sim \frac{2\sin(\pi\gamma)}{\pi}V_0 y^{2\gamma},\ \mathcal{U}(y) \sim 1 - V_0\cos(\pi\gamma)y^{2\gamma},\ 0 < \gamma < 1. \tag{143}$$

С определением (139) вид формул (133) и (134) сохраняется при любых профилях, например при прямоугольном профиле (16), рассеяние с которым при ППЧ, как отмечалось, равносильно изотропному монохроматическому. У ядерной функции $E_1(\tau)$ существуют моменты всех порядков, поэтому при монохроматическом рассеянии $\gamma = 1,\ V_0 = 1/3$ и осуществляется диффузионный режим.

Через V_0 формулу (126) можно переписать при $\zeta = \gamma < 1$ так:

$$K(\tau) \sim 2\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}V_0(1/\tau)\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\tau^{2\gamma+1}}. \tag{144}$$

Но поскольку формула (126) для ядерной функции через ζ и A_* более общая, предпочтительнее использовать именно ее.

5. Поглощение в континууме. Перейдем к $0 < \beta \ll 1$ и начнем с величины (91), которая связана с интегралом от ядерной функции. Ее поведение различно при разных ζ. Действительно, если $\zeta > 1/2$, она имеет конечную производную при $\beta = 0$, а если $\zeta = \gamma < 1/2$, эта производная бесконечна. Когда $\zeta > 1$, у функции $\Delta(\beta)$ существует в нуле и вторая производная. Все это можно выразить так:

$$\Delta(\beta) = 2A\beta \cdot \begin{cases} \pi\dfrac{1-2\zeta}{\sin(2\pi\zeta)}\,x_{\mathrm{as}}(\beta),\ 0 < \zeta = \gamma < 1/2, \\ x_0 + \pi\dfrac{1-2\zeta}{\sin(2\pi\zeta)}\,x_{\mathrm{as}}(\beta),\ 1/2 < \zeta < 1, \\ x_0 - \beta\,\alpha_{-1}/2A,\ \zeta > 1. \end{cases} \tag{145}$$

Пределы $\zeta \to 1/2 \pm 0$ получаются каждый из своего выражения. Формально их можно объединить, если считать, что $x_0 = 0$ для профилей с бесконечно протяженными крыльями. Второе слагаемое при $1/2 < \zeta < 1$ меньше первого. Для доплеровского профиля

$$\Delta(\beta) \sim \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\ln\frac{1}{\beta}}. \tag{146}$$

Момент профиля поглощения порядка -1

$$\alpha_{-1} = \int\limits_{-x_0}^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha(x)} \tag{147}$$

сходится при $\zeta > 1$. Для вывода формулы, отражающей поведение $\Delta(\beta)$ при $\zeta = 1$, требуется более подробная информация о ММФ $\alpha_*(x)$.

Если $\beta > 0$, асимптотика ядерной функции $K(\tau, \beta)$ при достаточно больших τ обязательно станет экспоненциальной. Смысл асимптотики ядра при наличии слабого непрерывного поглощения в том, чтобы при $\tau \gg 1$ произведение $\tau\beta$ могло оставаться произвольным. Подставив в выражение (89) асимптотику (123), получим искомую асимптотику ядерной функции:

$$K(\tau, \beta) \sim K_{\mathrm{as}}(\tau)(2\zeta + 1)E_{2\zeta+2}(\tau\beta), \tag{148}$$

так как

$$\frac{e^{-s}}{\Gamma(2\zeta + 2)} \int\limits_0^\infty e^{-t} \frac{t^{2\zeta+1}}{t + s} \mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(2\zeta + 2)} \int\limits_0^\infty t^{2\zeta+1} \mathrm{d}t \int\limits_1^\infty e^{-u(t+s)} \mathrm{d}u = \int\limits_1^\infty e^{-sy} \frac{\mathrm{d}y}{y^{2\zeta+2}}. \tag{149}$$

Для примера приведем асимптотику доплеровской ядерной функции ($\gamma = 1/2$). Если функцию E_3 выразить через E_1 и экспоненты, то из (148) находим

$$K(\tau, \beta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau^2\sqrt{\ln\tau}}[(1 - \beta\tau)e^{-\beta\tau} + (\beta\tau)^2 E_1(\beta\tau)]. \tag{150}$$

При $\beta \to 0$ асимптотики (148) и (150) переходят в (126) и (130) соответственно.

Следующими рассмотрим функции $V(u, \beta)$ и $\mathcal{U}(p, \beta)$. При этом вторая функция входит в выражения для резольвентных функций при вещественных аргументах $p = y \geq \beta$, так что ее асимптотику найдем при таких значениях p.

Функции $V(u, \beta)$ и $\mathcal{U}(p, \beta)$ при сколь угодно малых $\beta \neq 0$ имеют вторые производные в нуле, которые растут с уменьшением β. Поэтому когда их аргументы значительно меньше β, эти функции обязательно будут вести себя, как если бы было $\zeta > 1$. Интерес представляют формулы, которые в предельных случаях $\beta \ll p, u$ и $p, u \ll \beta$ переходят соответственно в (134), (133) и в их общий предел (145). Они имеют различный вид при $\gamma \neq 1/2$ и $\gamma = 1/2$. В первом случае

$$1 - V(u, \beta) \sim 2Ax_0\beta + V_0 u^{2\gamma} V_\gamma(\beta/u), \tag{151}$$

$$1 - \mathcal{U}(\beta + y, \beta) \sim 2Ax_0\beta + V_0 y^{2\gamma} \cos(\pi\gamma) \mathcal{U}_\gamma(\beta/y), \tag{152}$$

где

$$V_\gamma(s) = (1 + s^2)^{\gamma+1/2} \sin((2\gamma + 1)\operatorname{arctg}(1/s))/\cos\pi\gamma,$$
$$\mathcal{U}_\gamma(s) = [(1 + 2s)^{2\gamma+1} + \cos 2\pi\gamma]/2(1 + s)\cos^2\pi\gamma.$$

Для доплеровского профиля получается

$$1 - V(u, \beta) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\beta x_{\mathrm{D}}(q) + \left(\frac{u^2 - \beta^2}{u} \operatorname{arctg}\frac{u}{\beta} + \beta\right) \frac{1}{4x_{\mathrm{D}}(q)}\right], \tag{153}$$

$$1 - \mathcal{U}(p, \beta) \sim \frac{1}{2p\sqrt{\pi}} \left[(\beta + p)^2 x_{\mathrm{D}}(\beta + p) - (\beta - p)^2 x_{\mathrm{D}}(|\beta - p|)\right] + \frac{1}{8p\sqrt{\pi}} \left[\frac{(\beta + p)^2}{x_{\mathrm{D}}(\beta + p)} - \frac{(\beta - p)^2}{x_{\mathrm{D}}(|\beta - p|)}\right]. \tag{154}$$

Здесь $q = \sqrt{u^2 + \beta^2}$. На линии ветвления вместо p надо подставить y.

Таким образом, мы привели асимптотики всех функций, которые входят в точные решения основных интегральных уравнений. Теперь можно обратиться к самим этим решениям.

§ 4.6. Асимптотические формулы для точных решений

1. Бесконечная среда. Из функций, характеризующих перенос излучения в линии, для которых получены точные выражения, рассмотрим резольвентные функции бесконечной и полубесконечной сред $\Phi_\infty(\tau), \Phi(\tau)$, а также H-функцию. Начнем с бесконечной среды, причем ограничимся случаем $\gamma < 1$ и $\beta = 0$.

Подставив асимптотики (119) и (133) в выражение для резольвентной функции, найдем для больших оптических глубин

$$\Phi_\infty(\tau) \sim \frac{\Lambda^{2\gamma-1}}{\lambda V_0}\Phi_\infty^{\text{as}}(\tau/\Lambda), \tag{155}$$

где величина Λ определяется формулой

$$\Lambda = \left[\frac{\lambda V_0}{1-\lambda}\right]^{1/2\gamma}, \tag{156}$$

а асимптотическая функция

$$\Phi_\infty^{\text{as}}(Q) = \int\limits_0^\infty R_\gamma(y)e^{-Qy}\mathrm{d}y, \tag{157}$$

где

$$R_\gamma(y) = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}\frac{y^{2\gamma}}{1+2y^{2\gamma}\cos(\pi\gamma)+y^{4\gamma}}. \tag{158}$$

При почти консервативном рассеянии множитель λ при V_0 в (156) можно опустить.

Если $Q \to 0$, то

$$\Phi_\infty^{\text{as}}(Q) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{2\cos(\pi\gamma)\Gamma(2\gamma)Q^{1-2\gamma}}, \ \gamma < 1/2, \\ \dfrac{1}{\pi}\ln\dfrac{1}{Q}, \ \gamma = 1/2, \\ \dfrac{1}{2\gamma\sin(\pi/2\gamma)}, \ \gamma > 1/2. \end{cases} \tag{159}$$

Соответственно этому при $\lambda \to 1$ (тогда $\Lambda \to \infty$, $Q \to 0$) функция $\Phi_\infty^{\text{as}}(Q) \to \infty$, если $\gamma \geq 1/2$. Это означает, что при таких профилях поглощения создание стационарного поля излучения в бесконечной среде с плоским источником при консервативном рассеянии невозможно: оно бесконечно велико, как и при монохроматическом рассеянии. Если процесс излучения первичных фотонов плоскостью в бесконечной среде начался в какой-то момент, то эти фотоны не исчезают и не выходят из среды. Поэтому излучение будет только усиливаться и его интенсивность станет бесконечной. На практике такое невозможно, так как с усилением излучения начнут включаться нелинейные процессы.

Значение $\gamma = 1/2$ является пограничным, разделяющим профили поглощения на два класса. При профилях, у которых $\gamma < 1/2$, т. е. имеющих протяженные крылья со степенным убыванием в крыле, стационарный режим в бесконечной среде возможен, так как фотоны уходят в бесконечные крылья и не накапливаются. В противном случае стационарный режим неосуществим. Более быстрое убывание профиля или обращение его в нуль при стационарных плоских источниках приводят к неограниченному накоплению фотонов в бесконечной среде.

В противоположном предельном случае $Q = \tau/\Lambda \gg 1$ имеем

$$\Phi_\infty^{\text{as}}(Q) \sim \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}\Gamma(1+2\gamma)/Q^{1+2\gamma}. \tag{160}$$

Величина Λ, введенная здесь формально, близка к определявшейся разными авторами длине термализации, о которой пойдет речь далее.

Теперь обратимся к полубесконечной среде. Рассмотрим отдельно H-функцию и резольвенту.

2. Асимптотики H-функции. В выражение для H-функции входит только функция $V(u)$. Пользуясь асимптотиками последней, очень просто вывести асимптотические формулы для $H(p)$ при $|p| \ll 1$, причем p можно считать и комплексным.

Используя формулу (140), находим, что при любых ζ выполняется свойство асимптотической автомодельности:

$$H(p) \sim \Lambda^\gamma(\lambda V_0)^{-1/2}h(p\Lambda), \tag{161}$$

где асимптотическая функция

$$h(q) = \exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \ln[1+(qu)^{2\gamma}]\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\right\}. \tag{162}$$

Эта функция обладает важным свойством

$$h(1/q) = q^\gamma h(q), \tag{163}$$

с помощью которого значения ее при $q > 1$ выражаются через ее же значения при $q < 1$.

При $\zeta > 1$ величина $\gamma = 1$ и, следовательно, в диффузионном режиме

$$h(q) = 1/(1+q),\ H(p) \sim \Lambda(\lambda V_0)^{-1/2}/(1+p\Lambda). \tag{164}$$

3. Асимптотики резольвентной функции. Эти асимптотики написать теперь не составляет труда, так как выражение для резольвентной функции полубесконечной среды содержит тот же интеграл, что и $\Phi_\infty(\tau)$, но под интегралом добавляется множитель $1/H(y)$. Асимптотики всех входящих в этот интеграл функций уже приведены. Поэтому находим

$$\Phi(\tau) \sim \Lambda^{\gamma-1}(\lambda V_0)^{-1/2}\Phi_{\rm as}(\tau/\Lambda), \tag{165}$$

где асимптотическая функция имеет вид

$$\Phi_{\rm as}(Q) = \int\limits_0^\infty R_\gamma(y)e^{-Qy}\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}. \tag{166}$$

Так как при больших Q в этот интеграл основной вклад дают малые y, а при малых Q — большие y, то

$$\Phi_{\rm as}(Q) \sim \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}\dfrac{\Gamma(1+2\gamma)}{Q^{1+2\gamma}} & \text{при} \quad Q \gg 1, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\gamma)Q^{1-\gamma}} & \text{при} \quad Q \ll 1. \end{cases} \tag{167}$$

Отметим, что функция $\Phi(\tau)$ в отличие от $\Phi_\infty(\tau)$ всегда имеет смысл, в том числе и при консервативном рассеянии. Бесконечному накоплению фотонов в среде препятствует их выход через границу.

Обратимся к двум предельным случаям.

4. Почти чистое поглощение и консервативное рассеяние. В этом пункте подробнее рассмотрим два противоположных случая: когда вероятность выживания фотона мала, точнее не близка к 1, и когда она равна 1. Для простоты считаем, что континуум отсутствует. Соответствующие асимптотические формулы можно получить непосредственно из точных или же из общих асимптотических формул.

Если $\tau \gg 1$, а $1-\lambda$ не мало, точнее если $\tau \gg \Lambda$, то из формул (155) и (165), воспользовавшись асимптотиками (160) и (167), находим

$$\Phi_\infty(\tau) \sim \frac{\lambda K_{\rm as}(\tau)}{(1-\lambda)^2}, \quad \Phi(\tau) \sim \frac{\lambda K_{\rm as}(\tau)}{(1-\lambda)^{3/2}}. \tag{168}$$

Для вывода консервативных асимптотик достаточно положить в точных выражениях $\lambda = 1$ и применить уже использованную процедуру получения асимптотик. Те же результаты получатся, если перейти к пределу при $\lambda \to 1$ в формулах (155), (161) и (165). Так, для бесконечной среды из формулы (155) при $\tau \to \infty$ и $\gamma < 1/2$ (которые только и возможны) находим

$$\Phi_\infty(\tau) \sim \frac{1}{2V_0\cos\pi\gamma\,\Gamma(2\gamma)\tau^{1-2\gamma}}. \tag{169}$$

Аналогично для полубесконечной среды, но при любых ζ имеем

$$H(p) \sim H_{\rm as}(p) = V_0^{-1/2}p^{-\gamma},\ p \to 0, \tag{170}$$

$$\Phi(\tau) \sim \Phi_{\rm as}(\tau) = V_0^{-1/2}/\Gamma(\gamma)\tau^{1-\gamma},\ \tau \to \infty. \tag{171}$$

Отметим, что $\Phi(\tau)$ в случае консервативного рассеяния при $\zeta > 1, \gamma = 1$ на больших глубинах близка к постоянной, что хорошо известно из теории монохроматического рассеяния.

5. Длина термализации. Из приведенных формул следует, что при $\tau \ll \Lambda$ рассеяние происходит, как будто λ в точности равно 1 и истинное поглощение несущественно. Если же τ сравнимо с Λ, то поглощение включается в процесс рассеяния, а на очень больших τ резольвентные функции пропорциональны ядерной функции. Величина Λ разделяет две области глубин.

Указанное свойство рассеяния в линии можно проиллюстрировать следующим образом. Рассмотрим функцию

$$\Psi(\tau) = \Psi(\tau, 0) = 1 + \int\limits_0^\tau \Phi(\tau')\mathrm{d}\tau'. \tag{172}$$

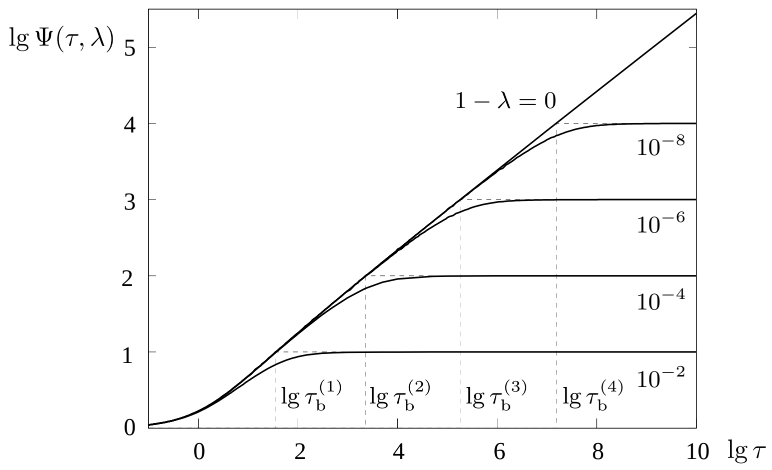


Рис. 6. Функция $\Psi(\tau,\lambda)$ для доплеровского профиля при значениях $1-\lambda = 10^{-2n}$, $n = 1(1)4$.

Ясно, что $\Psi(0) = 1$, а при больших значениях аргумента и $\lambda < 1$ эта функция близка к своему значению на бесконечности, равному $1/\sqrt{1-\lambda}$. В то же время при чистом рассеянии

$$\Psi(\tau) \sim \frac{\tau^{\gamma}}{V_0^{1/2}\Gamma(1+\gamma)}. \tag{173}$$

На рис. 6 представлены графики этой функции для ряда значений $1-\lambda$, вычисленные при доплеровском профиле поглощения. Значения аргумента τ_{b} функции Ψ при чистом рассеянии, при котором она равна асимптотическому значению такой же функции при почти консервативном рассеянии, т. е. $\Psi(\tau_{\mathrm{b}}) = 1/\sqrt{1-\lambda}$, очень близки к Λ. Действительно, при $1-\lambda \ll 1$ можно воспользоваться асимптотикой (173) и получить оценку

$$\tau_{\mathrm{b}} \sim \left(\frac{V_0}{1-\lambda}\right)^{1/2\gamma} [\Gamma(1+\gamma)]^{1/\gamma}, \tag{174}$$

что отличается от (156) на множитель порядка 1.

Такое совпадение оправдывает название величины Λ, введенной формально. Ввиду того, что функция $\Psi(\tau)$ определяется уравнением

$$\Psi(\tau) = \sqrt{1-\lambda} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\infty} K(|\tau-\tau'|)\Psi(\tau')\mathrm{d}\tau', \tag{175}$$

произведение $\sqrt{1-\lambda}\Psi(\tau)$ является отношением функции источников в задаче о изотермической среде к функции Планка, вычисленной для частоты линии при температуре среды. При $\tau \to \infty$ это произведение стремится к 1, т. е. указанная функция источников становится равной функции Планка, что называется термализацией. Таким образом, длина термализации — это пограничное значение оптической глубины. На расстояниях от границы, существенно больших его, происходит термализация атомов и излучения. Возбуждение определяется формулой Больцмана, и излучение становится чернотельным. Напротив, спад функции $\Psi(\tau)$ к границе среды вследствие выхода излучения происходит также на расстояниях порядка τ_{b}, так что эта величина характеризует толщину пограничного слоя.

Заметим, что если определить тем же способом величину τ_{b} для монохроматического рассеяния, то согласно формуле (104) из главы 3 получится $\tau_{\mathrm{b}} \sim 1/\sqrt{3(1-\lambda)} \sim 1/k$, что согласуется с асимптотикой (174) при $\gamma = 1$. Таким образом, при рассеянии с ППЧ при прямоугольном профиле или обращающемся в нуль на конечном расстоянии с $æ_1 < 1$ (тогда $\gamma = 1$) длина термализации возрастает с приближением к консервативному рассеянию медленнее, чем в случае линии с бесконечными крыльями или при $æ_1 > 1$.

При наличии поглощения в континууме, т. е. при $\beta > 0$, также можно получить асимптотические выражения для рассматриваемых функций, однако они гораздо более сложные, и мы их не приводим. Отметим лишь следующее. Ядерная функция содержит произведение $\beta\tau$. Такое же произведение войдет и в выражения для резольвентных функций. При $0 < \gamma < 1$ в асимптотики входят две масштабные величины Λ и $1/\beta$. Более важна та, которая больше. Если $\lambda = 1$, то при $\gamma < 1/2$ остается одна $1/\beta$, а при $\gamma > 1/2$ будет $\Lambda \sim 1/\sqrt{\beta} \ll 1/\beta$. Для объединения указанных двух случаев можно ввести обобщенную длину термализации

$$\Lambda_{\beta} = \left[\frac{\lambda V_0}{1-\lambda+\lambda\Delta(\beta)}\right]^{1/2\gamma}. \tag{176}$$

Такая комбинация λ и β, если $\gamma < 1/2$, переходит в (156) при $1-\lambda \gg \Delta(\beta)$, в $1/\beta$ в противоположном случае и отличается от длины термализации, определяемой в разных статьях, лишь на численный множитель. Когда же $\gamma > 1/2$, выражения (156) и (176) для длины термализации практически равносильны.

Можно сказать, что физический смысл длины термализации (176) заключается в следующем: это расстояние, на котором рожденный фотон гибнет в результате непереизлучения в линии или поглощения на пути. Расстояние это безразмерно, так как измеряется в длинах свободного пробега фотонов в центре линии. Физический смысл произведения $\beta\tau$ ясен: это расстояние, измеренное в средних длинах свободного пробега фотона в континууме.

Подчеркнем следующие из приведенных асимптотик факты. При $\gamma \geq 1/2$ отсутствует решение задачи о плоском стационарном источнике в бесконечной консервативной среде, а в асимптотических областях решения зависят от комбинаций переменных: от τ/Λ и $\beta\tau$.

Более подробно асимптотическая теория изложена в книге [31] и обзорах [54,57]. Отметим также, что асимптотики резольвентных функций бесконечной среды были получены в статье [35]. В работе [58] для доплеровского и лоренцевского профилей вычислены функции $\Phi_\infty(\tau)$, $\Phi_\infty^{\mathrm{as}}$ и по ним была оценена точность асимптотик, которая оказалась достаточно хорошей. Асимптотика (161) была впервые выведена в работе [34], там же была оценена ее погрешность для доплеровских функций. Точность фойгтовских асимптотик оценивались в [50]. Асимптотики резольвентных функций при наличии непрерывного поглощения выведены в публикации [48].

§ 4.7. Приближенные решения

1. Метод вынесения. В настоящем параграфе изложим известные и широко применяемые в теории приближенные решения основного интегрального уравнения переноса излучения в спектральной линии при полном перераспределении по частоте

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int_{\tau_*}^{\tau_0} K(|\tau-\tau'|)S(\tau')\mathrm{d}\tau'. \tag{177}$$

Сначала к этому уравнению пытались применять приближенные методы, которые применялись при монохроматическом рассеянии и изложены в главе 2. Однако они давали плохие результаты, не согласующиеся с физикой задачи. Первый адекватный задаче метод был предложен авторами самого приближения ППЧ [6,71] и носит название *метода Бибермана—Соболева*, или *метода вынесения*.

Этот метод заключается в том, что искомая функция источников в уравнении (177) выносится из-под интеграла в точке $\tau' = \tau$. Тогда при отсутствии поглощения в непрерывном спектре

$$S(\tau) \approx \frac{S_0(\tau)}{1 - \dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int_{\tau_*}^{\tau_0} K(|\tau-\tau'|)\mathrm{d}\tau'}. \tag{178}$$

Выразим интегралы в знаменателе (178) через интеграл от ядерной функции — функцию $L(\tau)$:

$$\int_{\tau_*}^{\tau_0} K(|\tau-\tau'|)\mathrm{d}\tau' = \int_0^{\tau-\tau_*} K(\tau')\mathrm{d}\tau' + \int_0^{\tau_0-\tau} K(\tau')\mathrm{d}\tau' = 2 - L(\tau-\tau_*) - L(\tau_0-\tau). \tag{179}$$

Окончательно

$$S(\tau) \approx \frac{S_0(\tau)}{1-\lambda+\dfrac{\lambda}{2}[L(\tau-\tau_*)+L(\tau_0-\tau)]}. \tag{180}$$

Такое очень простое решение, для вычисления которого достаточно знать только одну функцию, является неплохим приближением к точному решению в глубине слоя, т. е. в точках, далеких от границ. Около границ точность решения резко падает, однако это решение дает возможность вычислять величины, выражающиеся через интегралы от функции источников (глобальные) и, в частности, интенсивность излучения в крыльях линии.

Метод применялся и при учете поглощения в континууме. Для бесконечной среды ($\tau_0 = -\tau_* = \infty$) в этом случае метод вынесения дает приближенную формулу для функции источников

$$S(\tau) \approx \frac{S_0(\tau)}{1-\lambda[1-\Delta(\beta)]}. \tag{181}$$

Для плоского слоя метод вынесения приводит к формуле

$$S(\tau) = \frac{S_0(\tau)}{1 - \lambda + \dfrac{\lambda}{2}[P(\tau,\beta) + P(\tau_0 - \tau,\beta)]}, \tag{182}$$

где

$$P(\tau,\beta) = \Delta(\beta) + L(\tau,\beta),\ L(\tau,\beta) = \int\limits_{\tau}^{\infty} K(\tau',\beta)\mathrm{d}\tau'. \tag{183}$$

В случае полубесконечной среды следует положить $\tau_0 = \infty$.

Описанную процедуру получения приближенного решения называют также “on the spot approximation” или вероятностным методом. Последнее название отражает вероятностный смысл ядерной функции, которая является плотностью вероятности того, что фотон, излученный на некоторой глубине, дойдет до глубины, отстоящей от первой на τ, и там поглотится. Поэтому знаменатель в (182) есть вероятность того, что поглощенный на глубине τ фотон либо не переизлучится в линии, либо будет поглощен в континууме, либо дойдет до одной из границ слоя и выйдет из среды.

Впоследствии, после развития асимптотической теории, был предложен существенно более точный приближенный метод.

2. Более точное решение для полубесконечной среды. Рассмотрим уравнение

$$N(\tau,\tau_0) = 1 + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|)N(\tau',\tau_0)\mathrm{d}\tau'. \tag{184}$$

Определяемая им функция $N(\tau,\tau_0)$ при $\tau_0 = \infty$ и $\beta = 0$ выражается через уже рассматривавшуюся функцию $\Psi(\tau)$:

$$N(\tau) = N(\tau,\infty) = \Psi(\tau)/\sqrt{1-\lambda}, \quad \Psi(\tau) = 1 + \int\limits_0^{\tau} \Phi(\tau')\mathrm{d}\tau'. \tag{185}$$

Воспользуемся свойствами функции $\Psi(\tau)$, о которых говорилось в предыдущем параграфе.

Поскольку асимптотика функции $L(\tau) \sim A_*\Gamma(2\gamma)/\tau^{2\gamma}$, то согласно формуле (173) с точностью до множителя порядка единицы можно записать $\Psi(\tau) \approx 1/\sqrt{L(\tau)}$. Из этой формулы и приведенных выше частных значений функции $\Psi(0) = 1$, $\Psi(\infty) = 1/\sqrt{1-\lambda}$ вытекают эмпирические подгоночные формулы [33]

$$\Psi(\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{1-\lambda+\lambda L(\tau)}}, \quad N(\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{1-\lambda+\lambda L(\tau)}}, \tag{186}$$

Заметим, что формула (186) является эмпирическим уточнением метода вынесения для слоев, близких к границе. Действительно, по этому методу мы бы получили

$$\Psi(\tau) \approx \frac{\sqrt{1-\lambda}}{1-\lambda+\dfrac{\lambda}{2}L(\tau)} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}+\dfrac{\lambda}{2}\dfrac{L(\tau)}{\sqrt{1-\lambda}}}. \tag{187}$$

Видно, что формулы (186) и (187) совпадают, если на больших глубинах, там где $L(\tau) \ll 1-\lambda$, вынести $1-\lambda$ из-под корня, а затем разложить оставшийся корень по формуле Тейлора для малой величины — отношения $L(\tau)/(1-\lambda)$. Заметим также, что если приравнять указанное отношение единице, т. е. положить

$$\frac{\lambda}{2}L(\tau_{\mathrm{t}}) \sim A_*\frac{\Gamma(2\gamma)}{\tau_{\mathrm{t}}^{2\gamma}} = 1-\lambda, \tag{188}$$

то соответствующее значение оптической глубины

$$\tau_{\mathrm{t}}^{\gamma} = \sqrt{A_*\frac{\Gamma(2\gamma)}{1-\lambda}} = \sqrt{2\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}V_0\frac{\Gamma(2\gamma)}{1-\lambda}} \tag{189}$$

с точностью до множителя порядка единицы совпадет с длиной термализации Λ.

Выведенное приближенное представление (186) интеграла от резольвентной функции позволяет получить приближение и к самой этой функции [33]:

$$\Phi(\tau) \approx \frac{\mathrm{d}\Psi(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\lambda}{2}\frac{K(\tau)}{[1-\lambda+\lambda L(\tau)]^{3/2}}. \tag{190}$$

Оно согласуется с асимптотикой при сильном истинном поглощении — второй формулой в (168).

3. Конечный слой. Далее приближение формально распространяется и на случай поглощения в континууме, и на плоский слой. Ввиду симметричности функции $N(\tau,\tau_0)$ относительно середины слоя приближенное решение уравнения (184) можно записать в виде

$$N(\tau,\tau_0)\approx\frac{1}{\sqrt{1-\lambda+\lambda P(\tau,\beta)}\sqrt{1-\lambda+\lambda P(\tau_0-\tau,\beta)]}}. \tag{191}$$

Формула для резольвентной функции получается независимо, так как для плоского слоя функция $N(\tau,\tau_0)$ не определяется формулой (185):

$$\Phi(\tau,\tau_0)\approx\frac{\lambda}{2}\frac{K(\tau,\beta)}{[1-\lambda+\lambda P(\tau,\beta)]^{3/2}}\sqrt{\frac{1-\lambda+\lambda P(\tau_0,\beta)}{1-\lambda+\lambda P(\tau_0-\tau,\beta)}}. \tag{192}$$

Сравнение с результатами расчетов по точным формулам и при помощи численных методов показало, что приближенные формулы (191) и (192) во многих случаях дают достаточную точность. Обычная ошибка не превосходит нескольких процентов. Лишь в самых неблагоприятных ситуациях погрешность достигает десятков процентов при изменении самих величин на многие порядки [63]. Указанные формулы с гарантией можно использовать при расчетах полей излучения в средах, где излучение играет не основную роль, и в любых средах для оценки этой роли.

§ 4.8. Метод масштабирования

1. Масштабирование переменных. В этом параграфе изложим еще один метод нахождения асимптотических представлений решений уравнения переноса излучения. Метод был разработан и широко применялся группой французских теоретиков [92,95].

Рассмотрим для простоты только бесконечные среды, рассеяние в линии с $\gamma<1/2$ и без поглощения в континууме, так что параметрами задачи являются величины λ и $\gamma<1/2$. Предполагаем, что рассеяние близко к консервативному, т. е. $1-\lambda\ll 1$.

Метод заключается во введении некоторого множителя $\widetilde{\tau}$ в оптическую глубину, т. е. в измерении глубины не в средних свободных пробегах фотонов, а в единицах большей величины, а именно — произведении $\widetilde{\tau}$ на свободный пробег. Множители вводятся и в искомые величины. Затем указанные множители подбираются так, чтобы при $\lambda\to 1$ и $\tau\to\infty$, т. е. в асимптотической области, получалось осмысленное конечное (асимптотическое) уравнение.

Продемонстрируем применение этого метода на примере основных функций бесконечных сред. Основное уравнение для функции источников имеет вид

$$S(\tau)=S_0(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\tau_*}^{\infty}K(|\tau'-\tau|)S(\tau')\mathrm{d}\tau', \tag{193}$$

где $\tau_*=-\infty$ в случае бесконечной и $\tau_*=0$ в случае полубесконечной сред.

Преобразуем уравнение, вынеся из-под интеграла функцию источников в точке τ, как это было сделано в первом пункте предыдущего параграфа. Однако не отбрасывая точного интеграла, вычтем и добавим результат вынесения. Получится

$$S(\tau)\left(1-\lambda+\frac{\lambda}{2}L(\tau-\tau_*)\right)=S_0(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\tau_*}^{\infty}K(|\tau'-\tau|)[S(\tau')-S(\tau)]\mathrm{d}\tau'. \tag{194}$$

Здесь $L(\tau)$ — интеграл от ядерной функции (127).

В результате такого преобразования вклад в интеграл области интегрирования по τ' около $\tau\gg 1$ будет мал. Поэтому можно принять, что $|\tau'-\tau|\gg 1$ и вместо точного выражения для ядерной функции $K(\tau)$ подставить ее асимптотику (126) при $\zeta=\gamma$. Учтем также асимптотику функции $L(\tau)$, появляющейся в случае полубесконечной среды. Тогда уравнение (194) перейдет в асимптотическое:

$$S(\tau)\left(1-\lambda+\frac{\lambda}{2}A_*\frac{\Gamma(2\gamma)}{(\tau-\tau_*)^{2\gamma}}\right)=S_0(\tau)+\frac{\lambda}{2}\Gamma(2\gamma+1)A_*\int\limits_{\tau_*}^{\infty}\frac{S(\tau')-S(\tau)}{|\tau'-\tau|^{2\gamma+1}}\mathrm{d}\tau'. \tag{195}$$

Теперь обратимся к масштабированию. В качестве основного аргумента вместо оптической глубины вводится масштабированная глубина, измеряемая в единицах некоторой величины $\widetilde{\tau}$, которая зависит от λ:

$$Q = \frac{\tau}{\widetilde{\tau}}. \tag{196}$$

В свою очередь масштабируем и функцию источников, т. е. представляем функцией от масштабированного аргумента Q, имеющей дополнительный множитель, который зависит от $\widetilde{\tau}$:

$$S(\tau) = F_{\mathrm{S}}(\widetilde{\tau})S_{\mathrm{as}}(\tau/\widetilde{\tau}). \tag{197}$$

Масштабированию подлежит и мощность источников:

$$S_0(\tau) = F_0(\widetilde{\tau})S_0^{\mathrm{as}}(\tau/\widetilde{\tau}). \tag{198}$$

После масштабирования в уравнении подбираются множители F_{S}, F_0 и $\widetilde{\tau}$ таким образом, чтобы при стремлении $\lambda \to 1$ получался конечный результат.

Можно производить масштабирование не только функций источников, но и функций, определяемых другими уравнениями. Рассмотрим отдельно бесконечную и полубесконечную среды.

2. Бесконечная среда. Рассмотрим уравнение для резольвентной функции бесконечной среды, т. е. уравнение вида (193) с $\tau_* = -\infty$ и $S_0(\tau) = (\lambda/2)K(\tau)$. Здесь свободным слагаемым является сама ядерная функция. Заметим, что преобразование уравнения, проделанное выше, сводится к подстановке вместо ядерной функции суммы

$$K(\tau) = 2\delta(\tau) + \Gamma(2\gamma+1)\frac{A_*}{\tau^{2\gamma+1}}, \tag{199}$$

где второе слагаемое — ее асимптотика. Первое слагаемое соответствует вынесению функции в точке τ. Оно же согласуется с асимптотикой преобразования Фурье (134), так как преобразование от δ-функции равно 1.

Такую же подстановку естественно сделать и в свободном слагаемом. Тогда асимптотическое уравнение (195) после масштабирования резольвентной функции

$$\Phi_\infty(\tau) = F_\infty(\widetilde{\tau})\Phi_\infty^{\mathrm{as}}(\tau/\widetilde{\tau}) \tag{200}$$

примет вид

$$(1-\lambda)F_\infty(\widetilde{\tau})\Phi_\infty^{\mathrm{as}}(Q) = \lambda\left[\frac{1}{\widetilde{\tau}}\delta(Q) + \frac{A_*}{2}\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{(Q\widetilde{\tau})^{2\gamma+1}}\right] + \frac{\lambda}{2}A_*\Gamma(2\gamma+1)\frac{F_\infty(\widetilde{\tau})}{\widetilde{\tau}^{2\gamma}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_{\mathrm{as}}(Q') - \Phi_{\mathrm{as}}(Q)}{|Q'-Q|^{2\gamma+1}}\mathrm{d}Q. \tag{201}$$

Из полученного уравнения видно, что для сохранения его смысла следует положить $F_\infty(\widetilde{\tau}) \propto \widetilde{\tau}^{2\gamma-1}$, а масштаб выбрать так, чтобы было $\widetilde{\tau}^{2\gamma} \propto 1/(1-\lambda)$. Ясно, что при $\lambda \to 1$ масштаб стремится к бесконечности. Поэтому второе слагаемое в квадратных скобках в (201) можно опустить, а перед δ-функцией λ заменить на 1. Тогда получится асимптотическое уравнение. На этом процесс масштабирования заканчивается. Однако мы его продолжим с целью отождествить результаты с полученными в § 4.6.

Представим асимптотику ядерной функции через параметр V_0, т. е. запишем равенство (199) в виде

$$K(\tau) = 2\delta(\tau) + 2V_0K_{\mathrm{as}}(\tau), \quad K_{\mathrm{as}}(\tau) = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\tau^{2\gamma+1}}. \tag{202}$$

Масштаб $\widetilde{\tau}$ можно отождествить с длиной термализации

$$\widetilde{\tau} = \Lambda = \left(\frac{\lambda V_0}{1-\lambda}\right)^{1/2\gamma}. \tag{203}$$

Тогда асимптотика резольвентной функции примет вид (155), а асимптотическое уравнение —

$$\Phi_\infty(Q) = \delta(Q) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{\mathrm{as}}(Q)[\Phi_{\mathrm{as}}(Q') - \Phi_{\mathrm{as}}(Q)]\mathrm{d}Q. \tag{204}$$

Асимптотическая функция (157) удовлетворяет этому уравнению.

3. *H*-функция. Перейдем к полубесконечной среде и ограничимся, как и выше, простейшим случаем, когда $\beta = 0$, $0 < \gamma \le 1/2$. Начнем с асимптотики H-функции.

Для масштабирования H-функции можно исходить из разных уравнений. Например, из линейного в форме (46) из главы 3. Подставив в него при $\beta = 0$ асимптотику (119) функции $A(y)$ и подобрав множители к аргументу и функции, убедимся, что $H(p)$ имеет асимптотическую форму (161), а асимптотическая функция $h(q)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[1 + \frac{q^{2\gamma} + (-q)^{2\gamma}}{2\cos(\pi\gamma)}\right] h(q) = 1 - \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} q \int\limits_0^\infty (y)^{2\gamma-1} h(y) \frac{\mathrm{d}y}{y-q}. \tag{205}$$

На вещественной полупрямой это уравнение трансформируется в уравнение

$$[1 + y^{2\gamma}\cos(\pi\gamma)]h(q) = 1 - \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} y \int\limits_0^\infty (y')^{2\gamma-1} h(y') \frac{\mathrm{d}q'}{y'-y}, \tag{206}$$

где теперь интеграл справа понимается в смысле главного значения.

Аналогично можно исходить из нелинейного уравнения (см. равенство (47) из главы 3 при $\beta = 0$) и получить, что асимптотическая функция $h(q)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{h(q)} = 1 + \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} q \int\limits_0^\infty (y)^{2\gamma-1} h(y) \frac{\mathrm{d}y}{y+q}. \tag{207}$$

Выполняется для функции $h(q)$ и асимптотическая форма соотношения Винера—Хопфа

$$h(q)h(-q)\left[1 + \frac{q^{2\gamma} + (-q)^{2\gamma}}{2\cos(\pi\gamma)}\right] = 1. \tag{208}$$

4. Резольвентная функция полубесконечной среды. Масштабирование этой функции исходя непосредственно из интегрального уравнения затруднено. Как и в случае H-функции, в уравнении должен присутствовать корень $\sqrt{1-\lambda}$. Поэтому целесообразнее исходить из уравнения (175) для функции $\Psi(\tau)$, которая согласно определению (172) является интегралом от резольвентной функции $\Phi(\tau)$:

$$\Psi(\tau) = 1 + \int\limits_0^\tau \Phi(\tau')\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - \int\limits_\tau^\infty \Phi(\tau')\mathrm{d}\tau'. \tag{209}$$

В уравнении (175) можно сделать преобразование, связанное с вынесением значения $\Psi(\tau)$ из-под знака интеграла. В результате получится

$$\Psi(\tau)\left[1 - \lambda + \frac{\lambda}{2}L(\tau)\right] = \sqrt{1-\lambda} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty K(|\tau'-\tau|)[\Psi(\tau') - \Psi(\tau)]\mathrm{d}\tau'. \tag{210}$$

Асимптотическая форма этого уравнения, т. е. уравнение для функции, через которую выражается асимптотика

$$\Psi(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \Psi_{\mathrm{as}}(\tau/\Lambda), \tag{211}$$

имеет вид

$$\Psi_{\mathrm{as}}(Q)\left[1 + \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}\frac{\Gamma(2\gamma)}{Q^{2\gamma}}\right] = 1 + \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}\Gamma(2\gamma+1)\int\limits_0^\infty \frac{\Psi_{\mathrm{as}}(Q') - \Psi_{\mathrm{as}}(Q)}{|Q'-Q|^{2\gamma+1}}\mathrm{d}Q' \tag{212}$$

или в обозначениях (202)

$$\Psi_{\mathrm{as}}(Q)\left[1 + \frac{K_{\mathrm{as}}(Q)}{2\gamma}\right] = 1 + \int\limits_0^\infty K_{\mathrm{as}}(|Q'-Q|)[\Psi_{\mathrm{as}}(Q') - \Psi_{\mathrm{as}}(Q)]\mathrm{d}Q'. \tag{213}$$

Функция $\Psi_{\mathrm{as}}(Q)$, определяемая этим уравнением, связана с асимптотической функцией $\Phi_{\mathrm{as}}(Q)$, через которую выражается асимптотика резольвентной функции согласно (165), соотношением

$$\Psi_{\mathrm{as}}(Q) = 1 - \sqrt{1-\lambda}\frac{\Lambda^{\gamma-1}}{\sqrt{\lambda V_0}}\int\limits_\tau^\infty \Phi_{\mathrm{as}}\left(\frac{\tau'}{\Lambda}\right)\mathrm{d}\tau' = 1 - \int\limits_Q^\infty \Phi_{\mathrm{as}}(Q')\mathrm{d}Q'. \tag{214}$$

Функция $\Phi_{\text{as}}(Q')$ имеет явное выражение (166).

Таким образом, мы продемонстрировали применение метода масштабирования на примере основных функций бесконечной и полубесконечной сред. Опыт получения асимптотик из точных решений позволил уточнить формы асимптотических уравнений. Решения этих асимптотических уравнений известны и были приведены в § 4.6.

Таким образом, метод масштабирования приводит к тем же функциональным зависимостям решений, что и асимптотическая теория, основанная на резольвентном методе. Получающиеся асимптотические уравнения могут быть также выведены из точных, а их решения, т. е. асимптотические функции, — из точных формул. Однако, метод масштабирования требует значительно меньших сведений о решениях и быстрее приводит к выяснению структуры решений. Кроме того, он обладает большей общностью и может быть применен в случаях, когда точные методы не дают результата. Пример такого применения метода масштабирования будет приведен в следующей главе.

§ 4.9. Численные методы

1. Метод Крылова—Боголюбова. В заключение этой главы кратко назовем некоторые численные методы, применявшиеся для решения задач переноса излучения в спектральной линии.

Выше отмечались трудности, возникающие при численном решении уравнений вида (177) при больших τ_0 и $1-\lambda \ll 1$, $\beta \ll 1$. Для преодоления этих трудностей были созданы специальные численные методы.

Метод Крылова—Боголюбова является продолжением метода вынесения [103]. Весь промежуток $[0,\tau_0]$ разбивается на n частичных промежутков и в каждом из них выбирается значение оптической глубины τ_j, $j=1,...,n$. Функция источников выносится из-под интеграла не в одной точке, а в выбранном наборе. Те же значения τ_j подставляются и в качестве внешних аргументов функции $S(\tau)$. В результате получается линейная система алгебраических уравнений, которую можно решать каким-либо методом, приспособленным для случаев плохо обусловленных систем (с малым определителем). Метод равносилен применению формулы прямоугольников для вычисления интеграла, т. е. представлению искомой функции кусочно постоянной. Можно представить функцию кусочно линейной или кусочно квадратичной и добиться лучшей точности.

2. Метод дискретных ординат. Метод заключается в представлении ядерной функции не в виде суперпозиции, т. е. интеграла от экспонент, а в виде конечной суммы экспонент. Число слагаемых в сумме определяется требуемой точностью. Тогда, как в том же методе в случае монохроматического рассеяния, дело сводится к решению системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [89].

3. Метод ускоренных итераций. Медленно сходящиеся итерации уравнения (177) можно ускорить, если вместо точного ядра взять приближенное, для которого решение можно легко получить, например, указанными выше методами, или взять ядро, для которого приближенное решение является точным (оно подбирается) [105]. Затем вычисляется невязка с точным ядром и рассматривается как возмущение к уравнению с приближенным ядром. Процесс повторяется до сходимости. Еще один способ выбора приближенного ядра — подбор квадратурной формулы с небольшим числом узлов [106]. Обзор таких методов и их оценка дана в статье [64].

4. Метод прогонки. Этот метод применяется не к интегральному, а к дифференциальному уравнению переноса. Значительная трудность при его решении создается тем обстоятельством, что задаются не начальные, а граничные условия, так что надо решать не задачу Коши, а краевую задачу, что всегда сложнее. После дискретизации дифференциального уравнения по глубине, углам и частотам получающееся разностное уравнение решается сначала от верхней границы в сторону возрастающих глубин, а затем обратным ходом. Однако в первом случае не известна интенсивность излучения, идущего вверх, а во втором — вниз. Поэтому при прямом проходе находится решение не с определенным граничным значением интенсивности выходящего излучения, а рассчитываются обратные матрицы на случай как бы произвольных ее значений, причем заданных для всех значений углов. Затем решение выбирается так, чтобы удовлетворить условию на нижней границе [45]. После этого вычисляется интенсивность восходящего излучения. В теории переноса такая процедура, которая применяется для расчета как рассеяния в линии, так и при монохроматическом рассеянии, носит название *метода Фотрие.*

Изложение численных методов, применяемых в настоящее время, дано в книге Д. Михаласа [45] и обзорных статьях в сборнике [104].

Глава 5. Более сложные случаи рассеяния

В заключительной главе рассмотрим некоторые более сложные случаи рассеяния. Это рассеяние в полосах молекул, рассеяние в линии не с полным перераспределением по частоте и в движущихся средах, а также рассеяние монохроматического излучения с учетом поляризации. Кроме того, будут рассмотрены интегральные характеристики рассеяния, такие как среднее число рассеяний и средний проходимый фотоном путь.

§ 5.1. Перенос излучения в полосах молекул

1. Модель Эльзассера. Для молекулярных полос предложено несколько моделей распределения поглощения в них [24,61]. В общем случае, если составляющие полосу линии имеют центральные частоты ν_j, интенсивности K_j и профили $w_j(\xi)$, то полное поглощение в полосе представляется суммой

$$æ_\nu = \sum_j K_j w_j(\nu - \nu_j). \tag{1}$$

Модель заключается в выборе распределения параметров линий.

Одна из моделей предложена В. Эльзассером. Согласно ей считается, что полоса состоит из равноотстоящих одинаковых линий, т.е. имеющих один и тот же профиль и равные интенсивности $K_j = K$. Профиль принимается лоренцевским с шириной Δ_{L}. Расстояние между центрами линий обозначим d, так что $\nu_j = jd$. Полоса простирается в обе стороны по частоте безгранично. Частота отсчитывается от центра одной из линий. Тогда коэффициент поглощения в полосе представляется формулой

$$æ_\nu = \frac{K\Delta_{\mathrm{L}}}{\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\nu - jd)^2 + \Delta_{\mathrm{L}}^2}. \tag{2}$$

Ряд в этом выражении может быть просуммирован. Его сумма находится с помощью формулы, доказываемой на основании теоремы о вычетах.

Пусть $Q(z)$ — рациональная функция комплексного переменного z, причем знаменатель ее имеет степень, по крайней мере на два бóльшую, чем числитель. Обозначим нули знаменателя через z_j, $j = 1, 2, \ldots, N$. Приняв во внимание, что функция $\operatorname{ctg}(\pi z)$ имеет полюсы во всех целых числах с вычетами, равными $1/\pi$, вычислим интеграл от произведения $Q(z)\operatorname{ctg}(\pi z)$ по контуру окружности радиусом $n + 1/2$, содержащей внутри себя все полюсы функции $Q(z)$. Согласно теореме о вычетах этот интеграл равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов от полюсов, лежащих внутри окружности:

$$\oint\limits_{|z|=n+1/2} Q(z)\operatorname{ctg}\pi z \mathrm{d}z = 2\pi i \left[\frac{1}{\pi} \sum_{j=-n}^{n} Q(j) + \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{res}_{z=z_j} Q(z)\operatorname{ctg}(\pi z) \right]. \tag{3}$$

При $n \to \infty$ интеграл стремится к нулю по лемме Жордана и из (3) следует упомянутая формула [29]:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} Q(j) = -\pi \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{res}_{z=z_j} Q(z)(\operatorname{ctg}\pi z). \tag{4}$$

Возьмем $Q(z) = 1/[(\nu - zd)^2 + \Delta_{\mathrm{L}}^2]$ с полюсами $z_\pm = (\nu \pm i\Delta_{\mathrm{L}})/d$. Тогда согласно (4)

$$æ_\nu = -\frac{K}{\pi}\Delta_{\mathrm{L}}\pi \left[\frac{\operatorname{ctg}[(\nu + i\Delta_{\mathrm{L}})/d]}{2i\Delta_{\mathrm{L}}d} + \frac{\operatorname{ctg}[(\nu - i\Delta_{\mathrm{L}})/d]}{-2i\Delta_{\mathrm{L}}d} \right] = \frac{K}{2id} \frac{-\sin(2i\Delta_{\mathrm{L}}/d)}{[\cos(2\nu\pi/d) - \cos(2i\Delta_{\mathrm{L}}\pi/d)]/2}. \tag{5}$$

Окончательно получаем

$$æ_\nu = \frac{K}{d} \frac{\operatorname{sh}(2\Delta_{\mathrm{L}}\pi/d)}{\operatorname{ch}(2\Delta_{\mathrm{L}}\pi/d) - \cos(2\nu\pi/d)}. \tag{6}$$

Согласно модели Эльзассера коэффициент поглощения является периодической функцией частоты с периодом, равным расстоянию между линиями d.

Рассмотрим теперь более сложные модели.

2. Модель случайного распределения линий. Другая модель, в противовес модели Эльзассера, принимает, что поглощение распределено в полосе случайным образом, и дает статистическое ее описание [36].

Сначала заметим, что профили отдельных линий в полосе имеют малые ширины Δ_1 по сравнению с участком спектра Δ_2, на котором существенно изменяется функция Планка $B_\nu(T)$, т. е. $\Delta_1 \ll \Delta_2$.

Выделим из полосы некоторую ее часть шириной по частоте Δ. Очевидно, что эту ширину всегда можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 \ll \Delta \ll \Delta_2$. Найдем среднее поглощение на этом участке

$$\overline{\text{æ}} = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\Delta} \text{æ}_\nu \mathrm{d}\nu. \tag{7}$$

Положим $\text{æ}_\nu = \overline{\text{æ}}\alpha_\nu$. В выбранном участке спектра величина поглощения $\alpha_\nu = \alpha$ заключена в некоторых пределах, так что $\alpha_\mathrm{m} \le \alpha \le \alpha_\mathrm{M}$. Разобьем промежуток $[\alpha_\mathrm{m}, \alpha_\mathrm{M}]$ на целое число частей $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, $j = 1, 2, \ldots, J$, $\alpha_0 = \alpha_\mathrm{m}$, $\alpha_J = \alpha_\mathrm{M}$, и найдем доли промежутка Δ, в которых поглощение α на кривой меньше α_j, $j = 0, 1, \ldots J$. Вся кривая расположена не ниже α_0, т. е. указанная доля промежутка равна нулю. При α на кривой от α_0 до α_1 эта доля уже не нуль. При α на кривой от α_1 до α_2 поглощение меньше α_2, но то, которое меньше α_1, тоже меньше α_2, так что новая доля включает первую и т. д. Вся кривая лежит ниже α_J, так что доля промежутка, где поглощение меньше α_J достигает 1. Ясно, что эти доли составляют кусочно-постоянную неубывающую функцию от α, ограниченную 0 и 1. Сгладим ее, что равносильно бесконечному увеличению числа промежутков J. В результате получится неубывающая гладкая функция, изменяющаяся от нуля до 1. Если частоту выбирать случайным образом, то эта функция окажется интегральной функцией распределения вероятности величины поглощения. Тогда ее можно продифференцировать и получить дифференциальную функцию распределения поглощения в полосе $p(\alpha)$. Произведение $p(\alpha)\mathrm{d}\alpha$ есть доля участка спектра Δ, в которой величина α заключена между α и $\alpha + \mathrm{d}\alpha$. Очевидно, что

$$\int\limits_0^\infty p(\alpha)\mathrm{d}\alpha = 1, \tag{8}$$

причем формально интегрирование распространено на всю положительную часть вещественной оси. При этом считается, что вне промежутка изменения α плотность вероятности $p(\alpha) = 0$.

Далее в интеграле

$$\frac{1}{\overline{\text{æ}}} \int\limits_{\Delta} \text{æ}_\nu \frac{\mathrm{d}\nu}{\Delta} = \int\limits_{\Delta} \alpha_\nu \frac{\mathrm{d}\nu}{\Delta} = 1 \tag{9}$$

соберем вместе интервалы частот, где величина α находится в промежутке $[\alpha, \alpha + \mathrm{d}\alpha]$. Согласно изложенному их совместная длина равна $p(\alpha)\mathrm{d}\alpha$. Таким образом,

$$\int\limits_0^\infty \alpha p(\alpha)\mathrm{d}\alpha = 1. \tag{10}$$

В результате получается, что поглощение характеризуется не местом в спектре, а только величиной и долей участка спектра, где такая величина достигается.

3. Модели распределений поглощения. В теории переноса рассматривались различные модельные распределения $p(\alpha)$, в основном в связи с построением моделей атмосфер звезд и учетом влияния линий на распределение температуры в них. В случае серой атмосферы

$$p(\alpha) = \delta(\alpha - 1). \tag{11}$$

Чуть сложнее модель частокола Чандрасекара [85]:

$$p(\alpha) = p_1\delta(\alpha - \alpha_1) + p_2\delta(\alpha - \alpha_2). \tag{12}$$

Два условия (8) и (10) требуют выполнения двух соотношений:

$$p_1 + p_2 = 1, \quad \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = 1, \tag{13}$$

из которых следует, что

$$p_1 = \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad p_2 = \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{14}$$

Расположение же областей с двумя значениями коэффициента поглощения может быть произвольным. Можно ввести и большее число различных дискретных значений α.

Простым непрерывным распределением, удовлетворяющим обоим условиям (8) и (10), является $p(\alpha) = e^{-\alpha}$.

Одну из первых моделей несерого поглощения предложил В. А. Амбарцумян [2]. В противовес изложенному выше он выбрал периодическое расположение значений поглощения, но не накладывал ограничений на распределение их вероятностей.

Указанные модели не привязаны к определенному участку спектра и могут быть распространены на все частоты.

Заметим, что при построении моделей атмосфер холодных звезд (поверхностная температура ниже 6000 K) рассчитывались и использовались распределения, получающиеся при наложении спектров реальных молекул и атомов с миллионами линий [107]. Функция $p(\alpha)$ называлась функцией распределения вероятностей непрозрачности — OPDF — opacity probability distribution function.

4. Парциальная интенсивность. Процедуру собирания значений на участках с одинаковым уровнем поглощения можно проделать и с интенсивностью I_ν, что было предложено в работе [36].

Внутри выбранного участка спектра функция Планка и возможные другие источники первичного излучения от частоты не зависят. Поэтому величина интенсивности определяется только величиной поглощения, а не частотой. Напротив, близкие по частоте, но соответствующие разной величине коэффициента поглощения интенсивности могут очень сильно различаться. У фотонов близких частот могут быть очень различающиеся длины пробега. Поэтому в том же участке спектра Δ целесообразно объединить промежутки частот, в которых значения интенсивности соответствуют заданному уровню поглощения. В качестве примера рассмотрим задачу о чистом поглощении в плоской атмосфере.

Пусть в атмосфере происходит только истинное поглощение. Введем оптическую глубину τ, соответствующую некоторому выбранному (например, среднему) значению коэффициента поглощения. Тогда уравнение переноса излучения примет обычный вид:

$$\mu\frac{\partial I_\nu(\tau,\mu)}{\partial\tau} = -\alpha_\nu[I_\nu(\tau,\mu) - B_\nu(T)]. \tag{15}$$

Уравнение лучистого равновесия, отражающее отсутствие источников излучения внутри атмосферы, также стандартно:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \alpha_\nu \mathrm{d}\nu \int\limits_{-1}^1 I_\nu(\tau,\mu)\mathrm{d}\mu = \int\limits_0^\infty B_\nu(T)\alpha_\nu \mathrm{d}\nu. \tag{16}$$

Обозначим значения интенсивности в точках с одинаковыми значениями коэффициента поглощения $I(\tau,\mu,\alpha)$. Их принято называть *парциальными интенсивностями*. Тогда

$$\int\limits_\Delta I_\nu(\tau,\mu)\mathrm{d}\nu = \Delta\int\limits_0^\infty p(\alpha)I(\tau,\mu,\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{17}$$

Уравнение (15) запишется в виде

$$\mu\frac{\mathrm{d}I(\tau,\mu,\alpha)}{\mathrm{d}\tau} = -\alpha[I(\tau,\mu,\alpha) - B(T)]. \tag{18}$$

5. Серая в среднем атмосфера. Уравнение (18) записано для некоторого участка спектра, для которого построена функция распределения поглощения. Чтобы рассчитать модель атмосферы, необходимо охватить весь спектр. Поэтому вернемся к исходному уравнению (15).

В главе 2 решалась задача о распределении температуры в серой атмосфере, в которой коэффициент поглощения не зависит от частоты. Это равносильно предположению (11). Задача о расчете температуры в серой атмосфере сводится к задаче Милна. Рассмотрим, к чему приводят другие распределения поглощения.

Ясно, что все определения п. 4 относились к некоторому фиксированному участку спектра. Однако на промежутках частот, значительно превосходящих длину такого участка, интенсивности могут различаться. Поэтому весь диапазон частот, существенных для переноса излучения в атмосфере заданной температуры, надо представить набором таких участков. Пронумеруем их Δ_l. Интенсивность, функция Планка, средний коэффициент и оптическая глубина, а также распределение поглощения могут зависеть от частоты, или от номера участка спектра l, т. е. надо писать $I_l(\tau_l,\mu,\alpha)$ и $p_l(\alpha)$. Ввиду изложенного перепишем уравнение (18) в более точном виде, т. е. для каждого участка:

$$\mu\frac{\mathrm{d}I_l(\tau_l,\mu,\alpha)}{\mathrm{d}\tau_l} = -\alpha[I_l(\tau_l,\mu,\alpha) - B_{\nu_l}(T)]. \tag{19}$$

Уравнение лучистого равновесия также перепишется:

$$\frac{1}{2}\sum_l \Delta_l\int\limits_0^\infty p_l(\alpha)\mathrm{d}\alpha\int\limits_{-1}^1 I_l(\tau_l,\mu,\alpha)\mathrm{d}\mu = \sum_l \Delta_l B_{\nu_l}(T)\int\limits_0^\infty \alpha p_l(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \sum_l \Delta_l B_{\nu_l}(T). \tag{20}$$

В работе [36] предложена модель атмосферы, серой в среднем (ССА). Согласно этой модели все участки спектра имеют единое распределение $p(\alpha)$, единое значение $\overline{æ}$, следовательно, одинаковый ход оптической глубины $\tau_l = \tau$. Значения $B_{\nu_l}(T)$, и поэтому I_l, конечно, все равно различаются, но их можно просуммировать по всем участкам спектра (с номерами l). Введем интенсивность с заданным поглощением, просуммированную по всем участкам:

$$I(\tau,\mu,\alpha) = \sum_l \Delta_l I_l(\tau,\mu,\alpha). \tag{21}$$

Обычная интегральная интенсивность тогда представится в виде

$$I(\tau,\mu) = \int_0^\infty I_\nu(\tau,\mu)\mathrm{d}\mu = \int_0^\infty p(\alpha)I(\tau,\mu,\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{22}$$

Если просуммировать по участкам Δ_l слагаемые уравнения (18), то получится

$$\mu\frac{\mathrm{d}I(\tau,\mu,\alpha)}{\mathrm{d}\tau} = -\alpha[I(\tau,\mu,\alpha) - S(\tau)], \tag{23}$$

где интегральная функция источников согласно закону Стефана—Больцмана

$$S(\tau) = \sum_l \Delta_l B_{\nu_l}(T) = \int_0^\infty B_\nu(T)\mathrm{d}\nu = \frac{a_{\mathrm{SB}}c}{4}T^4. \tag{24}$$

Преобразуем уравнение лучистого равновесия (20). Так как распределение по поглощению от номера участка не зависит, сумма по l дает интегральную интенсивность:

$$\sum_l \Delta_l \int_0^\infty \alpha p(\alpha)I_l(\tau,\mu,\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_0^\infty \alpha p(\alpha)I(\tau,\mu,\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{25}$$

В правой части этого уравнения оказывается функция источников (24), зависящая от единой оптической глубины $S(\tau)$. Итак, уравнение лучистого равновесия принимает вид выражения функции источников через интенсивность:

$$S(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \mathrm{d}\mu \int_0^\infty p(\alpha)I(\tau,\mu,\alpha)\alpha\mathrm{d}\alpha. \tag{26}$$

6. Интегральное уравнение для ССА. Выражение (26) можно привести к более компактному виду, если заметить, что, как и в случае рассеяния в линии с ППЧ, интенсивность зависит не от μ и α по отдельности, а только от их комбинации α/μ. Действительно, формальное решение уравнения (23) имеет вид

$$I(\tau,\mu,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\mu}\displaystyle\int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-\tau')/\mu}S(\tau')\mathrm{d}\tau' = I(\tau,y), & \mu > 0,\ y = \alpha/\mu > 0, \\ -\dfrac{\alpha}{\mu}\displaystyle\int_\tau^\infty e^{-\alpha(\tau-\tau')/\mu}S(\tau')\mathrm{d}\tau' = I(\tau,y), & \mu < 0,\ y = \alpha/\mu < 0. \end{cases} \tag{27}$$

С учетом этого

$$S(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty A(y)\frac{\mathrm{d}y}{y}[I(\tau,y) + I(\tau,-y)]. \tag{28}$$

Весовая функция в данном случае выражается через распределение поглощения:

$$A(y) = \frac{1}{y}\int_0^y \alpha^2 p(\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{29}$$

Подставим в уравнение (26) выражение для интенсивности через функцию источников (27). Получим интегральное уравнение для этой функции, являющееся обобщением уравнения Милна:

$$S(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)S(\tau')\mathrm{d}\tau. \tag{30}$$

Ядерная функция уравнения имеет два представления, причем через весовую функцию она выражается точно так же, как и в общем случае:

$$K(\tau) = \int\limits_0^\infty \alpha^2 p(\alpha) E_1(\alpha\tau) \mathrm{d}\alpha = \int\limits_0^\infty A(y) e^{-\tau y} \mathrm{d}y. \tag{31}$$

7. Свойства серой в среднем атмосферы. Ядерная функция (31) при всех возможных $p(\alpha)$ имеет нулевой и первый моменты. Действительно, согласно (10) и (8) интегралы от ядерной функции с весами 1 и τ

$$K_0 = \int\limits_0^\infty K(\tau)\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^\infty \alpha^2 p(\alpha)\mathrm{d}\alpha \int\limits_0^\infty E_1(\tau\alpha)\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^\infty \alpha p(\alpha)\mathrm{d}\alpha = 1, \tag{32}$$

$$K_1 = \int\limits_0^\infty \tau K(\tau)\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^\infty \alpha^2 p(\alpha)\mathrm{d}\alpha \int\limits_0^\infty \tau E_1(\tau\alpha)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty p(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}. \tag{33}$$

При проведении выкладок (32) и (33) были использованы интегралы

$$\int\limits_0^\infty \tau^n E_1(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{n!}{n+1}. \tag{34}$$

Вообще

$$K_n = \int\limits_0^\infty \tau^n K(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\Gamma(n+1)}{n+1}\int\limits_0^\infty \alpha^{1-n} p(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \Gamma(n+1)\int\limits_0^\infty A(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^{n+1}}. \tag{35}$$

Уже второй момент ядерной функции может не существовать.

Скажем несколько слов об асимптотиках ядерных функций. Они сильно зависят от поведения распределения $p(\alpha)$ при малых α. Если при $\alpha \to 0$ выполняется эквивалентность $p(\alpha) \sim p_0\alpha^\beta$, причем $\beta > -1$ (это нужно для сходимости интеграла (8)), то весовая функция

$$A(y) \sim \frac{p_0}{3+\beta} y^{2+\beta}, \ y \to 0. \tag{36}$$

Асимптотику преобразования Лапласа от ядерной функции ввиду существования двух моментов (32) и (33) представим в виде

$$\overline{K}(p) \sim K_0 - K_1 p + p^2 \int\limits_0^\infty \frac{A(y)}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{y+p}. \tag{37}$$

Отсюда вытекает, что если существует второй момент, т.е. $\beta > 0$, то

$$\overline{K}(p) \sim 1 - \frac{p}{2} + \frac{K_2}{2}p^2. \tag{38}$$

Если же $-1 < \beta < 0$, то

$$\overline{K}(p) \sim 1 - \frac{p}{2} - \frac{p_0}{3+\beta}\frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}p^{2+\beta}. \tag{39}$$

Из этого следует, что преобразование Фурье от ядра при малых аргументах u

$$1 - V(u) \sim V_0 u^{2\gamma}, \tag{40}$$

где

$$\gamma = \begin{cases} 1+\beta/2, & -1 < \beta < 0, \\ 1, & \beta > 0, \end{cases} \tag{41}$$

$$V_0 = \begin{cases} \dfrac{p_0}{3+\beta}\dfrac{\pi}{2\sin(\pi|\beta|/2)}, & -1 < \beta < 0, \\ \dfrac{K_2}{2} = \displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{A(y)}{y^3}\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\int\limits_0^\infty p(\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}, & \beta > 0. \end{cases} \tag{42}$$

Отметим, что в задаче о ССА всегда $\gamma > 1/2$. Поведение функции $V(u)$ при $\beta = 0$ зависит от деталей поведения $p(\alpha)$ при $\alpha \to 0$, а именно от наличия или отсутствия множителя — определенной медленно меняющейся функции. Вся асимптотическая теория, развитая в главе 4, применима и здесь. Например, асимптотика функции источников согласно формуле (173) из указанной главы

$$\frac{S(\tau)}{S(0)} = \Psi(\tau) \sim \frac{\tau^\gamma}{V_0^{1/2}\Gamma(1+\gamma)}. \tag{43}$$

Как видно из этой формулы, если второй момент ядерной функции существует, т.е. при $\beta > 0$, показатель $\gamma = 1$ и функция источников в глубоких слоях атмосферы растет с оптической глубиной линейно, как и в серой атмосфере. Если же второго момента ядерная функция не имеет ($\beta < 0$), то рост с глубиной функции источников, а значит и температуры, более медленный. Отрицательные значения показателя степени β означают большую роль малых уровней поглощения, за счет чего излучение может выходить из атмосферы с больших глубин. Этот вывод противоположен обычному влиянию линий поглощения на распределение температуры в атмосфере, называемому покровным эффектом и заключающемуся в том, что линии отбрасывают часть идущего из глубины потока назад, в результате чего температура в атмосфере повышается [45].

§ 5.2. Рассеяние в линии при частичном перераспределении по частоте

1. Уравнение переноса. В этом параграфе кратко рассмотрим эффекты, которые вызывает рассеяние не с полным перераспределением по частоте, а с функциями, выведенными в § 4.2. Перераспределение, отличное от полного, называют по-разному, но чаще всего частичным перераспределением (ЧПЧ). Найти решения уравнения переноса с этими функциями, даже численные, существенно сложнее, и они были получены позже, чем для ППЧ. Точных аналитических результатов для ЧПЧ известно совсем немного [53]. Это объясняется сложностью функций перераспределения (ФП) и тем обстоятельством, что при ЧПЧ функция источников зависит от частоты.

Мы остановимся на некоторых асимптотических и численных результатах. Асимптотическая теория для этих видов рассеяния может быть построена, но совсем иначе, чем изложенная для ППЧ.

Для простоты ограничимся рассеянием в бесконечной среде и с усредненной по направлениям ФП $R(x, x')$. Тогда уравнение переноса в плоской среде при обычных обозначениях примет вид

$$\eta \frac{\mathrm{d}I(\tau,\eta,x)}{\mathrm{d}\tau} = -[\alpha(x)+\beta]I(\tau,\eta,x) + \alpha(x)S(\tau,x), \tag{44}$$

а уравнение лучистого равновесия без источников в континууме и с источниками в линии, пропорциональными профилю поглощения, запишется так:

$$S(\tau,x) = S_0(\tau) + \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \frac{R(x,x')}{A\alpha(x)} \mathcal{J}(\tau,x'), \tag{45}$$

$$\mathcal{J}(\tau,x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} I(\tau,\eta,x)\mathrm{d}\eta. \tag{46}$$

Мощность источников должна достаточно быстро убывать с ростом $|\tau|$, чтобы и функция источников была ограниченной.

Уравнения (44) и (45) переходят в уравнения для ППЧ, если принять, что ФП $R(x, x') = \phi(x)\phi(x') = A^2\alpha(x)\alpha(x')$. Попробуем связать эти уравнения способом, предложенным в работах [93,94].

2. Асимптотический метод. Для бесконечной среды запишем интегральное уравнение переноса для функции источников. Для этого получим формальное решение (44), выразим среднюю интенсивность через функцию источников

$$\mathcal{J}(\tau,x) = \frac{1}{2}\alpha(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_1([\alpha(x)+\beta]|\tau-\tau'|)S(\tau',x)\mathrm{d}\tau' \tag{47}$$

и подставим результат в уравнение лучистого равновесия (45). Получим

$$S(\tau,x) = S_0(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x')\frac{R(x,x')}{A\alpha(x)}\mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_1([\alpha(x')+\beta]|\tau-\tau'|)S(\tau',x')\mathrm{d}\tau'. \tag{48}$$

Введем усредненную по частоте функцию источников

$$\overline{S}(\tau) = A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) S(\tau, x) \mathrm{d}x. \tag{49}$$

Из уравнения (48) следует, что

$$\overline{S}(\tau) = S_0(\tau) + \frac{\lambda}{2} A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) \mathrm{d}x \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_1([\alpha(x) + \beta]|\tau - \tau'|) S(\tau', x) \mathrm{d}\tau'. \tag{50}$$

Положим

$$S(\tau, x) = \overline{S}(\tau) + S_1(\tau, x). \tag{51}$$

Из уравнений (48) и (50) получается уравнение для функции $S_1(\tau, x)$:

$$S_1(\tau, x) = \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') \left[\frac{R(x, x')}{A\alpha(x)} - A\alpha(x') \right] \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_1([\alpha(x') + \beta]|\tau - \tau'|) S(\tau', x') \mathrm{d}\tau'. \tag{52}$$

Применим метод возмущений. Будем считать, что функция источников $S(\tau, x)$ мало отличается от усредненной, так что второе слагаемое справа в (51) мало. Тогда ясно, что в первом приближении усредненная функция удовлетворяет уравнению в предположении полного перераспределения по частоте

$$\overline{S}(\tau) = S_0(\tau) + \frac{\lambda}{2} A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) \mathrm{d}x \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_1([\alpha(x) + \beta]|\tau - \tau'|) \overline{S}(\tau') \mathrm{d}\tau', \tag{53}$$

которое может быть приведено к стандартному виду с ядерной функцией $K_{\mathrm{R}}(\tau, \beta)$ (индекс R указывает на определенный вид поглощения и перераспределения). Поправочная же функция выражается через усредненную:

$$S_1(\tau, x) = \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') \left[\frac{R(x, x')}{A\alpha(x)} - A\alpha(x') \right] \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_1([\alpha(x') + \beta]|\tau - \tau'|) \overline{S}(\tau') \mathrm{d}\tau'. \tag{54}$$

Переставив порядок интегралов, получим более короткую форму соотношения:

$$S_1(\tau, x) = \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [K_{\mathrm{R}}(|\tau - \tau'|, \beta, x) - K_{\mathrm{R}}(|\tau - \tau'|, \beta)] \overline{S}(\tau') \mathrm{d}\tau', \tag{55}$$

где зависящая от частоты обобщенная ядерная функция имеет вид

$$K_{\mathrm{R}}(\tau, \beta, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') \frac{R(x, x')}{A\alpha(x)} E_1([\alpha(x') + \beta]\tau) \mathrm{d}x'. \tag{56}$$

Эта функция тем же рассуждением, которое было применено в § 4.3 для случая полного перераспределения, может быть приведена к виду суперпозиции экспонент

$$K_{\mathrm{R}}(\tau, \beta, x) = e^{-\tau\beta} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\tau y} A_{\mathrm{R}}(y, x) \frac{y \mathrm{d}y}{y + \beta}, \tag{57}$$

где весовая функция зависит от частоты:

$$A_{\mathrm{R}}(y, x) = \frac{2}{y} \frac{1}{A\alpha(x)} \begin{cases} \int\limits_{x(y)}^{\infty} R(x, x') \alpha(x') \mathrm{d}x' & \text{при} \quad y \le 1, \\ \int\limits_{0}^{\infty} R(x, x') \alpha(x') \mathrm{d}x' & \text{при} \quad y \ge 1. \end{cases} \tag{58}$$

При ФП, отвечающей полному перераспределению, функции (57) и (58) перестают зависеть от частоты.

Теперь последовательно рассмотрим три ФП, которые были выведены в § 4.2. Начнем с первой и третьей, которые объединены тем, что приводят к результатам, мало отличающимся от ППЧ. Для демонстрации этого нам понадобятся их разложения в ряды.

3. Разложения функций перераспределения R_{I} и R_{III}. Рассмотрим сначала первую.

Закон перераспределения R_{I} может быть представлен билинейным разложением [101]

$$R_{\mathrm{I}}(x,x') = \frac{1}{\pi}e^{-x^2-(x')^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_{2m}(x)H_{2m}(x')}{2^{2m}(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha_{2m}(x)\alpha_{2m}(x')}{2m+1}. \tag{59}$$

Здесь

$$\alpha_n(x) = e^{-x^2}\frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n!\pi}}, \tag{60}$$

причем $H_n(x)$ — многочлены Эрмита. Для доказательства этого разложения умножим обе части равенства (59) на $H_{2m}(x')$ и проинтегрируем по x' по всей вещественной оси. В интеграле справа используем ортогональность многочленов Эрмита с весом $e^{-(x')^2}$ и нормировку интеграла от квадрата на $2^{2m}(2m)!\sqrt{\pi}$. При интегрировании слева надо подставить выражение (43) из главы 4 для ФП R_{I}, переменить порядок интегрирования и воспользоваться соотношениями (см. [13], равенства 7.371 и 7.373.1):

$$\int\limits_0^u H_{2m}(x')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2(2m+1)}H_{2m+1}(u), \quad \int\limits_x^{\infty} e^{-u^2}H_{2m+1}(u)\mathrm{d}u = e^{-x^2}H_{2m}(x). \tag{61}$$

В результате справа и слева получатся одинаковые выражения, содержащие четный многочлен Эрмита: $e^{-x^2}H_{2m}(x)/\sqrt{\pi}(2m+1)$.

Аналогичное разложение можно получить и для функции R_{III}. Сначала установим связь этой функции с R_{I} [59]. Приняв во внимание интеграл от лоренцевской функции $w_{\mathrm{L}}(x,a)$

$$\pi\int\limits_{-y}^{y} w_{\mathrm{L}}(t-x,a)\mathrm{d}t = a\int\limits_{-y}^{y}\frac{\mathrm{d}t}{(t-x)^2+a^2} = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{a} - \operatorname{arctg}\frac{x-y}{a}, \tag{62}$$

запишем выражение для R_{III}, полученное в § 4.2, в виде

$$R_{\mathrm{III}}(x,x') = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y\int\limits_{-y}^{y} w_{\mathrm{L}}(t-x,a)\mathrm{d}t\int\limits_{-y}^{y} w_{\mathrm{L}}(t'-x',a)\mathrm{d}t'. \tag{63}$$

Затем два раза переставим порядок интегрирования:

$$R_{\mathrm{III}}(x,x') = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{\mathrm{L}}(t-x,a)\mathrm{d}t\int\limits_{|t|}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y\int\limits_{-y}^{y} w_{\mathrm{L}}(t'-x',a)\mathrm{d}t' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{\mathrm{L}}(t-x,a)\mathrm{d}t\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{\mathrm{L}}(t-x,a)\mathrm{d}t'\int\limits_{\max\{|t|,|t'|\}}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{\mathrm{L}}(t,a)\mathrm{d}t\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{\mathrm{L}}(t',a)\mathrm{d}t' R_{\mathrm{I}}(t+x,t'+x'). \tag{64}$$

Теперь подставим сюда разложение (59). Тогда получится

$$R_{\mathrm{III}}(x,x') = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha_{2m}(x,a)\alpha_{2m}(x',a)}{2m+1}, \tag{65}$$

где использовано обозначение

$$\alpha_n(x,a) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{\mathrm{L}}(t,a)\mathrm{d}t\,\alpha_n(t+x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}}\frac{\mathrm{d}^n U(a,x)}{\mathrm{d}x^n}. \tag{66}$$

Последнее равенство доказывается n-кратным дифференцированием функции Фойгта, записанной в виде

$$U(a,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{\mathrm{L}}(x,a)e^{-(t+x)^2}dt, \tag{67}$$

по x и использованием определения многочленов Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n e^{-x^2}}{\mathrm{d}x^n}. \tag{68}$$

4. Асимптотика ядерной функции при функции перераспределения R_{I}. Оценим поведение ядерной функции (56) при больших τ для ФП R_{I}, которая отвечает чисто тепловому расширению линии и доплеровскому профилю поглощения. На рис. 7 представлена зависимость этой функцию от частоты x при различных начальных частотах x_1.

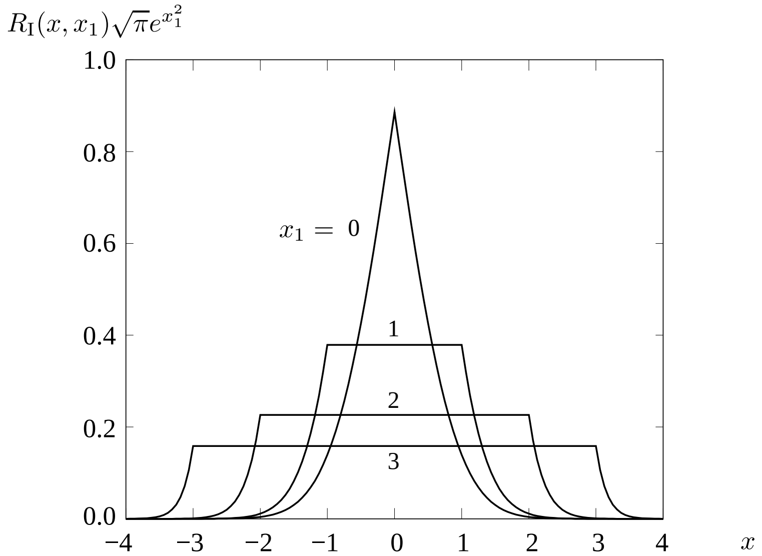


Рис. 7. Функция $\sqrt{\pi}e^{x^2}R_{\mathrm{I}}(x,x_1)$ при некоторых значениях x_1.

Распишем входящий в выражение (58) для функции A_{I} при $y \le 1$ интеграл:

$$I(x,y)=\sqrt{\pi}\int\limits_{x(y)}^{\infty}\alpha(x_1)R_{\mathrm{I}}(x,x_1)\mathrm{d}x_1=\int\limits_{\sqrt{\ln(1/y)}}^{\infty}e^{-x_1^2}\mathrm{d}x_1\int\limits_{\max(x,x_1)}^{\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\int\limits_{\max(x,\sqrt{\ln(1/y)})}^{\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u\int\limits_{\sqrt{\ln(1/y)}}^{u}e^{-x_1^2}\mathrm{d}x_1. \tag{69}$$

Теперь предположим, что $y \ll 1$, и, воспользовавшись асимптотикой функции ошибок

$$\int\limits_x^{\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}, \tag{70}$$

найдем асимптотическое представление интеграла (69):

$$2I(x,y) \sim \int\limits_{\max(x,\sqrt{\ln(1/y)})}^{\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u\left(\frac{y}{\sqrt{\ln(1/y)}} - \frac{e^{-u^2}}{u}\right) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{4}\dfrac{y^2}{\ln(1/y)} & \text{при} \quad y < e^{-x^2}, \\ \dfrac{y}{\sqrt{\ln(1/y)}}\dfrac{e^{-x^2}}{2x} - \dfrac{e^{-2x^2}}{4x^2} & \text{при} \quad y > e^{-x^2}. \end{cases} \tag{71}$$

Неравенство во второй строчке в фигурной скобке можно записать иначе: $x > \sqrt{\ln(1/y)} \gg 1$.

Далее считая, что $\tau \gg 1$, подставим в интеграл (57) выражение (58) для функции $A_{\mathrm{I}}(x,y)$ и асимптотику (71). Затем сделаем замену переменной интегрирования $\tau y = t$ и в выражении $\ln(\tau/t)$ отбросим множитель t, что, как мы видели в главе 4, можно делать при операциях с медленно меняющимися функциями. Тогда

$$K_{\mathrm{I}}(\tau,\beta,x) \sim e^{x^2-\tau\beta}\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t+\tau\beta}e^{-t}I(x,t/\tau). \tag{72}$$

Вычислив получающиеся интегралы, найдем

$$K_{\mathrm{I}}(\tau,\beta,x) \sim \frac{1}{\tau\ln\tau}K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{as}}(\tau,s,w), \tag{73}$$

$$K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{as}}(\tau,s,w)=\frac{1}{4}\left\{\mathcal{K}_1(s,w)+2\frac{\sqrt{\ln\tau}}{x}\mathcal{K}_2(s,w)-\frac{\ln\tau}{x^2}wE_1(w+s)\right\}, \tag{74}$$

где обозначено $s = \tau\beta$, $w = \tau e^{-x^2}$, а также

$$\mathcal{K}_1(s,w) = \frac{(1-s)e^{-s}(1-e^{-w}) + s^2[E_1(s) - E_1(w+s)]}{w},$$
$$\mathcal{K}_2(s,w) = e^{-w-s} - sE_1(w+s). \tag{75}$$

Асимптотика (73) предполагает, что произведение $s = \tau\beta$ имеет порядок 1. При этом частота x может быть разная. При небольших значениях частоты, т. е. в ядре линии, $w \sim \tau \gg 1$, так что второе и третье слагаемые в (74) содержат множитель $e^{-\tau}$. Указанные слагаемые можно отбросить как несущественные при выполнении соотношения $e^{-\tau}\tau\ln\tau \ll x^2$. В крыльях линии, где $w = \tau e^{-x^2} \sim 1$, все три слагаемых имеют один порядок, так как тогда $x \sim \sqrt{\ln\tau}$.

5. Асимптотика решения при функции перераспределения R_{I}. Близость рассеяния при функции перераспределения R_{I} и при полном перераспределении по частоте демонстрируется двумя способами. Один из них заключается в том, что показывается быстрая сходимость итераций этой ФП к ФП при ППЧ, аналогичная сходимости итераций индикатрис к сферической, о чем говорилось в конце § 2.4.

Обозначим n-ю итерацию ФП $R(x,x')$ через $R^{(n)}(x,x')$. Тогда должно выполняться рекуррентное соотношение

$$R^{(n)}(x_1,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' R(x_1,x')\frac{R^{(n-1)}(x',x)}{\alpha(x')}. \tag{76}$$

Применим эту процедуру к ФП R_{I}, записав разложение ее n-й итерации в виде

$$R_{\mathrm{I}}^{(n)}(x,x_1) = \sum r_m^{(n)}\alpha_{2m}(x)\alpha_{2m}(x_1), \tag{77}$$

так что $r_m^{(1)} = 1/(2m+1)$. Функции $\alpha_n(x)$ ортогональны и нормированы с весом e^{x^2}. Поэтому коэффициенты разложения итерированных ФП $r_m^{(n)} = [r_m^{(1)}]^n = 1/(2m+1)^n$ и все, кроме нулевого, стремятся к нулю при $n \to \infty$, а сама ФП — к своему первому слагаемому.

Вычисления проделаны в работе [37]. На рис. 8, взятом из этой работы, видно, как быстро сходятся итерации R_{I}. Примерно так же ведет себя и ФП R_{III}.

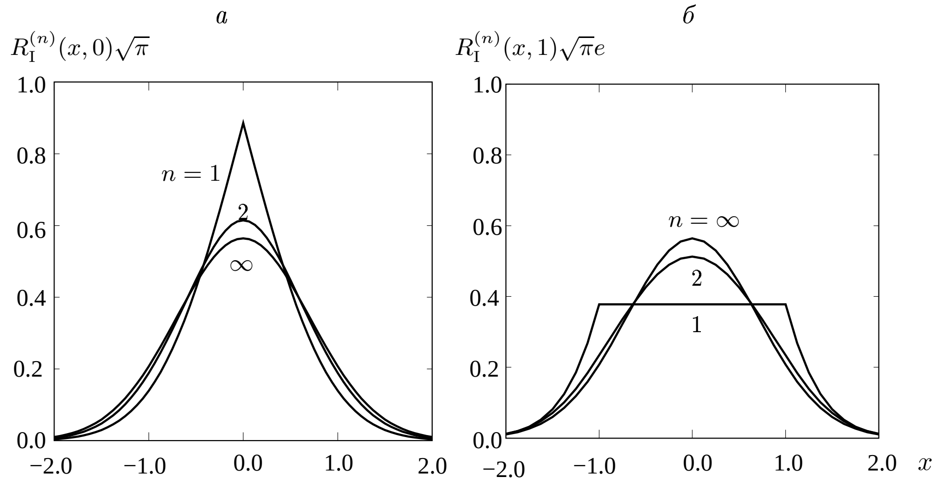


Рис. 8. Последовательные итерации функции $R_{\mathrm{I}}(x,x_1)$:
а — при $x_1 = 0$; *б* — при $x_1 = 1$.

В обоих случаях первые слагаемые разложений совпадают с формулами, представляющими закон ППЧ. В случае разложения (59) для R_{I} — это произведение доплеровских профилей $e^{-x^2-(x')^2}/\pi$, в случае (65) для R_{III} — произведение фойгтовских $U(a,x)U(a,x')$. Случай ФП R_{III} не столь прозрачен, так как функции (66), по которым идет разложение в (65), не являются ортогональными.

Как видно из выражения (54), поправочная функция источников содержит интеграл от разности между ФП и ее ППЧ пределом, поэтому она оказывается малой по сравнению со средней. На этом обстоятельстве основан приближенный способ учета перераспределения по частоте при ФП R_{I}, являющийся аналогом метода Соболева для монохроматического рассеяния. Способ заключается в том, что первое рассеяние учитывается с точной ФП, а все многократные — в приближении ППЧ.

Другой способ демонстрации близости рассеяния с R_{I} к полному перераспределению основан на методе масштабирования.

Сравним асимптотику (73) с асимптотикой ядерной функции для случая доплеровского профиля при ППЧ. Достаточно сравнить первое слагаемое с формулой (130) из главы 4. В ядре линии они одного порядка. Однако в крыле обобщенная ядерная функция убывает медленнее, чем доплеровская. Поэтому в выражении (55) под интегралом достаточно оставить только первое слагаемое, соответствующее ЧПЧ.

Произведем масштабирование соотношения (55). Для этого сначала, как это делалось для полного перераспределения для получения конечных пределов, следовало бы вычесть под интегралом из $\overline{S}(\tau')$ значение $\overline{S}(\tau)$, вычислить соответствующие интегралы, а затем перейти к пределу $\lambda \to 1$. Однако для оценки порядка величин этого можно избежать. Действительно, предположим, что асимптотика усредненной функции источников представляется в виде $\overline{S}(\tau) \sim S_*(\Lambda)\widetilde{S}\,(\tau/\Lambda, \tau\beta)$, где для доплеровского профиля

$$\Lambda = \frac{\lambda}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\ln(1/(1-\lambda))}}\frac{1}{1-\lambda+(2\lambda\beta/\sqrt{\pi})\sqrt{\ln(1/\beta)}}. \tag{78}$$

Подставим в формулу (55) указанную асимптотику функции $\overline{S}(\tau')$ и асимптотику ядерной функции (73), устремим $\lambda \to 1$, $\beta \to 0$, $\tau \to \infty$ и $x \to \infty$ таким образом, чтобы было $\Lambda \to \infty$, $Q = \tau/\Lambda = \mathrm{const}$, $s = \tau\beta = \mathrm{const}$ и $w = \tau e^{-x^2} = \mathrm{const}$. Тогда $\ln\tau = \ln(Q\Lambda) \sim \ln\Lambda$, $x = \sqrt{\ln(Q\Lambda/w)} \sim \sqrt{\ln\Lambda}$ и из формулы (55) получается, что

$$S_1(\tau, x) \sim \frac{\lambda}{2}S_*(\Lambda)\frac{1}{\ln\Lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{S}\,(Q', s')K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{as}}(|Q'-Q|, w, s)\mathrm{d}Q'. \tag{79}$$

Поскольку интеграл остается порядка 1, асимптотика поправочной функции имеет дополнительный множитель $1/\ln\Lambda$ и, следовательно, эта функция при больших Λ оказывается асимптотически меньшей, чем усредненная, что и доказывает близость двух видов рассеяния: с ППЧ и с ФП R_{I}. Аналогичная процедура для ФП R_{III} более сложна, но приводит к тому же результату [93].

Совсем другие выводы были сделаны по отношению к ФП R_{II}. Для получения асимптотик решений сначала найдем асимптотические представления этой ФП.

6. Асимптотики функции перераспределения $R_{\mathrm{II}}(x, x')$. Эту функцию

$$R_{\mathrm{II}}(x, x') = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int\limits_{r}^{\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u\left[\operatorname{arctg}\frac{x_{\mathrm{m}}+u}{a} - \operatorname{arctg}\frac{x_{\mathrm{M}}-u}{a}\right], \tag{80}$$

где $x_{\mathrm{m}} = \min(|x|, |x'|)$, $x_{\mathrm{M}} = \max(|x|, |x'|)$, $r = |x-x'|/2$, оценим в асимптотической области, т.е. при $a \ll 1$, $x \sim x' \gg 1$. После замены переменной интегрирования $u = y + r$ получим

$$R_{\mathrm{II}}(x, x') = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-(y+r)^2}\mathrm{d}y\left[\operatorname{arctg}\frac{y+s}{a} - \operatorname{arctg}\frac{s-y}{a}\right], \tag{81}$$

где $s = (x+x')/2$.

Разобьем интеграл на два по двум промежуткам: $[0, s]$ и $[s, \infty)$. В первом, считая $s \gg 1$, разность арктангенсов оценим следующим образом:

$$\operatorname{arctg}\frac{y+s}{a} - \operatorname{arctg}\frac{s-y}{a} = \operatorname{arctg}\frac{2y/a}{1+(s^2/4-y^2)/a^2} \sim \frac{2ay}{s^2}. \tag{82}$$

Такая оценка ошибочна в области $y \sim s \gg 1$, но при больших y подынтегральная функция мала из-за малости экспоненты. Во втором интеграле при $y > s$ можно оба арктангенса в силу малости a заменить на их значения при $y = \infty$, что в сумме дает π. Итак,

$$R_{\mathrm{II}}(x, x') \sim R_{\mathrm{II}}^{\mathrm{as}}(x, x') = R_a(x, x') + R_{\mathrm{I}}(x, x'). \tag{83}$$

Здесь второе слагаемое — рассмотренная выше ФП, соответствующая пределу R_{II} при $a \to 0$, а первое пропорционально a и может быть выражено через функцию ошибок:

$$R_a(x, x') = \frac{a}{\pi^{3/2}s^2}\left[e^{-r^2} - e^{-(s+r)^2} - \sqrt{\pi}r\left(\mathrm{Erfc}(r) - \mathrm{Erfc}(s+r)\right)\right], \tag{84}$$

где

$$\mathrm{Erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{z}^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t. \tag{85}$$

Приняв во внимание, что $s \gg 1$, упростим это выражение:

$$R_a(x,x') = \frac{a}{\pi^{3/2}s^2}\left[e^{-r^2} - r\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erfc}(r)\right]. \tag{86}$$

В представлении (83) второе слагаемое согласно асимптотике (70) быстро (экспоненциально) убывает с частотой. В первом слагаемом переменные s и r разделились, и с ростом s оно убывает как $1/s^2$. Ясно, что второе слагаемое представляет ФП в доплеровском ядре линии, а первое — в крыльях.

Границей, разделяющей области действия двух слагаемых в (83), может служить частота x_b, при которой они сравниваются, если $r \ll 1$, а $s \sim x \gg 1$. Эта частота определяется из соотношения, следующего из (70) и (86):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x_\mathrm{b}^2}}{2x_\mathrm{b}} = \frac{a}{\pi^{3/2}x_\mathrm{b}^2}, \quad x_\mathrm{b}e^{-x_\mathrm{b}^2} = \frac{2a}{\pi}. \tag{87}$$

Отметим, что и функция Фойгта представляется двумя разными функциями в ядре и в крыльях. Если частота невелика, то $U(a,x)$ при малых a почти совпадает с доплеровским профилем, а в крыльях знаменатель под интегралом почти равен x^2, каковое значение и может быть вынесено за знак интеграла, после чего интеграл вычисляется и равен $\sqrt{\pi}$. В результате получим, что

$$U(a,x) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} & \text{при} \quad 0 \le |x| \le x_\mathrm{d}, \\ \dfrac{a}{\pi x^2} & \text{при} \quad |x| \ge x_\mathrm{d}. \end{cases} \tag{88}$$

Здесь в качестве границы x_d также может быть принята частота, где значения функции, вычисленные по обеим формулам, совпадают:

$$x_\mathrm{d}^2 e^{-x_\mathrm{d}^2} = \frac{a}{\sqrt{\pi}}. \tag{89}$$

Значения x_b меньше, чем x_d, но имеют одинаковую функциональную зависимость главного члена асимптотики по $a \ll 1$: $\sim \sqrt{\ln(1/a)}$.

Еще одна возможность выбрать граничную точку x_i между двумя представлениями функции Фойгта — это потребовать, чтобы интеграл от ее приближенного представления точно равнялся 1:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} U(a,x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{x_\mathrm{i}} e^{-y^2}\mathrm{d}y + \frac{a}{\pi}\int\limits_{x_\mathrm{i}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x_\mathrm{i}}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y + \frac{a}{\pi}\int\limits_{x_\mathrm{i}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}. \tag{90}$$

Оценив первый интеграл асимптотически при большом аргументе, вычислив второй интеграл точно и приравняв результаты, получим

$$\frac{e^{-x_\mathrm{i}^2}}{\sqrt{\pi}x_\mathrm{i}} = \frac{2a}{\pi x_\mathrm{i}}, \quad x_\mathrm{i} = \sqrt{\ln\frac{\sqrt{\pi}}{2a}} \tag{91}$$

с той же зависимостью граничной точки от a.

Обозначим общую часть асимптотик трех граничных точек через $x_* = \sqrt{\ln(1/a)}$ и будем рассматривать две области частот: $|x| < x_*$ и $|x| > x_*$. В первой вместо ФП R_II примем R_I, а во второй — ФП R_a.

На рис. 9 и 10 представлены графики зависимости отношения $R_\mathrm{II}(x,x_1)/U(a,x)$ от x при нескольких x_1 и двух значениях фойгтовского параметра a. Из них видно, что, действительно, при малых x_1 функция похожа на $R_\mathrm{I}(x,x_1)$ и решения уравнения ведут себя в ядре линии соответственно этому, т. е. мало отличаются от получаемых в приближении ППЧ. При больших x_1 пик ФП смещается в сторону значения x_1, причем становится тем острее, чем больше x_1. На этом основано приближение, используемое при построении асимптотической теории ЧПЧ с этой ФП.

7. Асимптотическое уравнение при функции перераспределения R_II. В этом пункте мы следуем работе Дж. Харрингтона [96]. Рассмотрим для простоты и для выявления эффектов именно рассеяния в линии модель рассеяния в бесконечной среде без поглощения в континууме.

К интегральному уравнению

$$S(\tau,x) = S_0(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\frac{R_\mathrm{II}(x,x_1)}{U(a,x)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}E_1(\alpha(x_1)|\tau-\tau_1|)S(\tau_1,x_1)\mathrm{d}\tau_1, \tag{92}$$

описывающему перенос излучения в этом случае, применяется так называемое дважды диффузионное приближение. Основанием к его применению является быстрое убывание функции $R_\mathrm{II}(x,x_1)$ с удалением частоты x_1

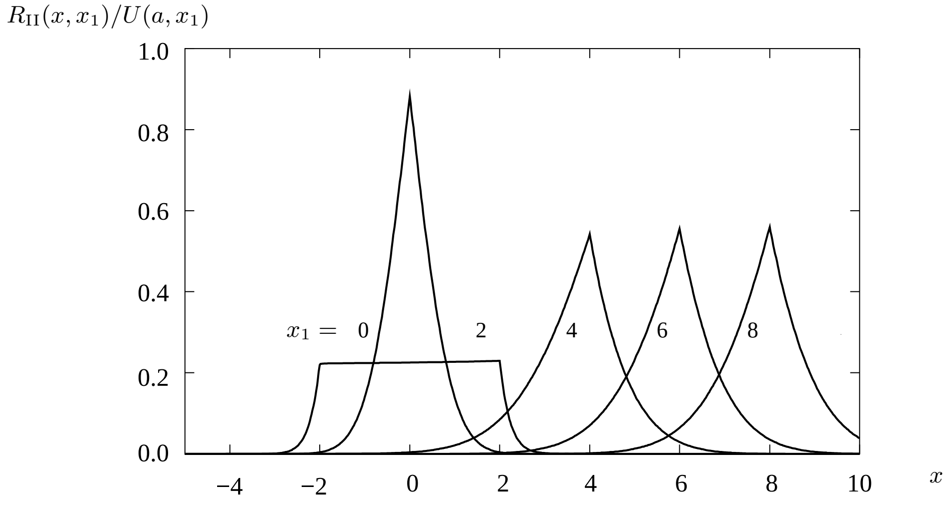


Рис. 9. Поведение отношения $R_{\text{II}}(x,x_1)/U(a,x_1)$ при $a = 0.001$ и различных x_1.

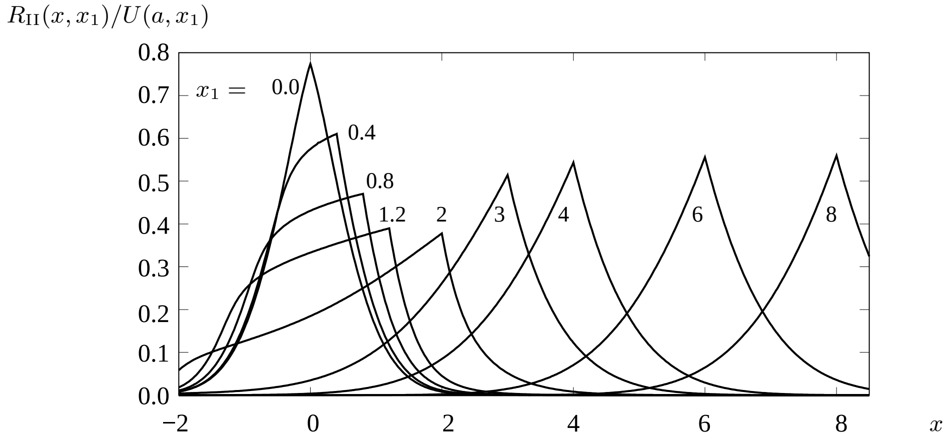


Рис. 10. Поведение отношения $R_{\text{II}}(x,x_1)/U(a,x_1)$ при $a = 0.1$ и различных x_1.

от x и быстрое убывание функции $E_1(\alpha(x)|\tau-\tau_1|)$ с удалением глубины τ_1 от τ. Это означает, что процесс рассеяния существенно локален и по пространству, и по частоте. Ввиду указанного обстоятельства функцию источников, стоящую в (92) под интегралом, раскладываем по τ и по x по формуле Тейлора второго порядка:

$$S(\tau_1,x_1)=S(\tau,x)+\frac{\partial S(\tau,x)}{\partial\tau}(\tau_1-\tau)+\frac{\partial S(\tau,x)}{\partial x}(x_1-x)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S(\tau,x)}{\partial\tau^2}(\tau_1-\tau)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S(\tau,x)}{\partial x}(x_1-x)^2+\frac{\partial^2 S(\tau,x)}{\partial\tau\partial x}(\tau_1-\tau)(x_1-x). \tag{93}$$

Отметим, что разложение функции источников по глубине с точностью до второй производной равносильно применению метода Эддингтона, который мы в главе 2 применяли к дифференциальному уравнению переноса.

После подстановки разложения (93) в уравнение (92) убеждаемся, что интегралы по глубине легко вычисляются, причем интегралы с нечетными степенями разности $\tau_1-\tau$ равны нулю:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_1(\alpha(x)|\tau_1-\tau|)(\tau_1-\tau)^n \mathrm{d}\tau_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_1(\alpha(x)|\tau|)\tau^n \mathrm{d}\tau = \frac{1+(-1)^n}{\alpha^{n+1}(x)}\,\frac{n!}{n+1}. \tag{94}$$

Аналогично необходимо вычислить четыре интеграла по частоте x_1. Три из них имеют вид

$$I_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1-x)^n \frac{R_{\text{II}}(x,x_1)}{U(a,x)}\mathrm{d}x_1, \quad n=0,1,2\ , \tag{95}$$

а четвертый

$$I_*(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{\mathrm{II}}(x,x_1)}{U(a,x)\alpha^2(x_1)}\mathrm{d}x_1. \tag{96}$$

При вычислении этих интегралов считаем, что $x > x_*$, и вместо ФП R_{II} подставляем R_a, а вместо $U(a,x)$ — ее асимптотику $a/\pi x^2$. Делаем замену переменной интегрирования $x_1 = x + 2u$. Тогда $s = |x+u|$, а отношение $x^2/s^2 = 1/(1+u/x)^2$ можно заменить на $1 - 2u/x$. Приводим также интегралы к промежутку $[0,\infty)$, сделав в интеграле по $(-\infty, 0]$ замену $u \to -u$. В результате получаем

$$I_n(x) \sim \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \left[[1+(-1)^n] - \frac{2}{x}[1-(-1)^n]u\right] u^n \mathrm{d}u \left(e^{-u^2} - 2u\int\limits_u^{\infty} e^{-t^2}dt\right) =$$
$$= \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1+(-1)^n}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{1}{n+2} - \frac{2}{x}\frac{1-(-1)^n}{2}\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\frac{1}{n+3}\right]. \tag{97}$$

Необходимые нам интегралы $I_0(x) = I_2(x) = 1$, $I_1(x) = -1/x$.

Четвертый интеграл (96) равен $1/\alpha^2(x) \sim \pi^2 x^4 U^2(a,0)/a^2$, так как при замене $x_1 = x + 2u$ поправка, пропорциональная u, будет более высокого порядка малости, чем второй порядок, до которого у нас произведено разложение (93).

Таким образом, асимптотическое уравнение принимает вид

$$(1-\lambda)S(\tau,x) - S_0(\tau) = \frac{\lambda}{3}\frac{1}{\alpha^2(x)}\frac{\partial^2 S}{\partial\tau^2} + \lambda\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S(\tau,x)}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial S(\tau,x)}{\partial x}\right). \tag{98}$$

Дж. Харрингтон [96,97] при помощи выведенного им асимптотического уравнения вида (98) получил решения различных задач переноса. Мы же здесь ограничимся выявлением зависимости характерных величин от параметров задачи методом масштабирования.

8. Масштабирование при ФП R_{II}. Введем масштабные множители в аргументы и функции, входящие в уравнение (98):

$$\tau = \widetilde{\tau}\, Q, \quad x = \widetilde{x}\,\xi, \tag{99}$$
$$S_0(\tau) = S_*^0(\widetilde{\tau})\widetilde{S}_0(Q), \quad S(\tau,x) = S_*(\widetilde{\tau},\widetilde{x})\widetilde{S}(Q,\xi), \tag{100}$$

и подставим их в это уравнение. Устремим $\lambda \to 1$ и подберем масштабные множители так, чтобы уравнение оставалось конечным. Для этого разделим результат подстановки на $S_*(\widetilde{\tau},\widetilde{x})/\widetilde{x}^{\,2}$ и приравняем зависящие от параметров коэффициенты единице:

$$(1-\lambda)\widetilde{x}^{\,2} = 1, \ \frac{S_*^0(\widetilde{\tau})}{S_*(\widetilde{\tau},\widetilde{x})}\widetilde{x}^{\,2} = 1, \ \frac{1}{3}\frac{\pi^2\widetilde{x}^{\,6}U^2(a,0)}{a^2\widetilde{\tau}^{\,2}} = 1. \tag{101}$$

Из (101) следует, что надо положить

$$\widetilde{x} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}, \ \widetilde{\tau} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{U(a,0)}{a}\frac{1}{(1-\lambda)^{3/2}}, \ S_*(\widetilde{\tau},\widetilde{x}) = \frac{S_*^0(\widetilde{\tau})}{1-\lambda}. \tag{102}$$

После этого “обезразмеренное” асимптотическое уравнение примет вид

$$\widetilde{S}(Q,\xi) - \widetilde{S}_0(Q) = \xi^4\frac{\partial^2\widetilde{S}(Q,\xi)}{\partial Q^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\widetilde{S}(Q,\xi)}{\partial\xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial\widetilde{S}(Q,\xi)}{\partial\xi}. \tag{103}$$

Таким образом, при рассеянии в линии с ФП R_{II} поведение решений в крыле линии коренным образом отличается от того, которое мы наблюдали в случае полного перераспределения по частоте, и ближе к монохроматическому. Рассеяние носит локальный характер по глубине и по частоте, точнее перемещение фотона по глубине и по частоте совершается диффузионным образом. Различаются и характерные масштабы. Масштаб по глубине с приближением рассеяния к консервативному возрастает как $(1-\lambda)^{-3/2}$, а не как $(1-\lambda)^{-1/2}$, что соответствует ППЧ с фойгтовским профилем, при котором $\gamma = 1/4$, $\Lambda = [\lambda\sqrt{2\pi a U(a,0)}/[3(1-\lambda)^{1/2}]$. Характерные масштабы по частоте также разные: при ППЧ в крыле линии $\widetilde{x} = (\pi\Lambda/[aU(a,0))^{1/2}] \propto (1-\lambda)^{-1/4}$, а при ЧПЧ с ФП R_{II}, как мы видим, $\widetilde{x} \propto (1-\lambda)^{-1/2}$.

Различаются и результаты численных расчетов. При рассматриваемом виде частичного перераспределения по частоте профили линий ведут себя иначе, чем при полном. Точнее, как отмечается в книге Д. Михаласа

[45], в приближении ППЧ оказывается возможным подогнать рассчитанные профили к наблюдаемым путем выбора зависимости температуры от глубины. Однако, ход изменения профилей сильных линий по диску звезды (Солнца) не удается описать одним распределением температуры при ППЧ и необходимо привлечение ЧПЧ с функцией перераспределения R_{II}.

§ 5.3. Глобальные характеристики рассеяния

1. Определения. Рассмотрим некоторые величины, характеризующие процесс рассеяния в среде в целом, условно назвав такие величины глобальными.

Для примера возьмем уравнение переноса излучения в плоском слое в линии с произвольным законом перераспределения по частотам и направлениям

$$\eta \frac{\mathrm{d}I(\tau, \boldsymbol{\omega}, x)}{\mathrm{d}\tau} = -[\alpha(x) + \beta] I(\tau, \boldsymbol{\omega}, x) + B(\tau, \boldsymbol{\omega}, x). \tag{104}$$

Здесь использованы обычные обозначения: τ — оптическая глубина в центре линии, η — косинус угла между направлениями распространения излучения $\boldsymbol{\omega}$ и увеличения глубины, x — безразмерное расстояние от центра линии, $\alpha(x)$ — профиль поглощения, β — доля поглощения в континууме от поглощения в центре линии, $I(\tau, \boldsymbol{\omega}, x)$ — интенсивность излучения. Функция источников выражается через интенсивность:

$$B(\tau, \boldsymbol{\omega}, x) = B_{\mathrm{S}}(\tau, \boldsymbol{\omega}, x) + \frac{\lambda}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}^2\omega' R(x, x', \mu) I(\tau, \boldsymbol{\omega}', x'). \tag{105}$$

Как обычно для изотропной среды, функция перераспределения зависит от косинуса угла рассеяния $\mu = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}'$. Эта функция подчинена условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}^2\omega}{4\pi} R(x, x', \mu) = \alpha(x'). \tag{106}$$

Всегда можно предполагать, что интенсивность удовлетворяет нулевым условиям на границах слоя при $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, так как можно выделить прямое излучение.

Следуя [102], определим пять величин:

$$E_{\mathrm{S}} = \int\limits_0^{\tau_0} \mathrm{d}\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int B_{\mathrm{S}}(\tau, \boldsymbol{\omega}, x) \mathrm{d}^2\omega, \tag{107}$$

$$E_{\mathrm{R}} = \int\limits_0^{\tau_0} \mathrm{d}\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int B(\tau, \boldsymbol{\omega}, x) \mathrm{d}^2\omega, \tag{108}$$

$$E_{\mathrm{L}} = (1 - \lambda) \int\limits_0^{\tau_0} \mathrm{d}\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) \mathrm{d}x \int I(\tau, \boldsymbol{\omega}, x) \mathrm{d}^2\omega, \tag{109}$$

$$E_{\mathrm{C}} = \beta \int\limits_0^{\tau_0} \mathrm{d}\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int I(\tau, \boldsymbol{\omega}, x) \mathrm{d}^2\omega, \tag{110}$$

$$E_{\mathrm{e}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int \eta \left[I(\tau_0, \boldsymbol{\omega}(\eta > 0), x) - I(0, \boldsymbol{\omega}(\eta < 0), x) \right] \mathrm{d}^2\omega. \tag{111}$$

В последнем выражении находится поток в направлении через границы, поэтому интегралы у границ распространяются на соответствующие полусферы.

Очевиден смысл введенных величин: E_{S} — полная энергия, излучаемая первичными внутренними источниками излучения в слое в единицу времени в расчете на единичную поверхность границы, т. е. полная мощность источников; E_{R} — полная энергия, излучаемая в слое также в единицу времени и на единицу площади границы (как и все остальные величины), т. е. мощность излучения, создающегося в результате всех рассеяний; E_{L} — энергия фотонов, которые "погибают" для рассеяния, т. е. их энергия переходит в другие виды энергии, в результате истинного поглощения в линии (непереизлучения); E_{C} — энергия, поглощаемая в континууме в ходе полета фотонов между рассеяниями в линии; наконец, E_{e} — энергия излучения, покидающего слой в результате выхода через его границы.

2. Соотношения между величинами. Очевидно, что выполняются два следующих соотношения между введенными величинами. Одно из них получается интегрированием выражения для функции источников с учетом равенства (106):

$$E_{\mathrm{R}} = E_{\mathrm{S}} + \lambda \int\limits_0^{\tau_0} \mathrm{d}\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x')\mathrm{d}x' \int I(\tau, \boldsymbol{\omega}', x')\mathrm{d}^2\omega' = E_{\mathrm{S}} + \frac{\lambda}{1-\lambda} E_{\mathrm{L}}. \tag{112}$$

Второе соотношение вытекает из уравнения переноса:

$$E_{\mathrm{e}} = -E_{\mathrm{C}} - \frac{E_{\mathrm{L}}}{1-\lambda} + E_{\mathrm{R}}. \tag{113}$$

Из двух записанных соотношений следует равенство

$$E_{\mathrm{S}} = E_{\mathrm{e}} + E_{\mathrm{L}} + E_{\mathrm{C}}, \tag{114}$$

отражающее закон сохранения энергии: энергия, поставляемая источниками, расходуется следующим образом: часть ее выходит из слоя, часть поглощается в линии, а часть в континууме.

Таким образом, между пятью введенными величинами имеется два соотношения, т. е. независимыми являются три величины. Величина энергии источников E_{S} известна, поэтому надо найти две. Вместо энергий можно ввести два других полезных понятия.

3. Средние величины. Упомянутые две величины определяются через уже введенные. Одна из них — *среднее число рассеяний* фотона в слое:

$$\overline{N} = \frac{E_{\mathrm{R}}}{E_{\mathrm{S}}}. \tag{115}$$

Количество энергии, которое излучается в слое, превосходит излучаемое первичными источниками именно во столько раз, сколько в среднем рассеяний испытал каждый рожденный в слое фотон.

При определении (115) первое излучение фотона считается уже рассеянием. Иногда средним числом рассеяний называют величину

$$\langle N \rangle = \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{E_{\mathrm{L}}}{E_{\mathrm{S}}} = \overline{N} - 1, \tag{116}$$

исключая первоначальное излучение из числа рассеяний.

Другая величина, характеризующая процесс переноса энергии, — *средняя длина пути*, проходимого фотонами от рождения до выхода из процесса рассеяния:

$$\bar{l} = \frac{E_{\mathrm{C}}}{\beta E_{\mathrm{S}}}. \tag{117}$$

Постоянная β при подстановке выражения для E_{C} сокращается, так что определение имеет смысл и при $\beta = 0$.

Введенные величины позволяют записать равенство (114) так:

$$E_{\mathrm{S}} = E_{\mathrm{e}} + \left[\frac{1-\lambda}{\lambda}\langle N \rangle + \beta \bar{l}\right] E_{\mathrm{S}}. \tag{118}$$

Проще всего это равенство выглядит в случае бесконечной среды, из которой фотоны не выходят. Тогда $E_{\mathrm{e}} = 0$, и при любых источниках оказывается

$$(1-\lambda)\overline{N} + \lambda\beta\bar{l} = 1, \tag{119}$$

что отражает тот факт, что в бесконечной среде фотон обязательно поглощается в линии или континууме с вероятностями, равными соответствующим слагаемым слева.

Изучению распределения фотонов по числу рассеяний и их среднего числа посвящены работы многих авторов, начиная с основополагающих работ В. А. Амбарцумяна [3] и В. В. Соболева [74,75] (см. также [60]). Понятие среднего пути фотона ввел В. В. Иванов [32].

В следующих пунктах рассмотрим некоторые общие и частные виды источников.

4. Резольвента и функция Грина. Рассматриваем по-прежнему рассеяние в плоской атмосфере. Запишем общее соотношение вида уравнения переноса излучения между интенсивностью G и функцией источников Γ, не учитывающее (для простоты) азимутальной зависимости:

$$\mu \frac{\mathrm{d}G(\tau, \mu, x)}{\mathrm{d}\tau} = -[\alpha(x) + \beta]G(\tau, \mu, x) + \Gamma(\tau, \mu, x). \tag{120}$$

На интенсивность наложим нулевые граничные условия:

$$G(0,\mu,x)=0 \ \text{при} \ \mu>0, \quad G(\tau_0,\mu,x)=0 \ \text{при} \ \mu<0. \tag{121}$$

Конкретизация задачи содержится в уравнении лучистого равновесия. Пусть первичные источники излучения имеют вид произведения δ-функций:

$$\Gamma(\tau,\mu,x)=\delta(\tau-\tau_1)\delta(\mu-\mu_1)\delta(x-x_1)+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x' R(\mu,x;\mu',x')G(\tau,\mu',x'). \tag{122}$$

Для функции перераспределения выполняется прежнее условие

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(\mu,x;\mu',x')\mathrm{d}x=\alpha(x'). \tag{123}$$

Обе функции G и Γ будем называть *функциями Грина уравнения переноса*, добавляя при необходимости уточнения: для первой — интенсивность, для второй — функция источников. Их аргументы τ_1, μ_1 и x_1 не указываем также для краткости.

Прежде чем идти дальше, введем одно дополнительное обозначение:

$$s(y)=e^{-y}\frac{1+\mathrm{sgn}(y)}{2}=\begin{cases} e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y<0.\end{cases} \tag{124}$$

Производная и интеграл от этой функции

$$s'(y)=-s(y)+\delta(y), \quad \int s(y)\mathrm{d}y=-s(y)+\frac{\mathrm{sgn}(y)}{2}. \tag{125}$$

В частности, при $0\le\tau\le\tau_0$ легко показать, что

$$\int\limits_{0}^{\tau_0}s(y(\tau-\tau'))\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{|y|}-\frac{1}{y}[s(y\tau)-s(y(\tau-\tau_0))], \tag{126}$$

$$\int\limits_{0}^{\tau_0}s(y(\tau'-\tau))\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{|y|}-\frac{1}{y}[s(y(\tau_0-\tau))-s(-y\tau)]. \tag{127}$$

При помощи введенного обозначения формальное решение уравнения (120) можно записать единой формулой:

$$G(\tau,\mu,x)=\frac{1}{|\mu|}\int\limits_{0}^{\tau_0}s\left(\frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}(\tau-\tau')\right)\Gamma(\tau',\mu,x)\mathrm{d}\tau'. \tag{128}$$

Подставив его в (122), получим интегральное уравнение

$$\Gamma(\tau,\mu,x)=\delta(\tau-\tau_1)\delta(\mu-\mu_1)\delta(x-x_1)+\lambda\int\limits_{0}^{\tau_0}\mathrm{d}\tau'\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\mathcal{K}(\tau-\tau';\mu,x;\mu',x')\Gamma(\tau',\mu',x'). \tag{129}$$

Ядро уравнения в новом обозначении также дается единой формулой

$$\mathcal{K}(\tau-\tau';\mu,x;\mu',x')=\frac{1}{2|\mu'|}s\left(\frac{\alpha(x')+\beta}{\mu'}(\tau-\tau')\right)R(\mu,x;\mu',x'). \tag{130}$$

Введем три величины, представляющие собой просуммированные (проинтегрированные) с разными весами функции Грина-интенсивности:

$$\overline{G}(\tau)=\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xG(\tau,\mu,x), \tag{131}$$

$$\overline{G}_\alpha(\tau)=\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\alpha(x)G(\tau,\mu,x), \tag{132}$$

$$\overline{G}_\mu(\tau)=\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xG(\tau,\mu,x), \tag{133}$$

и один интеграл, связанный с функцией источников:

$$\overline{\Gamma}(\tau)=\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\Gamma(\tau,\mu,x)=\delta(\tau-\tau_1)+\lambda\int\limits_{0}^{\tau_0}\mathrm{d}\tau'\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\alpha(x')s\left(\frac{\alpha(x')+\beta}{\mu'}(\tau-\tau')\right)\Gamma(\tau',\mu',x'). \tag{134}$$

Для этих интегральных величин выполняются соотношения, следующие из (120) и (122):

$$\frac{\mathrm{d}\overline{G}_\mu(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-\overline{G}_\alpha(\tau)-\beta\overline{G}(\tau)+\overline{\Gamma}(\tau), \tag{135}$$

$$\overline{\Gamma}(\tau)=\delta(\tau-\tau_1)+\lambda G_\alpha(\tau). \tag{136}$$

Исключение из этих соотношений функции источников, как всегда, дает закон изменения потока излучения

$$\frac{\mathrm{d}\overline{G}_\mu(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-(1-\lambda)\overline{G}_\alpha(\tau)-\beta\overline{G}(\tau)+\delta(\tau-\tau_1). \tag{137}$$

Теперь представим наши функции в виде рядов Неймана.

5. Разложения по кратностям рассеяния. Разложим функции Грина по степеням вероятности выживания фотона [49]:

$$G(\tau,\mu,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n G_n(\tau,\mu,x),\quad \Gamma(\tau,\mu,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\Gamma_n(\tau,\mu,x). \tag{138}$$

Каждые соответствующие слагаемые удовлетворяют тем же уравнениям переноса и лучистого равновесия, что и сами функции:

$$\mu\frac{\mathrm{d}G_n(\tau,\mu,x)}{\mathrm{d}\tau}=-[\alpha(x)+\beta]G_n(\tau,\mu,x)+\Gamma_n(\tau,\mu,x),\ n=0,1,\dots, \tag{139}$$

$$\Gamma_n(\tau,\mu,x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x' R(\mu,x;\mu',x')G_{n-1}(\tau,\mu',x'),\ n=1,2,\dots \tag{140}$$

Нулевые составляющие функции источников и интенсивности

$$\Gamma_0(\tau,\mu,x)=\delta(\tau-\tau_1)\delta(\mu-\mu_1)\delta(x-x_1), \tag{141}$$

$$G_0(\tau,\mu,x)=s\left(\frac{\alpha(x_1)+\beta}{\mu_1}(\tau-\tau_1)\right)\frac{\delta(x-x_1)\delta(\mu-\mu_1)}{|\mu_1|}. \tag{142}$$

Как и ранее, может быть получено формальное решение уравнения (139), отличающееся по виду от (128) только наличием индекса n у входящих в него функций (как само уравнение (139) отличается от исходного уравнения (120)). Аналог интегрального уравнения ввиду наличия дополнительного множителя λ принимает вид соотношения последовательных приближений:

$$\Gamma_n(\tau,\mu,x)=\int\limits_{0}^{\tau_0}\mathrm{d}\tau'\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\mathcal{K}(\tau-\tau';\mu,x;\mu',x')\Gamma_{n-1}(\tau',\mu',x'). \tag{143}$$

Для усредненной функции источников получаем

$$\overline{\Gamma}_n(\tau)=\int\limits_{0}^{\tau_0}\mathrm{d}\tau'\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\alpha(x')s\left(\frac{\alpha(x')+\beta}{\mu'}(\tau-\tau')\right)\Gamma_{n-1}(\tau',\mu',x'). \tag{144}$$

Согласно обычной интерпретации функция источников — это полная энергия, излучаемая на глубине τ в направлении μ в частоте x (в τ,μ,x). Конечно, подразумевается, что на самом деле эта энергия рассчитана на единичную площадь границы слоя, на единичную оптическую глубину и на единицу времени, а также проинтегрирована по азимуту. Действительно, коэффициент излучения ε_ν в общем случае — это энергия, которую излучает единица объема за единицу времени в единичном интервале частот и единичном телесном угле. Энергия, равная частному от деления этой величины на коэффициент поглощения, называемая функцией источников, следовательно, рассчитывается на единицу площади поверхности границы плоской среды и на единичный интервал оптических глубин, а также на единицу времени, единицу частоты и единицу телесного угла. Будем говорить для краткости об излучении в единичных интервалах переменных. Поскольку мы рассматриваем рассеяние в линии, энергия фотонов равна их числу, умноженному на $h\nu_0$, так что с точностью до этого множителя все равно, о чем говорить: о числе фотонов или об энергии.

При δ-образных источниках можно считать, что в расчете на все единичные интервалы излучается один фотон. Поэтому $\Gamma(\tau,\mu,x)$ — это число фотонов, излучаемых в τ,μ,x после всех рассеяний, при условии, что на глубине τ_1 в направлении μ_1 и в частоте x_1 первоначально излучается один фотон (опять в расчете на единичные интервалы времени, частоты, телесного угла и площади поверхности границы). В той же интерпретации $\lambda^n\Gamma_n(\tau,\mu,x)$ — число фотонов, излучающихся в τ,μ,x при тех же источниках, но только уже испытавшая n рассеяний.

6. Распределение по числу рассеяний. Выделим, как это сделано в работе [49], те фотоны (или ту энергию), которые испытали ровно n рассеяний, так как испытавшие n рассеяний фотоны могут затем рассеиваться и далее. Процесс рассеяния для них заканчивается, если происходит одно из трех: фотон погибает, не переизлучившись в линии или поглотившись в континууме, или же выходит из слоя. Рассмотрим все три возможности.

Доля фотонов, вышедших из слоя, составляет

$$\frac{\mu}{|\mu|}\left[s\left(y(\tau_0-\tau)\right)-s\left(-y\tau\right)\right]=1-|y|\int\limits_0^{\tau_0}s(y(\tau'-\tau))\mathrm{d}\tau',\quad y=\frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}. \tag{145}$$

Второе равенство написано с помощью соотношения (126). Доля поглощенных при процессах в непрерывном спектре фотонов

$$\beta\int\limits_0^{\tau_0}s\left(y(\tau'-\tau)\right)\frac{\mathrm{d}\tau'}{|\mu|}. \tag{146}$$

Наконец, доля не переизлучившихся в линии фотонов

$$(1-\lambda)\alpha(x)\int\limits_0^{\tau_0}s\left(y(\tau'-\tau)\right)\frac{\mathrm{d}\tau'}{|\mu|}. \tag{147}$$

Сложив три величины, получим долю фотонов, испытавших ровно n рассеяний:

$$1-[\alpha(x)+\beta]\int\limits_0^{\tau_0}s\left(y(\tau'-\tau)\right)\frac{\mathrm{d}\tau'}{|\mu|}+[(1-\lambda)\alpha(x)+\beta]\int\limits_0^{\tau_0}s\left(y(\tau'-\tau)\right)\frac{\mathrm{d}\tau'}{|\mu|}=1-\frac{\lambda\alpha(x)}{|\mu|}\int\limits_0^{\tau_0}s\left(\frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}(\tau'-\tau)\right)\mathrm{d}\tau'. \tag{148}$$

Величина, вычитаемая из единицы, это доля тех фотонов, которые, уже испытав n рассеяний, продолжают процесс рассеяния.

Чтобы получить соответствующие приведенным долям количества фотонов, следует умножить эти доли на полное число фотонов. В частности количество фотонов, испытавших ровно n рассеяний, при заданных δ-образных источниках равно

$$\lambda^n\Gamma_n(\tau,\mu,x)\left[1-\frac{\lambda\alpha(x)}{|\mu|}\int\limits_0^{\tau_0}s\left(\frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}(\tau'-\tau)\right)\mathrm{d}\tau'\right]. \tag{149}$$

Если мы не интересуемся распределениями по глубине, направлению и частоте, то по этим переменным выражение (149) можно проинтегрировать. Получится

$$\lambda^n\int\limits_0^{\tau_0}\overline{\Gamma}_n(\tau)\mathrm{d}\tau-\lambda^{n+1}\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau'\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\alpha(x)\Gamma_n(\tau,\mu,x)s\left(\frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}(\tau'-\tau)\right)=$$

$$=\lambda^n\int\limits_0^{\tau_0}\overline{\Gamma}_n(\tau)\mathrm{d}\tau-\lambda^{n+1}\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau'\overline{\Gamma}_{n+1}(\tau')=\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau\left[\lambda^n\overline{\Gamma}_n(\tau)-\lambda^{n+1}\overline{\Gamma}_{n+1}(\tau)\right]. \tag{150}$$

При переходе к последнему равенству использовано выражение (144).

7. Характеристическая функция и средние числа. Всем величинам, появившимся в предыдущем пункте, можно дать вероятностное истолкование. Так, если умножить произведение (149) на $2\pi\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu\mathrm{d}x$, то получится вероятность того, что фотон, рожденный на глубине τ_1 в направлении μ_1 и частоте x_1, будет испущен в слое толщиной $\mathrm{d}\tau$ на глубине τ в телесном угле $2\pi\mathrm{d}\mu$ около направления μ в полосе частот шириной $\mathrm{d}x$ около частоты x, испытав ровно n рассеяний. Вероятность излучения после n рассеяний на любой глубине в произвольном направлении и с какой угодно частотой равна интегралу (150). Если просуммировать все такие интегралы (найти сумму по всем n), то получится 1. Такие результаты объясняются именно тем, что выбранные источники соответствуют излучению одного фотона с определенными свойствами в расчете на единичные интервалы.

Таким образом, выражения (149) и (150) дают распределения вероятностей фотонов по числам рассеяний. Определим теперь широко используемую в теории вероятностей величину, называемую характеристической функцией. Обычно для этого применяется преобразование Фурье. Однако для нас удобнее преобразование Лапласа.

Назовем *характеристической функцией числа рассеяний* фотонов математическое ожидание e^{-pn} при распределении (149). Легко усмотреть, что вычисление такого математического ожидания равносильно замене во втором ряду (138) величины λ на λe^{-p} и умножении результата на (148). Таким образом, характеристическая функция определяется равенством

$$\varphi(\tau,\mu,x,p)=\Gamma(\tau,\mu,x)\Bigg|_{\lambda\to\lambda e^{-p}}\left[1-\lambda\alpha(x)\int\limits_0^{\tau_0}s\left(\frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}(\tau'-\tau)\right)\mathrm{d}\tau'\right]. \tag{151}$$

Зная характеристическую функцию, можно легко находить средние величины. Например, среднее число рассеяний при δ-образных источниках

$$\overline{n}(\tau,\mu,x)=-\varphi_p'(\tau,\mu,x,0)=\lambda\frac{\partial\Gamma(\tau,\mu,x)}{\partial\lambda}\left[1-\lambda\alpha(x)\int\limits_0^{\tau_0}s\left(\frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}(\tau'-\tau)\right)\mathrm{d}\tau'\right]. \tag{152}$$

Отсюда находится и среднее число рассеяний во всем слое всех фотонов независимо от глубины, направления и частоты. Это интеграл

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\overline{n}(\tau,\mu,x)&=\lambda\frac{\partial\overline{N}}{\partial\lambda}-\lambda^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau\frac{\overline{\Gamma}(\tau)-\delta(\tau-\tau_1)}{\lambda}=\\&=\lambda\frac{\partial\overline{N}}{\partial\lambda}-\lambda^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\overline{N}-1}{\lambda}=\lambda\frac{\partial\overline{N}}{\partial\lambda}-\lambda^2\left[\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\overline{N}}{\partial\lambda}-\frac{\overline{N}-1}{\lambda^2}\right]=\overline{N}-1.\end{aligned} \tag{153}$$

Здесь через $\overline{N}$ обозначен интеграл $\overline{N}=\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau\overline{\Gamma}(\tau)$. Результат, выражаемый равенством (153), можно было бы вывести сразу из распределения (150).

Если первым рассеянием считать первичный акт излучения, то функцию φ следует умножить на e^{-p}, тогда $\overline{n}$ будет пропорционально $\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda\Gamma}{\partial\lambda}$, а интеграл от него получится равным $\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda\overline{N}}{\partial\lambda}-\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial\lambda}=\overline{N}$.

8. Средние при рассеянии с полным перераспределением по частоте. Пусть рассеяние происходит с полным перераспределением по частоте. Тогда функция $R(x,\mu;x_1,\mu_1)=A\alpha(x)\alpha(x_1)$ и достаточно рассмотреть вместо уравнения (120) более простое уравнение — с источниками, зависящими только от глубины и пропорциональными $\alpha(x)$, т. е. уравнение для функций Грина вида

$$\mu\frac{\mathrm{d}G(\tau,\tau_1,\mu,x)}{\mathrm{d}\tau}=-[\alpha(x)+\beta]G(\tau,\tau_1,\mu,x)+\alpha(x)\Gamma_*(\tau,\tau_1), \tag{154}$$

$$\Gamma_*(\tau,\tau_1)=\frac{A}{2}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x_1)\mathrm{d}x_1\Gamma(\tau,\mu,x), \tag{155}$$

Здесь произведено суммирование по конечным параметрам μ и x и усреднение по начальным параметрам μ_1 и x_1.

Среднее число рассеяний фотона, родившегося на глубине τ_1, в этом случае также зависит только от τ_1 и не зависит от направления и частоты. Среднее число рассеяний есть просто интеграл от (155) по τ:

$$\overline{N}(\tau_1)=\int\limits_{\tau_*}^{\tau_0}\Gamma_*(\tau,\tau_1)\mathrm{d}\tau. \tag{156}$$

Поскольку

$$\Gamma_*(\tau,\tau_1) = \delta(\tau-\tau_1) + \Gamma(\tau,\tau_1), \tag{157}$$

где $\Gamma(\tau,\tau_1)$ — обычная резольвента, то в согласии с определением резольвенты функция $\overline{N}(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{N}(\tau) = 1 + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\tau_*}^{\tau_0} K(|\tau-\tau'|)\overline{N}(\tau')\mathrm{d}\tau'. \tag{158}$$

При всех других источниках среднее число рассеяний находится как среднее взвешенное по распределению источников от функции $\overline{N}(\tau)$.

Рассмотрим сначала рассеяние в бесконечной среде, т.е. при $\tau_0 = -\tau_* = \infty$. В силу ее однородности среднее число рассеяний $\overline{N}_\infty$ не зависит от глубины возникновения фотона. Тогда из уравнения (158) следует, что величина $\overline{N}_\infty$ совпадает с решением, получаемым методом вынесения:

$$\overline{N}_\infty = \frac{1}{1-\lambda+\lambda\Delta(\beta)}. \tag{159}$$

Из равенства (119) вытекает, что в бесконечной среде

$$\overline{l}_\infty = \frac{\Delta(\beta)/\beta}{1-\lambda+\lambda\Delta(\beta)}. \tag{160}$$

При $\beta = 0$ среднее число рассеяний $\overline{N}_\infty = 1/(1-\lambda)$, а $\overline{l}_\infty = \infty$. Напротив, при чистом рассеянии, но при $\beta > 0$ оказывается, что $\overline{l}_\infty = 1/\beta$, что совершенно естественно, а $\overline{N}_\infty = 1/\Delta(\beta)$, что определяет еще один смысл функции $\Delta(\beta)$. При консервативном рассеянии обе средние величины обращаются в бесконечность.

В случае полубесконечной среды зависимость от τ сохраняется:

$$\overline{N}(\tau) = D(\tau,0) = H(0)\Psi(\tau), \quad H(0) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda+\lambda\Delta(\beta)}}, \tag{161}$$

$$\Psi(\tau) = 1 + \int\limits_0^\tau \Phi(\tau')\mathrm{d}\tau'. \tag{162}$$

При $\tau = 0$, т.е. при рождении фотона на границе, $\overline{N}(0) = H(0)$, а при рождении его в глубоких слоях полубесконечной среды среднее число рассеяний близко к $H^2(0)$, т.е. к значению в бесконечной среде. При консервативном рассеянии среднее число рассеяний бесконечно. Для определения среднего пути необходимо найти выходящее излучение, что не так просто.

§ 5.4. Рассеяние в линии в движущейся среде

1. Влияние движения на перенос излучения. Если рассеивающая среда испытывает движение, то перенос излучения в ней усложняется. Более сложно записывается и уравнение переноса. Движение не оказывает сильного влияния на формирование непрерывного спектра, так как смещение вследствие движения гораздо меньше, чем протяженность континуума. При рассмотрении же переноса излучения в линии очень существенно, неподвижна рассеивающая среда или движется. Однако, если среда движется с некоторой скоростью как целое, т.е. ее составляющие части не изменяют положения друг относительно друга, то такое движение приводит просто к смещению всех частот линии на одну и ту же величину. Такой случай не требует нового решения.

Иначе обстоит дело, когда скорости отдельных объемов среды изменяют относительное положение. При сохранении плоской симметрии в этом случае говорят, что движение происходит с градиентом скорости.

Задачи о рассеянии при наличии градиента скорости в связи с вопросом о давлении излучения в планетарных туманностях и свечении нестационарных звезд начал изучать В.В. Соболев [67], который предложил эффективный метод их решения, изложенный, например, в книгах [68, 77]. Затем аналитическое рассмотрение таких задач продолжили его ученики [8,16,17, 22].

В обзоре В.П. Гринина [23] изложены метод Соболева, другие приближенные и асимптотические методы расчета профилей эмиссионных линий в движущихся средах и описаны приложения теории к истолкованию наблюдений. С.И. Грачевым дан подробный обзор методов и результатов этой теории [19]. Релятивистские уравнения и численные методы их решения представлены в книге Д. Михаласа [45].

Вследствие движения слоев среды, как всегда, проявляются два эффекта: аберрация и эффект Доплера. При нерелятивистских скоростях аберрацией можно пренебречь. Эффект Доплера, имеющий тот же порядок, смещает частоту, и этим смещением тоже можно пренебречь, когда частота входит множителем в какую-либо величину. Однако от частоты сильно зависит коэффициент поглощения. Следовательно, по той же причине, по которой учитывается эффект Доплера при тепловом движении атомов при выводе законов перераспределения по частоте, изменение частоты необходимо принимать во внимание при макроскопических движениях газа. Смещение частоты прямо отразится на профиле поглощения и функции перераспределения и через них — на интенсивности и функции источников.

Уравнение переноса в случае движущейся среды можно записывать в одной из двух систем отсчета. Одна из них связывается с наблюдателем, другая — со слоями среды. Будем называть их соответственно системой наблюдателя и сопутствующей. Уравнения переноса в этих системах выглядят по-разному.

Пусть в плоской среде введены пространственная координата τ — оптическая глубина в центре несмещенной линии — и характеристика направления η — косинус угла между этим направлением и направлением увеличения глубины. Границы слоя располагаются на глубинах $\tau = \tau_*$ ($\tau_* = -\infty$ или $\tau_* = 0$) и $\tau = \tau_0 \leq \infty$. Припишем нулевую оптическую глубину слою, который неподвижен относительно наблюдателя. Это не ограничивает общности. Будем также считать, что среда расширяется, т. е. знак скорости совпадает со знаком глубины.

Пусть слой, находящийся на глубине τ, движется по отношению к слою на нулевой глубине (и к наблюдателю) со скоростью $v(\tau)$. Тогда, если центральная частота линии на нулевой глубине равна ν_0, то на глубине τ она будет $\nu_0' = \nu_0 + \nu_0\eta v(\tau)/c$. Пусть безразмерное расстояние от центра линии измеряется в доплеровских ширинах $\Delta_\mathrm{D} = \nu_0\overline{v}/c$. Тогда это расстояние для нулевого слоя $x = (\nu - \nu_0)/\Delta_\mathrm{D}$, а на уровне τ оно смещено, и коэффициент поглощения зависит от величины скорости и угла: $\alpha_\nu = n_1 k_{\nu_0}\alpha(x - u(\tau)\eta/\overline{v})$. Отношение $u(\tau) = v(\tau)/\overline{v}$ — скорость расширения среды, выражаемая в тепловых скоростях. Ограничимся случаем нерелятивистского расширения плоской среды, без континуума и без угловой и частотной зависимости источников. Поле излучения в таком случае не зависит от азимута φ.

2. Перенос излучения в системе наблюдателя. Уравнение переноса излучения в системе наблюдателя имеет обычный вид уравнения для плоской среды, но со смещенной частотой у профиля поглощения. Вследствие этого функция источников также зависит от η:

$$\eta\frac{\partial I(\tau,\eta,x)}{\partial\tau} = -\alpha(x - u(\tau)\eta)[I(\tau,\eta,x) - S(\tau,\eta,x)], \tag{163}$$

Тот же эффект проявится и в уравнении баланса энергии, которое мы напишем несколько позже. Как всегда, будем подразумевать граничные условия, соответствующие отсутствию внешнего облучения.

Формальное решение уравнения переноса (163) запишем в следующем виде:

$$I(\tau,\eta,x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\tau_*}^{\tau} \alpha(x - u(\tau')\eta)S(\tau',\eta,x)E(x,\eta,\tau',\tau)\mathrm{d}\tau', & \eta > 0, \\ \displaystyle\int_{\tau}^{\tau_0} \alpha(x - u(\tau')\eta)S(\tau',\eta,x)E(-x,-\eta,\tau,\tau')\mathrm{d}\tau', & \eta < 0. \end{cases} \tag{164}$$

Здесь обозначено

$$E(x,\eta,\tau',\tau) = \frac{1}{\eta}\exp\left(-\int_{\tau'}^{\tau}\alpha\left(x - u(\tau'')\eta\right)\frac{\mathrm{d}\tau''}{\eta}\right). \tag{165}$$

Введенная функция обладает следующим свойством симметрии:

$$E(x,\eta,\tau',\tau) = -E(-x,-\eta,\tau,\tau'). \tag{166}$$

Все дальнейшие уравнения легче записать в сопутствующей системе. Строго говоря, с каждым слоем плоской среды связывается своя система координат, но для краткости мы будем говорить об одной системе отсчета.

3. Перенос излучения в сопутствующей системе. Перейдем в сопутствующую систему отсчета, т. е. сделаем замену переменных. Переменные в этой, сопутствующей, системе будем отмечать индексом с. В ней в качестве частотной переменной принимается смещающаяся частота, а оптическая глубина не изменяется:

$$x_\mathrm{c} = x - u(\tau)\eta, \quad \tau_\mathrm{c} = \tau. \tag{167}$$

Так как смещенная частота зависит от глубины, все зависимости от частоты и глубины изменяются и мы переобозначим функции:

$$I_\mathrm{c}(\tau_\mathrm{c},\eta,x_\mathrm{c}) = I(\tau,\eta,x), \quad S_\mathrm{c}(\tau_\mathrm{c},\eta,x_\mathrm{c}) = S(\tau,\eta,x). \tag{168}$$

Индекс у оптической глубины можно не указывать.

Уравнение переноса (163) также следует записать в новых переменных. В нем появится производная по частоте:
$$\eta\frac{\partial I_\mathrm{c}(\tau,\eta,x_\mathrm{c})}{\partial\tau}-\eta^2u'(\tau)\frac{\partial I_\mathrm{c}(\tau,\eta,x_\mathrm{c})}{\partial x_\mathrm{c}}=-\alpha(x_\mathrm{c})[I_\mathrm{c}(\tau,\eta,x_\mathrm{c})-S_\mathrm{c}(\tau,x_\mathrm{c})]. \tag{169}$$

Переход в сопутствующую систему несколько усложнил уравнение переноса. Однако формальное решение нового уравнения получается из (164) простой заменой частоты согласно соотношению (168). Указанное усложнение оправдывается также сильным упрощением уравнения лучистого равновесия, так как рассеяние в сопутствующей системе происходит локально, т. е. так, как будто эта система покоится:

$$S_\mathrm{c}(\tau,x_\mathrm{c})=S_0(\tau)+\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x'_\mathrm{c}}{A\alpha(x_\mathrm{c})}\int\limits_{-1}^{1}I_\mathrm{c}(\tau,\eta',x'_\mathrm{c})\mathrm{d}\eta'\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi R(x_\mathrm{c},x'_\mathrm{c},\mu). \tag{170}$$

Здесь μ — косинус угла рассеяния, определяемый обычной формулой.

Если поле излучения можно считать не очень неизотропным, то интенсивность можно заменить на среднюю, а ФП усреднить по направлениям, причем это надо делать именно в сопутствующей системе отсчета. Тогда функция источников потеряет зависимость от угла, и уравнение (170) перейдет в более простое, совпадающее по форме с (45):
$$S_\mathrm{c}(\tau,x_\mathrm{c})=S_0(\tau)+\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{R(x_\mathrm{c},x'_\mathrm{c})}{A\alpha(x_\mathrm{c})}\mathrm{d}x'_\mathrm{c}\mathcal{J}_\mathrm{c}(\tau,x'_\mathrm{c}), \tag{171}$$

где средняя интенсивность

$$\mathcal{J}_\mathrm{c}(\tau,x'_\mathrm{c})=\frac12\int\limits_0^1\mathrm{d}\eta\left[\int\limits_{\tau_*}^{\tau}\alpha(x_\mathrm{c}+[u(\tau)-u(\tau')]\eta)S_\mathrm{c}(\tau',x_\mathrm{c})E(x_\mathrm{c}+u(\tau)\eta,\eta,\tau',\tau)\mathrm{d}\tau'+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\tau}^{\tau_0}\alpha(x_\mathrm{c}-[u(\tau)-u(\tau')]\eta)S_\mathrm{c}(\tau',x_\mathrm{c})E(-x_\mathrm{c}+u(\tau)\eta,\eta,\tau,\tau')\mathrm{d}\tau'\right]. \tag{172}$$

Если принять приближение ППЧ, то уравнение еще упростится, функция источников перестанет зависеть и от смещенной частоты:
$$S_\mathrm{c}(\tau)=S_0(\tau)+\lambda A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x'_\mathrm{c})\mathrm{d}x'_\mathrm{c}\mathcal{J}_\mathrm{c}(\tau,x'_\mathrm{c}). \tag{173}$$

Следует упомянуть, что первоначально некоторые исследователи переноса излучения в расширяющихся средах численно решали уравнение переноса, записанное в системе наблюдателя, т. е. в форме (163). В той же системе они записывали уравнение лучистого равновесия и в ней усредняли функцию перераспределения по направлению. В результате при функции перераспределения R_I получались решения, очень сильно отличающиеся от рассчитанных в предположении ППЧ. Вскоре была выяснена некорректность такой процедуры. Впоследствии многочисленные расчеты показали, что рассеяние с ФП R_I и R_III, если усреднение производить в сопутствующей системе отсчета, очень близко к рассеянию при ППЧ, как и в неподвижных средах (история вопроса и результаты изложены в книге [45] и обзоре [55]). Поэтому обратимся к этому случаю.

4. Интегральное уравнение переноса при полном перераспределении по частоте. При ППЧ не столь существенно, в какой системе рассматривается перенос, так как функция источников в обеих системах не зависит от частоты. Поэтому будем исходить из уравнения (163).

После подстановки средней интенсивности (172) в уравнение баланса энергии (173) получим интегральное уравнение для функции источников:

$$S(\tau)=S_0(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\tau_*}^{\tau_0}K(\tau,\tau')S(\tau')\mathrm{d}\tau'. \tag{174}$$

Ядро этого уравнения в общем случае не является симметричным разностным:

$$K(\tau,\tau')=A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int\limits_0^1\mathrm{d}\eta\left\{\begin{array}{ll}\alpha(x-u(\tau)\eta)\alpha(x-u(\tau')\eta)E(x,\eta,\tau',\tau), & \tau>\tau',\\ \alpha(x+u(\tau)\eta)\alpha(x+u(\tau')\eta)E(x,\eta,\tau,\tau'), & \tau<\tau'.\end{array}\right. \tag{175}$$

Если во внешнем интеграле сделать замену, обозначив через x аргумент профиля поглощения со скоростью, зависящей от τ, т.е. перейти в сопутствующую систему, и воспользоваться четностью профиля поглощения, то ядро примет вид

$$K(\tau,\tau') = A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)\mathrm{d}x\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta}\alpha(x+[u(\tau)-u(\tau')]\eta)\exp\left(-\left|\int\limits_{\tau'}^{\tau}\alpha(x+|u(\tau'')-u(\tau')|\eta)\frac{\mathrm{d}\tau''}{\eta}\right|\right). \qquad (176)$$

5. Случай постоянного градиента скорости. Будем теперь считать, что расширение идет со скоростью, пропорциональной глубине τ: $u(\tau)=\gamma\tau$. Этот случай называют расширением с постоянным градиентом скорости, величина γ — безразмерный градиент скорости расширения. В таком случае ядро зависит от модуля разности аргументов: $K(\tau,\tau')=K(|\tau-\tau'|)$, а уравнение принимает стандартный вид

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\tau_*}^{\tau_0}K(|\tau'-\tau|)S(\tau')\mathrm{d}\tau', \qquad (177)$$

где ядерная функция определяется выражением [77]

$$K(\tau) = A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\alpha(x)\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta}\alpha(x+\gamma\tau\eta)\exp\left(-\int\limits_0^{\tau}\alpha(x+\gamma\eta z)\frac{\mathrm{d}z}{\eta}\right). \qquad (178)$$

Однако эта функция не приводится к суперпозиции экспонент, и поэтому теория, изложенная в главе 3, приложима к рассматриваемому случаю не полностью. Выполняются равенство $\Gamma_\infty(\tau,\tau_1)=\Phi_\infty(|\tau-\tau_1|)$ и соотношения Соболева, выражающие резольвенты уравнений для полубесконечной и конечной сред через резольвентные функции. Можно ввести преобразования Лапласа от резольвенты и резольвентной функции, в частности H-функцию. Остаются справедливыми выражения для двустороннего преобразования Лапласа от $\Phi_\infty(\tau)$ и соотношение Винера—Хопфа, а также уравнения, содержащие производные по толщине слоя τ_0. Однако преобразование Лапласа от ядерной функции не является интегралом типа Коши. Явное выражение для H-функции можно записать в том же виде, что и для неподвижной среды, но обратить преобразования Лапласа от резольвентных функций и представить их в виде, удобном для вычисления и исследования, в общем случае не удается. Поэтому асимптотическую теорию для рассеяния в движущихся средах нельзя построить так, как это было сделано для сред без учета их движения.

Ядерная функция (178) не нормирована на 1. Действительно, в теории вводится функция

$$L(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\infty}K(\tau')\mathrm{d}\tau' = L_*(\tau) - L(\infty), \qquad (179)$$

где

$$L_*(\tau) = A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\alpha(x)\int\limits_0^1\mathrm{d}\eta\exp\left(-\int\limits_0^{\tau}\alpha(x+\gamma\eta z)\frac{\mathrm{d}z}{\eta}\right). \qquad (180)$$

После замены переменной интегрирования в интеграле показателя экспоненты выражение (180) примет вид

$$L_*(\tau) = A\int\limits_0^1\mathrm{d}\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\alpha(x)\exp\left(-\frac{1}{\gamma^2\eta^2}\int\limits_x^{x+\gamma\eta\tau}\alpha(x')\mathrm{d}x'\right). \qquad (181)$$

Предельные значения этой функции: $L_*(0)=1$,

$$L_*(\infty) = A\int\limits_0^1\mathrm{d}\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\alpha(x)\exp\left(-\frac{1}{\gamma^2\eta^2}\int\limits_x^{\infty}\alpha(x')\mathrm{d}x'\right) = A\gamma\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}E_{7/2}\left(\frac{1}{A\gamma}\right)\right]. \qquad (182)$$

Функции $K(\tau)$ и $L(\tau)$ имеют тот же вероятностный смысл, что и в случае неподвижной среды. Напомним, что $K(\tau)\mathrm{d}\tau$ — вероятность того, что излученный фотон пройдет путь длиной τ и поглотится в линии в слое толщиной $\mathrm{d}\tau$. Вероятность поглощения на бесконечном пути $L(0)=L_*(0)-L_*(\infty)$ меньше единицы. Величина $L_*(\infty)$ есть вероятность того, что фотон уйдет на бесконечность без поглощения в линии из-за доплеровского смещения частоты.

Изложим приближенный метод решения рассматриваемых задач, ограничившись для простоты случаем постоянного градиента скорости.

6. Метод Соболева. Метод решения задач о рассеянии излучения в линии в движущихся с градиентом скорости средах был предложен В. В. Соболевым в связи с изучением им образования линейчатых спектров туманностей и оболочек нестационарных звезд [68]. Идея метода заключается в том, что фотоны, излученные в одном объеме среды, из-за смещения линии вследствие градиента скорости перестают взаимодействовать с атомами, расположенными в других объемах, удаляющихся или приближающихся к объему излучения. Процесс переноса излучения становится локальным. На основании такого соображения в равенстве (172) можно вынести из-под интегралов значение функции источников в точке τ (от частоты при ППЧ она не зависит). Тогда выражение для средней интенсивности можно представить в виде

$$\mathcal{J}(\tau, x_c) = [1 - \beta(\tau, x_c)]S(\tau), \tag{183}$$

где $\beta(\tau, x_c)$ — доля фотонов, не взаимодействующих с атомами и уходящих из процесса рассеяния. Выражение для этой величины получается в виде интеграла. После подстановки формулы (183) в уравнение (173) можно найти функцию источников.

Решение в том же виде получается, если к уравнению (177) применить метод вынесения, описанный в § 4.7 для случая неподвижной среды. Это решение также было получено В. В. Соболевым и имеет вид

$$S(\tau) = \frac{S_0(\tau)}{1 - \lambda + \dfrac{\lambda}{2}[L_*(\tau - \tau_*) + L_*(\tau_0 - \tau)]}. \tag{184}$$

Еще раз подчеркнем, что локальный характер переноса излучения в случае наличия градиента скорости объясняется тем, что фотоны выходят из области, непосредственно примыкающей к месту их рождения, так как в более отдаленных областях атомы движутся с другими скоростями и не рассеивают эти фотоны.

При расчете интенсивности излучения по найденной функции источников также применяется приближение, опирающееся на локальный характер рассеяния. Вместо того чтобы просто интегрировать по лучу зрения, интенсивность в каждой частоте вычисляется только по области, которая движется с соответствующей этой частоте скоростью.

Метод, основанный на локальности процесса переноса излучения в движущихся средах вследствие эффекта Доплера, был развит В. В. Соболевым для произвольного поля скоростей, а также для радиального расширения, когда даже при постоянной радиальной скорости все равно имеется ее градиент из-за кривизны слоев среды [68,77].

Метод Соболева часто оказывается достаточным для различных оценок и может служить первым приближением при решении сложных задач о рассеянии на многоуровенных атомах. Точность этого метода, других приближений и численных методов решения уравнения (174) была исследована в работах [63,64,65]. Приближение Соболева тем лучше, чем больше градиент скорости, так как с его увеличением все большая часть фотонов выходит из среды без рассеяния, непосредственно от источников. Это приближение до сих пор используется при расчетах совместного переноса излучения во многих линиях сложных многоуровенных атомов в движущихся средах.

Основной эффект неравномерного расширения среды заключается в том, что профили линий получаются несимметричными. На рис. 11 представлены ненормированные профили, рассчитанные в [14] для модели солнечной вспышки. Расчет произведен в двухпотоковом приближении для доплеровского профиля при полном перераспределении по частоте, линейной зависимости источников от глубины $S_0(\tau) = 1 + \tau/2$ и трех значений оптической толщины слоя: 4, 6 и 8. Градиент скорости был принят равным 0.1.

7. Некоторые обобщения. Скажем здесь несколько слов о развитии теории рассеяния в линии в движущихся средах.

Асимптотическая теория для задач с постоянным градиентом скорости была развита С. И. Грачевым [16,17] для одномерных, сферически симметричных и плоских сред. Асимптотики по форме близки к найденным для неподвижной среды, но несколько сложнее. Им же даны оценки характерных времен и длин, возникающих в процессе переноса излучения при различных профилях поглощения [15].

Впоследствии было обращено внимание еще на одно обстоятельство. Если среда расширяется или сжимается с большим градиентом скорости, то фотоны сразу же выходят и процесс переноса носит локальный характер. Однако если скорость не монотонна, то возможна ситуация, когда скорости двух разнесенных в пространстве частей среды совпадают [20]. Тогда фотоны, излученные в одной такой части, будут поглощаться в другой. Эта ситуация получила название *нелокального радиационного взаимодействия*.

Была развита асимптотическая теория рассеяния в линии в бесконечной однородной и изотропной среде при ФП $R_{\rm II}$ с учетом континуума [18]. Результаты применены к изучению образования профиля линии L_α водорода в космологических моделях.

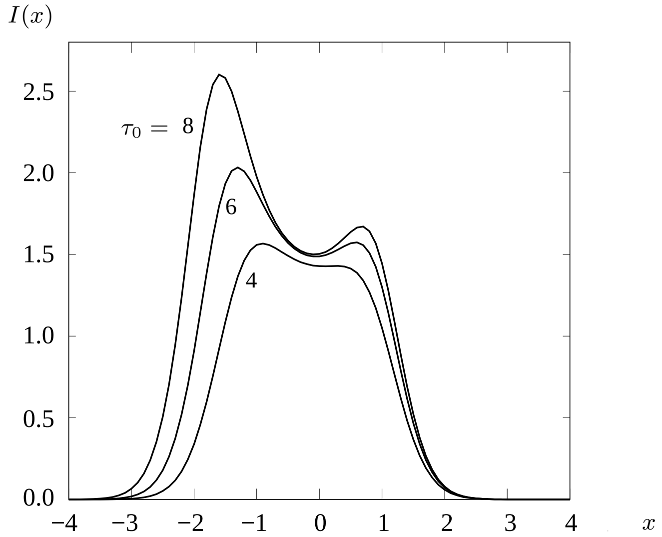


Рис. 11. Профили линий, образующихся в расширяющейся среде.

§ 5.5. Описание поляризованного излучения

1. Поляризация монохроматической волны. В изложении этого параграфа мы в основном следуем книге С. Чандрасекара [85].

Пусть в пространстве распространяется монохроматическая электромагнитная волна. Закрепим точку наблюдения $\mathbf{r}$ и не будем указывать в качестве аргументов волны ее постоянные пространственные координаты. В этом случае нам безразлично, какая это волна. Будем считать для простоты рассуждений, что волна плоская. В этом параграфе используем круговую частоту $\omega = 2\pi\nu$.

Рассмотрим вектор напряженности электрического поля (в дальнейшем будем говорить "электрическая напряженность" или просто "напряженность"). Для монохроматической волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \tag{185}$$

Волна поперечная, т. е. напряженность перпендикулярна направлению распространения волны.

Всегда можно выбрать такое число α_0 и такие два вещественных вектора $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$, чтобы выполнялись требования

$$\mathbf{E}_0 = (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)\exp(i\alpha_0), \quad \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0. \tag{186}$$

Действительно, отделяя вещественную и мнимую части в равенстве (186), получаем соотношения

$$\mathbf{E}_\mathrm{R}^0 = \mathbf{b}_1\cos\alpha_0 - \mathbf{b}_2\sin\alpha_0,\ \mathbf{E}_\mathrm{I}^0 = \mathbf{b}_1\sin\alpha_0 + \mathbf{b}_2\cos\alpha_0. \tag{187}$$

Предположим, что число α_0 известно. Тогда векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ легко находятся, так как матрица коэффициентов в линейной системе ортогональна. Имеем

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{E}_\mathrm{R}^0\cos\alpha_0 + \mathbf{E}_\mathrm{I}^0\sin\alpha_0,\ \mathbf{b}_2 = -\mathbf{E}_\mathrm{R}^0\sin\alpha_0 + \mathbf{E}_\mathrm{I}^0\cos\alpha_0. \tag{188}$$

Остается потребовать перпендикулярность этих векторов, т. е.

$$\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = [(\mathbf{E}_\mathrm{I}^0)^2 - (\mathbf{E}_\mathrm{R}^0)^2]\cos\alpha_0\sin\alpha_0 + \mathbf{E}_\mathrm{R}^0\mathbf{E}_\mathrm{I}^0(\cos^2\alpha_0 - \sin^2\alpha_0) = 0. \tag{189}$$

Такое уравнение всегда имеет решение, так как для тангенса двойного угла получается выражение

$$\mathrm{tg}\,2\alpha_0 = \frac{2\mathbf{E}_\mathrm{R}^0\mathbf{E}_\mathrm{I}^0}{(\mathbf{E}_\mathrm{R}^0)^2 - (\mathbf{E}_\mathrm{I}^0)^2}, \tag{190}$$

которое всегда имеет смысл (при $(\mathbf{E}_\mathrm{R}^0)^2 = (\mathbf{E}_\mathrm{I}^0)^2$ можно взять $\alpha_0 = \pi/4$).

Значения α_0, удовлетворяющие уравнению (190), могут отличаться на $\pi/2$. Можно выбрать одно из них, исходя из какого-либо условия, например чтобы вектор $\mathbf{b}_1$ был длиннее, чем $\mathbf{b}_2$, или чтобы эти векторы вместе с направлением волны составляли правую тройку. Сейчас для нас этот выбор несущественен.

Итак, мы представили вектор напряженности в виде

$$\mathbf{E} = (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)\exp(-i(\omega t - \alpha_0)). \tag{191}$$

Вспоминая, что физический смысл имеет лишь вещественная часть вектора (191), находим, что конец этого вектора описывает кривую

$$\mathrm{Re}\,\mathbf{E} = \mathbf{b}_1 \cos(\omega t - \alpha_0) + \mathbf{b}_2 \sin(\omega t - \alpha_0), \tag{192}$$

которая в общем случае является эллипсом.

Таким образом, строго монохроматическая волна всегда полностью эллиптически поляризована. В зависимости от того, составляют векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ правую или левую тройку с направлением движения волны и вращается ли вектор напряженности от $\mathbf{b}_1$ к $\mathbf{b}_2$ или наоборот, поляризация называется левой или правой (определения разнятся). Направление того из векторов $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$, длина которого больше, называется плоскостью поляризации или плоскостью преимущественных колебаний электрического вектора.

Если один из векторов $\mathbf{b}_1$ или $\mathbf{b}_2$ оказывается нулевым, то вектор (185) зачерчивает отрезок прямой и поляризация — линейная (или плоская). Напротив, если длины векторов совпадают, вектор (185) движется по окружности, а поляризация — круговая (или циркулярная).

Однако в природе редко осуществляются строго монохроматические волны, а реальные приборы тем более не могут вырезать очень узкую полосу по частоте. Поэтому приходится рассматривать более общий случай и для него вводить специальное описание состояния поляризации.

2. Почти монохроматическая волна. Представим проходящую через фиксированную точку пространства волну функцией

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t) \exp(-i\omega t). \tag{193}$$

Конечно, так можно изобразить совершенно произвольную вектор-функцию. Здесь будем считать, что амплитуда $\mathbf{E}_0(t)$ меняется со временем достаточно медленно. Дело в том, что обычно частоты ω очень велики. Оптическому диапазону спектра соответствуют частоты $\omega = (2.4 \div 5) \cdot 10^{15}$ Гц, так что за 1 секунду через некоторую точку в пространстве проходит 10^{15} периодов гармонического колебания. Еще больше частота в УФ и рентгеновском диапазонах. Даже в радиодиапазоне частоты измеряются в мегагерцах. Вот по сравнению с этой быстрой экспонентой амплитуда меняется медленно, колеблясь вокруг какого-либо среднего. Постоянные же времени обычных приборов измеряются долями секунды.

Почти монохроматическая волна может возникать в результате смешения некогерентных (т. е. идущих от независимых источников) волн одной частоты или близких частот, не различимых прибором. Тогда невозможно ввести векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$, так как фаза α_0 все время меняется. Поэтому описание поляризации такой волны более сложно, чем для строго монохроматической волны.

3. Диадное произведение. Часто оказывается удобным векторы представлять в виде столбцов, как это делается в линейной алгебре. Эти столбцы можно рассматривать как частный случай матриц и производить с ними обычные матричные операции. Такое представление позволяет использовать удобные обозначения и ввести одно вспомогательное понятие. Продемонстрируем это на примере комплексных векторов с двумя составляющими. Обобщение на векторы произвольной размерности тривиально.

Пусть даны два вектора

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \tag{194}$$

Скалярное произведение этих векторов можно записать в виде произведения матриц

$$\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2. \tag{195}$$

Здесь звездочкой отмечается комплексно сопряженная величина, а крестом — эрмитово-сопряженная матрица.

Произведение этих же векторов, взятое в обратном порядке, дает не число, а квадратную матрицу:

$$\mathbf{b}\,\mathbf{a}^\dagger = \begin{pmatrix} b_1 a_1^* & b_1 a_2^* \\ b_2 a_1^* & b_2 a_2^* \end{pmatrix}. \tag{196}$$

Такие матрицы называются *диадными произведениями*, или короче *диадами*. Определитель такой матрицы всегда равен нулю, так как ее строчки (и столбцы) пропорциональны.

4. Поляризационная матрица и параметры Стокса. Выберем некоторую декартову систему координат x, y в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны так, чтобы оси координат составляли с направлением волны правую тройку. Эту систему можно принять в качестве базиса, который называется поляризационным. Разложим вектор $\mathbf{E}$ по ортам базиса и представим его в виде столбца

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^0(t) \\ E_y^0(t) \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. \tag{197}$$

Определим для почти монохроматической волны (193) следующую матрицу как среднее от диадного произведения

$$\check{\mathcal{S}} = \frac{c}{8\pi}\overline{\mathbf{E}\mathbf{E}^\dagger} = \frac{c}{8\pi}\begin{pmatrix} \overline{|E_x|^2} & \overline{E_xE_y^*} \\ \overline{E_x^*E_y} & \overline{|E_y|^2} \end{pmatrix}. \tag{198}$$

Поскольку экспоненциальные множители при перемножении сопряженных проекций вектора исчезают, в этих формулах можно писать, а можно не писать (как мы сделали) ноль у этих проекций, т. е. все равно, что брать: сам вектор или его амплитуду. В обоих случаях согласно определению (198) $\check{\mathcal{S}}$ получается самосопряженной квадратной матрицей второго порядка с (вообще говоря) четырьмя независимыми параметрами. Заметим, что после усреднения матрицу уже нельзя (опять-таки вообще говоря) представить диадным произведением.

Матрица $\check{\mathcal{S}}$ называется *поляризационной* и является частным случаем общего понятия матрицы плотности, определяемой в квантовой механике. Обычно недиагональные элементы общей матрицы плотности фотонного газа, отвечающие разным частотам, очень малы или даже обращаются в нуль, так как в них усредняются произведения с разными экспоненциальными множителями с мнимыми показателями. Появление матрицы плотности в классической электродинамике объясняется тем, что поляризационная матрица характеризует состояние поляризации волны, идущей в некотором направлении с одной частотой (или очень близкими частотами).

Наряду с поляризационной матрицей (198) состояние поляризации почти монохроматической волны можно описывать четырьмя параметрами Стокса, с которыми эта матрица связана равенством

$$\check{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I+Q & U-iV \\ U+iV & I-Q \end{pmatrix}. \tag{199}$$

Обратные выражения параметров Стокса через элементы матрицы и тем самым через составляющие напряженности волны имеют вид

$$I = \frac{c}{8\pi}(\overline{|E_x|^2} + \overline{|E_y|^2}),\ Q = \frac{c}{8\pi}(\overline{|E_x|^2} - \overline{|E_y|^2}), \tag{200}$$

$$U = \frac{c}{8\pi}(\overline{E_x^*E_y} + \overline{E_xE_y^*}),\ V = i\frac{c}{8\pi}(\overline{E_xE_y^*} - \overline{E_x^*E_y}). \tag{201}$$

Обычно поляризационные матрицы используются в физических работах именно потому, что они представляют частный случай более общего, привычного физикам, понятия. В астрофизике же гораздо более употребительны параметры Стокса. Их преимущество в том, что они все вещественны. Кроме того, их обычно представляют в виде столбца с четырьмя элементами, и их линейные преобразования при различных изменениях описания выражаются с помощью четырехмерных матриц, а не с помощью тензоров четвертого ранга, как в случае матриц. Таким образом, представление поляризации через параметры Стокса значительно более наглядно.

5. Свойства поляризационной матрицы и параметров Стокса. Эти свойства связаны с двумя обстоятельствами. Во-первых, с усреднением элементов диадного произведения по времени, а во-вторых, с преобразованиями этих элементов при поворотах ортов поляризационного базиса. Перечислим такие свойства.

1) Выполняется неравенство

$$\det\check{\mathcal{S}} = \frac{c^2}{(8\pi)^2}[\overline{|E_x|^2|E_y|^2} - |\overline{E_x^*E_y}|^2] \geq 0. \tag{202}$$

Это неравенство, если расписать усреднение по времени как интегралы по периоду, деленные на величину этого периода, представляет собой частный случай общего неравенства Коши—Буняковского (или Шварца). Его аналогом является неравенство, выражающее утверждение, что модуль скалярного произведения векторов меньше произведения норм (длин) этих векторов.

Через параметры Стокса неравенство (202) записывается так:

$$4\det\check{\mathcal{S}} = I^2 - Q^2 - U^2 - V^2 \geq 0. \tag{203}$$

При доказательстве неравенства Коши—Буняковского устанавливается, что равенство в нем достигается только тогда, когда усредненные величины остаются пропорциональными, а это может выполняться в данном случае, если волна монохроматическая, иначе неравенство (202) является строгим. Таким образом, равенство в (202) (или в (203)) есть необходимое и достаточное условие монохроматичности волны и полной ее поляризации (в общем случае эллиптической).

2) При повороте ортов поляризационного базиса на некоторый угол координаты векторов в исходной и повернутой системах связаны линейным преобразованием с ортогональной матрицей. Преобразуются и элементы матриц, в частности поляризационной. При этом некоторые величины, составляемые из элементов матриц, не изменяются. Например, не изменяются собственные значения (с.з.) матриц, а также такие комбинации их элементов, которые определяют эти значения. Как известно, коэффициентами характеристического уравнения, из

которого находятся с.з., являются след матрицы и ее определитель. У матрицы второго порядка всего два коэффициента, так что указанными двумя величинами исчерпываются инварианты характеристического уравнения.

Итак, инвариантами при повороте осей поляризационного базиса остаются следующие величины.

а) Определитель, т. е. $I^2 - Q^2 - U^2 - V^2$, комбинация, определяющая монохроматичность или немонохроматичность волны.

б) След матрицы, т. е. интенсивность излучения I.

в) Параметр V матрицы (199) также инвариант, так как преобразования, отражающие поворот базиса, вещественны. Поэтому вещественная часть матрицы преобразуется в вещественную, а мнимая — в мнимую. Поскольку мнимой частью матрицы (199) является только параметр V, он также инвариантен.

6. Наблюдаемая интенсивность и поляризация. Измерение интенсивности (точнее, потоков) излучения производится при помощи фотометров. Эти приборы сами не могут отличить поляризованное излучение от неполяризованного. Для определения поляризации в оптическом диапазоне применяются анализаторы-поляроиды, которые пропускают излучение, поляризованное в одной плоскости, и не пропускают поляризованное в перпендикулярной. Такими поляроидами для видимого света могут служить пластинки из исландского шпата или поляризационные призмы. Гораздо труднее измерять поляризацию в рентгеновском диапазоне — там используется эффект Комптона.

При вращении анализатора через него проходят разные доли падающего излучения. Следовательно, по показаниям фотометра, стоящего за анализатором, можно судить о состоянии поляризации волны.

Однако анализатор не в состоянии измерить круговую поляризацию или даже установить ее присутствие, так как круговая поляризация не дает эффекта при вращении анализатора. Надо как-то превратить круговую поляризацию в линейную. Для этого используются пластинки из веществ, вращающих плоскость поляризации, т. е. добавляющих разность фаз между составляющими вектора напряженности. Такими веществами являются кварц и другие кристаллические минералы, а также некоторые органические вещества, например сахар. Обычно наблюдатели применяют так называемую пластинку в четверть длины волны, поворачивающую плоскость поляризации на 90° и переводящую круговую поляризацию полностью в линейную. Но в теории будем считать, что добавляемая фаза произвольна.

Итак, пусть почти монохроматическая волна (197) падает на фотометр, предварительно пройдя через пластинку, добавившую ей разность фаз δ между E_x и E_y, и через анализатор, ось которого (т. е. такое направление, что если падает поляризованное в этом направлении излучение, то оно полностью проходит) повернута на угол ψ к оси x. Найдем, какую интенсивность $I(\psi, \delta)$ в зависимости от ψ и δ измерит фотометр.

После прохождения пластинки волна (197) превратится в волну с вектором напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}_\delta = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\delta} \end{pmatrix}. \tag{204}$$

Через анализатор пройдет не все излучение, а только та его часть, колебания электрической составляющей которого параллельны оси анализатора, т. е. волна спроектируется на эту ось. Представим вектор этого направления столбцом

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}. \tag{205}$$

Тогда прошедшая волна будет иметь амплитуду $\mathbf{l}^\dagger \mathbf{E}_\delta$. Вспомним еще, что физический смысл имеет только вещественная часть вектора напряженности, а фотометр измеряет усредненную по времени квадратичную величину:

$$I(\psi, \delta) = \frac{c}{4\pi}\overline{(\mathrm{Re}\,\mathbf{l}^\dagger \mathbf{E}_\delta)^2} = \frac{c}{16\pi}\overline{\left[\mathbf{l}^\dagger(\mathbf{E}_\delta + \mathbf{E}^*_\delta)\right]^2} = \frac{c}{16\pi}\left[\overline{(\mathbf{l}^\dagger \mathbf{E}_\delta)^2} + \overline{(\mathbf{l}^\dagger \mathbf{E}^*_\delta)^2} + 2\overline{(\mathbf{l}^\dagger \mathbf{E}_\delta)(\mathbf{l}^\dagger \mathbf{E}^*_\delta)}\right]. \tag{206}$$

Рассмотрим по очереди три слагаемых в последних квадратных скобках. Первые два из них равны нулю, так как квадрат вектора напряженности содержит множитель $e^{-2i\omega t}$, а квадрат сопряженного вектора пропорционален $e^{2i\omega t}$. Обе экспоненты при усреднении дают нуль. Остается только произведение вектора напряженности на его сопряженный.

Так как усредняется напряженность, а не вектор $\mathbf{l}$ или фаза δ, то постараемся вынести эти величины из-под знака усреднения. Для этого преобразуем сомножители. В первом сомножителе перенесем эрмитово сопряжение на вектор, связанный с ψ и δ, т. е. представим его в виде

$$\mathbf{l}^\dagger \mathbf{E}_\delta = \cos\psi \mathbf{E}_x + \sin\psi \mathbf{E}_y e^{i\delta} = \mathbf{l}^\dagger_\delta \mathbf{E}, \tag{207}$$

введя для этого обозначение

$$\mathbf{l}_\delta = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi e^{-i\delta} \end{pmatrix}. \tag{208}$$

Во втором сомножителе эрмитово-сопряженной величиной сделаем вектор напряженности:

$$\mathbf{l}^\dagger\mathbf{E}_\delta^* = \cos\psi\mathbf{E}_x^* + \sin\psi\mathbf{E}_y^* e^{-i\delta} = \mathbf{E}^\dagger\mathbf{l}_\delta. \tag{209}$$

Произведение этих сомножителей можно представить, воспользовавшись свойством ассоциативности произведения матриц, в виде

$$(\mathbf{l}^\dagger\mathbf{E}_\delta)(\mathbf{l}^\dagger\mathbf{E}_\delta^*) = (\mathbf{l}_\delta^\dagger\mathbf{E})(\mathbf{E}^\dagger\mathbf{l}_\delta) = \mathbf{l}_\delta^\dagger(\mathbf{E}\mathbf{E}^\dagger)\mathbf{l}_\delta. \tag{210}$$

Тогда после усреднения согласно определению поляризационной матрицы (198) получится простая формула

$$I(\psi,\delta) = \mathbf{l}_\delta^\dagger\check{\mathcal{S}}\mathbf{l}_\delta. \tag{211}$$

Выразим эту интенсивность через параметры Стокса. Подставив в (211) выражение (199) и проведя простую, хотя и довольно громоздкую выкладку, получим

$$I(\psi,\delta) = \frac{1}{2}[I + Q\cos 2\psi + U\sin 2\psi\cos\delta - V\sin 2\psi\sin\delta]. \tag{212}$$

Минус перед параметром V объясняется тем, что дополнительная фаза была введена в E_y, а не в E_x.

7. Частные случаи поляризации. Имея общую формулу для наблюдаемой интенсивности (212), мы можем рассмотреть, какие параметры характеризуют определенную поляризацию. Начнем с самого простого случая, когда излучение неполяризовано.

1) ***Неполяризованное излучение.*** Такое излучение называется естественным. В этом случае интенсивность, которую регистрирует фотометр, не зависит ни от угла анализатора, ни от разности фаз, так как направления колебаний электрической напряженности совершенно хаотичны. Ясно, что такое положение возможно лишь при условии, что $Q = U = V = 0$, т. е. все параметры Стокса, кроме интенсивности, равны нулю.

Противоположный случай, когда волна строго монохроматическая и полностью поляризовна, был рассмотрен выше. Теперь примéним общий подход.

2) ***Полная эллиптическая поляризация.*** Зададим векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ координатами в выбранном поляризационном базисе:

$$\mathbf{b}_1 = b_1\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = b_2\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}. \tag{213}$$

Числа b_1 и b_2 могут быть при этом как положительными, так и отрицательными.

Поляризационная матрица для напряженности (191) принимает вид

$$\check{\mathcal{S}} = \frac{c}{8\pi}(\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)(\mathbf{b}_1^\dagger - i\mathbf{b}_2^\dagger) = \frac{c}{8\pi}\begin{pmatrix} b_1\cos\alpha - ib_2\sin\alpha\\ b_1\sin\alpha + ib_2\cos\alpha\end{pmatrix}(b_1\cos\alpha + ib_2\sin\alpha b_1\sin\alpha - ib_2\cos\alpha) =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1^2\cos^2\alpha + b_2^2\sin^2\alpha & (b_1^2 - b_2^2)\cos\alpha\sin\alpha - ib_1b_2\\ (b_1^2 - b_2^2)\cos\alpha\sin\alpha + ib_1b_2 & b_1^2\sin^2\alpha + b_2^2\cos^2\alpha\end{pmatrix}. \tag{214}$$

Соответствующие выражения для параметров Стокса:

$$I = \frac{c}{8\pi}(b_1^2 + b_2^2), \quad Q = \frac{c}{8\pi}(b_1^2 - b_2^2)\cos 2\alpha, \tag{215}$$

$$U = \frac{c}{8\pi}(b_1^2 - b_2^2)\sin 2\alpha, \quad V = \frac{c}{8\pi}2b_1b_2. \tag{216}$$

Отсюда вытекают подслучаи полной поляризации.

3) ***Линейная поляризация.*** Эллипс вырождается в отрезок, когда одна из величин b_1 или b_2 обращается в нуль (оба обратиться в нуль они не могут). И в том, и в другом случае их произведение равно нулю и, следовательно, $V = 0$.

4) ***Круговая поляризация.*** Напротив, если при отсутствии дополнительной фазы наблюдаемая интенсивность не зависит от положения анализатора, т. е. поляризация круговая, то должно быть $Q = U = 0$.

Во всех других случаях говорят, что поляризация частичная. Ее, однако, можно свести к рассмотренным случаям, что мы сделаем в п. 10, но перед этим рассмотрим, как преобразуются параметры Стокса при повороте осей поляризационного базиса и какие изменения поляризации вызывают перемену знаков у параметров Стокса, характеризующих эту поляризацию.

8. Преобразование параметров при повороте. Инвариантные величины, остающиеся неизменными при повороте поляризационных ортов, нам удалось выявить не выписывая самих преобразований поляризационных параметров. Найдем теперь эти преобразования.

Пусть поляризационные орты повернуты на угол ϕ. Тогда новые (отмечаемые штрихами) и старые орты, как известно, связаны формулами

$$\mathbf{e}_1' = \cos\phi\mathbf{e}_1 + \sin\phi\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1' = -\sin\phi\mathbf{e}_1 + \cos\phi\mathbf{e}_2. \tag{217}$$

Составляющие напряженности, т. е. коэффициенты разложения ее по двум базисам, связаны точно такими же формулами. Оба преобразования можно записать в матричной форме. Для напряженностей это

$$\mathbf{E}' = \check{\mathcal{A}}(\phi)\mathbf{E}, \tag{218}$$

где матрица ортогонального преобразования (комплексного вектора)

$$\check{\mathcal{A}}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}. \tag{219}$$

Элементы поляризационной матрицы, построенной как диадное произведение векторов напряженности, преобразуются согласно закону преобразования операторов:

$$\check{\mathcal{S}}' = \check{\mathcal{A}}(\phi)\check{\mathcal{S}}\check{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}(\phi). \tag{220}$$

Поскольку ортогональная матрица вещественна, ее эрмитово сопряжение сводится к транспонированию, а последнее — к изменению знака у аргумента ϕ.

Перейдя от поляризационной матрицы к параметрам Стокса, убеждаемся, что преобразование вектора этих параметров при повороте поляризационных ортов

$$\begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \widehat{L}(\phi) \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \tag{221}$$

осуществляется посредством матрицы, которую часто называют матрицей Чандрасекара:

$$\widehat{L}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\phi) & \sin(2\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(2\phi) & \cos(2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{222}$$

При вещественных ортогональных преобразованиях из параметров Стокса преобразуются только два, причем с удвоенным углом. Это согласуется с известной уже инвариантностью параметров I и V.

9. Дискретные преобразования параметров Стокса. Преобразование параметров Стокса при повороте поляризационного базиса относится к непрерывным преобразованиям, так как угол поворота может быть любым и сколь угодно малым. Дискретные преобразования равносильны отражениям осей координат и перемене их порядка. Здесь рассмотрим именно такие преобразования. Заметим, что отражение обеих осей координат или, что то же самое, изменение знаков обоих чисел b_1 и b_2 сводится к повороту базиса на угол π и не изменяет параметров Стокса.

Если мы просто меняем базис при фиксированной поляризации волны, то параметры Стокса изменяются, но описывают они то же самое состояние. Мы же будем считать, что рассматриваются состояния поляризации при фиксированном базисе, но описываемые параметрами с разными знаками.

Будем считать поляризацию двух волн полной. Интенсивности двух волн считаем равными.

1) Два вектора Стокса различаются только знаками своих параметров Q и U. Это означает, что числа b_1 и b_2 у двух волн поменяны местами, т. е. эллипсы их имеют одну форму и размер, но повернуты друг относительно друга на угол $\pi/2$.

2) Различие между векторами Стокса — в знаках параметра V. Числа b_1 или b_2 у двух волн имеют противоположные знаки, т. е. противоположны направления одного из векторов $\mathbf{b}_1$ или $\mathbf{b}_2$. Значит, векторы напряженности электрического поля волн вращаются в противоположные стороны.

3) Если у волн противоположны знаки трех параметров Стокса, то это комбинация двух предыдущих случаев. Эллипсы волн повернуты на прямой угол, и векторы напряженности электрического поля вращаются в противоположные стороны. Такие поляризации волн называются *ортогональными*.

10. Представление общей поляризации через частные случаи. Как уже говорилось, у некогерентных пучков излучения складываются не напряженности полей, а квадратичные, энергетические, характеристики.

Это относится и к параметрам Стокса. Покажем, что произвольно поляризованный пучок излучения можно представить как сумму некогерентных пучков с более простой поляризацией.

1) *Полностью поляризованный пучок с добавлением естественного излучения.* Легко проверить, что

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\mathrm{d} \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} + (I - R_\mathrm{d}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{223}$$

где $R_\mathrm{d} = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}$. Таким образом, произвольно поляризованный пучок излучения можно представить как сумму полностью эллиптически поляризованного пучка и пучка естественного излучения. В силу неравенства (203) интенсивность последнего неотрицательна.

2) *Два пучка с взаимно ортогональными поляризациями.* Нетрудно также проверить и равенство

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{I + R_\mathrm{r}}{2R_\mathrm{r}} \begin{pmatrix} R_\mathrm{r} \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} + \frac{I - R_\mathrm{r}}{2R_\mathrm{r}} \begin{pmatrix} R_\mathrm{r} \\ -Q \\ -U \\ -V \end{pmatrix}, \tag{224}$$

согласно которому складываются два вектора Стокса полностью поляризованных пучков неотрицательной интенсивности. При этом у них одноименные параметры Стокса равны по модулю (точнее, пропорциональны), но параметры, характеризующие поляризацию, имеют противоположные знаки, т. е. поляризации пучков ортогональны. Как показано выше, у таких пучков противоположны направления вращения вектора напряженности и перпендикулярны положения плоскостей преимущественных колебаний.

11. Другие параметры. Вводятся также и другие параметры, характеризующие состояние поляризации излучения. Это степени общей P, линейной p и круговой p_s поляризации:

$$P = \frac{R_\mathrm{d}}{I},\ p = \frac{r_\mathrm{d}}{I},\ p_\mathrm{s} = \frac{V}{I},\ r_\mathrm{d} = \sqrt{Q^2 + U^2}, \tag{225}$$

а также позиционный угол α, т.е. угол между плоскостью преимущественных колебаний и выбранной осью абсцисс, и степень эллиптичности ε_s. Две последние величины определяются тангенсами: $\operatorname{tg} 2\alpha = U/Q$, $\operatorname{tg} \varepsilon_\mathrm{s} = V/r_d$.

§ 5.6. Рассеяние поляризованного излучения

1. Уравнение переноса поляризованного излучения. Это уравнение является обобщением обычного (скалярного) уравнения переноса и называется *векторным.* Вместо одной интенсивности здесь искомыми величинами выступают четыре параметра Стокса, которые в определенном поляризационном базисе (см. ниже) мы объединим в вектор

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}. \tag{226}$$

Как и интенсивность, эти параметры при наложении пучков излучения складываются, т.е. пучки считаются некогерентными.

Рассмотрим перенос поляризованного излучения в плоском слое. Будем предполагать, что среда изотропна: рассеивающие частицы не ориентированы каким-то образом, а хаотичны. Тогда ослабление всех параметров Стокса за счет рассеяния происходит одинаково, т.е. это ослабление описывается не матрицей, а скалярным коэффициентом ослабления, точно таким же, как и в уравнении переноса для интенсивности.

Введем ту же систему обозначений, которая использовалась при рассмотрении других видов рассеяния в плоском слое. Через η обозначим косинус угла между направлением распространения излучения $\boldsymbol{\omega}$ и направлением $\mathbf{n}$ увеличения оптической глубины τ. Тогда уравнение переноса будет формально выглядеть, как и скалярное:

$$\eta \frac{\mathrm{d}\mathbf{I}(\tau, \eta, \varphi)}{\mathrm{d}\tau} = -\mathbf{I}(\tau, \eta, \varphi) + \mathbf{S}(\tau, \eta, \varphi). \tag{227}$$

Усложнение уравнения по сравнению со скалярным заключается не только в том, что на самом деле здесь не одно уравнение, а четыре. Основное усложнение — в выражении для вектора функций источников. Чтобы его написать, необходимо ввести понятие фазовой матрицы, играющей роль индикатрисы рассеяния скалярной теории. Для ее определения, как и для привязки параметров Стокса, необходимо определить поляризационные базисы.

2. Поляризационные базисы. Пусть пучок излучения перед рассеянием направлен по единичному вектору $\boldsymbol{\omega}'$, имеющему полярные координаты η', φ', а после рассеяния излучение идет по вектору $\boldsymbol{\omega}$ с координатами η, φ. Косинус угла рассеяния дается прежним выражением

$$\mu = \eta\eta' + \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-(\eta')^2}\cos(\varphi - \varphi'). \tag{228}$$

Для рассеянного излучения поляризационный базис удобно определить следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{n} - \eta\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}}{\sqrt{1-\eta^2}}. \tag{229}$$

Базис для падающего излучения аналогичен, надо просто поставить штрихи. Однако такие базисы не подходят для написания матрицы рассеяния, так как они привязаны к характеристике не рассеяния, а слоя — вектору нормали $\mathbf{n}$. Поэтому вводятся еще два базиса, связанные с пучками, участвующими в процессе. Эти базисы назовем внутренними, а базисы вида (229) — внешними. Внутренние базисы построим аналогично внешним, но один из их векторов сделаем перпендикулярным плоскости рассеяния. Для рассеянного излучения

$$\mathbf{l}_1 = \frac{\boldsymbol{\omega}' - \mu\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad \mathbf{l}_2 = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}'}{\sqrt{1-\mu^2}}, \tag{230}$$

для падающего

$$\mathbf{l}_1' = \frac{\boldsymbol{\omega} - \mu\boldsymbol{\omega}'}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad \mathbf{l}_2' = \frac{\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-\mu^2}}. \tag{231}$$

Единичные векторы двух базисов связаны следующими простыми соотношениями:

$$\mathbf{l}_1 = \sqrt{1-\mu^2}\boldsymbol{\omega}' - \mu\mathbf{l}_1', \quad \mathbf{l}_1' = \sqrt{1-\mu^2}\boldsymbol{\omega} - \mu\mathbf{l}_1, \quad \mathbf{l}_2' = -\mathbf{l}_2. \tag{232}$$

В результате такого определения векторы напряженности рассеянной и падающей волн во внутренних базисах задаются одинаковыми формулами:

$$\mathbf{E} = E_1\mathbf{l}_1 + E_2\mathbf{l}_2, \quad \mathbf{E}' = E_1'\mathbf{l}_1' + E_2'\mathbf{l}_2'. \tag{233}$$

При переходе от внешнего базиса падающего излучения к внутреннему происходит поворот на угол ϕ', который задается своими функциями:

$$\cos\phi' = \mathbf{e}_1'\mathbf{l}_1' = \mathbf{e}_2'\mathbf{l}_2' = \frac{\eta - \mu\eta'}{\sqrt{1-(\eta')^2}\sqrt{1-\mu^2}}, \quad \sin\phi' = -\mathbf{e}_1'\mathbf{l}_2' = \mathbf{e}_2'\mathbf{l}_1' = \frac{(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}')}{\sqrt{1-(\eta')^2}\sqrt{1-\mu^2}}. \tag{234}$$

После рассеяния от внутреннего базиса надо перейти к внешнему, при этом угол поворота характеризуется функциями

$$\cos\phi = \mathbf{e}_1\mathbf{l}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{l}_2 = \frac{\eta' - \mu\eta}{\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\mu^2}}, \quad \sin\phi = \mathbf{e}_1\mathbf{l}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{l}_1 = \frac{(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}')}{\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\mu^2}}. \tag{235}$$

Зададим вектор нормали к границе полубесконечной среды в виде $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Кроме того, так как тригонометрические соотношения легче записать через тригонометрические функции, далее используем их, т. е. положим $\eta = \cos\theta$, $\sqrt{1-\eta^2} = \sin\theta$ и $\eta' = \cos\theta'$, $\sqrt{1-(\eta')^2} = \sin\theta'$. Тогда орты внешнего поляризационного базиса излучения, идущего в направлении θ, φ, определятся так:

$$\mathbf{e}_1 = (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta), \quad \mathbf{e}_2 = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0). \tag{236}$$

Согласно (235) для угла поворота ϕ находим

$$\cos\phi = \frac{\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta'\cos(\varphi' - \varphi)}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad \sin\phi = \frac{\sin\theta'\sin(\varphi' - \varphi)}{\sqrt{1-\mu^2}}. \tag{237}$$

Для угла поворота ϕ' формулы аналогичны.

3. Функции источников и фазовая матрица. Теперь можно записать соотношение, связывающее вектор функций источников

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{\mathrm{I}} \\ S_{\mathrm{Q}} \\ S_{\mathrm{U}} \\ S_{\mathrm{V}} \end{pmatrix} \tag{238}$$

с вектором интенсивностей (226). Это соотношение содержит интеграл по направлениям падающего излучения, как и в скалярной теории, но вместо индикатрисы рассеяния в него входит фазовая матрица, представляющая произведение матрицы рассеяния и матриц поворотов.

Матрица рассеяния связывает вектор Стокса падающего излучения с вектором рассеянного, причем оба вектора должны относиться к внутренним базисам (230) и (231). В случае изотропной среды она может зависеть только от угла рассеяния, т. е. от μ. Обозначим ее $\widehat{\mathcal{R}}(\mu)$. Тогда вектор функций источников

$$\mathbf{S}(\tau,\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{S}_0(\tau,\boldsymbol{\omega}) + \frac{\lambda}{4\pi}C\int \mathrm{d}^2\omega' \widehat{\mathcal{X}}\,\mathbf{I}(\tau,\boldsymbol{\omega}'), \quad \widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathcal{L}}(\phi)\widehat{\mathcal{R}}(\mu)\widehat{\mathcal{L}}(\phi'). \tag{239}$$

Первое слагаемое в первом равенстве описывает первичные источники, причем в них могут входить и внешние, и внутренние источники, как и в скалярном случае. Векторный аргумент $\boldsymbol{\omega}$ заменяет два скалярных: η, φ. Вид фазовой матрицы $\widehat{\mathcal{X}}$ определяется тем, что сначала параметры Стокса падающей волны преобразуются от внешнего базиса к внутреннему, затем включается матрица рассеяния, а потом получающиеся параметры рассеянной волны во внутреннем базисе переводятся во внешний. Множитель C учитывает возможное различие в нормировке матрицы рассеяния.

Матрицы рассеяния рассчитываются той же теорией, что и индикатрисы рассеяния и другие характеристики однократного рассеяния. Об этой теории говорилось в главе 2. Здесь мы найдем одну матрицу рассеяния. Сделаем это для томсоновского рассеяния, т. е. рассеяния излучения на нерелятивистских свободных электронах.

4. Рассеяние свободными зарядами. В классической электродинамике (см., например, [39]) рассеяние излучения зарядом интерпретируется следующим образом. На заряженную частицу падает плоская электромагнитная волна, под действием которой частица колеблется, т. е. движется с ускорением, и порождает электромагнитное поле. На больших расстояниях от частицы поле превращается в сферическую волну, которая и рассматривается как излучение, рассеянное заряженной частицей.

Сделаем предположение, что амплитуда падающей волны не очень велика, так что частица в ее поле не достигает релятивистских скоростей и не очень далеко отклоняется от положения равновесия. Поэтому можно считать, что на протяжении траектории частицы амплитуда падающей волны не зависит от пространственных координат в данный момент. Ввиду нерелятивистской скорости частицы не учитываем магнитной составляющей силы Лоренца.

В результате таких предположений уравнение движения заряженной частицы получает вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e_0\mathbf{E}', \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega_0 t}, \tag{240}$$

где m и $-e_0$ — масса и заряд частицы, $\mathbf{E}_0$ — постоянный вектор, а $\mathbf{r}$ — вектор отклонения частицы от положения равновесия. Отсюда ускорение частицы

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e_0}{m}\mathbf{E}'. \tag{241}$$

В дипольном приближении на больших расстояниях R от частицы согласно формуле Лармора [39] создается поле с напряженностью

$$\mathbf{E} = -\frac{e_0}{c^2R}\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\ddot{\mathbf{r}}). \tag{242}$$

Подставив сюда выражение ускорения через напряженность падающей волны, получим

$$\mathbf{E} = \frac{r_\mathrm{e}}{R}\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{E}'), \tag{243}$$

где $r_\mathrm{e} = e_0^2/mc^2$ — так называемый классический радиус заряда. Поскольку наименьшую массу при единичном заряде имеет электрон, наиболее эффективно из всех элементарных частиц рассеивает излучение именно электрон (наряду с позитроном).

Выведем матрицу томсоновского рассеяния.

5. Рэлеевская матрица рассеяния. Для определения связи напряженности рассеянной волны с напряженностью падающей найдем, как преобразуются орты базиса падающей волны согласно формуле (243):

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{l}_1') = \boldsymbol{\omega}\times(-\mu\mathbf{l}_2) = \mu\mathbf{l}_1, \quad \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{l}_2') = \mathbf{l}_2. \tag{244}$$

Тогда напряженность рассеянной волны выразится через составляющие наряженности падающей (равенство (243)) так:

$$\mathbf{E} = \frac{r_\mathrm{e}}{R}(\mu E_1'\mathbf{l}_1 + E_2'\mathbf{l}_2). \tag{245}$$

Представим, как обычно при рассмотрении поляризации, векторы напряженностей (233) в виде столбцов. Тогда сравнив равенства (233) и (245), можем записать

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \frac{r_\mathrm{e}}{R}\check{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix}, \quad \check{\mathcal{A}}(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{246}$$

Здесь каждый вектор относится к своему базису, но их базисы связаны между собой. Матрица рассеяния составляется именно при таком условии. Тогда она имеет наиболее простой вид: составляющая напряженности электрического поля, перпендикулярная плоскости рассеяния, остается неизменной (если отвлечься от множителя r_e/R), в то время как составляющая, лежащая в этой плоскости, умножается на косинус угла рассеяния.

Теперь перейдем от напряженностей к поляризационным матрицам. Матрица рассеянного излучения выразится через матрицу падающего:

$$\check{\mathcal{S}} = \frac{c}{8\pi}\mathbf{E}\mathbf{E}^\dagger = \frac{c}{8\pi}\frac{r_\mathrm{e}^2}{R^2}\check{\mathcal{A}}\mathbf{E}'(\mathbf{E}')^\dagger\check{\mathcal{A}} = \frac{r_\mathrm{e}^2}{R^2}\check{\mathcal{A}}\check{\mathcal{S}}'\check{\mathcal{A}}. \tag{247}$$

Если сделать следующий шаг и от поляризационных матриц перейти к параметрам Стокса, то получится соотношение, связывающее векторы Стокса:

$$\mathbf{I} = \frac{r_\mathrm{e}^2}{R^2}\widehat{\mathcal{R}}(\mu)\mathbf{I}'. \tag{248}$$

Матрица рассеяния свободными зарядами (томсоновского рассеяния) совпадает с матрицей молекулярного рассеяния и называется рэлеевской. Она имеет вид

$$\widehat{\mathcal{R}}(\mu) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mu^2+1}{2} & \dfrac{\mu^2-1}{2} & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu^2-1}{2} & \dfrac{\mu^2+1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \tag{249}$$

На больших расстояниях R сферическая волна мало отличается от плоской, величина R изменяется медленно и может считаться постоянной.

Элемент матрицы, стоящий в левом верхнем ее углу, представляет собой угловую часть сечения рассеяния

$$\varsigma(\mu) = \frac{r_\mathrm{e}^2}{2}(\mu^2+1). \tag{250}$$

Полное сечение

$$\varsigma_0 = \int \mathrm{d}^2\omega\varsigma(\mu) = \frac{8\pi}{3}r_\mathrm{e}^2 \tag{251}$$

называется томсоновским [39]. Частное

$$\frac{\varsigma(\mu)}{\varsigma_0} = \frac{3}{16\pi}(\mu^2+1), \tag{252}$$

является рэлеевской индикатрисой рассеяния, деленной на 4π. Коэффициент рассеяния есть произведение полного сечения на концентрацию свободных электронов в среде:

$$\sigma = n_\mathrm{e}\varsigma_0. \tag{253}$$

Из приведенных формул следует, что для рэлеевской матрицы коэффициент $C = 3/2$.

Если в среде имеется и истинное поглощение, характеризуемое коэффициентом æ, то вероятность выживания фотона при однократном рассеянии есть отношение коэффициента рассеяния к сумме его с коэффициентом истинного поглощения. Эта величина, как и величина оптической глубины и толщины, определяется совершенно так же, как и в теории, не учитывающей поляризацию излучения.

6. Рассеяние в рэлеевской атмосфере. Рассмотрим задачу о рэлеевском рассеянии поляризованного излучения. Для написания уравнения переноса найдем произведение матриц поворота с рэлеевской матрицей рассеяния:

$$\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathcal{L}}(\phi)\widehat{\mathcal{R}}(\mu)\widehat{\mathcal{L}}(\phi') = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\mu^2}{2} & \dfrac{\mu^2-1}{2}\cos(2\phi') & \dfrac{\mu^2-1}{2}\sin(2\phi') & 0 \\ \dfrac{\mu^2-1}{2}\cos(2\phi) & A_\mathrm{cc} & A_\mathrm{cs} & 0 \\ \dfrac{1-\mu^2}{2}\sin(2\phi) & A_\mathrm{sc} & A_\mathrm{ss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \tag{254}$$

где для краткости записи фазовой матрицы введены следующие обозначения:

$$A_{\rm cc}=\frac{\mu^2+1}{2}\cos(2\phi)\cos(2\phi')-\mu\sin(2\phi)\sin(2\phi'), \tag{255}$$

$$A_{\rm cs}=\frac{\mu^2+1}{2}\cos(2\phi)\sin(2\phi')+\mu\sin(2\phi)\cos(2\phi'), \tag{256}$$

$$A_{\rm sc}=-\frac{\mu^2+1}{2}\sin(2\phi)\cos(2\phi')-\mu\cos(2\phi)\sin(2\phi'), \tag{257}$$

$$A_{\rm ss}=-\frac{\mu^2+1}{2}\sin(2\phi)\sin(2\phi')+\mu\cos(2\phi)\cos(2\phi'). \tag{258}$$

Нетрудно показать, что входящие в приведенные выражения углы являются элементами следующего сферического треугольника. Две стороны его — это зенитные углы θ и θ' векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}'$, а угол между ними (двугранный) — разность $\varphi'-\varphi$. Противолежащая этому углу сторона — угол рассеяния $\arccos\mu$. Выражение для косинуса угла рассеяния (228) есть теорема косинусов для указанного треугольника. Легко убедиться, что выполняются равенства

$$\frac{\sin\phi}{\sin\theta'}=\frac{\sin\phi'}{\sin\theta}=\frac{\sin(\varphi'-\varphi)}{\sqrt{1-\mu^2}}, \tag{259}$$

которые являются следствиями теоремы синусов. Из них вытекает, что ϕ и ϕ' могут рассматриваться как углы того же треугольника, лежащие напротив его сторон θ' и θ соответственно. Можно воспользоваться и другими соотношениями сферической тригонометрии. Нам понадобятся следующие четыре величины, каждая из которых может быть записана в двух видах. Первое представление содержит углы ϕ и ϕ', а второе этих углов не содержит:

$$a_{\rm cc}=-\cos\phi\cos\phi'+\mu\sin\phi\sin\phi'=\cos(\varphi'-\varphi), \tag{260}$$

$$a_{\rm cs}=\sin\phi\cos\phi'+\mu\cos\phi\sin\phi'=\cos\theta\sin(\varphi'-\varphi), \tag{261}$$

$$a_{\rm sc}=\sin\phi'\cos\phi+\mu\cos\phi'\sin\phi=\cos\theta'\sin(\varphi'-\varphi), \tag{262}$$

$$a_{\rm ss}=\sin\phi\sin\phi'-\mu\cos\phi\cos\phi'=\sin\theta\sin\theta'+\cos\theta\cos\theta'\cos(\varphi'-\varphi). \tag{263}$$

Элементы фазовой матрицы (255)–(258) выражаются через квадратичные комбинации введенных величин:

$$A_{\rm cc}=\frac{a_{\rm cc}^2+a_{\rm ss}^2-a_{\rm cs}^2-a_{\rm sc}^2}{2},\quad A_{\rm cs}=-a_{\rm cc}a_{\rm cs}-a_{\rm ss}a_{\rm sc},\quad A_{\rm sc}=a_{\rm cc}a_{\rm sc}+a_{\rm ss}a_{\rm cs},\quad A_{\rm ss}=a_{\rm cc}a_{\rm ss}-a_{\rm cs}a_{\rm sc}. \tag{264}$$

Подставив в эти формулы вторые выражения величин (260)–(263), а также исключив из остальных элементов матрицы (254) углы поворота, представим ее в виде

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{X}}=\widehat{\mathcal{P}}(\eta,\eta')+\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-(\eta')^2}\Big[\widehat{\mathcal{P}}_{1\rm c}(\eta,\eta')\cos(\varphi'-\varphi)+\widehat{\mathcal{P}}_{1\rm s}(\eta,\eta')\sin(\varphi'-\varphi)\Big]+\\ +\widehat{\mathcal{P}}_{2\rm c}(\eta,\eta')\cos(2(\varphi'-\varphi))+\widehat{\mathcal{P}}_{2\rm s}(\eta,\eta')\sin(2(\varphi'-\varphi)).\end{aligned} \tag{265}$$

Здесь матрицы соответствуют трем азимутальным гармоникам. Нулевой гармонике отвечает одна матрица

$$\widehat{\mathcal{P}}(\eta,\eta')=\begin{pmatrix}\dfrac{3-\eta^2-(\eta')^2+3\eta^2(\eta')^2}{4} & \dfrac{1}{4}(1-3\eta^2)[1-(\eta')^2] & 0 & 0\\ \dfrac{1}{4}(1-\eta^2)[1-3(\eta')^2] & \dfrac{3}{4}(1-\eta^2)[1-(\eta')^2] & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \eta\eta'\end{pmatrix}. \tag{266}$$

Первая и вторая гармоники содержат по две матрицы:

$$\widehat{\mathcal{P}}_{1\rm c}(\eta,\eta')=\begin{pmatrix}\eta\eta' & \eta\eta' & 0 & 0\\ \eta\eta' & \eta\eta' & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\widehat{\mathcal{P}}_{1\rm s}(\eta,\eta')=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\eta & 0\\ 0 & 0 & -\eta & 0\\ \eta' & \eta' & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{267}$$

$$\widehat{\mathcal{P}}_{2\rm c}(\eta,\eta')=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(1-\eta^2)[1+(\eta')^2] & -(1+\eta^2)[1-(\eta')^2] & 0 & 0\\ -(1+\eta^2)[1-(\eta')^2] & (1+\eta^2)[1+(\eta')^2] & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\eta\eta' & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{268}$$

$$\widehat{\mathcal{P}}_{2\mathrm{s}}(\eta,\eta')=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta'(1-\eta^2) & 0\\ 0 & 0 & -\eta'(1+\eta^2) & 0\\ -\eta[1-(\eta')^2] & \eta[1+(\eta')^2] & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{269}$$

К векторному уравнению переноса поляризованного излучения вида (227), полученному С. Чандрасекаром [85] и В. В. Соболевым [70], применяются те же процедуры, что и к скалярному. Можно отделить прямое излучение от диффузного, чтобы граничные условия стали нулевыми. Можно разделить азимутальные гармоники. Однако в разложении по азимутальным гармоникам будут присутствовать не только косинусы, но и синусы. Возникают те же задачи: задача о диффузном отражении и задача Милна.

Задачи о диффузном отражении от полубесконечной атмосферы и о диффузном отражении и пропускании плоским слоем при рэлеевском законе рассеяния с учетом многократного рассеяния решил С. Чандрасекар [85]. Эти решения позволили ему объяснить ход поляризации неба в зависимости от высоты солнца. Было показано, что только учет многократного рассеяния дает возможность правильно определить положения так называемых нейтральных точек на небе, в которых поляризация отсутствует. Подробнее об этом можно прочитать в книге [44].

Обратимся к задачам в полубесконечной среде.

7. Частные задачи о рассеянии в рэлеевской атмосфере. Упомянем две задачи. Это задача Милна, соответствующая отсутствию внутренних источников на конечных глубинах, и задача с равномерным распределением источников неполяризованного излучения в полубесконечной среде.

Ясно, что в указанных задачах излучение в атмосфере не может иметь круговой поляризации и не может зависеть от азимута. Поэтому матрицу рассеяния вместе с матрицами поворота можно усреднить по азимуту, а поляризация может быть только линейной. За счет выбора поляризационного базиса можно исключить параметр Стокса U, так что выпадают два параметра Стокса. Вектор интенсивностей содержит только два параметра линейной поляризации:

$$\mathbf{I}(\tau,\eta)=\begin{pmatrix} I(\tau,\eta)\\ Q(\tau,\eta)\end{pmatrix} \tag{270}$$

и определяется двумя уравнениями, записываемыми в виде одного векторного:

$$\eta\frac{\mathrm{d}\mathbf{I}(\tau,\eta)}{\mathrm{d}\tau}=-\mathbf{I}(\tau,\eta)+\frac{\lambda}{2}\frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}\eta'\check{\mathcal{P}}(\eta,\eta')\mathbf{I}(\tau,\eta')+\begin{pmatrix}\sqrt{1-\lambda}\\ 0\end{pmatrix}, \tag{271}$$

где матрица является левым верхним минором второго порядка полной фазовой матрицы (254):

$$\check{\mathcal{P}}(\eta,\eta')=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3-\eta^2-(\eta')^2+3\eta^2(\eta')^2 & (1-3\eta^2)[1-(\eta')^2]\\ (1-\eta^2)[1-3(\eta')^2] & 3(1-\eta^2)[1-(\eta')^2]\end{pmatrix}. \tag{272}$$

Уравнения (271) для полубесконечной атмосферы и чистого рассеяния при нулевых граничных условиях и сохранении полного потока излучения были решены В. В. Соболевым [70] и С. Чандрасекаром [85]. Ими было выяснено, что степень линейной поляризации выходящего излучения, равная отношению $Q(0,-\eta)/I(0,-\eta)$, монотонно растет с углом выхода $\arccos\eta$ и достигает наибольшего значения при $\eta=0$. Такая задача соответствует плоскопараллельной модели атмосферы звезды, в которой определяющую роль играет рассеяние свободными электронами. В центре звезды поляризация наблюдаться не может в силу симметрии, а на краю она максимальна и равна 11.7 %. Преобладают колебания вектора напряженности вдоль радиуса. Это явление называется эффектом Чандрасекара—Соболева.

Впоследствии уравнения решались при λ, отличных от 1, как для задачи типа Милна, т. е. без источников внутри атмосферы, так и для равномерно распределенных в ней источников неполяризованного излучения, т. е. уравнения вида (271) [41].

На рис. 12 представлена зависимость степени линейной поляризации (в %) излучения, выходящего из плоской полубесконечной среды с равномерно распределенными по ее глубине источниками, от косинуса угла выхода. При моделировании рэлеевской атмосферы планеты или звезды плоским слоем эта зависимость отражает ход изменения поляризации по диску от края ($\eta=0$) к центру ($\eta=1$). Очевидно, что в центре диска в силу симметрии поляризация отсутствует.

Как видно из рисунка, при $\lambda<1$ в некоторой точке диска изменяется характер поляризации. Параметр Q изменяет знак, так что ближе к центру диска преимущественными становятся колебания вектора напряженности перпендикулярно радиусу. Этот эффект был сначала обнаружен при решении уравнения (271) для моделей атмосфер горячих звезд с конкретной зависимостью источников и λ от глубины [47] (напомним, что значения λ равны отношению коэффициентов рассеяния и ослабления).

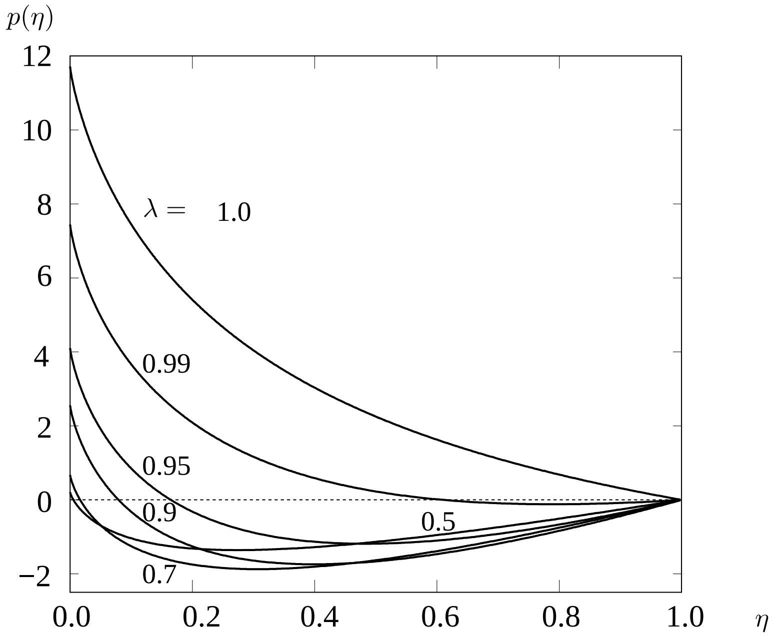


Рис. 12. Ход поляризации по диску при постоянных источниках и различных значениях λ для рэлеевской матрицы рассеяния.

Указатель литературы

1. Абрамов Ю. Ю., Дыхне А.М., Напартович А.П. Стационарные задачи теории радиационного переноса возбуждения. Препринт ИАЭ–1804. М.: Институт атомной энергии, 1969. 92 с.

2. Амбарцумян В.А. О влиянии линий поглощения на лучевое равновесие внешних слоев звезд // Ученые записки Ленингр. гос. ун-та. 1936. N 6. Труды Астрон. обсерв. Т. 6. С. 7–18.

3. Амбарцумян В.А. О числе рассеяний при диффузии фотонов в мутной среде // Докл. АН Арм. ССР. 1948. Т. 8. С. 101–104.

4. Амбарцумян В.А. Научные труды. В 3 т. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1960. Т. 1. 430 с.

5. Биберман Л.М. К теории диффузии резонансного излучения // Журн. эксперим. теорет. физики. 1947. Т. 17. Вып. 5. С. 416–434.

6. Биберман Л.М. Приближенный способ учета диффузии резонансного излучения // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. Вып. 4. С. 659–662.

7. Вайнштейн Л.А., Собельман И.И., Юков Е.А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука, 1979. 320 с.

8. Витязев В.В. О диффузии излучения в звездной оболочке, расширяющейся с постоянной скоростью // Астрофизика. 1972. Т. 8. Вып. 2. С. 235–245.

9. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Труды Мат. ин-та АН СССР. 1961. Т. 61. С. 1–158.

10. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

11. Гермогенова Т.А. О характере решения уравнения переноса для плоского слоя // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1961. Т. 1. Вып. 6. С. 1001–1019.

12. Гермогенова Т.А. Численные методы решения краевых задач для уравнения переноса // Теорет. и прикл. проблемы рассеяния света. Под ред. Б.И.Степанова и А.П.Иванова. Минск: Наука и техника, 1971. С. 29–42.

13. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

14. Грачев С.И. О профилях линий в спектрах солнечных вспышек // Астрон. журн. 1975. Т. 52. Вып. 2. С. 326–331.

15. Грачев С.И. Характерные длины в задачах о переносе излучения в движущейся среде // Астрофизика. 1977. Т. 13. Вып. 1. С. 185–197.

16. Грачев С.И. К задаче о диффузии излучения в движущейся среде // Вестник Ленингр. гос. ун-та. 1978. N 1. С. 129–135.

17. Грачев С.И. О профилях спектральных линий, возникающих в одномерной расширяющейся среде // Вестник Ленингр. гос. ун-та. 1982. N 1. С. 77–86; N 7. С. 85–92.

18. Грачев С.И. Диффузия резонансного излучения в бесконечной однородно расширяющейся среде // Астрофизика. 1989. Т. 30. Вып. 2. С. 347–361.

19. Грачев С.И. Перенос излучения в движущихся астрофизических средах // Ученые записки С.-Петербург. ун-та. 1994. N 428. Труды Астрон. обсерв. Т. XLIV. С. 203–235.

20. Грачев С.И., Гринин В.П. Анализ профилей линий в спектре квазара PHL 5200 // Астрофизика. 1975. Т. 11. Вып. 1. С. 33–47.

21. Грим Г. Уширение спектральных линий в плазме. М.: Мир, 1978. 491 с.

22. Гринин В.П. Перенос резонансного излучения в движущихся средах. Приближенные методы // Астрофизика. 1974. Т. 10. Вып. 2. С. 239–255.

23. Гринин В.П. Образование эмиссионных спектров в движущихся средах // Астрофизика. 1984. Т. 20. Вып. 2. С. 365–417.

24. Гуди Р. Атмосферная радиация. I. Основы теории. М.: Мир, 1966. 552 с.

25. Дейрменджан Д. Рассеяние электро-магнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир, 1971. 165 с.

26. Длугач Ж.М. Расчет поля излучения в однородной полубесконечной атмосфере // Астрон. журн. 1976. Т. 53. Вып. 6. С. 1295–1305.

27. Длугач Ж.М. Метод и результаты расчета оптических свойств атмосферы Марса в период глобальной пылевой бури 1971 года // Астрометрия и астрофизика. 1978. Вып. 35. С. 85–97.

28. Дыхне А.М., Напартович А.П. Перенос резонансного излучения в неоднородной плазме. Препринт ИАЭ-2026. М.: Институт атомной энергии, 1970. 40 с.

29. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1965. 424 с.

30. Иванов В.В. Диффузия резонансного излучения в атмосферах звезд и туманностях. I. Полубесконечная среда // Астрон. журн. 1962. Т. 39. Вып. 6. С. 1020–1032.

31. Иванов В.В. Перенос излучения и спектры небесных тел. М.: Наука, 1969. 472 с.

32. Иванов В.В. Средняя длина пути фотона в рассеивающей среде // Астрофизика. 1970. Т. 6. Вып. 4. С. 643–662.

33. Иванов В.В. Приближенное решение уравнения переноса излучения в частотах линии // Астрон. журн. 1972. Т. 49. Вып. 1. С. 115–120.

34. Иванов В.В., Нагирнер Д.И. H-функции в теории переноса излучения // Астрофизика. 1965. Т. 1. Вып. 2. С. 143–166.

35. Иванов В.В., Нагирнер Д.И. Перенос резонансного излучения в бесконечной среде. II // Астрофизика. 1966. Т. 2. Вып. 2. С. 147–168.

36. Иванов В.В., Хейнло А.Г. Лучистое равновесие сильно несерых атмосфер. I. Общий анализ // Астрон. журн. 1975. Т. 52. Вып. 6. С. 1252–1262.

37. Иванов В.В., Шнейвайс А.Б. Частотная релаксация при многократном рассеянии линейчатого излучения // Астрофизика. 1976. Т. 12. Вып. 2. С. 246–254.

38. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.

39. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.

40. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1992. 664 с.

41. Лоскутов В.М., Соболев В.В. Поляризация рассеянного излучения при внутренних источниках // Астрофизика. 1979. Т. 15. Вып. 2. С. 241–252.

42. Марчук Г.И., Михайлов Г.М. Решение задач теории переноса излучения методом Монте-Карло // Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света. Под ред. Б.И.Степанова и А.П.Иванова. Минск: Наука и техника, 1971. С. 43–58.

43. Масленников М.В. Проблема Милна с анизотропным рассеянием // Труды Мат. ин-та АН СССР. 1968. Т. 97. С. 3–134.

44. Минин И.Н. Теория переноса излучения в атмосферах планет. М.: Наука, 1988. 264 с.

45. Михалас Д. Звездные атмосферы. В 2 т. М.: Мир, 1982. Т. 2. 422 с.

46. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. В 2 т. М.: ИЛ, 1958. Т. 1. 930 с.

47. Нагирнер Д.И. О поляризации света в атмосферах звезд // Ученые записки Ленингр. гос. ун-та. 1962. N 307. Труды Астрон. обсерв. Т. XIX. С. 79–87.

48. Нагирнер Д.И. Многократное рассеяние света в полубесконечной среде // Ученые записки Ленингр. гос. ун-та. 1968. N 337. Труды Астрон. обсерв. Т. XXV. С. 3–17.

49. Нагирнер Д.И. Рассеяние излучения в шаре // Астрофизика. 1972. Т. 8. Вып. 3. С. 353–368.

50. Нагирнер Д.И. Расчет профилей спектральных линий, образующихся в рассеивающей среде // Ученые записки Ленингр. ун-та. 1975. N 381. Труды Астрон. обсерв. Т. XXXI. С. 3–99.

51. Нагирнер Д.И. Расчет спектра интегрального уравнения переноса излучения. I. Полубесконечная среда // Астрофизика. 1979. Т. 15. Вып. 2. С. 229–240.

52. Нагирнер Д.И. Расчет спектра интегрального уравнения переноса излучения. II. Плоский слой конечной оптической толщины // Астрофизика. 1979. Т. 15. Вып. 3. С. 485–495.

53. Нагирнер Д.И. Точные решения уравнения переноса излучения в линии при частичном перераспределении по частоте // Астрофизика. 1982. Т. 18. Вып. 4. С. 608–615.

54. Нагирнер Д.И. Теория переноса излучения в спектральных линиях // Итоги науки и техники. Астрономия. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 22. С. 220–260.

55. Нагирнер Д.И. Образование спектральных линий при частичном перераспределении по частоте // Астрофизика. 1987. Т. 26. Вып. 1. С. 157–195.

56. Нагирнер Д.И. Методы интегральных уравнений теории переноса излучения // Ученые записки С.-Петербург. ун-та. 1994. N 428. Труды Астрон. обсерв. Т. XLIV. С. 39–68.

57. Нагирнер Д.И. Перенос излучения в спектральных линиях // Ученые записки С.-Петербург. ун-та. 1994. N 428. Труды Астрон. обсерв. Т. XLIV. С. 172–202.

58. Нагирнер Д.И., Шнейвайс А.Б. Функции, характеризующие рассеяние резонансного излучения в бесконечной среде // Ученые записки Ленингр. ун-та. 1973. N 363. Труды Астрон. обсерв. Т. XXIX. С. 16–32.

59. Никогосян А.Г. Диффузное отражение света от полубесконечной атмосферы при законе перераспределения $r_{\rm II}(x', x, \gamma)$ // Докл. АН Арм. ССР. 1979. Т. 68. Вып. 3. С. 176–181.

60. Никогосян А.Г. Статистическое описание поля излучения на основе принципа инвариантности. Среднее число рассений фотона в среде, содержащей источники энергии // Астрофизика. 1984. Т. 21. Вып. 3. С. 595–607.

61. Оцисик М. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. 616 с.

62. Принцип инвариантности и его приложения. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР. 1989. 522 с.

63. Сербин В.М. Перенос излучения в спектральных линиях: приближенные решения. Атмосфера конечной оптической толщины // Астрон. журн. 1985. Т. 62. Вып. 2. С. 272–282.

64. Сербин В.М. Стандартная задача теории образования линий в движущейся атмосфере // Астрофизика. 1985. Т. 22. Вып. 2. С. 387–409.

65. Сербин В.М. Метод расчета полей излучения в частотах линий // Астрофизика. 1985. Т. 23. Вып. 3. С. 583–594.

66. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 6 т. М.: Наука, 1974. Т. IV. 336 с.

67. Соболев В.В. Световое давление в расширяющейся туманности // Астрон. журн. 1944. Т. 21. Вып. 4. С. 143–148.

68. Соболев В.В. Движущиеся оболочки звезд. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1947. 114 с.

69. Соболев В.В. Некогерентное рассеяние света в звездных атмосферах // Астрон. журн. 1949. Т. 26. Вып. 3. С. 129–137.

70. Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М.: ГИТТЛ, 1956. 392 с.

71. Соболев В.В. Диффузия L_α-излучения в туманностях и звездных оболочках // Астрон. журн. 1957. Т. 34. Вып. 5. С. 694–705.

72. Соболев В.В. К теории диффузии излучения // Известия АН Арм. ССР. Сер. ф.-м. наук. 1958. Т. 11. Вып. 5. С. 39–50.

73. Соболев В.В. К теории диффузии излучения в атмосферах звезд // Астрон. журн. 1959. Т. 36. Вып. 4. С. 573–578.

74. Соболев В.В. Число рассеяний при диффузии фотонов. I // Астрофизика 1966. Т. 2. Вып. 2. С. 135–146.

75. Соболев В.В. Число рассеяний при диффузии фотонов. IV // Астрофизика. 1967. Т. 3. Вып. 3. С. 137–154.

76. Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах планет. М.: Наука, 1972. 336 с.

77. Соболев В.В. Курс теоретической астрофизики. М.: Наука, 1985. 504 с.

78. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Иолтуховский А.А. Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990. 296 с.

79. Ученые записки С.-Петербург. ун-та. 1994. N 428. Труды Астрон. обсерв. Т. XLIV. 250 с.

80. Фок В.А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики // Мат. сб. 1944. Т. 14 (56). Вып. 1–2. С. 3–50.

81. Хюлст Г. ван де. Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961. 536 с.

82. Хвольсон О.Д. Основания математической теории внутренней диффузии света // Журн. Русск. физ.-хим. об-ва. 1886. Т. 18. Отд. 2. С. 93–101.

83. Хвольсон О.Д. Фотометрическое исследование внутренней диффузии света // Журн. Русск. физ.–хим. об-ва. 1890. Т. 22. Отд. 2. С. 1–6.

84. В.Херсонский. О математических свойствах фойгтовского профиля спектральной линии // Астрофиз. исследования. Изв. Спец. астрофиз. обсерв. 1982. Т. 15. С. 75–87.

85. С.Чандрасекар. Перенос лучистой энергии. М.: ИЛ, 1953. 432 с.

86. Шифрин К.С. Рассеяние света в мутной среде. М.: Гостехиздат, 1951. 288 с.

87. Шнейвайс А.Б. Поле излучения в спектральной линии в полубесконечной атмосфере. Ученые записки Ленингр. ун-та. 1983. N 410. Труды Астрон. обсерв. Т. XXXVIII. С. 17–35.

88. Яновицкий Э.Г. Рассеяние света в неоднородных атмосферах. Киев: Главная астрон. обсерв. НАН Украины, 1995. 400 с.

89. Avrett E.H., Hummer D.G. Non–coherent scattering. II. Line formation with a frequency independent source function // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1965. Vol. 130. N 4. P. 295–331.

90. Bellman R.E., Kalaba R., Prestrud M.S. Invariant Imbedding and Radiative Transfer in Slabs of Finite Thickness. N. Y.: American Elsevier, 1963. 346 p.

91. Carlstedt J.L., Mullikin T.W. Chandrasechar's X- and Y-functions // Astropys. J. Suppl. 1966. Vol. 12. N 113. P. 449–465.

92. Faurobert M., Frisch H. Line transfer with complete frequency redistibution in a absorbing medium // Astron. Astrophys. 1985. Vol. 149. N 1. P. 372–382.

93. Frisch H. Non-LTE transfer. V. The asymptotics of partial redistribution // Astron. Astrophys. 1980. Vol. 83. N 1. P. 166–183.

94. Frisch H. Scaling laws for resonance line photons in an absorbing medium // Astron. Astrophys. 1980. Vol. 87. N 1. P. 357–360.

95. Frisch U., Frisch H. Non–LTE transfer. III. Asymptotic expansion for small ε // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1977. Vol. 181. N 2. P. 273–280.

96. Harrington J.P. The scattering of resonance-line radiation in the limit of large optical depth // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1973. Vol. 162. N 1. P. 43–52.

97. Harrington J.P. The scattering of resonance-line radiation in the limit of large optical depth. II. Reflection and transmission of radiation incident upon a slab // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1974. Vol. 166. N 2. P. 373–382.

98. Hearn A.G. Radiative transfer of Doppler broadened resonance lines. II // Proc. Phys. Soc. 1964. Vol. 84. N 1. P. 11–18.

99. Holstein T. Imprisonment of resonance radiation in gases // Phys. Rev. 1947. Vol. 72. N 12. P. 1212–1233.

100. Hulst H.C. van de. Multiple Light Scattering. N. Y.: 1980. Vol. 1, 2. 739 p.

101. Hummer D.G. Non-coherent scattering. I. The redistribution functions with Doppler broadening // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1962. Vol. 125. N 1. P. 21–37.

102. Hummer D.G., Kunasz P.B. Energy loss by resonance line photons in an absorbing medium // Astrophys. J. 1980. Vol. 236. N 2. P. 609–618.

103. Hummer D.G., Rybicki G.B. Computational methods for non-LTE line transfer problems. Meth. Comput. Physics. N. Y.: Academic Press. 1967. Vol. 7. P. 53–127.

104. Numerical Radiative Transfer. Ed. W.Kalkofen. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. 373 p.

105. Rybicki G.B., Hummer D.G. An accelerated lambda iteration method for multilevel radiative transfer. II. Overlaping transitions with full continuum // Astron. Astrophys. 1992. Vol. 262. N 1. P. 209–215.

106. Sharmer G.B., Carlsson M. A new approach to multilevel non-LTE radiative transfer problems // J. Comput. Phys. 1985. Vol. 59. P. 56–80.

107. Strom S.E., Kurucs R.L. A statistical procedure for computing line-blanketed model stellar atmospheres with applications to the F5 IV star Procyon // J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer. 1966. Vol. 6. N 5. P. 591–607.

108. Voshchinnikov N.V. Electromagnetic scattering by homogeneous and coated spheroids: calculations using the separation of variables method // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1996. Vol. 55. N 5. P. 627–636.

109. Voshchinnikov N.V., Farafonov V.G. Optical properties of spheroidal particles // Astrophys. Space Sci. 1993. Vol. 204. N 1. P. 19–86.