Механизмы излучения в астрофизике

Глава I. Тормозной и рекомбинационный механизмы

§ 1. Тормозной механизм

1. Постановка задачи. Задача, рассматриваемая в этом параграфе, относится к теории неупругих столкновений, когда в результате столкновения двух частиц рождается еще одна частица — фотон. Тормозное излучение — это излучение заряда при кулоновском столкновении заряженных частиц. Частицы считаем нерелятивистскими.

Заряды движутся по гиперболам и, поскольку это движение с ускорением, в каждый момент времени излучают электромагнитные волны. Для нахождения этого излучения и его спектра надо найти напряженности поля, а затем их преобразования Фурье по времени. Вместо этого воспроизведем простой вывод формулы для сечения тормозного излучения, основанный на порядковых оценках. Этот вывод дан, например, в книге Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [9].

Мощность полного (во всех направлениях) излучения движущегося точечного заряда в дипольном приближении дается формулой Лармора [19]

$$I(t) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{c^3}\,\ddot{\vec{d}}^{\,2} \tag{1}$$

Здесь $\vec{d}$ — дипольный момент системы двух зарядов $Z_1\,e$ и $Z_2\,e$:

$$\vec{d} = e\,(Z_1\,\vec{r}_1 + Z_2\,\vec{r}_2), \tag{2}$$

а точкой отмечается производная по времени.

Будем считать, что частица 2 с зарядом $Z_2\,e$ и массой m_2 пролетает мимо частицы 1 с зарядом $Z_1\,e$ и массой m_1. Обозначим через $\vec{R}$ радиус-вектор их центра масс, а через $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ радиус-вектор относительного движения. Тогда радиусы-векторы каждой из частиц выразятся через $\vec{R}$ и $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m}{m_1}\vec{r},\ \ \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m}{m_2}\vec{r}. \tag{3}$$

Здесь m — приведенная масса:

$$m = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}. \tag{4}$$

Дипольный момент также можно выразить через эти векторы:

$$\vec{d} = e\,[(Z_1 + Z_2)\,\vec{R} + m\,(Z_2/m_2 - Z_1/m_1)\,\vec{r}]. \tag{5}$$

Поскольку движение центра масс двух частиц (равномерное и прямолинейное) не приводит к излучению, достаточно рассматривать относительное движение, т. е. в (1) надо подставить

$$\ddot{\vec{d}} = m\,e\,(Z_2/m_2 - Z_1/m_1)\,\vec{w}. \tag{6}$$

Здесь $\vec{w}$ — ускорение относительного движения.

Из (6) видно, что не всякие заряды могут излучать. В частности, взаимодействие одинаковых частиц не приводит к излучению в дипольном приближении.

Наибольший интерес представляет тормозное излучение электрона в поле иона. Будем считать ион водородоподобным с некомпенсированным зарядом Ze. Положим $Z_2 = -1, Z_1 = Z$. Поскольку масса иона значительно больше массы электрона, можно принять, что приведенная масса совпадает с массой электрона (которую мы также будем обозначать просто m).

2. Оценка излучаемой энергии. Закрепим относительную скорость v и прицельное расстояние налетающего электрона b. Основная часть взаимодействия происходит тогда, когда частицы достаточно близки друг к другу. В качестве характерного расстояния взаимодействия можно взять b. Тогда характерное время взаимодействия частиц $t \sim b/v$. Характерная величина ускорения (сила, деленная на приведенную массу) $w \sim Z\,e^2/(m\,b^2)$. Полное излучение за все время взаимодействия

$$\Delta E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I(t)\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

можно оценить так:

$$\Delta E \approx \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\frac{Z\,e^2}{m}\frac{1}{b^2}\right)^2\,\frac{b}{v} \approx \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{Z^2\,e^4}{m^2}\frac{1}{b^3\,v}. \tag{8}$$

Проинтегрируем эту величину по всем прицельным расстояниям, т. е. найдем излучение q равномерно распределенного потока налетающих электронов. Нас будет интересовать спектр этой величины. Спектральную плотность излучения обозначим $\mathrm{d}q/\mathrm{d}\omega$. Тогда

$$q = \int_0^\infty \Delta E\, 2\,\pi\, b\, \mathrm{d}b = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\omega}\, \mathrm{d}\omega. \tag{9}$$

3. Спектр излучения электрона. Для нахождения $\mathrm{d}q/\mathrm{d}\omega$ свяжем прицельное расстояние с частотой. Основной вклад в преобразование Фурье по времени на частоте ω дают значения t, для которых $\omega\, t \sim 1$. Следовательно, частота, на которой в основном излучает частица с прицельным расстоянием b, по порядку величины $\omega \sim v/b$. Поэтому основной вклад в излучение на частоте ω дают частицы с прицельным расстоянием $b \sim v/\omega$. Подставляя это соотношение в (9) (в том числе и в дифференциал $\mathrm{d}b$), получим

$$q \approx \int_0^\infty \Delta E\, 2\,\pi\, b^3\, \mathrm{d}\omega/v. \tag{10}$$

Отсюда находим

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\omega} \approx \frac{4\pi}{3} \frac{Z^2\, e^6}{m^2\, c^3} \frac{1}{v^2}. \tag{11}$$

Если выводить формулу точно в рамках классической электродинамики, то получится выражение, отличающееся от (11) множителем порядка единицы. Примерно такой же множитель дает учет квантовомеханических эффектов. Окончательно, выражение для $\mathrm{d}q/\mathrm{d}\omega$ можно записать в форме

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\omega} = \frac{16\,\pi}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2\, e^6}{m^2\, c^3} \frac{1}{v^2}\, g_{\mathrm{cc}}(v, \nu). \tag{12}$$

Здесь $g_{\mathrm{cc}}(v, \nu)$ — так называемый множитель Гаунта (или гаунт-фактор). Его аргумент ν — обычная (не круговая) частота, применяемая, как правило, в астрофизике. Величину (12) также рассчитывают на единицу частоты ν, т. е. полагают

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\nu} = 2\,\pi\, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\omega} = \frac{32\,\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2\, e^6}{m^2\, c^3} \frac{1}{v^2}\, g_{\mathrm{cc}}(v, \nu). \tag{13}$$

Формула (12) без множителя Гаунта была выведена Х. А. Крамерсом в 1923 году.

Вместо (13) в физике часто используется другая величина, а именно, дифференциальное сечение тормозного излучения:

$$\beta_{\mathrm{cc}}(v, \nu) = \frac{1}{h\nu} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\nu}. \tag{14}$$

Эта величина размерности *см*^{2}*с* представляет собой число излучаемых фотонов в расчете на единицу частоты и единицу времени, если падает единичный поток (1 электрон на единичную площадку в единицу времени) на одну мишень. Согласно формуле (13)

$$\beta_{\mathrm{cc}}(v, \nu) = \frac{32\,\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2\, e^6}{m^2\, c^3} \frac{1}{v^2\, h\, \nu}\, g_{\mathrm{cc}}(v, \nu). \tag{15}$$

Величина (13) отличается от (15) тем, что она дает излучаемую энергию, а не число фотонов.

4. Усреднение по скоростям. Теперь выражение (15) можно усреднить по скоростям налетающих электронов. Почти всегда можно считать, что они распределены по Максвеллу:

$$f(v) = \frac{4\,\pi\, v^2\, m^3}{(2\,\pi\, m\, k_{\mathrm{B}}\, T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m\, v^2}{2\, k_{\mathrm{B}}\, T}\right). \tag{16}$$

Энергия фотонов с частотами от ν до $\nu + \mathrm{d}\nu$, испускаемых в единице объема в единицу времени электронами со скоростями от v до $v + \mathrm{d}v$, равна $h\,\nu\, \beta_{\mathrm{cc}}(v, \nu) \mathrm{d}\nu\, n_{\mathrm{e}}\, n^+\, f(v)\, v\, \mathrm{d}v$.

Полная энергия, испускаемая всеми электронами, получается интегрированием. В результате найдем количество энергии, испускаемой единицей объема за единицу времени в единичном интервале частот в единичном телесном угле. Эта величина называется излучательной способностью, или объемным коэффициентом излучения $\epsilon_{\mathrm{cc}}(\nu)$. Во все направления излучается

$$4\,\pi\, \epsilon_{\mathrm{cc}}(\nu) = n_{\mathrm{e}}\, n^+\, h\, \nu \int_{v_{\min}}^\infty \beta_{\mathrm{cc}}(v, \nu)\, f(v)\, v\, \mathrm{d}v. \tag{17}$$

Нижний предел в интеграле отражает тот факт, что не всякий электрон может излучить фотон частоты ν. Действительно, после испускания фотона в поле иона скорость электрона уменьшается. Обозначим скорость электрона после излучения через v'. Ясно, что должен выполняться закон сохранения энергии

$$\frac{m\,v^2}{2} = \frac{m\,(v')^2}{2} + h\,\nu. \tag{18}$$

Справа и слева величины положительны, следовательно справедливо неравенство $v \ge v_{\min} = \sqrt{2\,h\,\nu/m}$.

Интеграл в (17) удобнее вычислять, взяв в качестве переменной интегрирования v'. Принимая во внимание соотношения между дифференциалами скоростей $v\,\mathrm{d}v = v'\,\mathrm{d}v'$ и значениями функции Максвелла $f(v)/v^2 = f(v')/(v')^2\,\exp(-h\,\nu/k_\mathrm{B}\,T)$, а также вынося из-под интеграла среднее значение множителя Гаунта (который слабо зависит от скорости), находим окончательно

$$\epsilon_\mathrm{cc}(\nu) = n_\mathrm{e}\,n^+\,\frac{32\,\pi^2}{3\sqrt{3}}\,\frac{Z^2\,e^6}{c^3}\,\frac{k_\mathrm{B}\,T}{(2\,\pi\,m\,k_\mathrm{B}\,T)^{3/2}}\,g_\mathrm{cc}(\nu,T)\,\exp\left(-\frac{h\,\nu}{k_\mathrm{B}\,T}\right). \tag{19}$$

Экспоненциальный множитель определяет характерный для тормозного излучения так называемый завал по частоте. На рис. 1 отражен спектр коэффициента тормозного излучения для ряда значений температуры без учета гаунтовских множителей.

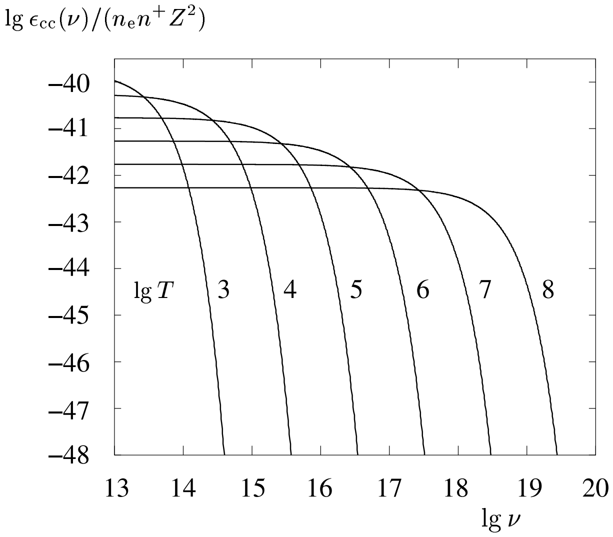

Рис. 1. Коэффициент тормозного излучения $\epsilon_\mathrm{cc}(\nu)$.

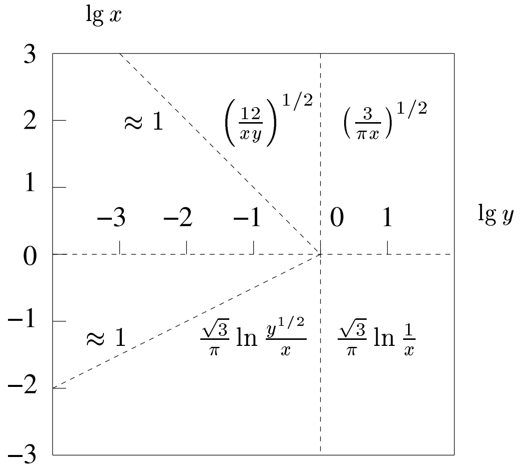

Рис. 2. Оценка множителя Гаунта $g_\mathrm{cc}(\nu,T)$.

Формула для полного излучения, т. е. во всех частотах, также легко выводится, если опять вынести среднее значение множителя $g_\mathrm{cc}(\nu,T)$:

$$\epsilon_\mathrm{cc}(T) = \int\limits_0^\infty \epsilon_\mathrm{cc}(\nu)\mathrm{d}\nu = n_\mathrm{e}\,n^+\,\frac{32\,\pi^2}{3\sqrt{3}}\,\frac{Z^2\,e^6}{c^3}\,\frac{(k_\mathrm{B}\,T)^2}{h\,(2\,\pi\,m\,k_\mathrm{B}\,T)^{3/2}}\,g_\mathrm{cc}. \tag{20}$$

Если подставить в (20) значения всех постоянных, то получится

$$4\,\pi\,\epsilon_\mathrm{cc}(T) = 1.42\cdot 10^{-27}\,Z^2\,T^{1/2}\,n_\mathrm{e}\,n^+(\textit{г/см с}^3). \tag{21}$$

5. Поглощение. Найдем сечение поглощения. Это процесс, обратный тормозному излучению: пролетающий мимо иона электрон поглощает фотон, энергия которого добавляется к кинетической энергии электрона согласно закону сохранения (18). Но теперь начальная энергия электрона может быть произвольной (нерелятивистской), в частности, нулевой.

Для вывода формулы для сечения поглощения воспользуемся обычным приемом. Примем, что выполняется ТДР. Концентрации атомов в состоянии ТДР отметим звездочкой. Запишем условие детального баланса: число фотонов, излучаемых единицей объема в единицу времени,равно числу поглощаемых фотонов:

$$n_\mathrm{e}n_*^+f(v)\mathrm{d}vv\frac{\beta_\mathrm{cc}}{4\pi}\mathrm{d}\nu\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}B_\nu(t)\right] = n_\mathrm{e}n_*^+f(v')\mathrm{d}v'k_\mathrm{cc}\frac{B_\nu(T)}{h\nu}\mathrm{d}\nu. \tag{22}$$

Здесь v и v' скорости электрона, удовлетворяющие соотношению (18). Множитель в квадратной скобке учитывает вынужденное излучение. Подставив в (22) распределение Максвелла и формулу Планка, получим

$$k_\mathrm{cc}(v',\nu) = \frac{c^2}{8\pi\nu^2}\frac{v^2}{v'}\beta_\mathrm{cc}(v,\nu) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\frac{Z^2e^6}{m^2ch}\frac{g_\mathrm{cc}}{v'\nu^3} = 1.80\cdot 10^{14}\frac{Z^2}{v'\nu^3}. \tag{23}$$

Сечение поглощения также можно усреднить по максвелловскому распределению скоростей электронов, но проще написать условие детального баланса, которое имеет вид соотношения Кирхгофа—Планка:

$$n_{\rm e}n^+k_{\rm cc}(\nu,T)B_\nu(T)=\epsilon_{\rm cc}(\nu,T)\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}B_\nu(t)\right], \tag{24}$$

откуда

$$k_{\rm cc}(\nu,T)=\int\limits_0^\infty k_{\rm cc}(v',\nu)f(v'){\rm d}v'=\frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}}\frac{Z^2e^6}{ch}\frac{k_{\rm B}T}{(2\pi mk_{\rm B}T)^{3/2}}g_{\rm cc}(\nu,T)\frac{1}{\nu^3}=3.69\cdot 10^8\frac{Z^2}{T^{1/2}}\frac{1}{\nu^3}. \tag{25}$$

Размерность сечений поглощения $k_{\rm cc}$ — *см* ^{5}, а коэффициента поглощения $\alpha_{\rm cc}=n_{\rm e}n^+k_{\rm cc}$ — $1/$*см*.

6. Гаунтовские множители. Многие авторы оценивали эти множители, исходя из различных предположений. Здесь на рис. 2 воспроизведены данные книги [52]. Использованы обозначения $x=\dfrac{h\nu}{k_{\rm B}T}$, $y=\dfrac{k_{\rm B}T}{Z^2\chi_{\rm H}}$, где $\chi_{\rm H}=me^4/2\hbar^2=2\pi^2me^4/h^2$ — энергия ионизации водорода из основного состояния.

Исходя из выведенных формул можно получить сечения фотоионизации и фоторекомбинации, что мы сделаем в следующем параграфе.

§ 2. Рекомбинационный механизм

1. Сечение рекомбинации. Рекомбинация, точнее фоторекомбинация, — это присоединение ионом электрона с излучением фотона и превращение иона в атом (или ион меньшей стадии ионизации). Рекомбинация может произойти как на основной уровень атома, так и на возбужденные уровни. В последнем случае вслед за рекомбинацией происходят каскадные переходы на уровни, расположенные ниже, в результате чего излучаются фотоны в спектральных линиях.

В этом параграфе тем же приближенным способом выведем выражения для сечения рекомбинации с образованием водородоподобного иона. Снова следуем изложению книги [9].

Энергии дискретных состояний водородоподобного иона $E_i=-Z^2\chi_{\rm H}/i^2$, где i — главное квантовое число. Пусть электрон с положительной энергией $mv^2/2$ переходит в одно из связанных состояний i. При этом излучается фотон, частота которого определяется законом сохранения энергии:

$$h\nu=\frac{mv^2}{2}-E_i. \tag{26}$$

Закрепим скорость электрона v и будем считать, что дискретные уровни расположены близко друг к другу, так что их номер можно рассматривать как непрерывно изменяющуюся переменную. Тогда можно написать дифференциальное соотношение

$$\frac{{\rm d}\nu}{{\rm d}i}=-\frac{1}{h}\frac{{\rm d}E_i}{{\rm d}i}=Z^2\frac{2}{h}\frac{\chi_{\rm H}}{i^3}. \tag{27}$$

Сечение рекомбинации получим, рассматривая этот процесс как продолжение тормозного излучения на дискретные конечные состояния. При действии обоих механизмов излучаются фотоны с частотами от ν до $\nu+{\rm d}\nu$, количество которых $\dfrac{1}{h\nu}\dfrac{{\rm d}q_\nu}{{\rm d}\nu}{\rm d}\nu$. Но при рекомбинации ион переходит в состояние атома с интервалом дискретных уровней энергии с номерами от i до $i+{\rm d}i$. Поэтому по аналогии с (14) можно написать следующее соотношение:

$$\beta_{{\rm c}i}(v,\nu)=\frac{1}{h\nu}\frac{{\rm d}q_\nu}{{\rm d}\nu}\frac{{\rm d}\nu}{{\rm d}i}=\frac{2^7\pi^4}{3\sqrt{3}}\frac{Z^4e^{10}}{mc^3h^4}\frac{1}{i^3}\frac{1}{v^2\nu}g_{{\rm c}i}(\nu), \tag{28}$$

где $g_{{\rm c}i}(\nu)$ — соответствующий гаунтовский множитель.

2. Излучательная способность. Теперь найдем, сколько энергии излучается при рекомбинациях в единице объема за единицу времени в расчете на единичный интервал частот и в единицу телесного угла. Для этого закрепим не скорость электрона, а номер уровня, на который происходит рекомбинация. Тогда соотношение (26) устанавливает связь между скоростью электрона и частотой излучаемого фотона, причем $mv{\rm d}v=h{\rm d}\nu$. Частота излучаемого фотона может быть любой, но не меньшей частоты предела i-той серии $\nu_i=-E_i/h$, так что при рекомбинации излучается непрерывный спектр за пределом i-той серии. Из сказанного следует, что

$$\epsilon_{{\rm c}i}(\nu){\rm d}\nu=n_{\rm e}n^+h\nu\frac{1}{4\pi}\beta_{{\rm c}i}(\nu)v{\rm d}vf(v). \tag{29}$$

Подставив выражение для сечения (28) и для функции Максвелла (16), а также учтя связь скорости электрона и частоты (26), найдем

$$\epsilon_{{\rm c}i}(\nu)=n_{\rm e}n^+\frac{2^7\pi^4}{3\sqrt{3}}\frac{Z^4e^{10}m}{c^3h^2}\frac{1}{i^3}g_{{\rm c}i}(\nu)\frac{1}{(2\pi mk_{\rm B}T)^{3/2}}\exp\left(-\frac{h\nu}{k_{\rm B}T}+Z^2\frac{\chi_{\rm H}}{2i^2k_{\rm B}T}\right). \tag{30}$$

Формулы (28) и (30) (без множителей Гаунта) также были получены Х. А. Крамерсом. Множитель Гаунта задается приближенной формулой [14]

$$g_{ci}(\nu) \approx 1 - 0.1728 \left(\frac{h\nu}{Z^2\chi_{\mathrm{H}}}\right)^{1/3} \left(\frac{2}{i^2}\frac{Z^2\chi_{\mathrm{H}}}{h\nu} - 1\right). \tag{31}$$

Наряду с излучательной способностью часто используется интегральная величина, а именно, коэффициент спонтанной рекомбинации. Это число рекомбинаций в единице объема в единицу времени

$$A_{ci}(T) = \frac{4\pi}{n_{\mathrm{e}}n^+}\int\limits_{\nu_i}^{\infty}\epsilon_{ci}(\nu)\frac{\mathrm{d}\nu}{h\nu} = \int\limits_0^{\infty}\beta_{ci}(\nu)f(v)v\mathrm{d}v. \tag{32}$$

Если вынести среднее значение гаунтовского множителя из-под интеграла, то для коэффициента рекомбинации получится приближенная формула

$$A_{ci}(T) = \frac{2^9\pi^5}{3\sqrt{3}}\frac{Z^4e^{10}m}{c^3h^3}\frac{1}{i^3}\frac{\overline{g}_{ci}}{(2\pi m k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}}E_1\left(\frac{h\nu_i}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\exp\left(\frac{h\nu_i}{k_{\mathrm{B}}T}\right). \tag{33}$$

Здесь $E_1(x)$ — интегральная показательная функция. На рис. 3 представлены кривые зависимости $A_{ci}(T)$ от температуры.

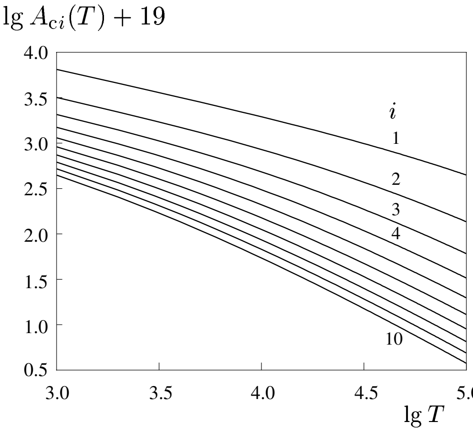

Рис. 3. Коэффициенты $A_{ci}(T)$ при $i = 1(1)10$.

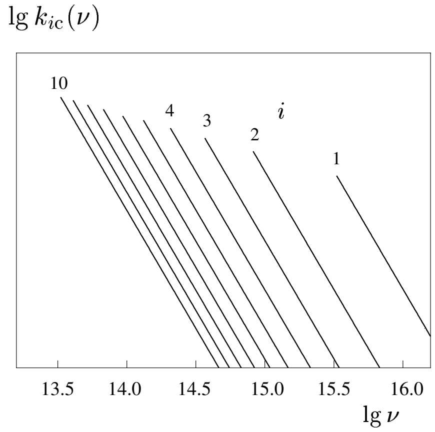

Рис. 4. Коэффициенты $k_{ic}(\nu)$ при $i = 1(1)10$.

3. Коэффициент ионизации. Сечение ионизации находится точно так же, как и сечение тормозного поглощения — из условия детального баланса при ТДР:

$$4\pi n_i k_{ic}(\nu)B_\nu(T)\frac{\mathrm{d}\nu}{h\nu} = n_{\mathrm{e}}n^+f(v)v\mathrm{d}v\beta_{ci}(\nu)\left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3}B_\nu(T)\right]. \tag{34}$$

Принимая во внимание формулы Больцмана, Саха (для водородоподобного иона $g^+ = 1$) и Планка, получаем

$$k_{ic}(\nu) = \frac{1}{g_i}\frac{c^2m^2v^2}{h^2\nu^2}\beta_{ci}(\nu) = \frac{2^6\pi^4}{3\sqrt{3}}Z^4\frac{e^{10}m}{ch^6}\frac{1}{i^5}\frac{1}{\nu^3}g_{ci}(\nu). \tag{35}$$

Эта окончательная формула справедлива для водородоподобных ионов при произвольных условиях. Напомним, что входящая в некоторые величины скорость электрона должна находиться из соотношения (26), причем, как и выше, формула для $k_{ic}(\nu)$ справедлива при $\nu \geq \nu_i$. На рис. 4 даны графики сечения поглощения $k_{ic}(\nu)$ для $i = 1(1)10$ в зависимости от частоты в произвольных относительных единицах.

Согласно формуле (35) наибольшие значения сечения поглощения за счет ионизации наблюдается у голов серий, т. е. при $\nu = \nu_i$, причем при ионизации из i-го состояния оно пропорционально i.

Для получения коэффициента поглощения надо найти сумму $\alpha_{ic}(\nu) = \sum\limits_{i=i_0(\nu)}^{\infty} n_i k_{ic}(\nu)$, где $\nu \geq \nu_{i_0(\nu)}$. Напомним, что высокие состояния не осуществляются, хотя здесь это обстоятельство не столь существенно, как при вычислении суммы по состояниям, так как ряд сходится.

При выполнении условия локального термодинамического равновесия, когда справедливы формулы Максвелла, Больцмана и Саха (но не Планка), коэффициент поглощения за счет ионизации представляют в таком же виде, что и α_{cc}: $\alpha_{ic} = n_{\mathrm{e}}n^+\tilde{k}_{ic}$, где

$$\tilde{k}_{ic}(\nu) = \frac{2^6\pi^4}{3\sqrt{3}}\frac{Z^4me^{10}}{ch^3}\frac{g_{ci}(\nu)}{(2\pi m k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}}\frac{1}{i^3}\frac{1}{\nu^3}e^{-E_i/k_{\mathrm{B}}T}. \tag{36}$$

Размерность k_{ic} — *см*^{2}, а $\tilde{k}_{ic}$ — *см*^{5}.

Для примера приведены графики спектральной зависимости коэффициентов поглощения за счет связанно-свободных переходов (bound-free) $\alpha_{\rm bf}(\nu)] = \alpha_{ic}(\nu)$ и полных коэффициентов поглощения $\alpha(\nu) = \alpha_{\rm cc}(\nu) + \alpha_{\rm bf}(\nu)]$ за счет тормозного и рекомбинационного механизмов, вычисленные без учета множителей Гаунта для больцмановского распределения по состояниям атома водорода и выполнении формулы Саха. Даны значения $\lg[\alpha_{\rm b\,f}(\nu)/n_1] + 19$ (рис. 5) и $\lg[\alpha(\nu)/(n_e n^+)] + 41$ (рис. 6) для температур $T = T_5 \cdot 10^5$ *K*. Величины T_5 указаны около кривых. Ясно виден пилообразный характер зависимости от частоты.

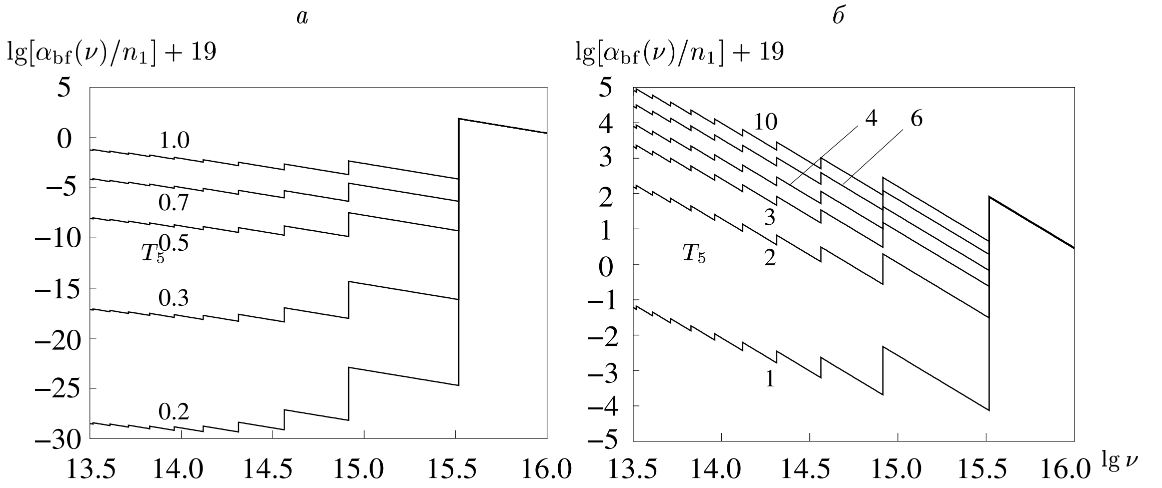

Рис. 5. Значения $\lg[\alpha_{\rm bf}(\nu)/n_1] + 19$ для $T = T_5 \cdot 10^5$, $T_5 = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ (*а*) и $T_5 = 1, 2, 3, 4, 6, 10$ (*б*).

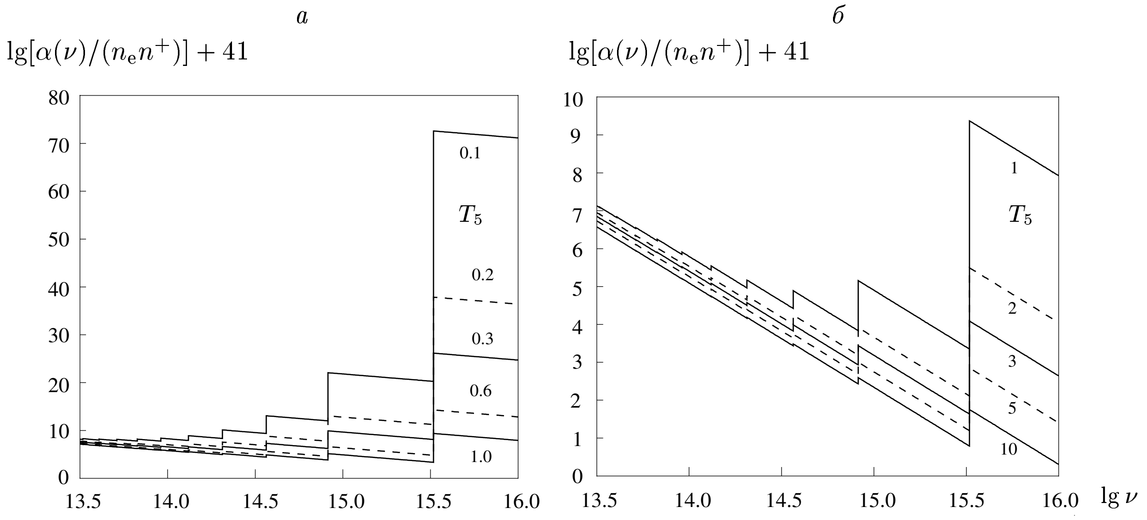

Рис. 6. Значения $\lg[\alpha(\nu)/(n_e n^+)] + 41$ для $T = T_5 \cdot 10^5$, $T_5 = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ (*а*) и $T_5 = 1, 2, 3, 4, 6, 10$ (*б*).

Пропорциональность поглощения при свободно-свободных и связанно-свободных переходах обратной третьей степени частоты имеет важные следствия. Например, нейтральный водород непрозрачен для излучения с длиной волны, меньшей 912 $\mathring{A}$, и становится прозрачным только в рентгеновском диапазоне.

Формулы для коэффициентов поглощения и излучения, приведенные в двух первых параграфах, широко используются в теории звездных атмосфер, газовых туманностей и других объектов (см. [29]).

4. Рекомбинационные радиолинии (РРЛ). Это линии, возникающие при переходах между высокими уровнями атомов. Для находящихся на таких уровнях внешних электронов почти несущественно внутреннее строение атомного остатка, имеет значение только масса и заряд. Заряд ядра экранируется близкими к нему электронами, так что результирующий заряд совпадает с зарядом протона. Поле остатка в высокой степенью можно считать кулоновским. Поэтому положения линий разных элементов с одинаковыми главными квантовыми числами состояний внешнего электрона близки: различия определяются только различием масс ядер и вследствие этого — приведенных масс. Для определенности рассмотрим здесь линии атома наиболее распространенного элемента — водорода.

В высоко возбужденных состояниях электрон в среднем находится на довольно большом расстоянии от ядра. Среднее расстояние электрона в состоянии с главным квантовым числом i и азимутальным l составляет $\overline{r}_i = 0.269[3i^2 - l(l+1)]\,\mathring{A}$ [2], так что при $i = 1000$ размер атома водорода достигает $\approx 10^{-8} \cdot 10^6 = 10^{-2}$ *см*, т. е. такой атом можно было бы увидеть невооруженным глазом. Однако, осуществлению состояний с высокими уровнями энергии мешают соседние частицы, причем чем больше их концентрация N, тем меньше номер i_*

последнего уровня, который еще может создасться. Этот номер определяется из условия разрушения высоких уровней атомов соседними частицами.

Номер i_0 для атома водорода можно определить, например, отождествив с ним номер последней бальмеровской линии, которая наблюдается в спектре рассматриваемого объекта.

В связи с этим возникает следующий способ определения концентрации частиц N в астрофизических объектах. Ясно, что радиус, который еще может иметь атом, не подвергаясь разрушению окрестными частицами, приблизительно определяется условием $Nr_{i_*}^3 \sim 1$. Так как это i_0, как правило, достаточно большое, то $r_{i_*} \approx 10^{-8} i_*^2$ *см*, так что $N \propto i_*^{-6}$. Номер i_* можно определить из наблюдений, хотя это сделать не очень просто из-за конечной ширины линий и слияния их у предела бальмеровской серии. Эта трудность усугубляется, если недостаточно разрешение спектрографа. В то же время ошибка в номере на несколько единиц приведет к большой ошибке в концентрации, так как зависимость N от i_* очень сильная. Тем не менее, когда лучшего способа нет, приходится прибегать к этому. Еще в 30-е годы была выведена формула Инглиса—Теллера, связывающая N и i_*. Эта формула затем многократно уточнялась.

Например, в спектрах звезд i_* порядка десятка, в спектрах туманностей — до сотни, а в спектрах межзвездной среды доходит до нескольких сотен. Столь высокие уровни проявляются не в бальмеровской серии, а при переходах между высокими уровнями, которые образуют рекомбинационные радиолинии.

Как известно, линии водорода, объединенные тем, что у них общий нижний уровень, образуют серии. Если переход происходит на первый уровень, линии попадают в УФ область, называются лаймановскими и обозначаются L_α, L_β, $L_\gamma, \ldots$. Вторая серия — бальмеровская — располагается в видимой области, ее линии H_α, H_β, $H_\gamma, \ldots$. Первые две серии выделены тем, что они отделены друг от друга и от других серий. Все остальные серии в той или иной степени перекрываются, а линии высоких серий сильно перепутаны, так что для их отождествления необходимо точное измерение частоты или длины волны. В отличие от первых серий линии, у которых общий нижний уровень с главным квантовым числом i, обозначаются $H_{i+1\alpha}$, $H_{i+2\beta}$, $H_{i+3\gamma}, \ldots$. Для примера укажем, что линия $H_{103\gamma}$ образуется при переходе $103 \to 100$.

Наибольшую вероятность перехода и, следовательно, интенсивность имеют первые линии серий. У серий с высокими общими уровнями i интенсивность линии $H_{i\alpha}$ в пять раз больше, чем у $H_{i+1\beta}$, и в 100 раз больше, чем у $H_{i+5\varepsilon}$. Частоты первых линий серий можно вычислить по формуле

$$\nu_{H_{i\alpha}} = 3288052 \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} \textit{ ГГц}. \tag{37}$$

При i порядка нескольких сотен линии попадают в радиодиапазон.

Эйнштейновские коэффициенты спонтанного перехода $A_{i+1,i}$ при больших i пропорциональны i^{-5}, так что для накопления вдоль луча заметного излучения необходимо много атомов, что осуществляется только в космическом пространстве. Однако оптические толщины в этих линиях все равно очень малы и рассеяния в них не происходит.

На возможность и важность наблюдений РРЛ указал Н. С. Кардашев [17] в 1959 году. Он рассчитал вероятности переходов для этих линий. Первые наблюдения РРЛ были получены в ФИАН (переход $91 \to 90$) и на Большом Пулковском телескопе (БПР, переход $105 \to 104$) в 1964 году. В 1966 году были обнаружены РРЛ гелия и углерода.

Часто оказывается, что РРЛ подвержены мазерному усилению. Это объясняется следующим образом. В межзвездной среде (МЗС) в зонах HII водород сильно ионизован. Почти все нейтральные атомы находятся на основном уровне, населенность второго на много порядков меньше, чем основного. Однако, вследствие того, что свободные электроны эффективно взаимодействуют с высокими уровнями атомов, относительные населенности высоких уровней оказываются близки к равновесным, то есть к определяемым по формуле Больцмана. Более того, чем выше уровень, тем эта близость сильнее. Причиной этого является равновесное (максвелловское) распределение электронов по скоростям, которое достаточно быстро устанавливается при кулоновских столкновениях.

Обозначим отношение реальной концентрации атома водорода в состоянии с главным квантовым числом к равновесной через b_i, так что $n_i = b_i n_i^*$. Величины b_i называются мензеловскими множителями. Они были введены Д. Мензелом [43] в связи с расчетами бальмеровского декремента, то есть отношений интенсивностей бальмеровских линий.

Запишем уравнение переноса излучения в линии $H_{i+1\alpha}$:

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = -n_i k_i(\nu) I_\nu + C n_{i+1} \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu\right]. \tag{38}$$

Коэффициент C определяем, как всегда, приравняв правую часть уравнения при ТДР к нулю:

$$n_i^* k_i(\nu) \nu B_\nu(T) = C n_{i+1}^* \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(T)\right]. \tag{39}$$

Уравнение переноса перепишется в виде

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = -n_i k_i(\nu) \left(1 - \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{n_{i+1}}{n_i}\right) I_\nu + \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{g_i}{g_{i+1}} n_{i+1}. \tag{40}$$

Выражение, стоящее в круглых скобках, может быть преобразовано:

$$1 - \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{n_{i+1}}{n_i} = 1 - \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{n^*_{i+1}}{n^*_i} \frac{b_{i+1}}{b_i} = 1 - \frac{b_{i+1}}{b_i} e^{-h\nu/k_{\rm B}T}. \tag{41}$$

Оба множителя в последнем выражении близки к 1. Разложим их по формуле Тейлора:

$$\frac{b_{i+1}}{b_i} \approx \frac{b_i + \Delta b_i}{b_i} = 1 + \Delta(\ln b_i),\ e^{-h\nu/k_{\rm B}T} \approx 1 - \frac{h\nu}{k_{\rm B}T}. \tag{42}$$

Тогда

$$1 - \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{n_{i+1}}{n_i} \approx \frac{h\nu}{k_{\rm B}T} - \Delta(\ln b_i). \tag{43}$$

Расчеты населенностей высоких уровней, произведенные путем решения уравнений стационарности, показали, что второе слагаемое в (43) может быть больше первого, то есть коэффициент поглощения может быть отрицательным, что и приводит к мазерному эффекту. Хотя оптические толщины в РРЛ невелики, эти линии оказываются более интенсивными и более узкими, чем получается по теории, не учитывающей мазерного эффекта.

Более подробно о РРЛ можно прочитать в книге [15] и в энциклопедии [31].

Глава 2. Магнито-тормозной механизм

§ 1. Геометрия и терминология

1. Движение и излучение заряда. Пусть заряд e массой m равномерно движется по окружности в некоторой системе отсчета. Центр окружности находится в начале координат этой системы и считается неподвижным, то есть система отсчета жестко связана с ним.

По окружности движется заряд во внешнем однородном магнитном поле, если не учитывать излучение заряда и если его скорость перпендикулярна магнитному полю. Если имеется составляющая скорости вдоль поля, то траектория заряда — спираль, точнее — винтовая линия. Этот более сложный случай рассмотрим во вторую очередь.

Изменением энергии заряда мы пренебрегаем, то есть считаем, что заряд принуждает двигаться какая-то постоянная по величине сила. Мы же изучаем его излучение, которое не отражается на движении заряда. Так можно поступать ввиду того, что излучение заряда составляет малую долю его энергии.

Излучение рассматриваемого заряда или совокупности таких зарядов называется магнито-тормозным (именно потому, что заряды тормозятся вследствие излучения, и по аналогии с тормозным излучением заряженных частиц в электрическом поле других зарядов). Если заряды нерелятивистские или ультрарелятивистские, то их излучение называют соответственно циклотронным или синхротронным, в диапазоне промежуточных энергий говорят о гироциклотронном излучении.

Поскольку главное излучение дают заряды с наименьшей массой, в дальнейшем под словом заряд подразумеваем электрон.

2. Системы отсчета. При изучении магнито-тормозного излучения приходится рассматривать следующие системы отсчета.

I. Собственная система отсчета заряда. Эта система движется вместе с зарядом по окружности. Ее оси не меняют своих направлений. В собственной системе отсчета определено собственное время t_*.

II. Система отсчета заряда (электрона). В этой системе, как указывалось выше, электрон равномерно вращается (обращается) по окружности. Начало координат этой системы совмещено с центром указанной окружности. Все величины, относящиеся к системе заряда, отмечаем индексом e. Внешнее электрическое поле отсутствует, $\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{e}} = 0$, а напряженность магнитного поля направлена по вектору $\vec{e}_3$, перпендикулярному плоскости вращения заряда: $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_* \vec{e}_3$ (см. рис. 1).

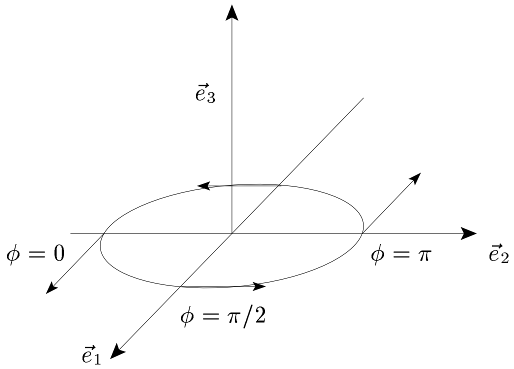

Рис. 1. Вращающийся по окружности заряд.

III. Системы отсчета поля. Таких систем много. Будем считать, что начала координат у них всех расположены на прямой, проходящей через центр окружности вращения электрона и перпендикулярной ей. Эти системы движутся относительно друг друга вдоль магнитного поля и координаты их связаны преобразованиями Лоренца, которые естественно назвать продольными.

Из формул преобразования напряженностей поля непосредственно следует, что во всех таких системах напряженность внешнего магнитного поля одна и та же, а внешнего электрического поля нет $\vec{\mathcal{E}}_{\mathrm{f}} = 0$.

Все величины, относящиеся к этим системам, отмечаем индексом f.

IV. Система отсчета источника. Источник магнито-тормозного излучения — это объект, в котором в магнитном поле движутся заряды, образующие какие-то потоки или облака. В источнике выбирается система отсчета. Она тоже связана с магнитным полем, то есть это одна из систем поля, и внешнего электрического поля в ней нет. В этой системе должно быть произведено усреднение по импульсам электронов. Система источника отличается от других систем поля тем, что в ней средний продольный импульс электронов равен нулю.

V. Система отсчета наблюдателя. Система источника движется относительно системы наблюдателя с некоторой скоростью.

Можно считать, что во второй и третьей системах излучает один заряд, в двух последних излучают их ансамбли. Рассмотрим каждую из систем по очереди, но сначала перечислим скалярные величины.

3. Инварианты. В задаче о заряде в магнитном поле имеется несколько величин, которые закрепляются и не изменяются при переходе от одной системы отсчета поля к другой. Это прежде всего величина напряженности магнитного поля во всех системах поля $\mathcal{H}_*$. Ей соответствует циклотронная частота $\omega_* = \dfrac{e\mathcal{H}_*}{mc}$, где $e > 0$ — заряд электрона, а m — его масса, и период $T_* = 2\pi/\omega_*$

Далее, радиус окружности R_*, по которой обращается заряд, также одинаков во всех системах поля. Из указанных величин можно образовать произведение размерности скорости $R_*\omega_* > 0$, а также безразмерную величину $R_*\omega_*/c > 0$. Так как напряженность поля и радиус окружности могут быть произвольными, то введенные величины также могут быть любыми, причем сколь угодно большими.

Еще одной инвариантной величиной является собственное время заряда t_*.

Напомним здесь вид преобразования Лоренца. Если некоторая система отсчета движется с безразмерной скоростью $\vec{V}$ по отношению к другой системе отсчета, причем их соответствующие оси координат параллельны, то временная и пространственные координаты произвольного вектора $\underline{a}$ в движущейся системе $\{a'_0, \vec{a}'\}$ выражаются через те же величины в неподвижной $\{a_0, \vec{a}\}$ формулами

$$a'_0 = \Gamma(a_0 - \vec{V}\vec{a}),\ \vec{a}' = \vec{a} - \Gamma a_0\vec{V} + (\Gamma - 1)\frac{\vec{V}}{V}\left(\frac{\vec{V}}{V}\vec{a}\right). \tag{1}$$

Здесь $\Gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$ — лоренцевский множитель, соответствующий скорости $\vec{V}$. Нетрудно проверить, что определитель преобразования (1) равен 1. Формулы обратного преобразования получаются путем замены $\vec{V}$ на $-\vec{V}$.

4. Система заряда. Введем в этой системе ортонормальный базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Пусть окружность, по которой движется электрон, лежит в плоскости векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, а магнитное поле $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_*\,\vec{e}_3$.

Зададим радиус-вектор заряда относительно центра окружности в виде

$$\vec{r}_{\rm e} = \vec{r}_{\rm e}(\phi) = R_*\,(\vec{e}_1\sin\phi - \vec{e}_2\cos\phi), \tag{2}$$

где $\phi = \omega_{\rm e}\,t_{\rm e}$, $\omega_{\rm e}$ — угловая скорость движения заряда по окружности, $t_{\rm e}$ — время в системе отсчета заряда. Четырехмерный вектор положения заряда

$$\underline{r}_{\rm e} = \{ct_{\rm e}, \vec{r}_{\rm e}\}. \tag{3}$$

Безразмерный 4-импульс заряда (или, что то же самое, четырехмерная скорость)

$$\underline{z}_{\rm e} = \frac{1}{c}\frac{{\rm d}\underline{r}_{\rm e}}{{\rm d}t_*} = \frac{\gamma_{\rm e}}{c}\frac{{\rm d}\underline{r}_{\rm e}}{{\rm d}t_{\rm e}} = \{\gamma_{\rm e}, \vec{z}_{\rm e}\}, \quad \vec{z}_{\rm e} = \gamma_{\rm e}\vec{\beta}_{\rm e}, \tag{4}$$

где безразмерная скорость вращения заряда по окружности

$$\vec{\beta}_{\rm e} = \frac{1}{c}\frac{{\rm d}\vec{r}_{\rm e}}{{\rm d}t_{\rm e}} = \beta_{\rm e}\,(\vec{e}_1\cos\phi + \vec{e}_2\sin\phi), \quad \beta_{\rm e} = \frac{R_*\omega_{\rm e}}{c}. \tag{5}$$

Безразмерная энергия электрона $\gamma_{\rm e}$ выражается через его безразмерные скорость $\beta_{\rm e}$ и импульс $z_{\rm e}$ в этой системе отсчета обычным образом:

$$\gamma_{\rm e} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{\rm e}^2}} = \sqrt{1+z_{\rm e}^2}. \tag{6}$$

Этот множитель связывает собственное время заряда t_* со временем в системе отсчета заряда и, соответственно, угловую частоту обращения заряда с циклотронной частотой:

$$t_* = \frac{t_{\rm e}}{\gamma_{\rm e}}, \quad \omega_{\rm e} = \frac{\omega_*}{\gamma_{\rm e}}, \tag{7}$$

так что $\phi = \omega_{\rm e}\,t_{\rm e} = \omega_*\,t_*$. Периоды обращения связаны точно так же: $T_{\rm e} = T_*\gamma_{\rm e}$. Отметим, что хотя время t_* относится к неинерциальной системе отсчета, оно течет равномерно, так как модуль вектора скорости заряда постоянен.

Из (4) и (5) следует, что характеристики вращательного движения: модули импульса и скорости, лоренцевский множитель и частота вращения — инвариантны по отношению к произвольным продольным преобразованиям Лоренца:

$$z_{\rm e} = \gamma_{\rm e}\beta_{\rm e} = \frac{R_*\omega_*}{c}, \quad \gamma_{\rm e} = \sqrt{1+z_{\rm e}^2} = \sqrt{1+\left(\frac{R_*\omega_*}{c}\right)^2}, \quad \beta_{\rm e} = \frac{z_{\rm e}}{\gamma_{\rm e}} = \frac{R_*\omega_*}{\sqrt{c^2+R_*^2\omega_*^2}}, \omega_{\rm e} = \frac{\omega_*}{\sqrt{1+(R_*\omega_*/c)^2}}. \tag{8}$$

Вектор ускорения и его величина задаются простыми формулами:

$$\underline{w}_{\rm e} = \{0, \gamma_{\rm e}^2\vec{w}_{\rm e}\},\ \vec{w}_{\rm e} = w_{\rm e}(-\vec{e}_1\sin\phi+\vec{e}_2\cos\phi),\ w_{\rm e} = \beta_{\rm e}\,c\,\omega_{\rm e} = R_*\omega_{\rm e}^2 = \frac{R_*\omega_*^2}{\gamma_{\rm e}^2}, \tag{9}$$

причем величина ускорения $w_{\rm e}$ также является инвариантом, как и релятивистский скаляр $\underline{w}^2 = -\gamma_{\rm e}^4 w_{\rm e}^2 = -R_*^2\omega_*^4$.

Теперь рассмотрим описание движения заряда в системах поля.

5. Системы отсчета поля. Можно считать, что векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ у всех таких систем отсчета общие, так как они не меняются при продольных преобразованиях Лоренца. Вектор $\vec{e}_3$, рассматриваемый как часть четырехмерного, изменяет свою длину, но мы будем временную часть этого вектора во всех системах поля игнорировать, а пространственную нормировать на 1, так что этот вектор тоже можно считать неизменным.

В каждой такой системе электрон равномерно движется по винтовой линии. Составляющую безразмерной скорости электрона вдоль поля, то есть ее проекцию на вектор $\vec{e}_3$ обозначим $\beta_\|$, так что

$$\vec{\beta}_\| = \beta_\|\,\vec{e}_3. \tag{10}$$

В отличие от строго положительной величины $\beta_{\rm e}$ проекция $\beta_\|$ может быть положительной или отрицательной. Соответствующий множитель Лоренца определим, как обычно: $\gamma_\| = 1/\sqrt{1-\beta_\|^2}$.

Чтобы получить выражение для вектора, описывающего движение заряда в системе поля, надо преобразовать (3) по Лоренцу из системы заряда в систему поля. Вторая движется по отношению к первой со скоростью $-\vec{\beta}_\| c$. Продольное преобразование отличается тем, что его скорость перпендикулярна преобразуемому трехмерному вектору $\vec{r}_{\rm e}$, поэтому радиус окружности, которая получается при проектирования траектории электрона на плоскость, перпендикулярную полю, не изменяется и

$$\underline{r}_{\rm f} = \{ct_{\rm f}, \vec{r}_{\rm f}\} = \{\gamma_\| ct_{\rm e},\ \gamma_\|\beta_\|\vec{e}_3 ct_{\rm e} + \vec{r}_{\rm e}\}. \tag{11}$$

Таким образом, времена в системах поля и заряда связаны лоренцевским и множителями: $t_{\rm f} = \gamma_\| t_{\rm e} = \gamma_\|\gamma_{\rm e} t_* = \gamma_{\rm f} t_*$, так что $\gamma_{\rm f} = \gamma_\|\gamma_{\rm e}$. Радиус-вектор заряда в системе поля

$$\vec{r}_{\rm f} = \vec{r}_{\rm f}(t_{\rm f}) = \gamma_\|\vec{\beta}_\| ct_{\rm e} + \vec{r}_{\rm e}(\phi) = \vec{\beta}_\| ct_{\rm f} + R_*(\vec{e}_1\sin\phi - \vec{e}_2\cos\phi) \tag{12}$$

равен сумме векторов, один из которых отражает обращение по окружности, а другой — равномерное движение вдоль поля.

Полная безразмерная скорость заряда

$$\vec{\beta}_{\rm f} = \frac{{\rm d}\vec{r}_{\rm f}}{c{\rm d}t_{\rm f}} = \vec{\beta}_\| + \vec{\beta}_\perp. \tag{13}$$

Ее перпендикулярная составляющая

$$\vec{\beta}_\perp = \beta_\perp(\vec{e}_1\cos\omega_{\rm f}t_{\rm f} + \vec{e}_2\sin\omega_{\rm f}t_{\rm f}),\ \beta_\perp = \frac{R_*\omega_{\rm f}}{c} = \beta_{\rm e}\frac{{\rm d}t_{\rm e}}{{\rm d}t_{\rm f}} = \frac{\beta_{\rm e}}{\gamma_\|}. \tag{14}$$

Квадрат этой скорости

$$\beta_{\rm f}^2 = \beta_\perp^2 + \beta_\|^2 = \frac{\beta_{\rm e}^2}{\gamma_\|^2} + \beta_\|^2 = (1-\beta_\|^2)\beta_{\rm e}^2 + \beta_\|^2, \tag{15}$$

так что лоренцевский множитель полного движения заряда

$$\gamma_{\rm f} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{\rm f}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_\perp^2-\beta_\|^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_\|^2)(1-\beta_{\rm e}^2)}} = \gamma_{\rm e}\gamma_\| \tag{16}$$

равен произведению множителей, соответствующих обращению и движению вдоль поля, что уже отмечалось.

Частоты обращения заряда связаны, как и времена, а именно, частота обращения в системе поля равна $\omega_{\rm f} = \omega_{\rm e}/\gamma_\| = \omega_*/\gamma_{\rm f}$. Поскольку электрон проходит по одной и той же окружности на плоскости, на которую проецируется его траектория, а времена в системах отличаются на постоянные множители, то величина аргумента тригонометрических функций $\phi = \omega_* t_* = \omega_e t_e = (\omega_e/\gamma_\parallel)t_f = \omega_f t_f$ остается неизменной. Период обращения заряда в системе поля составляет $T_f = 2\pi/\omega_f = (2\pi/\omega_e)\gamma_\parallel = T_*\gamma_f$. Простота связей между соответствующими величинами в рассматриваемых системах отсчета объясняется тем, что все движения, в которые вовлечены электроны, включая обращение по окружности, равномерные.

Безразмерный импульс электрона в системе поля

$$\underline{z}_f = \frac{1}{c}\frac{d\underline{r}_f}{dt_*} = \frac{\gamma_e}{c}\frac{d\underline{r}_f}{dt_e} = \frac{\gamma_f}{c}\frac{d\underline{r}_f}{dt_f} = \{\gamma_f, \vec{z}_f\}, \tag{17}$$

где

$$\vec{z}_f = z_\parallel \vec{e}_3 + z_\perp(\vec{e}_1\cos\omega_f t_f + \vec{e}_2 \sin\omega_f t_f),\ z_\parallel = \beta_\parallel\gamma_f,\ z_\perp = \beta_\perp\gamma_f = z_e. \tag{18}$$

Его перпендикулярная полю часть остается инвариантом.

Определим так называемый питч-угол α, то есть угол между скоростью электрона в системе поля и направлением магнитного поля, так что

$$\beta_\parallel = \beta_f\cos\alpha,\ \beta_\perp = \beta_f\sin\alpha. \tag{19}$$

Так как движение вдоль поля равномерное и прямолинейное, то ускорение во всех системах поля определяется формулами, аналогичными (9):

$$\underline{w} = \{0, \gamma_f^2 w_f\},\ w_f = R_*\omega_f^2 = c\beta_\perp\omega_f = c\frac{\omega_*}{\gamma_f}\beta_f\sin\alpha. \tag{20}$$

Инвариант

$$-\underline{w}^2 = \gamma_f^4 w_f^2 = R_*^2\omega_*^4 = c^2\omega_*^2\gamma_f^2\beta_f^2\sin^2\alpha. \tag{21}$$

Если наряду с величиной поля $\mathcal{H}_*$ постоянным принимается радиус окружности R_*, то можно считать, что рассматривается один и тот же электрон. В дальнейшем мы будем сравнивать излучение электронов с закрепленными величинами скорости β и питч-угла α. Следует помнить, что они могут относиться к различным электронам, то есть эти электроны могут обращаться по разным окружностям и иметь различные скорости вдоль поля.

Две другие инерциальные системы рассмотрим позже.

6. Полное излучение и классификация. Найдем полное излучение электрона, движущегося по спирали, то есть в системе поля, в волновой зоне.

Как известно, релятивистский заряд излучает не только энергию, но и импульс, которые уносятся излучаемой зарядом электромагнитной волной. Перенос импульса означает, что центр расходящейся сферической волны смещается в сторону движения заряда. Четырехмерный вектор излучаемого импульса пропорционален вектору смещения электрона, а коэффициентом пропорциональности является мощность излучения, которая в общем случае дается формулой

$$I = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}[-\underline{w}^2], \quad -\underline{w}^2 = \gamma^6\,[w^2 - (\vec{\beta}\times\vec{w})^2], \tag{22}$$

где $\underline{w} = \gamma^2\{\gamma^2\vec{\beta}\vec{w}, \vec{w} + \gamma(\vec{\beta}\vec{w})\vec{\beta}\}$ — пространственноподобный четырехмерный вектор ускорения. Для нашего случая этот вектор дается формулой (20), а его квадрат — формулой (21), так что

$$I = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\omega_*^2\gamma_f^2\beta_f^2\sin^2\alpha. \tag{23}$$

Зафиксируем скорость заряда и тем самым величины β_f, γ_f и α. Закрепим также величину напряженности внешнего магнитного поля $\mathcal{H}_*$ и рассмотрим предельные случаи, о которых говорилось выше.

1) Нерелятивистский предел. При $\beta_f \ll 1$ множитель $\gamma_f \approx 1$ и

$$I \sim \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\omega_*^2\beta_f^2\sin^2\alpha. \tag{24}$$

Это излучение называется, как уже говорилось, циклотронным.

2) Ультрарелятивистский предел. Здесь $\beta_f \approx 1$, $\gamma_f \gg 1$, так что в случае синхротронного излучения

$$I \sim \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\omega_*^2\gamma_f^2\sin^2\alpha. \tag{25}$$

Из приведенных формул видно, что циклотронное излучение значительно слабее синхротронного, так как в первом случае β_e мало, а во втором γ_e велико. Однако строго говоря, излучение можно называть синхротронным только, если питч-угол не очень мал (или не близок к π). Если же α имеет порядок $1/\gamma_f$, то есть $\alpha = \alpha_0\gamma_f$, то согласно формуле (25)

$$I \sim \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\omega_*^2\alpha_0^2. \tag{26}$$

Излучение в этом случае не зависит от γ_f и называется релятивистским дипольным. Точно та же формула справедлива, когда $\pi - \alpha = \alpha_0/\gamma_\mathrm{f}$. Этот случаи по существу не отличается от случая малых питч-углов, просто заряд движется в сторону, противоположную направлению поля. Впредь его отдельно не рассматриваем.

В промежуточных случаях, когда скорость электрона умеренно релятивистская, говорят о гиросинхротронном излучении. Подчеркнем еще раз, что излучение полностью отсутствует, если скорость электрона составляет угол 0 или π с направлением поля, так как тогда электрон движется вдоль поля равномерно, без ускорения, и не излучает.

§ 2. Угловая зависимость излучения одиночного заряда в волновой зоне

1. Мгновенные напряженность и интенсивность. Приведем сначала общие формулы для этих величин.

В волновой зоне векторный потенциал движущегося точечного заряда определяется формулой

$$\vec{A} = \frac{e}{R}\frac{\vec{\beta}}{1-\vec{n}\vec{\beta}}, \tag{27}$$

где $\vec{\beta}$ — безразмерная скорость заряда, а $\vec{n} = \vec{R}/R$ — единичный вектор направления на наблюдателя. Вектор $\vec{\beta}$ вычисляется в момент так называемого запаздывающего времени t_1, связанного со временем наблюдения t равенством

$$c(t-t_1) = |\vec{R} - \vec{r}(t_1)| = \sqrt{R^2 - 2\vec{R}\vec{r} + r^2} \sim R\left(1 - \frac{\vec{r}\vec{R}}{R^2}\right), \tag{28}$$

где $\vec{R}$ — вектор, соединяющий фиксированную точку в области движения заряда, а $\vec{r}(t_1)$ — радиус-вектор заряда, исходящий из указанной точки (см. рис. 2).

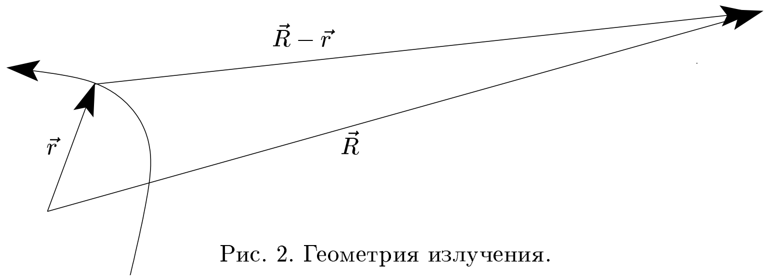

Рис. 2. Геометрия излучения.

С учетом того, что в волновой зоне $|\vec{r}| \ll R = |\vec{R}|$, равенство (28) записывается в виде

$$t = t_1 + \frac{R}{c} - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}, \tag{29}$$

так что при закрепленном расстоянии R дифференциалы времен связаны соотношением

$$\mathrm{d}t = (1 - \vec{n}\vec{\beta})\mathrm{d}t_1. \tag{30}$$

Напротив, при фиксированном моменте наблюдения t время влияния заряда зависит от расстояния R и его градиент находится из того же равенства (29):

$$0 = \vec{\nabla}t_1 + \frac{\vec{n}}{c} - (\vec{n}\vec{\beta})\vec{\nabla}t_1,\ \vec{\nabla}t_1 = -\frac{\vec{n}}{c}\frac{1}{1-\vec{n}\vec{\beta}}. \tag{31}$$

Напряженности создаваемого зарядом в волновой зоне электромагнитного поля определяются следующими формулами. Напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}t_1 \times \frac{\partial\vec{A}}{\partial t_1} = -\frac{\vec{n}}{c}\frac{1}{1-\vec{n}\vec{\beta}} \times \frac{\partial\vec{A}}{\partial t_1}, \tag{32}$$

а напряженность электрического поля выражается через нее:

$$\vec{E} = \vec{H}\times\vec{n} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\left[\frac{\vec{n}}{1-\vec{n}\vec{\beta}} \times \frac{\partial\vec{A}}{\partial t_1}\right]. \tag{33}$$

Если вычислить производную, то получится

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2R}\frac{\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\vec{w}]}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}. \tag{34}$$

По напряженности находим вектор Пойнтинга, то есть поток лучистой энергии. Однако нас будет интересовать не поток, который рассчитывается на единицу площади, а интенсивность излучения, рассчитываемая на единицу телесного угла. Поэтому интенсивность в расчете на единицу времени наблюдателя

$$W_* = \frac{c}{4\pi}E^2R^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{[(\vec{n}-\vec{\beta})\vec{n}\vec{w} - \vec{w}(1-\vec{n}\vec{\beta})]^2}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^6}. \tag{35}$$

Чтобы интеграл по всем направлениям давал полную интенсивность, зависимость ее от направления следует рассчитывать на единицу времени, связанного с зарядом, то есть на единицу времени t_1, для чего величину (35) надо умножить на $\dfrac{\partial t}{\partial t_1} = 1 - \vec{n}\vec{\beta}$, что дает

$$W = W_*\frac{\partial t}{\partial t_1} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{w^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^2 + 2(\vec{n}\vec{w})(\vec{\beta}\vec{w})(1-\vec{n}\vec{\beta}) - (1-\beta^2)(\vec{n}\vec{w})^2}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^5}. \tag{36}$$

2. Интенсивность магнито-тормозного излучения. В этом параграфе все рассмотрение производится в одной из систем поля, поэтому опустим индекс f. Для нашего случая выберем входящие в формулу (36) векторы следующим образом.

Пусть наблюдатель находится в плоскости векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$, что не является ограничением, так как заряд вращается и его излучение при фиксированном положении наблюдателя по отношению к направлению поля будет одним и тем же, независимо от азимута наблюдателя. Вектор направления на наблюдателя характеризуем поэтому только полярным углом:

$$\vec{n} = \vec{e}_1\sin\theta + \vec{e}_3\cos\theta = (\sin\theta, 0, \cos\theta). \tag{37}$$

Остальные векторы задаются формулами, приведенными в предыдущем параграфе. Запишем их в виде перечисления декартовых координат:

$$\beta = (\beta_\perp\cos\phi, \beta_\perp\sin\phi, \beta_\|),\ \ \vec{w} = -w(\sin\phi, -\cos\phi, 0). \tag{38}$$

Найдем произведения векторов, входящие в общую формулу для интенсивности излучения (36):

$$\vec{n}\vec{w} = -w\,\sin\theta\,\sin\phi,\ \ \vec{n}\,\vec{\beta} = \beta_\|\cos\theta + \beta_\perp\sin\theta\,\cos\phi,\ \ \vec{\beta}\,\vec{w} = 0. \tag{39}$$

В качестве основных переменных выбираем полную скорость электрона β и питч-угол α согласно соотношениям (19), так что $w = c\beta\omega\sin\alpha = c\omega_*\dfrac{\beta}{\gamma}\sin\theta$.

Интенсивность излучения в выбранном направлении будет

$$W(\theta,\phi) = \frac{e^2}{4\pi\,c}\omega_*^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}\sin^2\alpha\frac{[1-\beta(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha\cos\phi)]^2 - (1-\beta^2)\sin^2\theta\sin^2\phi}{[1-\beta(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\cos\phi)]^5}. \tag{40}$$

3. Предельные случаи. Рассмотрим те же предельные случаи, что и в первом параграфе.

1) $\beta \ll 1$. Малую величину β полагаем равной нулю везде, кроме той, квадрату которой пропорциональна интенсивность, так что

$$W = \frac{e^2}{4\pi\,c}\omega_*^2\beta^2\sin^2\alpha(1-\sin^2\theta\sin^2\phi). \tag{41}$$

2) $\beta \approx 1, \gamma \gg 1$. Из формулы (40) видно, что выражение, стоящее в скобках в знаменателе, почти всегда близко к единице. Однако оно становится малым, когда θ близко к α, а угол ϕ близок к кратным 2π (будем считать его близким к нулю $\phi = \phi_0/\gamma$). Положим также $\theta = \alpha + \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon_0/\gamma, |\varepsilon| \ll 1$. Привлекая формулы для синусов и косинусов суммы углов и разлагая эти функции при малых аргументах, получаем

$$\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha\cos\phi = \cos\alpha(\cos\alpha\cos\varepsilon - \sin\alpha\sin\varepsilon) + \sin\alpha(\sin\alpha\cos\varepsilon + \cos\alpha\sin\varepsilon)\cos\phi =$$
$$= \cos\varepsilon(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\phi) - \sin\varepsilon\cos\alpha\sin\alpha(1-\cos\phi) \sim 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\sin^2}{2}\phi^2. \tag{42}$$

Разность $1-\beta$ обычно умножают на $1+\beta \approx 2$ и представляют в виде $1 - \beta = \dfrac{1}{2\gamma^2}$. Таким образом, выражение в квадратных скобках в знаменателе (40) получается следующим:

$$1 - \vec{n}\vec{\beta} \sim \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} + \sin^2\alpha\frac{\phi^2}{2} = \frac{1}{2\gamma^2}(1 + \varepsilon_0^2 + \sin^2\alpha\phi_0^2). \tag{43}$$

Числитель преобразуется аналогично. В результате находим

$$W \sim 2\frac{e^2}{\pi\, c}\omega_*^2 \sin^2\alpha\gamma^4 \frac{(1+\varepsilon_0^2+\sin^2\alpha\phi_0^2)^2 - 4\sin^2\alpha\phi_0^2}{(1+\varepsilon_0^2+\sin^2\alpha\phi_0^2)^5}. \tag{44}$$

Таким образом почти все излучение заряда идет в направлении мгновенного движения заряда, а далекий наблюдатель, расположенный вблизи конуса с осью вдоль направления поля и углом раствора α будет видеть вспышку излучения в тот момент, когда заряд движется прямо на него (конечно, с учетом запаздывания по времени согласно (29)). Такое свечение напоминает мигание маяка или светового сигнала полицейской машины.

Для случая вращения заряда по окружности надо положить $\alpha = \pi/2$ и говорить не о конусе, а о плоскости. Особым случаем опять является малость угла α. Положим, как и выше, $\alpha = \alpha_0/\gamma$, тогда

$$W \sim 2\frac{e^2}{\pi c}\omega_*^2 \frac{\gamma^2\alpha_0^2}{(1+\varepsilon_0^2)^3}. \tag{45}$$

Угловую зависимость излучения определяет большая дробь в (40). Однако, эта зависимость не очень наглядна. Кроме того, если скорость заряда не мала, то прибор наблюдателя не будет регистрировать мгновенное излучение, а произведет усреднение по некоторому промежутку времени, содержащему много периодов вращения заряда. Поэтому и мы найдем интеграл по периоду от величины (40).

4. Интегрирование по периоду. Для получения полного излучения за период нужно вычислить два интеграла. Приведем их.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{(1-\beta_1\cos\phi)^3} = \pi\frac{2+\beta_1^2}{(1-\beta_1^2)^{5/2}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\phi\mathrm{d}\phi}{(1-\beta_1\cos\phi)^5} = \frac{\pi}{4}\frac{4+\beta_1^2}{(1-\beta_1^2)^{7/2}}. \tag{46}$$

Чтобы воспользоваться этими интегралами, введем два обозначения

$$\beta_{\mathrm{c}} = 1 - \beta\cos\theta\cos\alpha, \;\; \beta_{\mathrm{s}} = \beta\sin\theta\sin\alpha. \tag{47}$$

Тогда надо вынести из скобок степени β_{c} и принять $\beta_1 = \beta_{\mathrm{s}}/\beta_{\mathrm{c}}$. Для полного излучения за период получим, что оно равно $\overline{W}/\omega$, где ($\omega = \omega_{\mathrm{f}}$)

$$\begin{aligned}\overline{W} = \int_{-\pi}^{\pi} W(\theta,\phi)\mathrm{d}\phi = \frac{e^2}{4c}\omega_*^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}\sin^2\alpha\left[\frac{2+\beta_1^2}{(1-\beta_1^2)^{5/2}\beta_{\mathrm{c}}^3} - \frac{1-\beta^2}{4}\sin^2\theta\frac{4+\beta_1^2}{(1-\beta_1^2)^{7/2}\beta_{\mathrm{c}}^5}\right] = \\ = \frac{e^2}{4c}\omega_*^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}\sin^2\alpha\left[\frac{2\beta_{\mathrm{c}}^2+\beta_{\mathrm{s}}^2}{(\beta_{\mathrm{c}}^2-\beta_{\mathrm{s}}^2)^{5/2}} - \frac{1-\beta^2}{4}\frac{4\beta_{\mathrm{c}}^2+\beta_{\mathrm{s}}^2}{(\beta_{\mathrm{c}}^2-\beta_{\mathrm{s}}^2)^{7/2}}\right].\end{aligned} \tag{48}$$

Величина I, которая представляет количество лучистой энергии, протекающей за единицу времени во всех направлениях, связана с $\overline{W}$ соотношением

$$I = \frac{\omega}{2\pi}\int \mathrm{d}^2 n\frac{\overline{W}}{\omega} = \int_0^{\pi}\overline{W}\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{49}$$

Приведенную связь между I и $\overline{W}$ можно проверить прямой выкладкой. Для этого в интеграле по углу надо сделать подстановку

$$\mu = \cos\theta = \frac{v+\beta\sin\alpha\gamma_{\mathrm{e}}\sqrt{1-\beta_{\mathrm{e}}^2v^2}}{\beta\sin\alpha v+\gamma_{\mathrm{e}}\sqrt{1-\beta_{\mathrm{e}}^2v^2}}. \tag{50}$$

Рассмотрим опять те же предельные случаи.

При циклотронном излучении $\beta \ll 1$, так что $\beta_{\mathrm{c}} = 1$, $\beta_{\mathrm{s}} = \beta_1 = 0$ и

$$\overline{W} = \frac{e^2}{4c}\omega_*^2\beta^2\sin^2\alpha(2-\sin^2\theta) = \frac{e^2}{4c}\omega_*^2\beta^2\sin^2\alpha(1+\cos^2\theta). \tag{51}$$

Множитель в скобках совпадает по виду с индикатрисой Релея. Полная интенсивность получается правильной:

$$I = \int_0^{\pi}\overline{W}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\beta^2\omega_*^2\sin^2\alpha. \tag{52}$$

Синхротронное излучение рассмотрим отдельно.

5. Синхротронное излучение за период. Пусть $\gamma \gg 1$. После подстановки $\theta = \alpha + \varepsilon$ и замены $\varepsilon = \varepsilon_0/\gamma$ оценим величины (47):

$$\beta_{\rm c} = 1 - \beta\cos\alpha(\cos\alpha\cos\varepsilon - \sin\alpha\sin\varepsilon) \sim 1 - \beta\cos^2\alpha + \beta\cos^2\alpha\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\beta}{2}\sin(2\alpha)\varepsilon \sim$$
$$\sim \frac{1}{2\gamma^2} + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\varepsilon = \sin^2\alpha + \frac{1+\cos^2\alpha\varepsilon_0^2 + \sin(2\alpha)\varepsilon_0\gamma}{2\gamma^2}, \tag{53}$$

$$\beta_{\rm s} = \beta\sin\alpha(\sin\alpha\cos\varepsilon + \cos\alpha\sin\varepsilon) \sim \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\varepsilon \sim \sin^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha\varepsilon_0^2 - \sin(2\alpha)\varepsilon_0\gamma}{2\gamma^2}. \tag{54}$$

В обеих формулах содержатся одинаковые конечные слагаемые $\sin^2\alpha$ и поправочные слагаемые, стремящиеся к нулю при $\gamma \to \infty$, которые можно отбросить везде, кроме знаменателей, куда входит разность оцениваемых величин. После подстановки их в выражение (48) получим при не малых α

$$\overline{W} \sim \frac{e^2}{4c}\omega_*^2\frac{\sin^2\alpha}{\gamma^2}\left[\frac{3\sin^4\alpha\gamma^5}{(1+\varepsilon_0^2)^{5/2}\sin^5\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{4\gamma^2}\frac{5\sin^4\alpha\gamma^7}{(1+\varepsilon_0^2)^{7/2}\sin^7\alpha}\right] = \frac{e^2}{4c}\omega_*^2\gamma^3\sin\alpha\frac{7/4+3\varepsilon_0^2}{(1+\varepsilon_0^2)^{7/2}}. \tag{55}$$

Отметим, что при интегрировании предельного выражения (55) по $\theta = \alpha + \varepsilon$, которое ввиду сосредоточения излучения в узком конусе около питч-угла и быстрого убывания интенсивности с удалением от этого конуса можно распространить по ε на всю вещественную ось, получается правильное выражение для полной интенсивности. Действительно,

$$I = \int\limits_0^\pi \overline{W}\sin\theta d\theta \sim \frac{\sin\alpha}{\gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{W}d\varepsilon_0 = \frac{e^2}{4c}\omega_*^2\sin^2\alpha\gamma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{7/4+3\varepsilon_0^2}{(1+\varepsilon_0^2)^{7/2}}d\varepsilon_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\omega_*^2\gamma^2\sin^2\alpha. \tag{56}$$

Последний интеграл вычисляется при помощи замены переменной интегрирования $z = \dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{1+\varepsilon_0^2}}$, $\varepsilon_0 = \dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{7/4+3\varepsilon_0^2}{(1+\varepsilon_0^2)^{7/2}}d\varepsilon_0 = \frac{2}{4}\int\limits_0^1(1-z^2)(7+5z^2)dz = \frac{8}{3}. \tag{57}$$

Если угол $\alpha = \alpha_0/\gamma$ мал, то все слагаемые у величин (53)–(54) одного порядка:

$$\beta_{\rm c} = \frac{\beta_{\rm c}^0}{2\gamma^2},\ \beta_{\rm s} = \frac{\beta_{\rm s}^0}{2\gamma^2},\ \beta_{\rm c}^0 = 1 + 2\alpha_0^2 + \varepsilon_0^2 + 2\alpha_0\varepsilon_0,\ \beta_{\rm s}^0 = 2\alpha_0(\alpha_0+\varepsilon_0). \tag{58}$$

Выражение для $\overline{W}$ получается довольно громоздким

$$\overline{W} \sim 2\frac{e^2}{c}\frac{\omega_*^2\alpha_0^2\gamma^2}{(1+\varepsilon_0^2)^{7/2}[1+(2\alpha_0+\varepsilon_0)^2]^{7/2}}\left[[2(\beta_{\rm c}^0)^2 + (\beta_{\rm s}^0)^2](1+\varepsilon_0^2)[1+(2\alpha_0+\varepsilon_0)^2] - \alpha_0^2[4(\beta_{\rm c}^0)^2 + (\beta_{\rm s}^0)^2]\right]. \tag{59}$$

Таким образом, синхротронное излучение за период идет так же, как и мгновенное, то есть в конусном слое толщиной порядка $1/\gamma$ около конуса с углом раствора α. Каждое интегрирование понижает степень γ, которой пропорциональна интенсивность: γ^4 у мгновенного, γ^3 — у излучения за период, γ^2 — у полного (во все стороны). Это объясняется малой протяженностью промежутков интегрирования: все они порядка $1/\gamma$. Если же и питч-угол имеет такой порядок, то степень γ еще понижается на две единицы.

§ 3. Спектр магнито-тормозного излучения в волновой зоне

1. Характер спектра. В этом параграфе найдем спектр излучения электрона в магнитном поле в волновой зоне. Сначала рассмотрим общий случай периодического движения заряда с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Период T рассчитывается по времени влияния t_1. Но как легко показать, в этом случае и по времени наблюдателя t излучение заряда имеет тот же период. Действительно, если одновременно прибавить период ко времени t_1 и ко времени t в равенстве (29), где под вектором $\vec{r}(t_1)$ подразумевается периодический вектор, то равенство останется верным.

Периодическая функция раскладывается в ряд Фурье. Поэтому спектр излучения заряда состоит из отдельных равноотстоящих друг от друга линий. Найдем интенсивности спектральных линий. Для этого надо определить коэффициент разложения в ряд напряженности электрического поля

$$\vec{E} = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\vec{E}_l e^{-il\omega t}, \tag{60}$$

то есть

$$\vec{E}_l = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\vec{E}e^{il\omega t}\mathrm{d}t. \tag{61}$$

Ввиду вещественности напряженности должно выполняться соотношение $\vec{E}_{-l} = \vec{E}_l^*$.

Вычислим интеграл от $\vec{E}^2$ по периоду:

$$\int\limits_{-T/2}^{T/2}|\vec{E}|^2\mathrm{d}t = \int\limits_{-T/2}^{T/2}\vec{E}\vec{E}^*\mathrm{d}t = \sum_{l,l'=-\infty}^{\infty}\vec{E}_l\vec{E}_{l'}^*\int\limits_{-T/2}^{T/2}e^{-il\omega t+il'\omega t}\mathrm{d}t = T\sum_{l=-\infty}^{\infty}|\vec{E}_l|^2. \tag{62}$$

Интеграл от интенсивности излучения представляется в виде

$$\int\limits_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t_1 W = \int\limits_{-T/2}^{T/2}W_*\mathrm{d}t = \frac{c}{4\pi}R^2\int\limits_{-T/2}^{T/2}|\vec{E}|^2\mathrm{d}t = \frac{c}{4\pi}R^2 T\sum_{l=-\infty}^{\infty}|\vec{E}_l|^2, \tag{63}$$

2. Коэффициент разложения. Подставляя в интеграл (61) выражение напряженности через векторный потенциал (33) и выражение для потенциала (27), получаем

$$\vec{E}_l = \frac{e}{cR}\frac{1}{T}\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\vec{\mathcal{I}}_l\right], \tag{64}$$

где обозначено

$$\vec{\mathcal{I}}_l = \int\limits_{-T/2}^{T/2}\frac{\mathrm{d}t}{1-\vec{n}\vec{\beta}}e^{il\omega_{\mathrm{e}}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\frac{\vec{\beta}}{1-\vec{n}\vec{\beta}}. \tag{65}$$

Производную можно считать не частной, так как вектор $\vec{\beta}$ зависит только от t_1.

Подставим в формулу (65) связь времени t со временем t_1 (29) и связь их дифференциалов (30), а затем проинтегрируем по частям:

$$\vec{\mathcal{I}}_l = \int\limits_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t_1 e^{il\omega(t_1+R/c-\vec{r}\vec{n}/c)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\frac{\vec{\beta}}{1-\vec{n}\vec{\beta}} = -il\omega e^{il\omega R/c}\int\limits_{-T/2}^{T/2}e^{il\omega(t_1-\vec{r}\vec{n}/c)}\vec{\beta}\mathrm{d}t_1. \tag{66}$$

Внеинтегральное слагаемое пропадает вследствие периодичности векторов. Полученная формула справедлива для любого периодического движения. Дальше перейдем к магнито-тормозному излучению.

3. Движение по окружности. Поскольку заряд движется по окружности и влиянием его излучения на его же движение мы пренебрегаем, то все величины, связанные с этим движением, а именно, координаты заряда, его скорость, ускорение, а следовательно и напряженности излучаемого им электромагнитного поля, периодические с периодом $T_{\mathrm{e}} = 2\pi/\omega_{\mathrm{e}}$.

Сначала рассмотрим излучение в системе заряда. Чтобы не загромождать формулы, опустим индекс e у вектора направления на наблюдателя $\vec{n}$ и угла, который он образует с направлением магнитного поля. Этот вектор по-прежнему можно взять в плоскости векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$.

Подставим формулы для входящих в подинтегральное выражение векторов для заряда, движущегося по окружности:

$$\vec{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta),\ \vec{r} = \frac{c\beta_{\mathrm{e}}}{\omega_{\mathrm{e}}}(\sin\phi, -\cos\phi, 0),\ \beta_{\mathrm{e}} = \beta_{\mathrm{e}}(\cos\phi, \sin\phi, 0), \tag{67}$$

и сделаем замену $t_1 = \phi/\omega_{\mathrm{e}}$. Интеграл (66) перейдет в

$$\vec{\mathcal{I}}_l = -il\beta_{\mathrm{e}}e^{il\omega_{\mathrm{e}}R/c}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\cos\phi, -\sin\phi, 0)e^{i\,l\,\phi-iz\sin\phi}\mathrm{d}\phi, \tag{68}$$

где $z = l\,\beta_{\mathrm{e}}\sin\theta$.

Таким образом, необходимо найти два интеграла. Оба они выражаются через бесселевы функции первого рода

$$J_l(z) = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\,l\,\phi-i\,z\sin\phi}\mathrm{d}\phi = \frac{z}{2\pi l}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\,l\,\phi-i\,z\sin\phi}\cos\phi\mathrm{d}\phi. \tag{69}$$

Второе представление получается из первого интегрированием по частям. Производная от функции Бесселя

$$J_l'(z) = -\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\,l\,\phi - i\,z\sin\phi}\sin\phi \mathrm{d}\phi. \tag{70}$$

Итак, вектор (68) принимает вид

$$\vec{\mathcal{I}}_l = -ile^{il\omega_{\mathrm{e}}R/c}2\pi\left(\frac{1}{\sin\theta}J_l(z), iJ_l'(z), 0\right). \tag{71}$$

4. Формула Шотта. Чтобы написать формулу для коэффициента разложение напряженности, найдем двойные векторные произведения от двух координатных ортов:

$$\vec{n}\times[\vec{n}\times(1,0,0)] = \vec{n}\sin\theta - (1,0,0) = -\cos\theta\vec{e}_1(\vec{n}),\ \vec{n}\times[\vec{n}\times(0,1,0)] = -(0,1,0) = -\vec{e}_2(\vec{n}). \tag{72}$$

Таким образом, l-тая составляющая напряженности согласно формулам (64), (71) и (72) предстает в виде

$$\vec{E}_l = \frac{e}{cR}il\omega_{\mathrm{e}}e^{il\omega_{\mathrm{e}}R/c}\left[\operatorname{ctg}\theta J_l(z)\vec{e}_1(\vec{n}) + i\beta_{\mathrm{e}}J_l'(z)\vec{e}_2(\vec{n})\right]. \tag{73}$$

Заметим, что нулевая составляющая равна нулю.

Подставив результат (73) в формулу (63), получим

$$\int\limits_{-T_{\mathrm{e}}/2}^{T_{\mathrm{e}}/2} W_*\mathrm{d}t = \frac{c}{2\omega_{\mathrm{e}}}R^2\frac{e^2\omega_{\mathrm{e}}^2}{c^2R^2}\sum_{l=-\infty}^{\infty} l^2\left[\operatorname{ctg}^2\theta J_l^2(z) + \beta_{\mathrm{e}}^2 J_l'^2(z)\right] = \omega_{\mathrm{e}}\sum_{l=1} W_l. \tag{74}$$

Для интенсивности l-той линии W_l, рассчитываемой на единицу частоты, получим

$$W_l = \frac{e^2}{c}\,l^2 w_l, \tag{75}$$

где введено еще одно обозначение

$$w_l = \operatorname{ctg}^2\theta\, J_l^2(z) + \beta_{\mathrm{e}}^2\, J_l'^2(z). \tag{76}$$

Напомним, что аргумент бесселевой функции $z = l\beta_{\mathrm{e}}\sin\theta$.

Формула (75) носит название формулы Шотта, который ее вывел в 1912 г. Она получила широкое применение в различных областях физики и в особенности в астрофизике.

5. Поляризация в линиях. Каждая линия в спектре магнито-тормозного излучения представляет собой монохроматическую волну и к ней можно применить общую теорию поляризации. Как и всякая строго монохроматическая волна, эти волны полностью эллиптически поляризованы. Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим напряженность электрического поля в линии с номером l, то есть вектор $\vec{E}_l$. Поскольку интенсивность линии у нас уже найдена, поляризационные характеристики можно находить с точностью до множителя. В согласии с формулой (73) в принятых поляризационных ортах поляризационная матрица с точностью до постоянного множителя будет иметь вид

$$\hat{S}_l \propto \begin{pmatrix} \operatorname{ctg}^2\theta J_l^2(z) & -i\beta_{\mathrm{e}}\operatorname{ctg}\theta J_l(z)J_l'(z) \\ i\beta_{\mathrm{e}}\operatorname{ctg}\theta J_l(z)J_l'(z) & \beta_{\mathrm{e}}^2\, J_l'^2(\xi) \end{pmatrix}, \tag{77}$$

а параметры Стокса с правильным коэффициентом, таким же как у интенсивности, определяемой формулой (75):

$$Q_l = \frac{e^2}{c}\,l^2[\operatorname{ctg}^2\theta_{\mathrm{e}}\, J_l^2(z) - \beta_{\mathrm{e}}^2\, J_l'^2(z)],\ U_l = 0,\ V_l = 2\frac{e^2}{c}\,l^2\beta_{\mathrm{e}}\operatorname{ctg}\theta_{\mathrm{e}}J_l(z)J_l'(z). \tag{78}$$

Легко проверить, что условие полной поляризации $W_l^2 = Q_l^2 + V_l^2$ выполняется.

Таким образом, излучение в каждой магнито-тормозной линии полностью поляризовано и обладает как линейной, так и круговой поляризацией. В основной плоскости круговая поляризация исчезает ($\operatorname{ctg}\pi/2 = 0$), а линейная становится полной. Напротив, при наблюдении вдоль оси вращения электрона, то есть при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, поляризация полностью круговая. При этом наблюдатель видит только одну линию, а именно, первую ($l = 1$). Два последних утверждения вытекают из свойства бесселевых функций, выражаемого асимптотическим равенством $J_l(z) \sim (z/2)^l/l!$ при $z \to 0$. Оба крайних состояния поляризации согласуются с геометрией движения излучающего электрона.

6. Полное излучение в линиях. Полное количество энергии, излучаемой в линии, равно интегралу по направлениям от интенсивности (75), то есть

$$\overline{W}_l = 2\pi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta W_l. \tag{79}$$

При интегрировании возникают два интеграла, которые согласно формулам теории бесселевых функций выражаются через функции Бесселя двойного (по сравнению с номером линии) порядка, так что

$$\overline{W}_l = 4\pi\frac{e^2}{c}l\left[\beta_\mathrm{e}J'_{2l}(2\beta_\mathrm{e}l) - \frac{l}{\gamma_\mathrm{e}^2}\int\limits_0^1 J_{2l}(2l\beta_\mathrm{e}y)\mathrm{d}y\right]. \tag{80}$$

Можно найти и поляризацию излучения, идущего во все стороны. При этом $\overline{V}_l = 0$, то есть круговая поляризация исчезает ввиду симметричности правой и левой поляризации, остается только линейная:

$$\overline{Q}_l = 4\pi\frac{e^2}{c}l\left[\beta_\mathrm{e}J'_{2l}(2\beta_\mathrm{e}l) + \int\limits_0^1 J_{2l}(2l\beta_\mathrm{e}y)\mathrm{d}y\left(l(1+\beta_\mathrm{e}^2) - \frac{2}{y}\right)\right]. \tag{81}$$

В случае нерелятивистского заряда ($l\beta_\mathrm{e} \ll 1$) из приведенных формул с помощью уже использовавшегося соотношения $J_\nu(z) \sim (z/2)^\nu/\Gamma(\nu+1)$, $z \to +0$ легко получить

$$\overline{W}_l \sim 4\pi\frac{e^2}{c}\frac{l(l+1)}{(2l+1)!}(l\beta_\mathrm{e})^{2l},\ \overline{Q}_l \sim 4\pi\frac{e^2}{c}\frac{3l^2-l-1}{(2l+1)!}(l\beta_\mathrm{e})^{2l}. \tag{82}$$

Интенсивности спектральных линий быстро убывают с ростом номера, так что фактически осуществляются только первые циклотронные линии. Поведение спектра синхротронного излучения значительно сложнее. Ему будет посвящен отдельный параграф.

7. Импульс фотона. Для перехода из системы заряда в систему поля свяжем характеристики излучения в этих системах. Все характеристики фотонов снабжаем теми же индексами, что и электронные. Направление излучения характеризуем единичными векторами $\vec{n}_\mathrm{e}$ и $\vec{n}_\mathrm{f}$ с соответствующими углами, а энергии фотонов не частотами, а волновыми числами æ_e и æ_f.

Введем четырехмерный вектор импульса (точнее, волновой вектор) фотона $\underline{\text{æ}}$. Для большей наглядности отметим этот вектор индексами e и f, когда его составляющие отнесены к соответствующей системе отсчета:

$$\underline{\text{æ}}_\mathrm{e} = \{\text{æ}_\mathrm{e}, \text{æ}_\mathrm{e}\vec{n}_\mathrm{e}\}, \quad \underline{\text{æ}}_\mathrm{f} = \{\text{æ}_\mathrm{f}, \text{æ}_\mathrm{f}\vec{n}_\mathrm{f}\}. \tag{83}$$

Для них легко написать преобразование Лоренца. Соотношение между нулевыми компонентами дает обычный закон Доплера

$$\text{æ}_\mathrm{e} = \text{æ}_\mathrm{f}\gamma_\|(1-\beta_\|\cos\theta_\mathrm{f}), \quad \text{æ}_\mathrm{f} = \text{æ}_\mathrm{e}\gamma_\|(1+\beta_\|\cos\theta_\mathrm{e}), \tag{84}$$

из которого вытекает соотношение

$$(1+\beta_\|\cos\theta_\mathrm{e})(1-\beta_\|\cos\theta_\mathrm{f}) = \frac{1}{\gamma_\|^2} = 1-\beta_\|^2. \tag{85}$$

Преобразование направлений происходит в соответствии с законом аберрации, который также следует из преобразования Лоренца

$$\text{æ}_\mathrm{e}\vec{n}_\mathrm{e} = \text{æ}_\mathrm{f}\vec{n}_\mathrm{f} + \text{æ}_\mathrm{f}\gamma_\|\beta_\| + (\gamma_\|-1)\text{æ}_\mathrm{f}\vec{e}_3(\vec{e}_3\vec{n}_\mathrm{f}),\ \text{æ}_\mathrm{f}\vec{n}_\mathrm{f} = \text{æ}_\mathrm{e}\vec{n}_\mathrm{e} - \text{æ}_\mathrm{e}\gamma_\|\beta_\| + (\gamma_\|-1)\text{æ}_\mathrm{e}\vec{e}_3(\vec{e}_3\vec{n}_\mathrm{e}). \tag{86}$$

Проекция на направление вектора $\vec{e}_1$ дает связь между синусами $\text{æ}_\mathrm{e}\sin\theta_\mathrm{e} = \text{æ}_\mathrm{f}\sin\theta_\mathrm{f}$, так что

$$\sin\theta_\mathrm{e} = \frac{\sin\theta_\mathrm{f}}{\gamma_\|(1-\beta_\|\cos\theta_\mathrm{f})},\ \sin\theta_\mathrm{f} = \frac{\sin\theta_\mathrm{e}}{\gamma_\|(1+\beta_\|\cos\theta_\mathrm{e})}. \tag{87}$$

Соответствующие равенства для косинусов получаются из проекции соотношения (86) на орт $\vec{e}_3$ или из основного тригонометрического тождества:

$$\cos\theta_\mathrm{e} = \frac{\cos\theta_\mathrm{f}-\beta_\|}{1-\beta_\|\cos\theta_\mathrm{f}},\ \cos\theta_\mathrm{f} = \frac{\cos\theta_\mathrm{e}+\beta_\|}{1+\beta_\|\cos\theta_\mathrm{e}}. \tag{88}$$

Взаимно обратные формулы (87)–(88), как и преобразование (84) частот, отличаются знаками перед $\beta_\|$. Азимутальный угол ϕ во всех рассмотренных системах одинаков.

Соотношения (88) можно получить и из (85), если его переписать в виде

$$\cos\theta_\mathrm{e} - \cos\theta_\mathrm{f} - \beta_\|\cos\theta_\mathrm{e}\cos\theta_\mathrm{f} = -\beta_\|. \tag{89}$$

Прямым дифференцированием любого из двух соотношений (88) проверяется, что следующие элементы объема, телесного угла и т.д.: $\text{æ}^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$, $\text{æ}^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \text{æ}^2\mathrm{d}^2n$, $\mathrm{d}\text{æ}/\text{æ}$ и $\mathrm{d}^3\text{æ}/\text{æ}$ — являются релятивистскими инвариантами. Выполняются равенства $\text{æ}_\mathrm{e}\sin\theta_\mathrm{e} = \text{æ}_\mathrm{f}\sin\theta_\mathrm{f}$ и $\text{æ}_\mathrm{e}\mathrm{d}\theta_\mathrm{e} = \text{æ}_\mathrm{f}\mathrm{d}\theta_\mathrm{f}$, а также

$$\sqrt{1-\beta_\|}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta_\mathrm{e}}{2} = \sqrt{1+\beta_\|}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta_\mathrm{f}}{2}. \tag{90}$$

8. Спектр в системах поля. В этом пункте получим формулы, описывающие спектр магнито-тормозного излучения в случае, когда электрон движется по спирали, то есть в одной из систем поля. Для этого обобщим формулу (75). Проще всего обобщается выражение для аргумента бесселевых функций:

$$z = l\beta_\perp\gamma_\| \frac{\sin\theta_\mathrm{f}}{\gamma_\|(1-\beta_\|\cos\theta_\mathrm{f})} = l\frac{\beta_\mathrm{f}\sin\alpha\sin\theta_\mathrm{f}}{1-\beta_\mathrm{f}\cos\alpha\cos\theta_\mathrm{f}} = l\frac{\beta_\mathrm{s}}{\beta_\mathrm{c}}, \tag{91}$$

где использованы обозначения (47). Не сложнее обобщается и выражение (76):

$$w_l = \gamma_\|^2\left[\left(\frac{\cos\theta_\mathrm{f}-\beta_\|}{\sin\theta_\mathrm{f}}\right)^2 J_l^2(z) + \beta_\perp^2 J_l'^2(z)\right],\ \beta_\| = \beta_\mathrm{f}\cos\alpha,\ \beta_\perp = \beta_\mathrm{f}\sin\alpha. \tag{92}$$

С произведенными обобщениями можно записать выражение для четырехмерного импульса, который несут фотоны в линии с номером l в элементе телесного угла d^2n_f за период времени T_f:

$$\mathrm{d}\underline{P}_l^\mathrm{f} = \frac{e^2c}{\omega_\mathrm{e}^2}l^2\text{æ}_\mathrm{f}^2\mathrm{d}^2n_\mathrm{f}\underline{\text{æ}}_\mathrm{f}w_l. \tag{93}$$

Выражение явно релятивистски ковариантно. Вместе с тем при переходе в систему заряда оно связывается с величиной W_l, определяемой формулой (75) (опять припишем индексы e и f соответствующим величинам):

$$\mathrm{d}\underline{P}_l^\mathrm{e} = \frac{e^2c}{\omega_\mathrm{e}^2}l^2\text{æ}_\mathrm{e}^2\mathrm{d}^2n_\mathrm{e}\underline{\text{æ}}_\mathrm{e}w_l = \frac{e^2c}{\omega_\mathrm{e}^2}l^2\frac{\omega_\mathrm{e}^2}{c^2}\mathrm{d}^2n_\mathrm{e}\frac{\omega_\mathrm{e}}{c}\{1,\vec{n}_\mathrm{e}\}w_l = \frac{\omega_\mathrm{e}}{c}W_l^\mathrm{e}\{1,\vec{n}_\mathrm{e}\}\mathrm{d}^2n_\mathrm{e}. \tag{94}$$

Появление лишних множителей ω_e и c объясняется тем, что W_l — это не импульс, а энергия, причем рассчитанная на единицу частоты.

Общую формулу (93) также можно записать в виде, аналогичном (94):

$$\mathrm{d}\underline{P}_l^\mathrm{f} = \frac{W_l^\mathrm{f}}{c}\frac{\omega_\mathrm{f}}{1-\beta_\|\cos\theta_\mathrm{f}}\{1,\vec{n}_\mathrm{f}\}\mathrm{d}^2n_\mathrm{f}, \tag{95}$$

где обобщение формулы (75)

$$W_l^\mathrm{f} = \frac{e^2}{c}l^2\frac{w_l}{\gamma_\|^2(1-\beta_\|\cos\theta_\mathrm{f})^2}. \tag{96}$$

Дополнительные множители в (95) объясняются тем же: W_l^f — это энергия, рассчитанная на единицу излучаемой частоты, а $\underline{P}_l^\mathrm{f}$ — это импульс за период T_f.

Подчеркнем, что ω_e и ω_f — это частоты обращения электрона в системах заряда и поля, а $\vec{\text{æ}}_\mathrm{e}$ и $\vec{\text{æ}}_\mathrm{f}$ — волновые векторы излучаемых фотонов в тех же системах отсчета. В первой из них выполняется соотношение $\text{æ}_\mathrm{e} = \omega_\mathrm{e}/c$, во второй же связь указанных величин более сложная, так как $\omega_\mathrm{f} = \omega_\mathrm{e}/\gamma_\|$, а волновые векторы связаны равенством (84). Поэтому частоты линий спектра излучения заряда, движущегося по окружности, одинаковы во всех направлениях и равны $\omega_l^\mathrm{e} = l\omega_\mathrm{e}$. Заряд, движущийся по спирали, излучает спектр, частоты которого зависят от направления на наблюдателя:

$$\omega_l^\mathrm{f} = lc\text{æ}_\mathrm{f} = l\frac{c\text{æ}_\mathrm{e}}{\gamma_\|\beta_\mathrm{c}} = l\frac{\omega_\mathrm{f}}{\beta_\mathrm{c}} = l\frac{\omega_*}{\gamma_\mathrm{f}\beta_\mathrm{c}}. \tag{97}$$

Существенное отличие излучения при винтовом движении заряда от случая его плоского движения заключается в следующем. Формула (93) определяет излучение за период. Однако период полного оборота заряда $T_\mathrm{f} = 2\pi/\omega_\mathrm{f}$ и наименьший период (при $l=1$), с которым приходят волны к наблюдателю в заданном направлении $2\pi/(c\text{æ}_\mathrm{f}) = T_\mathrm{f}\beta_\mathrm{c}$, различаются. Второй из них при одинаковых знаках $\cos\alpha$ и $\cos\theta_\mathrm{f}$ меньше первого, так что наблюдатель будет воспринимать большее количество энергии, чем излучает заряд. Никакого парадокса здесь нет, так как заряд, движущийся навстречу наблюдателю, сам как бы догоняет свое же излучение и спрессовывает его. Напротив, при движении от наблюдателя излучение будет ослаблено, так что в среднем закон сохранения энергии, конечно, выполняется. Действительно, полный излучаемый в линии четырехмерный импульс в системе заряда $\underline{P}_l^\mathrm{e} = \{\omega_\mathrm{e}\overline{W}_l/c, 0\}$ содержит только нулевую компоненту. В системе поля импульс имеет составляющую по полю, ибо согласно преобразованию Лоренца $\underline{P}_l^\mathrm{f} = (\omega_\mathrm{e}\overline{W}_l/c)\{\gamma_\|, \gamma_\|\vec{\beta}_\|\} = (\omega_\mathrm{e}\overline{W}_l/c)\underline{\beta}_\|$, что можно проверить непосредственным интегрированием. Если распределение зарядов изотропно, то при усреднении по направлениям пространственная составляющая пропадает.

§ 4. Спектр синхротронного излучения

1. Функции Бесселя. Для вывода формул, описывающих спектр синхротронного излучения, приведем краткие сведения о бесселевых функциях.

Бесселева функция (первого рода) может быть определена сходящимся на всей комплексной плоскости рядом

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(\nu+1+m)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2\,m}. \tag{98}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Функция $J_\nu(z)$ является решением уравнения Бесселя

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2 J_\nu(z)}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}J_\nu(z)}{\mathrm{d}z}+(z^2-\nu^2)J_\nu(z)=0 \tag{99}$$

Число ν называется порядком уравнения и функции.

Линейно независимыми решениями уравнения Бесселя являются функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$, если только ν не целое число. Второе линейно независимое решение (функция второго рода) представляют в виде следующей линейной комбинации указанных решений

$$Y_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos(\pi\,\nu)-J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\,\nu)}, \tag{100}$$

которую называют функцией Вебера или Неймана. Она остается линейно независимой от основной и при целых порядках.

Если в уравнении Бесселя (99) заменить переменную z на $i\,z$, то уравнение перейдет в

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-(z^2+\nu^2)w=0, \tag{101}$$

называемое модифицированным уравнением Бесселя. Соответствующие решения носят название модифицированных функций Бесселя. Одна из них — это просто функция Бесселя (основная) от аргумента, умноженного на мнимую единицу:

$$I_\nu(z)=e^{-i\,\pi\,\nu/2}J_\nu(e^{i\,\pi/2}z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(\nu+1+m)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2\,m}. \tag{102}$$

Опять, вторым решением при нецелых ν может служить $I_{-\nu}(z)$. Более удобна другая функция, которую называют функцией Макдональда:

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin(\pi\,\nu)}. \tag{103}$$

Для нее справедливо рекуррентное соотношение, связывающее производную от этой функции с двумя функциями с соседними номерами:

$$2K'_\nu(z)=-K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z). \tag{104}$$

Непосредственно из представлений в виде рядов вытекают формулы, характеризующие поведение функций при $z\to+0$:

$$J_\nu(z)\sim I_\nu(z)\sim\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+1)},\quad K_\nu(z)\sim\frac{\pi}{2}\frac{(z/2)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)\sin(\pi\nu)}=\Gamma(\nu)2^{\nu-1}z^{-\nu}. \tag{105}$$

При переходе к последнему выражению использована формула дополнения гамма-функции.

2. Интегральные представления. Функции Бесселя могут быть представлены в виде определенных интегралов, с помощью которых их удобно исследовать и вычислять. Представление для функции целого порядка

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{in\phi-iz\sin\phi}\mathrm{d}\phi. \tag{106}$$

доказывается непосредственной выкладкой, при которой экспоненту надо разложить в ряд по степеням z. Аналогично представление модифицированной функции

$$I_n(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}e^{-z\,\sin\phi}\cos n\,\phi\mathrm{d}\varphi. \tag{107}$$

Для функции Макдональда справедливо представление

$$K_\nu(z)=\int\limits_0^\infty e^{-z\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{ch}(\nu\,t)\mathrm{d}t. \tag{108}$$

Исходя из него получим асимптотику этой функции при $z\to\infty$ методом Лапласа. Для этого заменим в показателе экспоненты $\mathrm{ch}\,t=1+2\,\mathrm{sh}^2(t/2)$ и примем во внимание, что при больших аргументах z в интеграл дают вклад только малые значения t, так что

$$K_\nu(z)=e^{-z}\int\limits_0^\infty e^{-2z\,\mathrm{sh}^2(t/2)}\,\mathrm{ch}(\nu t)\mathrm{d}t\sim e^{-z}\int\limits_0^\infty e^{-zt^2/2}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}. \tag{109}$$

Особый интерес представляет асимптотика функции $J_\nu(z)$, когда велики и аргумент z и порядок ν, причем $z\le\nu$. Ее мы, следуя книге [30], получим в два этапа.

3. Приближение ВКБ для $J_\nu(z)$. Заменим в уравнении (99) независимую переменную z на y по формуле $z = \nu e^y \le \nu$, $y \le 0$. Тогда уравнение перейдет в

$$\frac{\mathrm{d}^2 J_\nu}{\mathrm{d}y^2} - \nu^2 u^2 J_\nu = 0, \tag{110}$$

где обозначено

$$u = \sqrt{1 - z^2/\nu^2} = \sqrt{1 - e^{2\,y}}, \;\; z = \nu\sqrt{1-u^2}. \tag{111}$$

Напомним, что решение методом ВКБ уравнения

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - f^2(z) w = 0 \tag{112}$$

имеет вид

$$w = \frac{1}{\sqrt{f(z)}} e^{\pm\int f(z)\mathrm{d}z}. \tag{113}$$

Метод ВКБ приме́ним к уравнению (110). Входящий в формулу для решения интеграл легко вычисляется:

$$v = \int\limits_y^0 u \mathrm{d}y = \int\limits_y^0 \sqrt{1 - e^{2\,y}} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u} - u, \tag{114}$$

Тогда решение уравнения (110) в приближении ВКБ запишется в виде

$$J_\nu(z) = u^{-1/2}(C_1\, e^{\nu\, v} + C_2\, e^{-\nu\, v}). \tag{115}$$

Постоянные C_1 и C_2 определим, исходя из поведения функции Бесселя около нуля (105). При больших значениях порядка ν для гамма-функции воспользуемся формулой Стирлинга. С другой стороны при $z \to 0$ будет $u \sim 1 - z^2/(2\,\nu^2) \to 1$, а $v \sim \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{z^2/(2\nu^2)} - 1 = \ln\dfrac{2\nu}{ze}$. Тогда

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\nu}}\left(\frac{e}{\nu}\right)^\nu, \; J_\nu(z) \sim C_1 \left(\frac{2\nu}{ze}\right)^\nu + C_2\left(\frac{ze}{2\nu}\right)^\nu. \tag{116}$$

Отсюда находим, что $C_1 = 0, \; C_2 = 1/\sqrt{2\,\pi\,\nu}$. Следовательно,

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\nu\, u}} e^{-\nu\, v}. \tag{117}$$

Как обычно, решение методом ВКБ неприменимо, когда u и, следовательно, v близки к нулю. Но полученные асимптотические формулы можно существенно уточнить, так, чтобы они не имели указанного недостатка.

4. Формулы Лангера. В исходном уравнении (99) сделаем (второй этап вывода) следующие замены искомой функции и ее аргумента:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{u}} F(v). \tag{118}$$

Замена производной получается при помощи формулы

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} = \left(\frac{1}{1-u^2} - 1\right)\frac{-z}{u\,\nu^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} = -\frac{u}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}. \tag{119}$$

Тогда

$$z\frac{\mathrm{d}J_\nu(z)}{\mathrm{d}z} = z\left[-\frac{1}{2\,u^{3/2}}\frac{-z}{\nu^2\, u}F - \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{u}{z}F'\right] = \left(\frac{z^2}{2\,\nu^2\, u^{5/2}}F - \sqrt{u}F'\right). \tag{120}$$

Уравнение для функции F получается таким:

$$F'' - \nu^2 F = -\frac{z^2}{4\nu^2 u^6}\left(5\frac{z^2}{\nu^2} + 4u^2\right) = -\frac{1-u^2}{4}u^{-6}(5-u^2)F. \tag{121}$$

Нам надо уточнить наше решение при малых u, поэтому преобразуем уравнение именно для этой области. В ней можно принять, что $v \sim u^3/3$. Тогда уравнение (120) можно переписать так:

$$F'' - \nu^2 F + \frac{5}{36}v^{-2}F = 0. \tag{122}$$

От уравнения, которому удовлетворяет решение (117), полученное уравнение отличается последним слагаемым, которое велико при малых v.

Чтобы привести уравнение (122) к стандартному виду, сделаем еще одну замену:
$$F(v) = \sqrt{\nu\, v}G(\nu\, v). \tag{123}$$
Для вновь введенной функции получается уравнение
$$x^2 G''(x) + xG'(x) - (1/9 + x^2)G(x) = 0, \tag{124}$$
то есть модифицированное уравнение Бесселя порядка 1/3. Поведение решения при больших v согласно (117) таково, что надо выбрать в качестве G функцию Макдональда $K_{1/3}$. Окончательно
$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{v}{u}}\frac{1}{\pi}K_{1/3}(\nu\, v). \tag{125}$$

Теперь значение $J_\nu(\nu) = \sqrt{u^3/3u}[\Gamma(1/3)/\pi]2^{-2/3}(\nu u^3/3)^{-1/3} = [\Gamma(1/3)/\pi]2^{-2/3}3^{-1/6}\nu^{-1/3}$ конечно.

Для получения производной от функции Бесселя $J'_\nu(z)$ достаточно продифференцировать асимптотическую формулу (125):
$$J'_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\sqrt{u\, v}K_{2/3}(\nu\, v). \tag{126}$$
Значение $J'_\nu(\nu) = [\Gamma(2/3)/\pi]2^{-1/3}3^{-1/6}\nu^{-2/3}]$ также конечно.

5. Направленное излучение в линиях. Применим выведенные асимптотики к спектру синхротронного излучения. Сначала рассмотрим движение заряда по окружности. Считается, что $\beta_\mathrm{e} \sim 1$, $\gamma_\mathrm{e} \gg 1$. Излучение сосредоточено в узком конусе около плоскости вращения, поэтому целесообразно вместо угла θ_e использовать угол $\varepsilon = \pi/2 - \theta_\mathrm{e}$. Тогда основное излучение идет при малых значениях $\varepsilon = \varepsilon_0/\gamma_\mathrm{e} \ll 1$.

По аргументу бесселевых функций $z = l\beta_\mathrm{e}\sin\theta_\mathrm{e}$ при больших l находим
$$u = \sqrt{1 - z^2/l^2} = \sqrt{1 - \beta_\mathrm{e}^2\sin^2\theta_\mathrm{e}} = \sqrt{1 - \beta_\mathrm{e}^2\cos^2\varepsilon} = \sqrt{1 - \beta_\mathrm{e}^2 + \beta_\mathrm{e}^2\sin^2\varepsilon} \sim \sqrt{1/\gamma_\mathrm{e}^2 + \varepsilon^2} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon_0^2}}{\gamma_\mathrm{e}} \ll 1. \tag{127}$$

Для малых u величина $v \sim u^3/3 = (1+\varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_\mathrm{e}^3$. Следовательно,
$$J_l(z) \sim \frac{\sqrt{1+\varepsilon_0^2}}{\sqrt{3}\pi\gamma_\mathrm{e}}K_{1/3}\left(l(1+\varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_\mathrm{e}^3\right),\ J'_l(z) \sim \frac{1+\varepsilon_0^2}{\sqrt{3}\pi\gamma_\mathrm{e}^2}K_{2/3}\left(l(1+\varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_\mathrm{e}^3\right) \tag{128}$$
и ($\operatorname{ctg}\theta_\mathrm{e} = \operatorname{tg}\varepsilon \sim \varepsilon$)
$$W_l \sim \frac{e^2}{c}l^2\frac{1+\varepsilon_0^2}{3\pi^2\gamma_\mathrm{e}^4}\left[\varepsilon_0^2 K_{1/3}^2\left(l(1+\varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_\mathrm{e}^3\right) + (1+\varepsilon_0^2)K_{2/3}^2\left(l(1+\varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_\mathrm{e}^3\right)\right]. \tag{129}$$

Рассмотрим предельные случаи. Обе величины l и γ_e большие.

1) $l \ll 3\gamma_\mathrm{e}^3$. В этом случае второе слагаемое в квадратных скобках в (129) больше первого, так как у него больше отрицательная степень малой величины. Согласно формуле для $K_\nu(z)$ из (105)
$$W_l \sim \frac{e^2}{c}3^{1/3}2^{-2/3}\Gamma^2(2/3)\frac{l^{2/3}}{1+\varepsilon_0^2}. \tag{130}$$

При таких l интенсивность не зависит от γ_e и растет пропорционально $l^{2/3}$. При этом производная по l бесконечна, то есть рост быстрый.

2) $l \sim 3\gamma_\mathrm{e}^3$. Функции Макдональда порядка 1, а W_l пропорциональна $l^2/\gamma_\mathrm{e}^4 \sim 9\gamma_\mathrm{e}^2$.

3) $l \gg 3\gamma_\mathrm{e}^3$. При таких номерах линий обе функции Макдональда убывают экспоненциально, так же убывает и W_l:
$$W_l \sim \frac{e^2}{c}\frac{1}{2\pi}\frac{l}{\gamma_\mathrm{e}}\frac{1+2\varepsilon_0^2}{(1+\varepsilon_0^2)^{1/2}}\exp\left(-\frac{2}{3}(1+\varepsilon_0^2)^{3/2}\frac{l}{\gamma_\mathrm{e}^3}\right). \tag{131}$$

Интенсивность линий быстро возрастает с номером l до значений порядка γ_e^2, образуя широкий максимум на номерах l порядка $3\gamma_\mathrm{e}^3$, а затем экспоненциально убывает.

Таким образом, спектр синхротронного излучения имеет совершенно другой характер, чем спектр циклотронного. Синхротронное излучение распространяется в узком конусе вблизи плоскости, в которой вращается заряд. С ростом γ_e угол, в котором идет максимальное количество излучения суживается, интенсивность спектра увеличивается. Излучение идет в линиях с большими номерами $l \sim 3\gamma_\mathrm{e}^3$ и, следовательно, на высоких частотах порядка $l\omega_*/\gamma_\mathrm{e} \sim 3\gamma_\mathrm{e}^2\omega_*$. При этом, так как расстояние между линиями пропорционально $1/\gamma_\mathrm{e}$, то линии располагаются все теснее. Так как вследствие излучения линии имеют конечную ширину (что мы не учитываем), то спектр синхротронного излучения фактически является непрерывным.

Гироциклотронное излучение является промежуточным между циклотронным и синхротронным, то есть с ростом β_e неуклонно возрастает направленность излучения, убывание интенсивностей линий с номером в области сильного излучения постепенно сменяется возрастанием, а затем максимум перемещается в сторону все бóльших номеров.

6. Полное излучение в линиях. Проинтегрированная по направлениям интенсивность линий (80) при больших номерах имеет те же свойства, что и направленная. Здесь во внеинтегральном слагаемом $u = \sqrt{1-\beta_\mathrm{e}^2} = 1/\gamma_\mathrm{e} \ll 1$, $v \sim u^3/3 = 1/3\gamma_\mathrm{e}^3$ и

$$\beta_\mathrm{e} J'_{2l}(2l\beta_\mathrm{e}) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{3}\gamma_\mathrm{e}^2} K_{2/3}(x), x = \frac{2l}{3\gamma_\mathrm{e}^3}. \tag{132}$$

Интеграл оценивается несколько сложнее. В нем сделаем замену

$$u' = \sqrt{1-\beta_\mathrm{e}^2 y^2},\ v' = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u'}{1-u'} - u',\ \mathrm{d}v' = \frac{u'^2\mathrm{d}u'}{1-u'^2} = -\beta_\mathrm{e}^2\frac{u'y\mathrm{d}y}{1-u'^2} = -\beta_\mathrm{e}\frac{u'\mathrm{d}y}{\sqrt{1-u'^2}},\ \mathrm{d}y = -\frac{1}{\beta_\mathrm{e}}\frac{\sqrt{1-u'^2}}{u'}\mathrm{d}v'. \tag{133}$$

Тогда после подстановки асимптотической формулы (125)

$$\int\limits_0^1 J_{2l}(2l\beta_\mathrm{e}y)\mathrm{d}y \sim \frac{1}{\pi\beta_\mathrm{e}}\int\limits_{1/3\gamma_\mathrm{e}^3}^{\infty}\sqrt{\frac{v'}{u'}}K_{1/3}(2lv')\frac{\sqrt{1-u'^2}}{u'}\mathrm{d}v'. \tag{134}$$

После еще одной замены переменной интегрирования $x' = 2lv'$ интеграл примет вид

$$\int\limits_0^1 J_{2l}(2l\beta_\mathrm{e}y)\mathrm{d}y \sim \frac{1}{2l\pi}\int\limits_x^{\infty}\sqrt{\frac{v'}{u'^3}(1-u'^2)}K_{1/3}(x')\mathrm{d}x', \tag{135}$$

Ввиду экспоненциального убывания функции Макдональда при больших аргументах основной вклад в интеграл вносят значения x, имеющие порядок 1 и меньше. Поэтому существенны значения $v' = x/2l \ll 1$. В этой области $u' \ll 1$ и $v' \sim u'^3/3$, так что

$$\int\limits_0^1 J_{2l}(2l\beta_\mathrm{e}y)\mathrm{d}y \sim \frac{1}{2l\pi\sqrt{3}}\int\limits_x^{\infty}K_{1/3}(x')\mathrm{d}x'. \tag{136}$$

Подставив оценки двух слагаемых в формулу (80), получим

$$\overline{W}_l \sim \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{e^2}{c}\frac{l}{\gamma_\mathrm{e}^2}\left[K_{2/3}(x) - \frac{1}{2}\int\limits_x^{\infty}K_{1/3}(x')\mathrm{d}x'\right]. \tag{137}$$

Наконец, воспользуемся рекуррентным соотношением для функций Макдональда (104) и получим окончательное выражение

$$\overline{W}_l \sim \sqrt{3}\frac{e^2}{c}\gamma_\mathrm{e} f\left(\frac{2l}{3\gamma_\mathrm{e}^3}\right), \tag{138}$$

где использовано стандартное обозначение для функции, отражающей зависимость интенсивности излучения от номера линии и лоренцевского множителя:

$$f(x) = x\int\limits_x^{\infty}K_{5/3}(x')\mathrm{d}x'. \tag{139}$$

Эта функция быстро возрастает при малых аргументах, достигает максимума $f(0.29) = 0.92$, затем экспоненциально убывает. Интеграл от нее

$$\int\limits_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}}. \tag{140}$$

7. Излучение в линиях в системе поля. Асимптотические формулы для этого случая пишутся аналогично написанным выше. Здесь ограничимся именно синхротронным излучением, когда питч-угол (угол между направление скорости электрона и магнитным полем) α не мал.

Исходим из формул (91), (92) и (96). При $\beta_\mathrm{f} \sim 1$, $\gamma_\mathrm{f} \gg 1$ аргумент бесселевых функций $z = l\dfrac{\beta_\mathrm{s}}{\beta_\mathrm{c}}$, так что согласно формулам (53) и (54)

$$u = \sqrt{1-z^2/l^2} = \sqrt{1-\beta_\mathrm{s}^2/\beta_\mathrm{c}^2} = \frac{\sqrt{\beta_\mathrm{c}^2-\beta_\mathrm{s}^2}}{\beta_\mathrm{c}} \sim \frac{\sqrt{1+\varepsilon_0^2}\sin\alpha}{\gamma_\mathrm{f}\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon_0^2}}{\gamma_\mathrm{f}\sin\alpha}. \tag{141}$$

Эта величина мала, поэтому $v \sim u^3/3 \sim (1+\varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_\mathrm{f}^3\sin^3\alpha$. Аргументом функций Макдональда служит произведение lv. Его мы перепишем так, чтобы он содержал излучаемую частоту, определяемую формулой (97). Дело в том, что наблюдатель измеряет интенсивность на определенной частоте и ему нет дела до того, какому номеру линии она соответствует. Кроме того, на различных направлениях скорости заряда той же частоте соответствуют различные номера линий. Поэтому закрепим именно частоту излучения.

В асимптотической области

$$\omega = \omega_l \sim l\frac{\omega_{\rm f}}{\sin^2\alpha}, \quad l = \frac{\omega}{\omega_{\rm f}}\sin^2\alpha. \tag{142}$$

Тогда

$$lv \sim l\frac{(1+\varepsilon_0^2)^{3/2}}{3\gamma_{\rm f}^3\sin^3\alpha} = \frac{\omega_l}{\omega_{\rm c}}(1+\varepsilon_0^2)^{3/2}, \tag{143}$$

где

$$\omega_{\rm c} = \frac{3}{2}\gamma_{\rm f}^2\omega_*\sin\alpha = \frac{3}{2}\gamma_{\rm f}^2\frac{e\mathcal{H}_*}{mc}\sin\alpha = \frac{3}{2}\gamma_{\rm f}^2\frac{e\mathcal{H}_\perp}{mc}. \tag{144}$$

Через $\mathcal{H}_\perp$ обозначена проекция напряженности внешнего магнитного поля на направление скорости электрона. Часто используется не круговая, а обычная частота, так что $\omega_l/\omega_{\rm c} = \nu_l/\nu_{\rm c}$, где $\nu_{\rm c} = \omega_{\rm c}/2\pi$.

Асимптотическая форма выражения (96) для энергии в линии в системе поля имеет вид

$$W_l^{\rm f} \sim \frac{1+\varepsilon_0^2}{3\pi^2}\frac{e^2}{c}\frac{\omega_l^2}{\omega_*^2}\left[\varepsilon_0^2K_{1/3}^2(\xi) + (1+\varepsilon_0^2)K_{2/3}^2(\xi)\right] = \frac{3}{4\pi^2}\frac{e^2}{c}\gamma_{\rm f}^2\frac{\omega_l^2}{\omega_{\rm c}^2}(1+\varepsilon_0^2)\left[\varepsilon_0^2K_{1/3}^2(\xi) + (1+\varepsilon_0^2)K_{2/3}^2(\xi)\right]. \tag{145}$$

Полная энергия вычисляется так же, как и при круговом движении. Излучаемая энергия на единичном интервале частоты в единицу времени

$$\mathcal{E}(\omega) \sim \sqrt{3}\frac{e^2}{c}\omega_*\sin\alpha\, f(x), \tag{146}$$

где теперь $x = \omega_l/\omega_{\rm c} = \omega/\omega_{\rm c}$.

8. Усреднение по распределению энергий электронов. Обычно считается, что электроны распределены по импульсам изотропно, то есть их распределение зависит только от модуля импульса или, что то же самое, от энергии. Принято также считать, что в релятивистских астрофизических объектах, таких как джеты активных ядер галактик, рентгеновские источники и др., распределение по энергиям не максвелловское, а степенное, то есть

$$\mathcal{N}_{\rm e}(\gamma) = C_\beta\gamma^{-\beta},\ \gamma_{\rm m} \le \gamma \le \gamma_{\rm M}. \tag{147}$$

Даже нижняя граница не мала, обычно $\gamma_{\rm m} \ge 10$. Коэффициент C_β определяется условием нормировки

$$C_\beta\int\limits_{\gamma_{\rm m}}^{\gamma_M}\gamma^{-\beta}{\rm d}\gamma = 1. \tag{148}$$

Интеграл вычисляется просто.

Наблюдатель фактически воспринимает излучение только тех электронов из ансамбля, которые движутся в его сторону в узком конусе. Обозначив угол между направлением на наблюдателя и магнитным полем через α, можно считать этот угол питч-углом излучающих электронов. С другой стороны, в указанном конусе идет практически вся излучаемая энергия и она попадает в прибор, разрешение которого меньше раствора конуса. Поэтому в качестве энергии, излучаемой ансамблем электронов, можно принять величину (146), усредненную по распределению электронов (147):

$$\overline{\mathcal{E}}(\omega) = \sqrt{3}\frac{e^2}{c}\omega_*\sin\alpha\, C_\beta\int\limits_{\gamma_{\rm m}}^{\gamma_M}\gamma^{-\beta}{\rm d}\gamma f(x). \tag{149}$$

Вычислим входящий сюда интеграл. Сначала подставим в него выражение (139) для функции $f(x)$ и сделаем замену переменной интегрирования $x=\dfrac{\omega}{\omega_{\rm c}} = \dfrac{2\omega}{3\omega_\perp}\gamma^{-2}$, $\gamma = \sqrt{\dfrac{2\omega}{3\omega_\perp}}x^{-1/2}$, где обозначено $\omega_\perp = \omega_*\sin\alpha$. Получится

$$\mathcal{I}(\beta) = \int\limits_{\gamma_{\rm m}}^{\gamma_M}\gamma^{-\beta}{\rm d}\gamma x\int\limits_x^\infty K_{5/3}(x'){\rm d}x' = \frac{1}{2}\int\limits_{2\omega/(3\omega_\perp\gamma_{\rm M}^2)}^{2\omega/(3\omega_\perp\gamma_{\rm m}^2)}\left(\frac{3\omega_\perp}{2\omega}\right)^{(\beta-1)/2}x^{\beta/2}x^{-3/2}{\rm d}xx\int\limits_x^\infty K_{5/3}(x'){\rm d}x'. \tag{150}$$

Для простоты заменим нижний предел внешнего интеграла на 0, а верхний на ∞. Поскольку получающийся интеграл сходится, добавление к нему интегралов по кусочкам $[0, 2\omega/(3\omega_\perp\gamma_{\rm M}^2)]$ и $[2\omega/(3\omega_\perp\gamma_{\rm m}^2), \infty)$ не должно отразиться существенным образом на его величине.

Переставим в (150) порядок интегрирования:

$$\mathcal{I}(\beta) = \frac{1}{2}\left(\frac{3\omega_\perp}{2\omega}\right)^{(\beta-1)/2}\int\limits_0^\infty x^{\beta/2}x^{-3/2}{\rm d}xx\int\limits_x^\infty K_{5/3}(x'){\rm d}x' = \frac{1}{2}\left(\frac{3\omega_\perp}{2\omega}\right)^{(\beta-1)/2}\int\limits_0^\infty K_{5/3}(x'){\rm d}x'\int\limits_0^{x'}x^{(\beta-1)/2}{\rm d}x. \tag{151}$$

Внутренний степенной интеграл легко берется:

$$\mathcal{I}(\beta) = \frac{1}{\beta+1}\left(\frac{3\omega_\perp}{2\omega}\right)^{(\beta-1)/2}\int\limits_0^\infty x^{(\beta+1)/2}K_{5/3}(x){\rm d}x. \tag{152}$$

Теперь воспользуемся интегралом 2.16.2.2., приведенным в справочнике [28]:

$$\int\limits_0^\infty x^\mu K_\nu(x)\mathrm{d}x = 2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right). \tag{153}$$

Функция Макдональда четна по индексу ν, тем же свойством обладает интеграл от нее. Подставив (153) в выражение (152), получим для оцениваемого интеграла

$$\mathcal{I}(\beta) = \frac{1}{\beta+1}\left(\frac{3\omega_\perp}{\omega}\right)^{(\beta-1)/2}\Gamma\left(\frac{3\beta+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\beta-1}{12}\right) \tag{154}$$

и окончательное выражение для излучаемой энергии

$$\overline{\mathcal{E}}(\omega) = \sqrt{3}\frac{e^2}{c}\omega_\perp\, C_\beta\frac{1}{\beta+1}\left(\frac{3\omega_\perp}{\omega}\right)^{(\beta-1)/2}\Gamma\left(\frac{3\beta+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\beta-1}{12}\right). \tag{155}$$

9. Усреднение по направлениям поля. Полученное выражение представляет собой энергию, излучаемую ансамблем электронов в направлении на наблюдателя, составляющем угол α с направлением напряженности магнитного поля, которое считается фиксированным. Однако, как правило, приборы не разрешают отдельные части излучающих областей. На луч зрения также попадают различные участки таких областей. Направление поля в их пределах может меняться произвольным и не известным нам образом. Поэтому часто принимают предположение, что поле хаотично, то есть его направления равномерно распределены по единичной сфере. Тогда полученное выражение для излучаемой энергии надо усреднить по углам α. При этом возникает интеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin^{(\beta+3)/2}\alpha\mathrm{d}\alpha = \int\limits_0^{\pi/2}\sin^{(\beta+1)/2}\alpha\mathrm{d}\alpha = \int\limits_0^1 y^{(\beta+3)/2}(1-y^2)^{-1/2}\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{(\beta+3)/4}(1-t)^{-1/2}t^{-1/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{\beta+5}{4}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{\beta+5}{4}\right)/\Gamma\left(\frac{\beta+7}{4}\right). \tag{156}$$

После усреднения (155) по направлениям поля с учетом интеграла (156) находим

$$\overline{\overline{\mathcal{E}}}(\omega) = \frac{e^2}{c}\omega_*\left(\frac{\omega_*}{\omega}\right)^{(\beta-1)/2}A(\beta), \tag{157}$$

где зависящая от показателя β постоянная

$$A(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}3^{\beta/2}\frac{C_\beta}{\beta+1}\Gamma\left(\frac{3\beta+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\beta-1}{12}\right)\frac{\Gamma\left(\dfrac{\beta+5}{4}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\beta+7}{4}\right)}. \tag{158}$$

Именно это выражение обычно используется при интерпретации наблюдений. По наклону наблюдаемого спектра сразу определяется показатель распределения электронов по энергиям.

10. Плазменный котел. В начале 1970-х годов С.А.Каплан и В.Н.Цитович [16] показали, что у электронного газа, находящегося в плазме с магнитным полем и излучающего посредством синхротронного механизма, при подводе извне энергии, компенсирующей потери на излучение, и ускорении частиц на плазменной турбулентности устанавливается стационарное степенное распределение по энергиям. При этом показатели в спектрах излучения и энергии электронов согласуются между собой в соответствии с формулой (157). Вывод был сделан на основе порядковых оценок. Эта ситуация получила название “плазменный турбулентный котел". Рассматривалось также влияние комптоновского рассеяния. Впоследствии авторами [38] было получено численное решение стационарного уравнения типа Фоккера—Планка, определяющего распределение электронов с учетом всего спектра магнитотормозного излучения и поглощения (как синхротронного, так и циклотронного), комптоновских потерь, а также инжекции и вылета электронов из области. Расчеты показали, что степенной спектр электронов создается только на очень больших энергиях, а на малых и умеренных образуется максвелловское распределение с температурой, определяемой соотношением инжекции и потерь. Обзор работ по этой проблеме содержится в статье [53].

Магнито-тормозной механизм и, в частности, синхротронное излучение играют очень большую роль в астрофизике, на что было обращено внимание И. С. Шкловским [32]. Изучению этого механизма было посвящено огромное число статей и ряд книг. Изложение в этом курсе следует в основном книгам [19, 3], а также обзору [39].

В сильном магнитном поле электроны движутся фактически вдоль силовых линий поля. При этом также возникает излучение, которое по-английски называется curvature radiation, а в русскоязычной научной литературе — изгибным.

Если же поле настолько сильно, что необходимо учитывать квантовые эффекты, то электрон нельзя считать свободным, его энергия квантуется (уровни Ландау), а излучение содержит резонансы на определенных частотах.

Глава 3. Комптоновское рассеяние

§ 1. Описание комптоновского рассеяния

1. Комптоновское рассеяние и изменение энергии фотона. Рассеяние излучения электронами, называемое комптоновским, играет важную роль в формировании спектров ряда объектов в Метагалактике, изучаемых астрофизиками. Здесь дается понятие об этом виде рассеяния.

В 1923 году А. Комптон опубликовал статью об открытии эффекта, впоследствии получившего его имя. За свое открытие Комптон и его объяснение получил Нобелевскую премию по физике 1927 года.

Комптоновское рассеяние — это акт взаимодействия электрона и фотона, в результате которого эти частицы изменяют свои импульсы, энергии и состояния поляризации. Поэтому часто говорят, что частицы после рассеяния — не те, что были перед рассеянием. Подробное описание физики этого процесса и его использования при интерпретации наблюдений астрофизических объектов содержится в обзорах [6, 26, 27].

Пусть взаимодействуют фотон с импульсом $\vec{k}$ и электрон с импульсом $\vec{p}$. После рассеяния их импульсы изменяются и становятся равными соответственно $\vec{k}_1$ и $\vec{p}_1$. Энергии этих частиц ck, cp_0, ck_1, $cp_{0\,1}$. Для импульсов электрона справедливы обычные релятивистские соотношения [19]

$$p_0 = \sqrt{m^2c^2 + p^2},\ p_{0\,1} = \sqrt{m^2c^2 + p_1^2}. \tag{1}$$

Комптоновскому рассеянию отвечают две диаграммы Фейнмана [1], представленные на рис. 1. Электрон изображается сплошной линией, а фотон волнистой. Время течет снизу вверх. Взаимодействие происходит в точках, где встречаются электронные и фотонные линии.

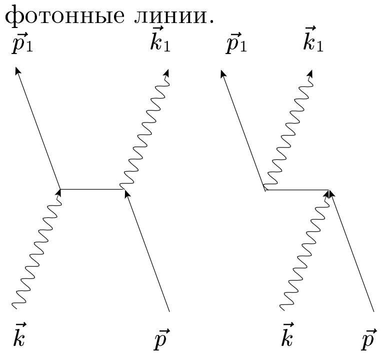

Рис. 1. Диаграммы комптоновского рассеяния.

Отметим, что свободный электрон не может поглотить или излучить фотон, так как при таких процессах невозможно сохранение импульса и энергии.

Независимо от вида диаграммы при рассеянии выполняются четыре закона сохранения

$$p_0 + k = p_{0\,1} + k_1, \quad \vec{p} + \vec{k} = \vec{p}_1 + \vec{k}_1. \tag{2}$$

Выразим вектор импульса электрона после рассеяния через остальные и подставим в равенство, выражающее закон сохранения энергии:

$$p_0 + k - k_1 = \sqrt{m^2c^2 + (\vec{p} + \vec{k} - \vec{k}_1)^2}. \tag{3}$$

Возводя в квадрат и сокращая, получаем

$$kp_0 - \vec{k}\vec{p} = k_1p_0 - \vec{k}_1\vec{p} + kk_1 - \vec{k}\vec{k}_1. \tag{4}$$

Обозначим косинусы углов между парами векторов $\vec{k}$ и $\vec{k}_1$, $\vec{k}$ и $\vec{p}$, $\vec{k}_1$ и $\vec{p}$ соответственно через μ, ζ и ζ_1. Тогда соотношение (4) перепишется в виде

$$k(p_0 - p\zeta) = k_1[p_0 - p\zeta_1 + k(1-\mu)]. \tag{5}$$

Из него находится величина импульса фотона после рассеяния

$$k_1 = k\frac{p_0 - p\zeta}{p_0 - p\zeta_1 + k(1-\mu)}. \tag{6}$$

Рассмотрим частный случай, когда до рассеяния электрон покоится, т. е. $p = 0$. Тогда $p_0 = mc$ и

$$k_1^0 = k^0\frac{mc}{mc + k^0(1-\mu_0)}. \tag{7}$$

Вспомнив, что импульс фотона $k = \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$, перепишем формулу (7) через длины волн

$$\lambda_1^0 = \lambda^0 + \lambda_{\mathrm{C}}(1 - \mu_0). \tag{8}$$

При рассеянии фотона на покоящемся электроне частота фотона всегда уменьшается , и в этом заключается эффект Комптона. При $\mu_0 = 1$, т. е. при рассеянии вперед, рассеянный фотон пролетает, как будто не испытал взаимодействия, а электрон остается неподвижным. Рассеяние под прямым углом ($\mu_0 = 0$) дает увеличение длины волны ровно на λ_{C}. Максимальное увеличение λ на две комптоновские длины волны достигается, когда фотон изменяет свое направление на противоположное. Потеря энергии фотоном, называемая эффектом отдачи, происходит вследствие передачи им части своего импульса, а значит и энергии, первоначально покоящемуся электрону, который приходит в движение.

Если электрон не стоял на месте, то при различном соотношении направлений и величин импульсов реагирующих частиц фотон может как увеличивать, так и уменьшать свою энергию, но это уже не эффект Комптона в чистом виде, а скорее следствие эффекта Доплера. Действительно, мы должны перейти в систему отсчета, связанную с электроном до рассеяния, которую мы будем называть лабораторной. Там фотон уменьшит свою энергию, а затем нам надо вернуться в исходную систему отсчета. В результате таких переходов фотон меняет свою энергию вследствие эффекта Доплера. Однако в астрофизической литературе увеличение энергии фотонов при комптоновском рассеянии их энергичными электронами принято называть обратным эффектом Комптона.

Комптоновская длина волны очень мала — ей соответствует энергия, равная энергии покоя электрона 511 *кэВ*. Поэтому увеличение длины волны фотона при рассеянии на нерелятивистском электроне заметно, только если длина волны рассеиваемого фотона не очень существенно отличается от комптоновской. Горячие электроны могут передать значительную долю своей энергии фотону и вызывать гораздо бо́льшие смещения длины волны, которые доступны измерениям даже в радиодиапазоне. Релятивистские же электроны сразу переводят излучение из радио в оптический диапазон, из оптического — в рентгеновский, из ультрафиолетового — в область гамма-излучения.

2. Эффективность комптоновского рассеяния. Сравним комптоновское рассеяние с тормозным поглощением.

Коэффициент тормозного излучения, или, иначе, излучательная способность вещества, — количество энергии, излучаемой единицей объема за единицу времени в единичном телесном угле при взаимодействии электронов, импульсы которых распределены согласно формуле Максвелла с температурой T, с водородоподобными ионами с зарядом ядра Z, с точностью до множителя порядка 1 дается формулой Крамерса (см., Главу 1)

$$\varepsilon_{\mathrm{c}}(\nu) = n_{\mathrm{e}} n^{+} \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{c^3} \frac{k_{\mathrm{B}} T}{(2\pi m k_{\mathrm{B}} T)^{3/2}} e^{-h\nu/k_{\mathrm{B}} T}. \tag{9}$$

Здесь n_{e} и n^{+} — концентрации электронов и ионов, k_{B} — постоянная Больцмана, ν — частота излучения.

Напишем уравнение переноса излучения с учетом тормозных процессов и комптоновского рассеяния:

$$\frac{\partial I}{\partial l} = -(\alpha_{\mathrm{c}} + \alpha_{\mathrm{C}}) I + \varepsilon_{\mathrm{c}}(1 + n) + \varepsilon_{\mathrm{C}}. \tag{10}$$

Здесь α_{c} и α_{C} — коэффициенты ослабления при тормозном поглощении и комптоновском рассеянии соответственно, ε_{C} — коэффициент излучения за счет комптоновского рассеяния, I и n — интенсивность и средние числа заполнения фотонных состояний, $I = (2h\nu^3/c^2)n$, l — геометрическое расстояние вдоль луча. Уравнение переноса можно записать и для средних чисел заполнения:

$$\frac{\partial n}{\partial l} = -(\alpha_{\mathrm{c}} + \alpha_{\mathrm{C}}) n + n_{\mathrm{c}}(1 + n) + n_{\mathrm{C}}, \tag{11}$$

где

$$n_{\mathrm{c}} = \frac{c^2}{2h\nu^3} \varepsilon_{\mathrm{c}}, \quad n_{\mathrm{C}} = \frac{c^2}{2h\nu^3} \varepsilon_{\mathrm{C}}. \tag{12}$$

Предположим, что вещество и излучение находятся в состоянии термодинамического равновесия (ТДР). Тогда интенсивность излучения не зависит от направления и дается формулой Планка

$$I_0 = \frac{2h\nu^3}{c^2} n_0, \quad n_0 = \frac{1}{e^{h\nu/k_{\mathrm{B}} T} - 1}. \tag{13}$$

Следствием ТДР является условие детального баланса, которое выполняется отдельно для тормозного и комптоновского процессов:

$$\alpha_{\mathrm{c}} n_0 = n_{\mathrm{c}}(1 + n_0), \quad \alpha_{\mathrm{C}} n_0 = n_{\mathrm{C}}. \tag{14}$$

Из первого соотношения вытекает закон Кирхгофа—Планка

$$\alpha_{\mathrm{c}} = n_{\mathrm{c}} e^{h\nu/k_{\mathrm{B}} T}. \tag{15}$$

Не уточняя здесь слагаемого, описывающего излучение за счет комптоновского рассеяния, составим отношение коэффициентов ослабления. В качестве сечения рассеяния возьмем томсоновское $\sigma_{\mathrm{T}} = \dfrac{8\pi}{3} r_{\mathrm{e}}^2$, $r_{\mathrm{e}} = \dfrac{e^2}{mc^2}$. Тогда безразмерное отношение

$$\frac{\alpha_{\mathrm{C}}}{\alpha_{\mathrm{c}}} = \frac{n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}}{n_{\mathrm{c}} e^{h\nu/k_{\mathrm{B}}T}} = \frac{n_{\mathrm{e}}\dfrac{8\pi}{3}\left(\dfrac{e^2}{mc^2}\right)^2}{\dfrac{c^2}{2h\nu^3} n_{\mathrm{e}} n^+ \dfrac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \dfrac{Z^2 e^6}{c^3} \dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{(2\pi m k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}}} = \frac{\overline{v}}{c} \frac{\sqrt{3}\pi^2}{n^+\lambda^3} \frac{\hbar c}{Z^2 e^2} = 2.342 \cdot 10^3 \frac{\overline{v}}{c} \frac{1}{Z^2(n^+\lambda^3)}, \tag{16}$$

где $\overline{v} = \sqrt{\dfrac{8k_{\mathrm{B}}T}{\pi m}}$ — средняя скорость электронов. Для водородного газа надо положить $Z = 1$ и $n^+ = n_{\mathrm{e}}$. Отношение (16) представлено в виде произведения безразмерных множителей, в частности, произведение $n^+\lambda^3$ есть число ионов в кубике с длиной ребра, равной длине волны рассеиваемого излучения.

Из полученной формулы видно, что рассеяние электронами играет более существенную роль по сравнению с тормозным излучением при низких концентрациях электронов, высоких температурах газа и малых длинах волн излучения. Короче говоря, томсоновское и комптоновское рассеяние необходимо принимать во внимание в горячих разреженных средах, причем комптоновское рассеяние, т. е. рассеяние с изменением частоты излучения, существенно тогда, когда средние энергии электронов и/или фотонов велики настолько, что сравнимы с энергией покоя электрона. В таких средах это основной механизм обмена энергией между веществом и излучением.

Сечение комптоновского рассеяния в отличие от томсоновского зависит от частоты рассеиваемого фотона, о чем говорится в следующем пункте.

3. Сечение комптоновского рассеяния. Это сечение рассчитывается, как уже говорилось, методами квантовой электродинамики [1], которая является релятивистской теорией. Поэтому для записи релятивистского сечения комптоновского рассеяния введем релятивистские обозначения для некоторых величин.

Импульс электрона зададим четырехмерным вектором $\underline{p} = \{p_0, \vec{p}\}$, где использованы уже применявшиеся обозначения. Аналогично импульс фотона $\underline{k} = \{k, \vec{k}\}$. Четырехмерное скалярное произведение $\underline{pk} = p_0 k - \vec{p}\vec{k}$. Для других векторов оно определяется точно так же, со знаком минус перед трехмерным скалярным произведением. В частности, $\underline{p}^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2$, $\underline{k}^2 = k^2 - \vec{k}^2 = 0$: импульс электрона — времениподобный вектор, а импульс фотона — нулевой.

Существенной частью сечения Клейна—Нишины—Тамма является безразмерный лоренцевский инвариант

$$F(\xi, \xi_1) = \mu_0^2 - 1 + B, \quad B = \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi}. \tag{17}$$

Здесь

$$\xi = \underline{pk}/m^2c^2 = k^0/mc, \quad \xi_1 = \underline{pk}_1/m^2c^2 = k_1^0/mc \tag{18}$$

— безразмерные скалярные произведения импульсов электрона и фотона, равные соответственно безразмерному же импульсу фотона до и после рассеяния в лабораторной системе (где $p = 0$). Величина μ_0 — это уже использовавшийся косинус угла рассеяния в той же лабораторной системе отсчета, которая является собственной для электрона до рассеяния. Согласно (7) его можно записать в виде

$$\mu_0 = 1 + \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1}. \tag{19}$$

Написав сечение в виде

$$F(\xi, \xi_1) = \mu_0^2 + 1 + B - 2, \tag{20}$$

убеждаемся, что оно в лабораторной системе представляет собой сумму рэлеевской индикатрисы (слагаемое $\mu_0^2 + 1$) с небольшой добавкой. Эта добавка зависит от частот фотона до и после рассеяния, но не зависит от их направлений. Таким образом, комптоновское рассеяние в лабораторной системе — это комбинация рэлеевского и изотропного рассеяния.

Развернутое выражение для F имеет вид

$$F(\xi, \xi_1) = \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1}\right) + \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi}. \tag{21}$$

Полное сечение рассеяния представляется интегралом, который вычисляется:

$$\sigma_0 = \frac{r_{\mathrm{e}}^2}{2\xi^2} \int F x_1^2 \mathrm{d}^2\omega_1 = \frac{r_{\mathrm{e}}^2}{2\xi^2} \int_{-1}^{1} F \xi_1^2 \mathrm{d}\mu_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi_0 = \frac{r_{\mathrm{e}}^2}{2\xi^2} 2\pi \int_{\xi/(1+2\xi)}^{\xi} F \mathrm{d}\xi_1 = \sigma_{\mathrm{T}} s_0(\xi), \tag{22}$$

где ϕ_0 — азимут рассеянного фотона в лабораторной системе, а $s_0(\xi)$ — профиль полного сечения:

$$s_0(\xi) = \frac{3}{8\xi^2}\left[4 + \left(\xi - 2 - \frac{2}{\xi}\right)\ln(1+2\xi) + 2\xi^2\frac{1+\xi}{(1+2\xi)^2}\right], \tag{23}$$

нормированный условием $s_0(0) = 1$.

Мы говорили об однократном взаимодействии электрона и фотона. Многократное рассеяние, т. е. взаимодействие электронного и фотонного газов посредством комптоновского рассеяния описывается кинетическим уравнением, которое мы сформулируем ниже.

§ 2. Кинетическое уравнение для комптоновского рассеяния и его частные случаи

1. Релятивистские обозначения. Упомянутое уравнение является релятивистским обобщением уравнения Больцмана. Для его написания подберем релятивистские аналоги величин, входящих в уравнение Больцмана.

В указанном уравнении, точнее в интеграле столкновений, производятся интегрирования по импульсам частиц. Однако трехмерный элемент объема в пространстве импульсов d^3p не является релятивистским инвариантом. Для получения его скалярного обобщения откажемся временно от соотношения (1) и будем считать нулевую составляющую четырехмерного импульса электрона p_0 независимой величиной. Очевидно, что произведение четырех дифференциалов $\mathrm{d}^4p = \mathrm{d}p_0\mathrm{d}^3p$ — скалярная величина. От искуственно введенной независимой координаты p_0 надо избавиться, т. е. взять по ней интеграл. Для учета соотношения (1) введем множителем инвариантную дельта-функцию $\delta\left(\underline{p}^2 - m^2c^2\right)$:

$$\begin{aligned}\int \delta\left(\underline{p}^2 - m^2c^2\right)\mathrm{d}^4p = \mathrm{d}^3p\int \mathrm{d}p_0\,\delta\left(p_0^2 - p^2 - m^2c^2\right) = \\ = \mathrm{d}^3p\int \mathrm{d}p_0\,\delta\left(\left(p_0 - \sqrt{p^2+m^2c^2}\right)\left(p_0 + \sqrt{p^2+m^2c^2}\right)\right) = \\ = \mathrm{d}^3p\int \mathrm{d}p_0\,\delta\left(\left(p_0 - \sqrt{p^2+m^2c^2}\right)2\sqrt{p^2+m^2c^2}\right) = \frac{\mathrm{d}^3p}{2\sqrt{p^2+m^2c^2}}.\end{aligned} \tag{24}$$

При проведении выкладки было учтено, что в нуль в аргументе дельта-функции обращается только множитель с разностью, а при переходе к последнему выражению множитель с суммой был упрощен (заменен удвоенным корнем) и вынесен из-под знака этой функции в знаменатель, так как замена переменной интегрирования дает тот же результат. В дальнейшем в знаменателе вместо корня для краткости будем писать p_0, считая соотношение (1) выполненным. Итак, релятивистским инвариантом является отношение $\dfrac{\mathrm{d}^3p}{p_0}$, что можно проверить и непосредственно, применив к нему преобразование Лоренца.

Точно так же показывается, что инвариантной величиной является отношение $\dfrac{\mathrm{d}^3k}{k}$ для импульса фотона. При этом инвариантны и два множителя этого отношения, а именно $\dfrac{\mathrm{d}k}{k}$ и $k^2\mathrm{d}^2\omega$, где $\vec{\omega}$ — единичный вектор направления импульса фотона: $\vec{k} = k\vec{\omega}$, а $\mathrm{d}^2\omega$ — элемент телесного угла, т. е. площади поверхности на единичной сфере. Для частиц с не равной нулю массой покоя это свойство не выполняется. Указанным свойством элемента объема импульса фотона объясняется форма интеграла в полном сечении (22), так как $x_1^2\mathrm{d}^2\omega_1 = \xi_1^2\mathrm{d}\mu_0\mathrm{d}\phi_0 = \mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\phi_0$.

Еще одну инвариантную комбинацию надо найти для левой части кинетического уравнения. В уравнении Больцмана там стоит $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\vec{p}}{m}\vec{\nabla}_{\vec{r}}f + \vec{F}\vec{\nabla}_{\vec{p}}f$. На фотоны никакие силы не действуют, так что последнее слагаемое не нужно. Для дифференцирования необходим четырехмерный вектор-градиент. Он должен быть взят в виде $\underline{\nabla} = \left\{\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right\}$, так как скалярное произведение его с вектором $\mathrm{d}\underline{r} = \{c\mathrm{d}t, \mathrm{d}\vec{r}\}$, т. е. $\mathrm{d}\underline{r}\,\underline{\nabla} = \mathrm{d}t\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathrm{d}\vec{r}\vec{\nabla}$ есть полный дифференциал, инвариантный относительно любого преобразования переменных, в том числе и лоренцевского. Инвариантом, следовательно, будет произведение $\underline{k}\,\underline{\nabla} = \dfrac{k}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{k}\vec{\nabla} = \dfrac{k}{c}\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + c\vec{\omega}\vec{\nabla}\right)$, которое и является релятивистским обобщением левой части уравнения Больцмана с учетом того, что скорость света постоянна. Именно такая комбинация производных, как в круглых скобках, стоит в левой части уравнения переноса излучения.

Релятивистскими инвариантами являются безразмерные средние числа заполнения фотонных состояний. Например, в случае выполнения ТДР это среднее число дается формулой Планка (13), которая написана в системе отсчета, связанной с фотонным газом и называемой сопутствующей, т. е. в такой, в которой средний импульс фотонов равен нулю.

Функцию распределения электронов $f_{\rm e}(\vec{p})$ также будем считать скаляром. Мы примем, что электроны имеют релятивистское распределение Максвелла, которое в сопутствующей системе отсчета задается формулой

$$f_{\rm e}(p_0/mc) = f_{\rm M}(p_0/mc), \quad f_{\rm M}(\gamma) = \frac{y}{4\pi K_2(y)}e^{-y\gamma}, \tag{25}$$

где $y = \dfrac{mc^2}{k_{\rm B}T_{\rm e}}$, а $K_\nu(y)$ — функция Макдональда. Появление этой функции есть следствие условия нормировки

$$\frac{4\pi}{m^3c^3}\int\limits_0^\infty p^2 f_{\rm e}(p_0/mc){\rm d}p = 1. \tag{26}$$

Теперь мы имеем все, чтобы написать кинетическое уравнение для комптоновского рассеяния.

2. Релятивистское кинетическое уравнение комптоновского рассеяния. При написании этого уравнения принимается, что электронный газ релятивистский, но не вырожденный, так что запрет Паули не учитывается. Фотонный же газ может быть частично вырожден, и поэтому необходимо учитывать вынужденные переходы.

Для средних чисел заполнения состояний фотонов $n = n(\vec{r}, t, \vec{k})$ в точке $\vec{r}$ в момент времени t с импульсами около $\vec{k}$ уравнение имеет вид

$$\underline{k}\,\underline{\nabla}\,n = -\frac{r_{\rm e}^2}{2}m^2c^2\int\frac{{\rm d}^3p}{p_0}\frac{{\rm d}^3p_1}{p_{0\,1}}\frac{{\rm d}^3k_1}{k_1}\delta(\underline{p}+\underline{k}-\underline{p}_1-\underline{k}_1)F(\xi,\xi_1)\left[f_{\rm e}(\vec{p})n(1+n_{11}) - f_{\rm e}(\vec{p}_1)(1+n)n_{11}\right], \tag{27}$$

причем для краткости не указываются аргументы n и обозначено $n_{11} = n(\vec{r}, t, \vec{k}_1)$.

Первое слагаемое в квадратных скобках в уравнении (27) соответствует ослаблению при рассеянии, а второе — излучению. Интегралы берутся по импульсам электронов до и после рассеяния и по импульсам фотонов, участвующих в процессе рассеяния вместе с фотонами с импульсом $\vec{k}$. Дельта-функция отражает законы сохранения (2) и позволяет взять четырехкратный интеграл, так что останется интеграл по пяти переменным, как и в интеграле столкновений Больцмана.

Релятивистски ковариантное уравнение (27) можно рассматривать в любой системе отсчета. Наиболее удобно это делать в системе, связанной с электронным газом, которая называется сопутствующей. При переходе в эту систему мы обезразмерим все наши величины. Импульсы и энергии фотона и электрона будем обозначать безразмерными величинами, положив $k = mcx$, $\vec{k} = mcx\vec{\omega}$, $p_0 = mc\gamma$, $\vec{p} = mc\vec{z} = mcz\vec{\Omega}$, $\underline{p} = mc\underline{z} = mc\{\gamma, \vec{z}\}$, $\underline{k} = mc\underline{x} = mc\{x, x\vec{\omega}\}$ и соответственно величины с индексом 1: $x_1 = k_1/mc$ и т. д. Примем также релятивистскую квантовую систему единиц, в которой постоянная Планка, скорость света и масса электрона принимаются в качестве основных единиц: $\hbar = c = m = 1$. В этой системе единица длины — комптоновская длина волны $\hbar/m\,c$, энергии — $m\,c^2$, частоты — $m\,c^2/\hbar$, импульса — $m\,c$. Классический радиус электрона совпадает с постоянной тонкой структуры $r_{\rm e} = e^2/mc^2 = e^2/\hbar\,c = 1/137.036$, а заряд электрона равен $e = \sqrt{r_{\rm e}} = 1/\sqrt{137.036}$.

В сопутствующей системе уравнение (27) записывается так:

$$x\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\omega}\vec{\nabla}\right)n = -\frac{r_{\rm e}^2}{2}\int\frac{{\rm d}^3z}{\gamma}\frac{{\rm d}^3z_1}{\gamma_1}\frac{{\rm d}^3x_1}{x_1}\delta(\underline{z}+\underline{x}-\underline{z}_1-\underline{x}_1)F(\xi,\xi_1)[f_{\rm e}(\vec{z})n(1+n_{11}) - f_{\rm e}(\vec{z}_1)(1+n)n_{11}], \tag{28}$$

где теперь $n = n(\vec{r}, t, x, \vec{\omega})$, $n_{11} = n(\vec{r}, t, x_1, \vec{\omega}_1)$. К уравнению (28) надо добавить граничные и начальные условия.

Заметим, что величина

$$\xi = \underline{x}\,\underline{z} = x(\gamma - z\vec{\omega}\vec{\Omega}) = \underline{x}_1\underline{z}_1 = x_1(\gamma_1 - z_1\vec{\omega}_1\vec{\Omega}_1) \tag{29}$$

совпадает с частотой фотона x при $z = 0$ и с частотой x_1 при $z_1 = 0$. Произведение

$$\xi_1 = \underline{x}\,\underline{z}_1 = x(\gamma_1 - z_1\vec{\omega}\vec{\Omega}_1) = \underline{x}_1\underline{z} = x_1(\gamma - z\vec{\omega}_1\vec{\Omega}) \tag{30}$$

обладает противоположным свойством.

Теперь перейдем к частным случаям геометрии среды и распределения электронов.

3. Плоская атмосфера тепловых электронов. Рассмотрим эволюцию спектра излучения в плоскопараллельной среде, заполненной макроскопически неподвижным электронным газом с концентрацией частиц $n_{\rm e}$. Система отсчета, связанная со средой, и является сопутствующей электронному газу.

Рассмотрим случай, когда электроны имеют релятивистское максвелловское распределение $f_{\rm M}(\gamma)$, определяемое формулой (25). Тогда

$$f_{\rm M}(\gamma_1) = f_{\rm M}(\gamma)e^{y(\gamma-\gamma_1)} = f_{\rm M}(\gamma)e^{-y(x-x_1)}. \tag{31}$$

Уравнение (28) для такого случая после взятия интеграла по $\vec{z}_1$ перепишется в виде

$$x\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\omega}\vec{\nabla}\right)n = -\frac{r_{\rm e}^2}{2}n_{\rm e}\int\frac{{\rm d}^3z}{\gamma\gamma_1}\frac{d^3x_1}{x_1}\delta(\gamma+x-\gamma_1-x_1)F(\xi,\xi_1)f_{\rm M}(\gamma)\left[n(1+n_{11}) - e^{-y(x-x_1)}(1+n)n_{11}\right]. \tag{32}$$

Уравнение (32) можно записать по-другому. Не вычисляя интеграла по x_1, отделим интегралы по импульсам электронов, от которых фотонные функции не зависят. Тогда уравнение запишется в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\omega}\vec{\nabla}\right)n=-\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{x}n_{\mathrm{e}}\int\limits_{0}^{\infty}x_1\mathrm{d}x_1\int\mathrm{d}^2\omega_1 R(x,x_1,\mu)\left[n(1+n_{11})-e^{-y(x-x_1)}(1+n)n_{11}\right]. \tag{33}$$

Здесь внутренний двойной интеграл берется по всем направлениям вектора $\vec{\omega}_1$, а $R(x,x_1,\mu)$ — функция перераспределения по частотам и направлениям.

Функция $R(x,x_1,\mu,\gamma)$ выражается через сечение комптоновского рассеяния и функцию распределения электронов по энергиям. Различные формулы для этой функции были получены несколькими авторами. Ссылки на их работы и полный вывод этих формул содержится в статье [25] и обзоре [46].

Множитель, стоящий справа в уравнении (33) при n, является коэффициентом ослабления (поглощения) за счет комптоновского рассеяния. Его профиль, как и функция перераспределения, представляется интегралом по распределению импульсов электронов:

$$\overline{s}_0(x,y)=\frac{1}{x}\int f_{\mathrm{M}}(\gamma)\frac{\mathrm{d}^3z}{\gamma}\xi s_0(\xi)=\frac{1}{2K_2(y)}\int\limits_{1}^{\infty}e^{-y\gamma}\frac{\mathrm{d}\gamma}{z}[(\gamma+z)^2s_0(x(\gamma+z))+(\gamma-z)^2s_0(x(\gamma-z))]. \tag{34}$$

Способ численного вычисления этого коэффициента при любых температурах электронов и любых частотах x дан в статье [23].

Кинетическое уравнение в виде (33) по форме совпадает с уравнениями, которые изучаются в теории переноса излучения. Тот факт, что функция перераспределения зависит не отдельно от направлений фотонов до и после рассеяния, а только от угла рассеяния $\arccos\mu$, отражает изотропию среды, где локально нет выделенного направления.

4. Однородное бесконечное пространство. Предположим, что тепловой электронный газ однородно заполняет все пространство и в этом пространстве находится изотропное, однородное поле излучения. Электроны и фотоны взаимодействуют через комптоновское рассеяние. Температура электронов поддерживается постоянной каким-то механизмом.

В таком случае среднее число заполнения фотонных состояний зависит только от двух переменных: частоты и времени, так что $n=n(x,t)$ и $n_{11}=n(x_1,t)$. Эта величина определяется уравнением

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t}=-\frac{1}{x}\int\limits_{0}^{\infty}\Big[\overline{R}(x_1,x)n(x,t)\,(1+n(x_1,t))-\overline{R}(x,x_1)n(x_1,t)\,(1+n(x,t))\Big]x_1\mathrm{d}x_1. \tag{35}$$

Здесь функция перераспределения, усредненная по направлениям:

$$\overline{R}(x,x_1)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}R(x,x_1,\mu)\mathrm{d}\mu. \tag{36}$$

Выражения для нее даются в статьях [25, 46].

Уравнение (35) становится определенным, если к нему добавить начальное условие, т.е. задать $n(x,0)$.

Из уравнения (35) вытекает условие сохранения числа фотонов, так как их число не меняется при рассеянии. Действительно, после умножения (35) на x^2 и интегрирования по всем частотам справа получается двойной интеграл, симметричный относительно частот падающего и рассеянного фотонов, и поэтому равный нулю, так что

$$\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}t}=0,\ N_0=\int\limits_{0}^{\infty}x^2n(x,t)\mathrm{d}x, \tag{37}$$

и, следовательно,

$$N_0=\int\limits_{0}^{\infty}x^2n(x,t)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\infty}x^2n(x,0)\mathrm{d}x. \tag{38}$$

Обратимся к предельным случаям приведенных уравнений, когда распределение электронов по импульсам мало отличается от нерелятивистского максвелловского.

5. Нерелятивистский предел. Пусть, как и в предыдущем пункте, электроны и фотоны заполняют однородное и изотропное пространство и при этом электронный газ слабо релятивистский (почти нерелятивистский), а поле излучения не очень жесткое, то есть выполняются неравенства $k_{\mathrm{B}}T\ll mc^2$ и $h\nu\ll mc^2$, что означает, что средние энергии электронов и фотонов значительно меньше энергии покоя электрона. Чтобы произвести

предельный переход $y = mc^2/k_{\rm B}T \to \infty$, нам надо переопределить безразмерные частоты фотонов и импульсы электронов. Положим $x_{\rm t} = h\nu/k_{\rm B}T$, т. е. будем измерять энергии фотонов в средних (по порядку величины) энергиях электронов. Новая безразмерная частота связана со старой соотношением $x_{\rm t} = yx$. Для того чтобы выяснить, как нужно перенормировать импульсы электронов, заметим, что при $y \to \infty$ функция $K_2(y) \sim \sqrt{\pi/2y}e^{-y}(1+15/8y)$. При этом полные энергии электронов близки к их энергиям покоя: $\gamma = \sqrt{1+z^2} \sim 1+z^2/2$. Следовательно, без учета поправочного слагаемого порядка $1/y$

$$f_{\rm M}(\gamma) \sim \left(\frac{y}{2\pi}\right)^{3/2} e^y e^{-y(1+z^2/2)}. \tag{39}$$

Чтобы это распределение перешло в нерелятивистское максвелловское, надо положить $z\sqrt{y/2}=z_{\rm t}$ и $\vec{z}\sqrt{y/2} = \vec{z}_{\rm t}$. Это равносильно замене $\vec{p}=mc\sqrt{2/y}\vec{z}_{\rm t}$. Такие же замены сделаем и для величин с индексом 1.

Разложим по степеням $1/y \ll 1$ все входящие в уравнение (35) сомножители, удерживая нулевую и две первых степени относительно $1/\sqrt{y}$. Поскольку смещение частоты при рассеянии на нерелятивистских электронах мало, то в предположении достаточной гладкости среднего числа заполнения можно разложить и эту функцию. При этом аргументом получающейся функции будем считать не x, как раньше, а $x_{\rm t}$. Для получения той же точности, что и для всех остальных величин, надо учесть слагаемые в формуле Тейлора со второй производной. Остальные множители, стоящие при дифференциалах переменных, по которым ведется интегрирование, тоже раскладываются. Вычислив интегралы по направлениям, получим уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\sigma_0 n_{\rm e}}{y}\frac{1}{x_{\rm t}^2}\frac{\partial}{\partial x_{\rm t}}\left[x_{\rm t}^4\left(n+n^2+\frac{\partial n}{\partial x_{\rm t}}\right)\right]. \tag{40}$$

Это уравнение, при выводе которого предполагается малость изменения энергии частицы в результате взаимодействия, в результате чего интеграл столкновений преобразуется в дифференциальный оператор, в общей теории кинетических уравнений называется уравнением типа Фоккера—Планка.

6. Комптонизация. Этим словом называется процесс формирования спектра излучения в ходе многократного комптоновского рассеяния и его результат. Как правило, рассматривается эволюция спектра от мягкого к более жесткому. Для оценки эффективности этого процесса оценим изменение малой частоты фотона.

Пусть мягкий фотон с частотой x рассеивается нерелятивистскими электронами с $z^2 \ll 1$. Тогда, как можно показать [27, 46] , относительное изменение его частоты

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{4}{y} - x. \tag{41}$$

Это соотношение можно представить как дифференциальное уравнение

$$\frac{{\rm d}x}{{\rm d}u} = x\frac{4}{y} - x^2. \tag{42}$$

Производная здесь берется по безразмерному оптическому расстоянию, совпадающему с числом рассеяний. Уравнение (42) является уравнением Бернулли и его решение легко находится:

$$\frac{1}{x} = e^{-4u/y}\left[\frac{1}{x_0} + \frac{y}{4}(e^{4u/y}-1)\right]. \tag{43}$$

Переписанное в величинах $x_{\rm t}$ и $t = u/y$ оно выглядит проще:

$$x_{\rm t} = x_{\rm t}^0\frac{e^{4t}}{1+\dfrac{x_{\rm t}^0}{4}(e^{4t}-1)} \tag{44}$$

и из него видно, что при малых $x_{\rm t}^0$ и умеренных t частота растет экспоненциально. Затем рост замедляется и частота $x_{\rm t}$ стремится к своему асимптотическому значению 4. Мы увидим, что точное значение этого предела равно не 4, а 3.

Далее рассмотрим решения уравнения (40) и его обобщения (35), более точно описывающие многократное рассеяние.

§ 4. Решения кинетических уравнений

1. Уравнение Компанейца и его свойства. В этом параграфе опустим индекс t у частоты (введенный для того, чтобы отличать частоту, измеряемую в единицах $k_{\rm B}T/h$, от частоты, измеряемой в единицах mc^2/h) и будем писать просто x.

Уравнение (40) за счет выбора единицы измерения времени, равной $y/\sigma_0 n_\mathrm{e}$, приводится к уравнению без параметров:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x}\right)\right]. \tag{45}$$

Это уравнение описывает временную эволюцию однородного и изотропного поля излучения в бесконечном однородном и изотропном пространстве, заполненном равновесным нерелятивистским и невырожденным электронным газом. Оно было выведено А. С. Компанейцем в 1952 году (опубликовано [18] в 1956 после рассекречивания) и носит его имя.

Уравнение Компанейца в размерных величинах записывается следующим образом:

$$\frac{\partial n_\nu(t)}{\partial t} = \frac{\sigma_0 n_\mathrm{e}}{mc}\frac{h}{\nu^2}\frac{\partial}{\partial \nu}\left[\nu^4\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{h}\frac{\partial n_\nu(t)}{\partial \nu} + n_\nu(t) + n_\nu^2(t)\right)\right]. \tag{46}$$

Здесь $n_\nu(t) = n(x_\mathrm{t}, t) = n(x, t)$. В дальнейшем изучаем это уравнение в форме (45).

Из уравнения (45), так же как и из (35), вытекает закон сохранения числа фотонов. Действительно, после умножения уравнения (45) на x^2 и интегрирования по всем частотам получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_0^\infty x^2 n(x,t)\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2\right)\right]\mathrm{d}x = \left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} = 0. \tag{47}$$

Можно показать, что каждое из трех слагаемых в круглых скобках правой части уравнения Компанейца описывает отдельный эффект, а именно: слагаемое с производной — эффект Доплера, n — эффект Комптона, а n^2 — вынужденное рассеяние.

Уравнение (45) нелинейное и, к сожалению, точных аналитических решений не имеет. В разное время были найдены точные решения уравнений, получающихся из (45), если отбросить одно или два слагаемых в круглых скобках, т. е. пренебречь одним из указанных эффектов. Приведем все эти решения.

2. Линейное уравнение и функция Грина. При небольших числах заполнения $n \ll 1$ можно не учитывать вынужденное рассеяние и в уравнении (45) отбросить n^2. Уравнение перейдет в линейное:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x} + n\right)\right]. \tag{48}$$

Для линейного уравнения можно определить функцию Грина, выражающую любое решение через начальное распределение фотонов:

$$n(x,t) = \int\limits_0^\infty G(x, x_1, t) n(x_1, 0)\mathrm{d}x_1. \tag{49}$$

Функция Грина удовлетворяет тому же уравнению (48):

$$\frac{\partial G(x,x_1,t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial G}{\partial x} + G\right)\right], \tag{50}$$

с начальным условием

$$G(x, x_1, 0) = \delta(x - x_1). \tag{51}$$

Интеграл (38) для этой функции переходит в

$$\int\limits_0^\infty x^2 G(x, x_1, t)\mathrm{d}x = x_1^2. \tag{52}$$

Функция $G(x, x_1, t)$ была найдена А. С. Компанейцем путем разложения по собственным функциям (с. ф.) оператора правой части уравнения (48). Подробный вывод ее методом преобразования Лапласа приведен в статье [21]. При $t \to \infty$ функция Грина стремится к $\dfrac{1}{2}x_1^2 e^{-x}$, так что решения линейного уравнения Компанейца имеют предельную стационарную форму в виде функции Вина $n(x,\infty) = \dfrac{1}{2}e^{-x}\displaystyle\int\limits_0^\infty n(x_1,0)x_1^2\mathrm{d}x_1$. Действительно, функция Ce^{-x} удовлетворяет уравнению тождественно при любых коэффициентах C.

Функция $x^2 n(x,\infty)$ имеет максимум при $x = 2$. Среднее значение частоты по виновскому распределению равно 3. Соотношение (38) выполняется и при $t = \infty$. Для сравнения напомним, что согласно формуле Планка максимум распределения числа фотонов $x^2/(e^x - 1)$ лежит при $x = 1.59362426014$, а средняя частота равна 2.70117803292.

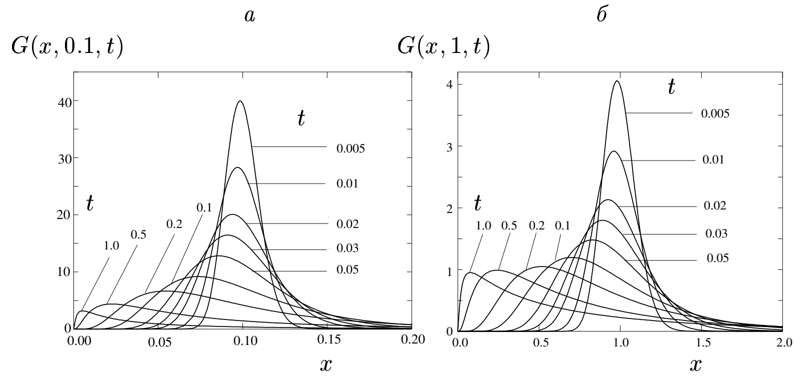

Рис. 3. Эволюция функции Грина $G(x, x_1, t)$ при $x_1 = 0.1$ (*а*) и $x_1 = 1$ (*б*).

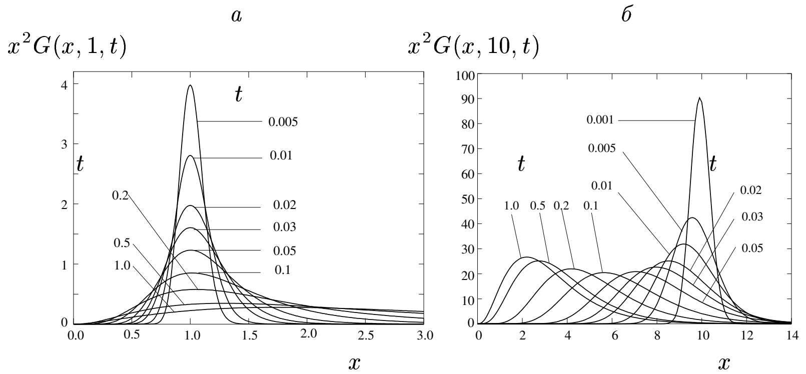

Рис. 4. Эволюция функции $x^2G(x, x_1, t)$ при $x_1 = 1$ (*а*) и $x_1 = 10$ (*б*).

В статье [22] были вычислены с. ф., входящие в формулу для функции Грина, и сама эта функция. На рис. 3 и 4 представлены ее графики соответственно при $x_1 = 0.1$, 1 и 10, отражающие указанные выше свойства. При этом на рис. 3 дана непосредственно функция Грина, а на рис. 4 дается произведение $x^2G(x, x_1, t)$.

3. Диффузионное решение. Если отбросить два слагаемых n и n^2, что допустимо при малых частотах, то получающееся уравнение

$$\frac{\partial n(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\frac{\partial n}{\partial x}\right] \tag{53}$$

тоже является линейным и для него определяется функция Грина тем же равенством (49), что и выше. Подстановками $x = e^{u-3y}$, $t = y$ с обратными им $y = t$, $u = 3t + \ln x$ уравнение (53) приводится к уравнению диффузии

$$\frac{\partial^2 n}{\partial u^2} = \frac{\partial n}{\partial y}. \tag{54}$$

Соответствующая функция Грина в исходных переменных

$$G_{\mathrm{dif}}(x, x_1, t) = \frac{1}{2x_1\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{1}{4t}\left(\ln\frac{x}{x_1} + 3t\right)^2\right). \tag{55}$$

Такая форма функции Грина была получена Я. Б. Зельдовичем и Р. А. Сюняевым [56]. Можно показать, что функция (55) является пределом общей функции, определяемой уравнением (50), при малых частотах.

Используя диффузионную функцию Грина (55), авторы статьи [7] показали, что планковский спектр малых частот преобразуется в набор планковских спектров с температурами из некоторого интервала.

4. Решение стационарного линейного уравнения. Если поле излучения не зависит от времени, то уравнение (45) переходит в стационарное линейное уравнение Компанейца

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^4\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} + n\right)\right] = 0. \tag{56}$$

Это уравнение сразу сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} + n = \frac{C_2}{x^4}. \tag{57}$$

Общее решение полученного линейного уравнения

$$n = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \int\limits_{\beta}^{x} e^{x'} \frac{\mathrm{d}x'}{(x')^4}. \tag{58}$$

Здесь $\beta > 0$ — некоторое число. Второе решение имеет смысл только при $x \geq \beta$. Взять $\beta = 0$ нельзя, так как эта функция при $x \to 0$ стремится к бесконечности так сильно, что интеграл (38) не существует. Первое же решение описывает распределение Вина, т. е. правильное стационарное решение. Второе решение надо, по-видимому, отбросить как нефизическое.

Решение неоднородного уравнения вида (56), т. е. стационарного уравнения с источниками

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^4\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} + n\right)\right] = f(x) \tag{59}$$

можно искать методом вариации произвольных постоянных, однако его можно получить гораздо проще. Проинтегрируем уравнение по x от 0 до x:

$$\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} + n\right) = \frac{1}{x^4}\int\limits_0^x x_1^2 f(x_1)\mathrm{d}x_1. \tag{60}$$

Решение получившегося линейного уравнения представляется повторным интегралом

$$n(x) = e^{-x}\int\limits_0^x e^{x'}\frac{\mathrm{d}x'}{(x')^4}\int\limits_0^{x'} x_1^2 f(x_1)\mathrm{d}x_1 = e^{-x}\int\limits_0^x x_1^2 f(x_1)\mathrm{d}x_1 \int\limits_{x_1}^x e^{x'}\frac{\mathrm{d}x'}{(x')^4}. \tag{61}$$

Функция Грина, определяемая формулой, аналогичной (49):

$$n(x) = \int\limits_0^\infty G(x, x_1) f(x_1)\mathrm{d}x_1, \tag{62}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^4\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} + G\right)\right] = \delta(x - x_1) \tag{63}$$

и может быть представлена в явном виде

$$G(x, x_1) = \begin{cases} e^{-x} x_1^2 \int\limits_{x_1}^x \frac{\mathrm{d}x'}{(x')^4}, & x_1 \leq x, \\ 0, & x_1 \geq x. \end{cases} \tag{64}$$

В частном случае степенного спектра источника $f(x) = x^{æ}$ решение выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию [21] :

$$n(x) = \frac{x^{æ}}{æ(æ+3)} e^{-x} F(æ, æ+1, x) \sim \begin{cases} \dfrac{x^{æ}}{æ(æ+3)}, & x \ll 1, \\ \dfrac{x^{æ-1}}{æ+3}, & x \gg 1. \end{cases} \tag{65}$$

На рис. 5 приведены графики решений для некоторых значений æ.

5. Решение недиффузионного уравнения. Назовем так уравнение, которое получается из уравнения (45), если в его круглых скобках отбросить производную по частоте, определяющую частотную диффузию фотонов. Как видно из уравнения Компанейца в форме (46), это можно сделать при достаточно низкой температуре электронного газа. Уравнение примет вид

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(n + n^2\right)\right]. \tag{66}$$

Это уравнение обладает свойством автомодельности, а именно для его решений выполняется соотношение подобия: при произвольном $\alpha > 0$

$$n(\alpha x, \alpha t) = n(x, t), \tag{67}$$

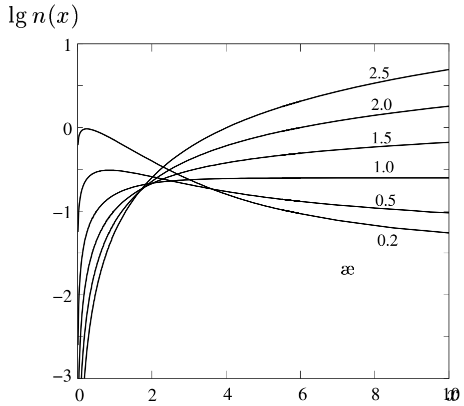

Рис. 5. Стационарные решения линейного уравнения при некоторых показателях степени частотной зависимости источника.

т. е. одинаковое изменение масштаба частот и времени не изменяет решения.

Поскольку уравнение (66) — первого порядка, решаем его методом характеристик. Уравнения, определяющие характеристики (66), записываются так:

$$\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+2n)} = \frac{\mathrm{d}n}{3x(n+n^2)}. \tag{68}$$

Первыми интегралами уравнений характеристик являются следующие комбинации переменных: $x^4\mathcal{B} = C^4$ и $4Ct + 2^{1/2}F(\phi, 2^{-1/2})$, где $\mathcal{B} = n + n^2$,

$$F(\phi, k) = \int\limits_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi_1}} \tag{69}$$

— эллиптический интеграл первого рода, а

$$\phi = \phi(\mathcal{B}) = 2\,\mathrm{arctg}(2^{-1/2}\mathcal{B}^{-1/4}). \tag{70}$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию, можно записать в неявном виде [21]

$$t = \frac{F(\phi_0, 2^{-1/2}) - F(\phi, 2^{-1/2})}{2^{3/2}C}, \tag{71}$$

где $\phi_0 = \phi(\mathcal{B}_0(x_0)),\ \mathcal{B}_0(x) = n(x,0)[1 + n(x,0)],\ C = x\mathcal{B}^{1/4}(x) = x_0\mathcal{B}_0^{1/4}(x_0)$.

Если в найденном решении считать, что $n \gg 1$, т. е. числа заполнения фотонных состояний велики и вынужденное рассеяние играет определяющую роль, то, подставив предельные выражения $\mathcal{B} \sim n^2$, $\phi \sim 2^{1/2}n^{-1/2} \ll 1$, $F(\phi, 2^{-1/2}) \sim \phi$, сведем решение (71) к

$$t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x_0 n(x_0)} - \frac{1}{x n(x)}\right]. \tag{72}$$

Это решение, полученное Я. Б. Зельдовичем и Е. В. Левичем [8], удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} - 2x^2 n\frac{\partial n}{\partial x} = 4xn^2. \tag{73}$$

На рис. 6, взятом из статьи [21], показано, как эволюционирует начальный спектр $n(x,0) = xe^{-x}$ согласно уравнению (66) и его решению (71).

С течением времени спектр смещается в сторону низких частот, причем становится все круче. С некоторого момента спектр опрокидывается, что оказывается возможным из-за неявного вида решения. Причина такого нефизического поведения спектра в том, что когда интенсивность излучения очень резко меняется с частотой, нельзя пренебрегать производной в уравнении Компанейца, несмотря на малый коэффициент при ней. Кроме того, и само это уравнение становится неадекватным, так как при его выводе предполагалась возможность разложения интенсивности по формуле Тейлора, которая отсутствует при большой производной по частоте.

Тот же эффект возникает в решении (72), что можно показать и без вычислений. Действительно, одно из уравнений характеристик уравнения (73) гласит: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x^2n$, т. е. скорость изменения частоты x со временем отрицательна и пропорциональна величине n. Поэтому чем выше точка на кривой решения, тем быстрее она продвигается в сторону меньших частот.

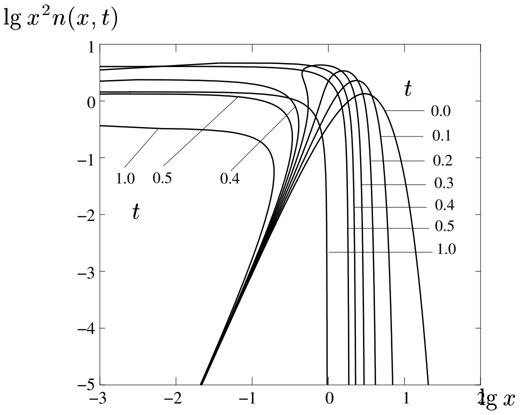

Рис. 6. Решения недиффузионного уравнения.

Эффект перехлеста спектра интерпретировался авторами [8] как появление ударной волны в частотном спектре излучения. Для выяснения его реального смысла необходимо получить решения без пренебрежения производной по частоте или точного интегрального уравнения, что возможно только численно.

7. Эволюция однородного поля излучения. Численные решения интегрального уравнения (35) при максвелловских электронах с низкой температурой без учета вынужденного рассеяния полностью совпали с решениями линейного же уравнения Компанейца. Индуцированное рассеяние, приводящее к нелинейности уравнений, обнаруживает такие особенности решений, которые только угадывались при рассмотрении предельных случаев, обсуждавшихся выше.

Конечно, при решении нелинейного уравнения Компанейца никаких перехлестов не возникает. Вместе с тем решения обладают некоторыми особенностями.

Дело в том, что решения линейных уравнений при произвольных начальных распределениях фотонов по энергиям, при которых полное число фотонов конечно, обязательно эволюционируют к равновесному виновскому спектру. Это не всегда осуществляется по отношению к нелинейным уравнениям. Для них предельным является распределение Бозе—Эйнштейна, но согласно этому распределению полное число фотонов не может быть произвольным. Действительно, предельное безразмерное среднее число заполнения фотонных состояний имеет ограничение

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\exp(x-\mu)-1} \leq \int_0^\infty \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\exp(x)-1} = 2.4041138. \tag{74}$$

Если величина интеграла (38) для начального распределения N_0 превосходит эту границу, то предельного распределения не существует.

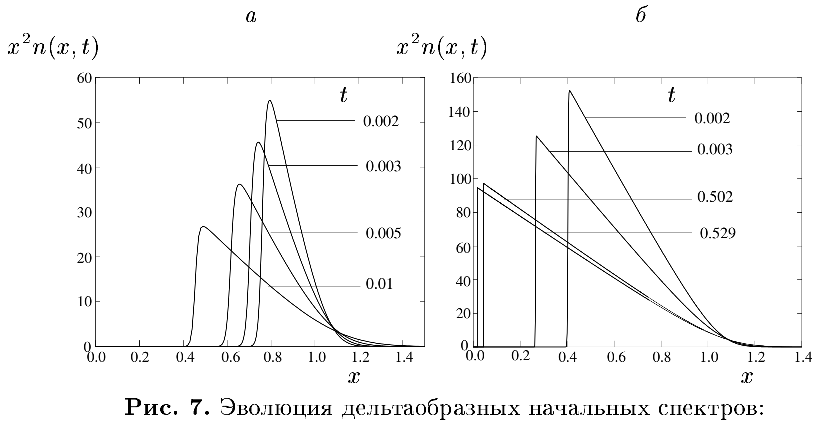

Рис. 7. Эволюция дельтаобразных начальных спектров:
а — при $N_0 = 10$, *б* — при $N_0 = 50$.

На рис. 7 представлены графики функции $x^2 n(x,t)$, вычисленной в работе [24] при начальных распределениях, имитирующих дельта-функцию:

$$n(x,0) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}\varepsilon} e^{-(x-x_1)^2/\varepsilon^2}. \tag{75}$$

При расчетах бралось значение $\varepsilon = 0.01$. Если при $N_0 \leq 1$ решения нелинейного уравнения имеют тот же характер, что и на рис. 4, то с увеличением этого параметра сингулярность решений, выражающаяся в крутизне спектра и скорости его приближения к оси ординат, возрастает.

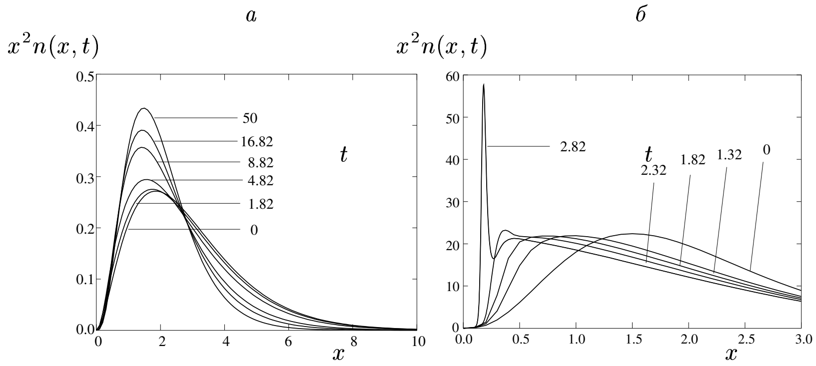

Рис. 8. Эволюция степенно-показательных начальных спектров (76): *а* — при $N_0 = 1$, *б* — при $N_0 = 50$.

На рис. 8 из той же работы [24] показана эволюция спектра излучения при начальных распределениях

$$n(x,0) = \frac{8N_0}{3} x e^{-2x}. \tag{76}$$

Если $N_0 = 1$, никаких особенностей в поведении решения не возникает: оно плавно эволюционирует к распределению Бозе—Эйнштейна. Напротив, при $N_0 = 50$ с приближением к оси ординат возникают выступы, напоминающие ударные фронты или квазилинии. Решения точного, интегрального уравнения демонстрируют указанные явления еще в большей степени, чем полученные в приближении Компанейца.

Здесь мы привели решения уравнений, учитывающих только комптоновское рассеяние. Конечно, необходимо принимать во внимание и другие механизмы излучения и поглощения фотонов. Например, тормозной механизм, с которым сравнивалось комптоновское рассеяние в § 1, должен эффективно поглощать фотоны малых частот и препятствовать их накоплению. Результирующий спектр при этом должен быть планковским.

В заключение укажем объекты, в которых осуществляются условия для большой роли комптоновского рассеяния.

§ 5. Астрофизические объекты с большой ролью комптоновского рассеяния

1. Джеты из активных ядер галактик. Как показывают наблюдения [41, 47], из активных ядер галактик (АЯГ), в центре которых находится черная дыра массой в $10^8 \div 10^9\ M_\odot$, происходят выбросы очень горячего, полностью ионизованного вещества, называемые джетами. Самая распространенная модель джета — струя, состоящая из сгустков с разогнанными до релятивистских скоростей электронами, энергии которых превосходят их энергию покоя в десятки и сотни раз (энергия покоя электрона соответствует температуре $6{\cdot}10^9\ K$). В сгустках присутствует слабое магнитное поле напряженностью порядка 10^{-6} *Гс*. Электроны в магнитном поле излучают синхротронным механизмом фотоны в радиодиапазоне. Излученные фотоны рассеиваются теми же электронами и сильно увеличивают свою энергию, переходя в более энергичную часть спектра, в оптику, рентгеновский и гамма-диапазоны. Этот механизм называется синхрокомптоновским (по-английски Synchrotron Self-Compton).

Обычно принимается, что распределение электронов по импульсам изотропно, а по энергиям степенное $\gamma^{-æ}$ с характерными значениями γ порядка 10–100 и больше вплоть до некоторого предельного значения энергии. Тогда синхротронное излучение тоже имеет степенной спектр, пропорциональный $\nu^{-(æ-1)/2}$ (см. Главу 2). В результате действия комптоновского механизма в рентгеновском диапазоне спектра комптонизованного излучения возникает так называемый бамп (bump), т. е. горб. На более высоких частотах энергии электронов не хватает и там интенсивность спектра быстро спадает (завал спектра). Чем дальше простирается степенной спектр электронов, тем на бóльших частотах происходит завал (в жестком рентгене или в гамма-диапазоне).

Энергия электронов переходит к фотонам, которые покидают джет. Для поддержания свечения необходима подкачка энергии электронному газу. Имеется несколько моделей такой подкачки. Возможна непрерывная инжекция релятивистских электронов или их ускорение каким-нибудь механизмом. Источником энергии является ядро галактики (central engine). На протяжении заметного времени существует стационарный режим свечения.

2. Нейтронные звезды и черные дыры в двойных системах. В таких системах происходит перетекание вещества с обычной звезды на компактную, в результате чего вокруг последней образуется аккреционный диск [33]. Теория аккреционных дисков изложена во многих книгах, например, в [36].

Внутри диска температура очень большая, там горячий электронный газ рассеивает фотоны, излучаемые каким-нибудь первичным механизмом: синхротронным, тормозным или двойным комптоновским. Рассеянные фотоны могут рождать электрон-позитронные пары, в свою очередь аннигилирующие и дающие фотоны для последующих каскадных процессов рассеяния, рождения и аннигиляции пар [37].

Комптоновскому рассеянию обязано и формирование спектра аккрецирующих вещество нейтронных звезд и черных дыр [5].

Из полярных областей звезд, окруженных дисками, выбрасываются джеты, масштаб которых значительно меньше, чем в случае АЯГ, так как масса нейтронной звезды или черной дыры здесь порядка массы Солнца. Можно думать, однако, что явления, происходящие в АЯГ и в двойных системах, подобны, так что изучение внутригалактических джетов, которые находятся гораздо ближе к нам и более доступны для наблюдений, помогает понять природу активности АЯГ. Некоторые авторы двойные системы с выбросами вещества называют миниквазарами. Проблемам образования, строения и свечения дисков и джетов из них посвящены многие статьи сборников, некоторые из которых мы упоминали [33, 53].

3. Рентгеновские источники. Перетекание вещества может происходить и в двойной системе с обычными звездами, если одна из них заполняет свою полость Роша. Тогда на второй образуется горячее пятно, дающее рентгеновское излучение, которое испытывает комптоновское рассеяние [11].

4. Горячие короны аккреционных дисков. Аккреционные диски образуются около компактных объектов (нейтронных звезд или черных дыр звездных масс) или вокруг черных дыр в центре галактик. Вещество дисков во внешних их частях имеет температуру порядка 10^5 K, т. е. частицы там нерелятивистские. Однако короны таких дисков, т. е. более разреженные их оболочки, имеют температуру $10^9 \div 10^{10}$ K (аналогично, электроны в короне Солнца, температура поверхности которого 6000 K, имеют температуру порядка 10^6 K). Механизмы нагрева вещества короны могут быть аналогичны тем, которые действуют на Солнце.

Короны дисков очень тонкие, так что в них рассеивается только малая доля излучения, идущего от диска. Однако рассеянное излучение оказывается в рентгеновском и гамма-диапазоне, где его до рассеяния не было совсем и где оно становится доступным наблюдению, так как фотоны там очень энергичны [49].

Необходимо принимать во внимание взаимное влияние короны и диска друг на друга [48]. Сравнительно мягкие (УФ) фотоны диска, попадая в корону и рассеиваясь релятивистскими электронами, приобретают большую энергию и способность рождать пары. В свою очередь рассеянное в короне излучение частично возвращается в диск и разогревает его.

5. Реликтовое излучение. Согласно модели горячей Вселенной на ранних этапах ее эволюции она имела очень высокую температуру, так что вещество было полностью ионизовано, а излучение находилось в равновесии с веществом. Спектр излучения был чисто планковским. Несколько процессов возмущали этот спектр. В определенные эпохи остывания Вселенной произошли аннигиляция вещества и антивещества, а затем рекомбинация электронов с атомами. В ходе расширения и, как следствие, остывания вещество и излучение разделились. Однако излучение все время оставалось с большой точностью планковским. Оно дошло до настоящего времени в виде реликтового излучения (РИ), или микроволнового космического фона.

После эпохи рекомбинации образовались крупномасштабные структуры Вселенной: галактики и скопления галактик. При этих процессах также выделялась значительная энергия. Там, где образовались первичные структуры, излучение получило дополнительный вклад энергии и возникли локальные отклонения от теплового спектра. С течением времени отклонения локальной интенсивности от средней замывались при рассеянии на электронах, но все же какие-то искажения в пространственном распределении излучения, которое теперь наблюдается в радиодиапазоне как реликтовый тепловой фон с температурой 2.7 K, должны остаться. Расчет замывания и остаточной анизотропии реликтового излучения представляет большой интерес для космологии. Искажения спектра и их дальнейшая эволюция в значительной степени также определяются рассеянием. При расчетах искажений спектра применяется уравнение Компанейца [7, 13, 54]. Искажения изотропии РИ и его спектра по теоретическим оценкам составляют в настоящее время 10^{-5} от интенсивности РИ.

Движения первичных структур Вселенной могут порождать поляризацию излучения [35]. Ожидаемая степень поляризации возмущений РИ достигает 10 %, т. е. 10^{-6} от интенсивности самого РИ. В настоящее время технические возможности аппаратуры в радио-диапазоне подошли к тому уровню, который позволит наблюдать все эти явления.

6. Горячий газ в скоплениях галактик. Из наблюдений континуума и линий в рентгеновской области спектра следует, что в богатых скоплениях галактик имеется горячий электронный газ с температурой порядка 10^8 K. Масса газа сравнима с массой составляющих скопление галактик. Этот газ рассеивает микроволновое реликтовое излучение (РИ) и сдвигает его спектр в сторону бо́льших частот. Фотоны получают дополнительную, хотя не очень большую энергию, так что на малых длинах волн излучение усиливается, а на более длинных — ослабляется. Это явление называется эффектом Сюняева—Зельдовича [10]. Обзор наблюдательных данных и теории этого эффекта представлен в работе [51].

Характер искажения спектра отражает также пекулярное движение скопления по отношению к реликтовому фону. Это же движение может создавать поляризацию рассеянного излучения. Наблюдения хода изменения спектра и поляризации РИ по телу не очень далеких скоплений может позволить выявить распределения плотности, температуры и макроскопической скорости движения электронного газа в скоплениях [50, 55].

7. Другие объекты. Комптоновское рассеяние играет заметную роль и в ряде объектов, отличных от указанных выше. Например, межзвездное излучение в Галактике рассеивается энергичными электронами космических лучей [45]. Это излучение сильно неизотропно, так как идет в основном от галактической плоскости. Его преобразование в жесткие диапазоны мешает изучению излучения тех же диапазонов космического происхождения.

Рассчитываются модели звездных атмосфер с учетом комптоновского рассеяния рентгеновского излучения некоторого внешнего источника, например, аккреционного диска [40].

В работе [20] показано, что нелинейный (индуцированный) эффект Комптона способствует нагреву вещества внешних оболочек АЯГ и пульсаров.

Глава 4. Черенковское и переходное излучение

§ 1. Потенциалы заряда в диэлектрике

1. Заряд в диэлектрике. Излучение Черенкова, то есть свечение заряда, движущегося в диэлектрике, было открыто аспирантом С. И. Вавилова П. А. Черенковым в 1934 г. Почти сразу же И. Е. Таммом и И. М. Франком была построена теория этого свечения. В 1958 г. им троим была присуждена Нобелевская премия по физике, так как эффект получил широкое применение в счетчиках фотонов.

Как известно, равномерно движущийся заряд не излучает. Однако, если скорость заряда в диэлектрике превышает скорость света в этом диэлектрике, то возникает некоторое излучение — электромагнитная волна, аналогичная килевой волне корабля, идущего быстрее скорости распространения волн в воде, или ударной волне в воздухе от самолета, летящего быстрее скорости звука. Здесь дается краткое описание механизма свечения Черенкова.

Пусть в диэлектрике показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon} > 1$. Будем считать, что диэлектрик однороден, то есть $\varepsilon = n^2 = \mathrm{const}$. Тогда скорость света в такой среде $c_1 = c/n < c$. Пусть электрон (заряд $-e$) движется с постоянной скоростью v, такой, что $c_1 < v < c$. Тогда плотности его заряда и тока будут

$$\rho(\vec{r},t) = -e\,\delta(\vec{r} - \vec{v}\,t), \quad \vec{\jmath}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}. \tag{1}$$

Примем для простоты, что скорость электрона направлена вдоль оси z, то есть $\vec{v} = v\,(0,0,1)$. Потерями энергии на излучение пренебрегаем, то есть считаем, что кто-то тянет электрон “за веревочку". Найдем излучение такого заряда. Начнем с потенциалов.

2. Потенциалы. Потенциалы определяются обычными неоднородными волновыми уравнениями

$$\left(\frac{1}{c_1^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon}\,\rho,$$
$$\left(\frac{1}{c_1^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{\jmath}. \tag{2}$$

Поскольку $\vec{v}$ и n постоянны, то достаточно найти скалярный потенциал, ибо прямой подстановкой легко проверить, что

$$\vec{A} = \frac{n^2}{c}\,\varphi\,\vec{v}. \tag{3}$$

Ввиду осевой симметрии достаточно найти потенциалы в плоскости xz. Возьмем точку наблюдения $\vec{r} = (x,0,z)$, причем можно ограничиться рассмотрением $x > 0$ и $z > 0$. Запаздывающий потенциал дается формулой

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon}\int \rho(\vec{r}_1,t_1)\,\frac{\mathrm{d}^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{4}$$

При этом, как обычно, должно выполняться соотношение

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = c_1\,(t - t_1), \tag{5}$$

выражающее тот факт, что влияние заряда на точку наблюдения распространяется с конечной скоростью c_1, следовательно в момент времени t на точку $\vec{r}$ окажет влияние состояние плотности заряда в точке $\vec{r}_1$ в момент времени t_1.

Для точечного заряда общая формула (4) перепишется в виде

$$\varphi(\vec{r},t) = -\frac{e}{n^2}\int \delta(\vec{r}_1 - \vec{v}\,t_1)\,\frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \tag{6}$$

а соотношение (5) перейдет в

$$|\vec{r} - \vec{v}\,t_1| = c_1\,(t - t_1). \tag{7}$$

Потенциалы излучения Черенкова находятся аналогично потенциалам Лиенара—Вихерта. Мы получим выражения для потенциалов неформальным способом, отказавшись от точечности заряда. Пусть его протяженность равна a. Вклад в интеграл (4) дают точки $\vec{r}_1$, в которых в момент t_1 находится наш заряд. При закрепленных t_1 уравнение (5) описывает сферы радиуса $c_1\,(t - t_1)$ — сферы влияния. Чем дальше $t_1 < t$ от t, тем больше радиус сферы, с возрастанием t_1 радиус уменьшается и при $t_1 = t$ сфера стягивается в точку, то есть схема рассуждений та же, что и при выводе формул для обычных потенциалов точечного заряда. Однако, имеются существенные отличия, поэтому рассмотрим подробно кинематику процесса.

3. Моменты влияния. Введем обозначения

$$\vec{X} = \vec{r} - \vec{v}\,t, \;\; \vec{X}_1 = \vec{r} - \vec{v}\,t_1 = \vec{X} + \vec{v}\,(t - t_1). \tag{8}$$

Тогда (7) можно переписать так
$$|\vec{X}_1| = |\vec{X} + \vec{v}\,(t - t_1)| = c_1\,(t - t_1). \tag{9}$$
Возведя (9) в квадрат и разрешив результат относительно $t - t_1$, получим
$$t - t_1^{\pm} = \frac{-(\vec{X}\,\vec{v}) \pm Y}{v^2 - c_1^2}, \tag{10}$$
где
$$Y^2 = (\vec{X}\,\vec{v})^2 - (v^2 - c_1^2)\,X^2. \tag{11}$$
При $v < c_1$ величина Y всегда вещественна, так как (11) есть сумма двух неотрицательных слагаемых. В этом случае момент влияния только один t_1^+, излучения нет.

Для нас представляет интерес случай $v > c_1$, тогда Y вещественно не при всех t. Найдем, при каких t эта величина вещественна. Ясно, что должно быть $\vec{X}\,\vec{v} < 0$, так как иначе за счет внекоренного слагаемого будет $t - t_1 < 0$, а требуется, чтобы было $t - t_1 > 0$, ибо причина должна предшествовать следствию.

4. Конус Черенкова. Положим $\vec{X}\,\vec{v} = X\,v\,\cos\alpha$. Тогда условие вещественности Y запишется так:
$$Y^2 = X^2\,v^2\,\cos^2\alpha - (v^2 - c_1^2)\,X^2 = X^2\,v^2\,(c_1^2/v^2 - \sin^2\alpha) \geq 0. \tag{12}$$
Отсюда следует, что условие выполняется при $\sin^2\alpha \leq c_1^2/v^2$ или
$$\sin\alpha \leq c_1/v, \tag{13}$$
и, так как угол α тупой, то он должен удовлетворять условию
$$\pi \geq \alpha \geq \pi - \alpha_0. \tag{14}$$
Граничное значение угла между векторами $\vec{X}$ и $\vec{v}$ определяется острым углом α_0, причем
$$\operatorname{tg}\alpha_0 = c_1/\sqrt{v^2 - c_1^2}. \tag{15}$$
Конус (14) называется конусом Черенкова. Все излучение заряда находится внутри этого конуса.

Приняв во внимание, что
$$\vec{X} = (x, 0, z - v\,t), \tag{16}$$
найдем
$$\cos\alpha = \frac{z - v\,t}{\sqrt{x^2 + (z - v\,t)^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z - v\,t)^2}}. \tag{17}$$
Так как косинус отрицателен, то $v\,t > z$ — заряд ушел дальше точки наблюдения. Подставив выражение для синуса из (17) в неравенство (13), получим
$$c_1\,(v\,t - z) \geq \sqrt{v^2 - c_1^2}\,x \tag{18}$$
и как следствие оценку снизу времени наблюдения излучения:
$$t \geq t^* = \frac{z}{v} + \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{v\,c_1}\,x. \tag{19}$$

Как следует из (10), имеется два момента влияния заряда на точку наблюдения. Они обозначены $t_1^{\pm}$, причем знаки берутся в соответствии со знаками перед корнем в (10), так что $t - t_1^+ > t - t_1^-$, $t_1^+ < t_1^-$.

Для нахождения выражений для потенциалов нужно знать проекции скорости заряда на направление на наблюдателя, то есть направление излучения в моменты влияния.

5. Проекции скорости на направление излучения. Обозначим величину этой проекции через
$$v_x^{\pm} = \vec{v}\,\frac{\vec{X}_1^{\pm}}{X_1^{\pm}}, \tag{20}$$
а также введем вспомогательные величины
$$y = \frac{v\,t - z}{x}, \quad q = \frac{v}{c_1}, \quad f = \sqrt{y^2 - (q^2 - 1)}. \tag{21}$$

В этих обозначениях использованные нами ранее величины выражаются следующим образом:

$$\vec{v}\,\vec{X} = -x\,y\,v, \ \ Y = c_1\,x\,f, \ \ t - t_1^{\pm} = \frac{x}{c_1}\frac{q\,y \pm f}{q^2 - 1}, \tag{22}$$

$$\vec{v}\,\vec{X}_1^{\pm} = \frac{x\,v}{q^2-1}(y \pm q\,f). \tag{23}$$

Кроме того, из (16) и (9) получаем

$$X^2 = x^2\,(1+y^2), \ \ \frac{1}{X_1^{\pm}} = \frac{1}{c_1\,(t-t_1)} = \frac{q\,y \mp f}{x\,(y^2+1)}. \tag{24}$$

Из (18) вытекает, что $y \geq \sqrt{q^2-1}$. Принимая во внимание выписанные соотношения, находим

$$v_{\text{x}}^{\pm} = \frac{x\,v}{q^2-1}(y \pm q\,f)\frac{q\,y \mp f}{x\,(y^2+1)} = v\frac{q \pm y\,f}{y^2+1}. \tag{25}$$

Для определения знака проекций скорости $v_{\text{x}}^{\pm}$ достаточно выражения (23), однако проще исходить из выражения (25). Проекция v_{x}^{+} при всех t больше c_1. Проекция же во второй момент пересечения обращается в нуль при $y = q$, при $y < q$ она положительна, при $y > q$ — отрицательна. Величина y при фиксированных z и x напрямую связана со временем наблюдения.

Таким образом, картина прохождения заряда через сферу влияния такова. До $t < t^*$, соответствующего $y = y^* = \sqrt{q^2-1}$, излучения нет. Когда t достигает значения t^*, заряд в единый момент $t_1^{+} = t_1^{-}$ лишь касается сферы влияния. В этот момент $v_{\text{x}}^{\pm} = c_1$. Если момент наблюдения $t > t^*$ проекция $v_{\text{x}}^{+} > c_1$, то есть в момент первого пересечения заряд всегда догоняет сферу влияния. В момент второго пересечения при $\sqrt{q^2-1} < y < q$, то есть при $t^* < t < t_0 = z/v + x/c_1$ проекция скорости заключена в пределах $c_1 > v_{\text{x}}^{-} > 0$, так что сфера догоняет заряд. При $t > t_0$ проекция $v_{\text{x}}^{-} < 0$. Это означает, что заряд и сфера движутся навстречу друг другу. Моменту $t = t_{\text{c}} = (z + x\,y_{\text{c}})/v$, где

$$y_{\text{c}} = \frac{q^2+1}{\sqrt{q^2-1}}, \ \ t_{\text{c}} = \frac{z}{v} + \frac{x}{v}\frac{v^2+c_1^2}{\sqrt{v^2-c_1^2}} > t_0 > t^*, \tag{26}$$

отвечает достижение проекцией v_{x}^{-} величины $-c_1$. Наконец, из (25) следует, что при $t \to +\infty$, тогда и $y \to +\infty$, проекции $v_{\text{x}}^{\pm}$ стремятся сответственно к $\pm v$.

6. Нахождение потенциалов. Поскольку скорость заряда больше скорости уменьшения радиуса сферы влияния, заряд нагоняет ее. Сначала он пересекает сферу извне, а затем изнутри. Пересечение изнутри может происходить, как мы видели двумя способами.

Можно считать, что вначале заряд движется прямо на наблюдателя со скоростью $v_0 = v_{\text{x}} > 0$. Вследствие движения заряда сфера влияния будет чувствовать его на протяжении расстояния, не равного a. Обозначим это расстояние b. За одно и то же время сфера пройдет расстояние b, а догоняющий ее заряд — расстояние $a + b$, так что

$$\frac{a+b}{v_0} = \frac{b}{c_1}, \ \ \frac{b}{a} = \frac{1}{v_0/c_1 - 1}. \tag{27}$$

Когда заряд и сфера влияния движутся навстречу друг другу, скорость заряда $v_0 = -v_{\text{x}}^{+} > 0$ — это проекция вектора его скорости на направление не на, а от наблюдателя. В этом случае

$$\frac{a-b}{v_0} = \frac{b}{c_1}, \ \ \frac{b}{a} = \frac{1}{v_0/c_1 + 1}. \tag{28}$$

Такое же соотношение получается и в том случае, если сфера догоняет заряд, так что варианты прохождения заряда через сферу при втором пересечении не влияют на окончательный результат.

Замечая, что полученные отношения не зависят от размера заряда, то есть справедливы и для точечного заряда, мы можем вычислить интеграл, входящий в (6), вынеся за знак интеграла множители при δ-функциях и воспользовавшись (27) и (28):

$$\varphi = \frac{e}{n^2}\left[\frac{1}{X_1^{+}}\ \frac{1}{v_{\text{x}}^{+}/c_1 - 1} + \frac{1}{X_1^{-}}\ \frac{1}{-v_{\text{x}}^{-}/c_1 + 1}\right]. \tag{29}$$

Подставив сюда выражения для $X_1^{\pm}$ и $v_{\text{x}}^{\pm}$ из (24) и (25), а также приняв во внимание определения (21), получим окончательно

$$\varphi = \frac{2\,e\,c_1}{n^2}\frac{1}{Y}, \ \ \vec{A} = \frac{\vec{v}}{c}\,n^2\,\varphi. \tag{30}$$

7. Производные от потенциалов. Поскольку в выражения для напряженностей входят производные от потенциалов, найдем сначала эти производные.

Согласно (30) потенциалы зависят от времени и координат только через величину Y, которая определяется формулами (11) и (8). Поэтому найдем производные от этой величины. Проще начать с ее квадрата, который можно записать в виде

$$Y^2 = c_1^2(z - vt)^2 - (v^2 - c_1^2)x^2. \tag{31}$$

Тогда

$$\vec{\nabla} Y^2 = 2(\vec{X}\vec{v})\vec{v} - 2(v^2 - c_1^2)\vec{X} = 2\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{X}) + 2c_1^2\vec{X} = 2(-(v^2 - c_1^2)x, 0, c_1^2(z - vt)), \tag{32}$$

$$\frac{\partial Y^2}{\partial t} = -2(\vec{X}\vec{v})v^2 + 2(v^2 - c_1^2)\vec{X}\vec{v} = -2c_1^2\vec{X}\vec{v} = -\vec{v}(\vec{\nabla} Y^2) = -2c_1^2(z - vt)v. \tag{33}$$

Следовательно,

$$\vec{\nabla}\varphi = -\varphi\frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{X}) + c_1^2\vec{X}}{Y^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\vec{v}\,\vec{\nabla}\varphi. \tag{34}$$

Из связи векторного и скалярного потенциалов (3) получается

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\vec{v}}{c}n^2\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\vec{v}}{c}n^2(\vec{v}\vec{\nabla}\varphi), \quad \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c}n^2\vec{\nabla}\varphi, \tag{35}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\vec{v}}{c}n^2 \times \vec{\nabla}\varphi = \frac{n^2}{c}\frac{\varphi}{Y^2}(v^2 - c_1^2)\vec{v} \times \vec{X}. \tag{36}$$

Легко проверить, что условие Лоренца соблюдается

$$\frac{n^2}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{n^2}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{n^2}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{37}$$

Теперь у нас есть все для нахождения характеристик создаваемого зарядом поля.

§ 2. Излучение Черенкова и его спектр

1. Поле и излучение. По производным от потенциалов просто найти выражения для напряженностей поля. Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\varphi}{Y^2}[\vec{v}(\vec{X}\,\vec{v}) - (v^2 - c_1^2)\vec{X} - \frac{n^2}{c^2}\vec{v}(c_1^2\vec{X}\vec{v})] = -\frac{\varphi}{Y^2}(v^2 - c_1^2)\vec{X}. \tag{38}$$

Магнитная напряженность

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{n^2}{c}\vec{E} \times \vec{v} \tag{39}$$

перпендикулярна электрической и обе они ортогональны вектору распространения излучения, то есть вектору Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{H} = S\vec{l}. \tag{40}$$

Те же напряженности в координатах

$$\vec{E} = \frac{2ec_1}{n^2}\frac{v^2 - c_1^2}{Y^3}(x, 0, z - vt), \ \vec{H} = \frac{2ev}{n}\frac{v^2 - c_1^2}{Y^3}(0, x, 0), \tag{41}$$

а вектор потока излучения

$$\vec{S} = \frac{e^2c^2v}{4\pi n^4}\frac{v^2 - c_1^2}{Y^6}x(z - vt, 0, -x). \tag{42}$$

Очевидно, что векторы

$$\vec{l} = \frac{(z - vt, 0, -x)}{X}, \ -\frac{\vec{X}}{X}, \ (0, 1, 0) \tag{43}$$

образуют правую тройку ортов.

Как уже отмечалось, до момента $t = t^*$ излучения заряда нет. В момент $t = t^*$ величина Y и, значит, знаменатели у потенциалов и напряженностей обращаются в нули, так что сами эти величины бесконечны. После этого момента напряженности непрерывны и при больших t убывают, как $1/t^2$, а вектор Пойнтинга, как $1/t^4$. Обращение поля в бесконечность является следствием того, что при выводе формул не учитывалась дисперсия, то есть показатель преломления считался постоянным.

2. Спектр черенковского излучения. Для нахождения характеристик спектра необходимо найти преобразования Фурье от напряженностей. Начнем с потенциалов. Преобразование Фурье от величины, обратной Y, легко выражается через функцию Макдональда

$$\int_{t^*}^{\infty} e^{i\omega t}\frac{\mathrm{d}t}{Y} = \frac{1}{c_1 v}e^{i\omega z/v}\int_1^{\infty}\exp\left(i\omega\sqrt{v^2-c_1^2}\frac{x}{vc_1}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{vc_1}e^{i\omega z/v}K_0\left(-i\omega\sqrt{v^2-c_1^2}\frac{x}{vc_1}\right). \tag{44}$$

Таким образом, интеграл выражается через функции Бесселя. Однако, лучше не использовать это явное выражение, а оставить его в виде интеграла, что позволяет учесть дисперсию. Скалярный и векторный потенциалы представляются интегралом

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\frac{2ec_1}{n^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{c_1 v}e^{i\omega z/v}\int_1^{\infty}\exp\left(i\omega\sqrt{v^2-c_1^2}\frac{xu}{vc_1}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}},\ \vec{A} = \frac{n^2}{c}\vec{v}\varphi. \tag{45}$$

Соответственно для напряженностей получаются такие же интегралы. Для электрической

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\frac{2ec_1}{n^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{c_1 v}e^{i\omega z/v}\int_1^{\infty}\exp\left(i\omega\sqrt{v^2-c_1^2}\frac{xu}{vc_1}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}}\vec{E}(\omega,u) \tag{46}$$

и аналогичный для магнитной напряженности с весовой функцией $\vec{H}(\omega,u)$. Для этих весовых функций находим при помощи выражений напряженностей через потенциалы

$$\vec{E}(\omega,u) = \frac{1}{2\pi}\frac{2e}{n^2 v}\left[-\left(i\frac{\omega}{v}\frac{\sqrt{v^2-c_1^2}}{c_1}u,0,i\frac{\omega}{v}\right)+\frac{n^2}{c^2}(0,0,v)i\omega\right] =$$

$$= -i\frac{e\omega}{\pi n^2 v^2}\left(\frac{\sqrt{v^2-c_1^2}}{c_1}u,0,-\frac{v^2-c_1^2}{c_1^2}\right) = -i\frac{e\omega}{\pi n^2 v^2}\frac{\sqrt{v^2-c_1^2}}{c_1}\left(u,0,\frac{\sqrt{v^2-c_1^2}}{c_1}\right). \tag{47}$$

Для магнитной напряженности

$$\vec{H}(\omega,u) = \frac{e}{\pi n^2 v}\frac{n^2}{c}\vec{v}\times\left(i\frac{\omega}{v}\sqrt{v^2-c_1^2}c_1 u,0,i\frac{\omega}{v}\right) = i\frac{e\omega}{\pi vc}\frac{\sqrt{v^2-c_1^2}}{c_1}(0,1,0). \tag{48}$$

Наконец, для вектора Пойнтинга находим

$$\vec{S}(\omega,t) = \frac{c}{4\pi}\frac{e^2\omega^2}{\pi^2 n^2 v^3 c}\frac{v^2-c_1^2}{c_1^2}\frac{1}{u^2-1}\left(\frac{\sqrt{v^2-c_1^2}}{c_1^2},0,u\right). \tag{49}$$

3. Излучаемая мощность. Величина излучаемой мощности равна потерям энергии внешних сил на то, чтобы "тянуть заряд за веревочку", и может быть найдена по формуле

$$W = -\int\vec{j}\vec{E}\mathrm{d}^3r = -e\int vE_z\mathrm{d}^3r\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt) =$$

$$= -ev\int\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt)\mathrm{d}^3r\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(z/v-t)}\mathrm{d}\omega\int_x^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-x^2}}\exp\left(i\frac{\omega}{c_1}\sqrt{1-\frac{c_1^2}{v^2}}u\right)\times$$

$$\times i\frac{e\omega}{\pi n^2 v^2}\frac{v^2-c_1^2}{c_1^2} = \frac{e^2 v}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\omega\left(1-\frac{c_1^2}{v^2}\right)\mathrm{sgn}(\omega)\frac{\pi}{2} = \frac{e^2 v}{c^2}\int_0^{\infty}\omega\left(1-\frac{c_1^2}{v^2}\right)\mathrm{d}\omega.$$

При подстановке выражения (46) переменная u была заменена на u/x. В интеграле по частоте оставлен был только синус по соображениям четности.

Совершенно очевидно, что последний интеграл при постоянных v и c_1 равен бесконечности, что не имеет физического смысла и отражает неадекватность наших предположений. На самом деле ε и следовательно показатель преломления n зависят от частоты. При больших частотах ω скорость света в веществе $c_1 \sim c$, а в рентгене может быть даже $c_1 > c$ (преобразование Фурье от передаточной функции $\varepsilon(\omega)$ и играющая роль показателя преломления величина $n(\omega)$ меньше единицы). Поэтому интеграл по частоте надо брать не до бесконечности, а до некоторого $\omega_{\max}$, которое определяется условием $n(\omega_{\max}(v)) = c/v \approx 1$. Тогда результат (50) перепишется в виде

$$W = \frac{e^2 v}{c^2}\int_0^{\omega_{\max}(v)}\omega\left(1-\frac{c^2}{n^2(\omega)v^2}\right)\mathrm{d}\omega. \tag{50}$$

Формула (50) носит название формулы Тамма—Франка, которые ее получили.

§ 3. Переходное излучение

1. Природа излучения. Если заряд движется с постоянной скоростью, но не в вакууме, а в среде, он может излучать, даже когда его скорость меньше скорости света в этой среде. На такую возможность обратили внимание В. Л. Гинзбург и И. М. Франк в 1946 году [4]. Излучение возникает, если на пути заряда изменяются свойства среды. Первоначально рассматривалось излучение при переходе заряда из среды с одними оптическими свойствами в среду со свойствами, отличными от свойств первой. Затем было установлено, что причиной возникновения излучения может быть и плавное изменение свойств стационарной среды вдоль траектории заряда, и изменение этих свойств со временем. При немонотонном изменении оптических свойств, например периодическом, может происходить и рассеяние, то есть образование отраженных волн. Все эти механизмы по традиции называются переходными.

Здесь мы рассмотрим простейший случай перехода заряда из одной однородной полубесконечной среды в другую однородную же среду, при условии, что скорость заряда перпендикулярна границе раздела. Изложение ведется по книге [3].

Пусть заряд q движется вдоль оси аппликат со скоростью $v > 0$. Для него плотности заряда и тока

$$\rho(\vec{r},t) = q\delta(\vec{r}-\vec{v}t) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt),\ \vec{\jmath}(\vec{r},t) = \vec{v}\rho(\vec{r},t) = qv(0,0,1)\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt). \tag{51}$$

Уравнение неразрывности, конечно, выполняется.

Плоскость xy разделяет два полупространства, заполненных диэлектриками с различными постоянными коэффициентами диэлектрической проницаемости: ε_- при $z < 0$ и ε_+ при $z > 0$. На границе эта величина терпит скачок.

2. Основные уравнения. Запишем уравнения Максвелла для такой ситуации. В каждом из полупространств эти уравнения имеют вид

$$\vec{\nabla}\vec{H} = 0,\ \vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho, \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath},\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}. \tag{52}$$

Стандартным приемом сводим уравнения к одному уравнению для напряженности электрического поля:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - \triangle\vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{\nabla}\rho - \triangle\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{H} =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath}\right) = -\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\vec{\jmath}}{\partial t}. \tag{53}$$

Отсюда с учетом связи плотностей (51) получается уравнение

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \triangle\vec{E} = -4\pi\left(\frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\rho + \frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right). \tag{54}$$

3. Преобразования Фурье. Разложим плотность заряда и электрическую напряженность в интегралы Фурье по времени и по координатам x и y:

$$\rho(\vec{r},t) = \int\tilde{\rho}(\omega,z)e^{i(æ_x x + æ_y y - \omega t)}\mathrm{d}æ_x\mathrm{d}æ_y\mathrm{d}\omega,\ \vec{E}(\vec{r},t) = \int\tilde{\vec{E}}(æ_x,æ_y,\omega,z)e^{i(æ_x x + æ_y y - \omega t)}\mathrm{d}æ_x\mathrm{d}æ_y\mathrm{d}\omega. \tag{55}$$

Преобразование плотности тока легко вычисляется:

$$\tilde{\rho}(\omega,z) = \frac{q}{(2\pi)^3}\int\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt)e^{-i(æ_x x + æ_y y - \omega t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t = \frac{q}{(2\pi)^3 v}e^{i\omega z/v}. \tag{56}$$

Так как больше всего мы будем иметь дело с проекцией вектора $\vec{E}$ на ось z, обозначим $\tilde{E}_z = E$. Производную по z будем отмечать штрихом. Уравнение (54 для преобразования этой проекции тогда примет вид

$$-\frac{\varepsilon}{c^2}\omega^2 E + (æ_x^2 + æ_y^2)E - E'' = -4\pi\left(\frac{1}{\varepsilon}i\frac{\omega}{v} - \frac{v}{c^2}i\omega\right)\tilde{\rho}. \tag{57}$$

Уравнение (57) можно переписать так:

$$\varepsilon E'' + \varepsilon\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - æ_\perp^2\right)E = -\frac{4\pi i\omega q}{c^2(2\pi)^3}\left(\varepsilon - \frac{c^2}{v^2}\right)e^{i\omega z/v}, \tag{58}$$

где $æ_\perp = |\vec{æ}_\perp|$, $\vec{æ}_\perp = (æ_x, æ_y, 0)$. Зависимость преобразований от частоты ω определяет временную, а от $\vec{æ}_\perp$ — пространственную дисперсии.

Найдя $E = \tilde{E}_z$, можно определить и проекции вектора $\tilde{\vec{E}}$ на плоскость. В частности, наиболее просто получить их комбинацию $E_{æ} = \vec{æ}_\perp \tilde{\vec{E}}_\perp = æ_x \tilde{E}_x + æ_y \tilde{E}_y$. Из второго уравнения в (52) следует, что

$$iE_{æ} + E' = \frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\rho}. \tag{59}$$

На границе сред должны быть непрерывны нормальные составляющие индукции и тангенциальные составляющие напряженности, запишем эти условия для преобразований:

$$\varepsilon_- E_-|_{z=0} = \varepsilon_+ E_+|_{z=0},\ (E_{æ})_-|_{z=0} = (E_{æ})_+|_{z=0}. \tag{60}$$

4. Решения уравнений. Частное решение уравнения (58) описывает поле самого заряда:

$$E^{\mathrm{q}} = -\frac{4\pi q(1 - c^2/v^2\varepsilon)}{\omega(2\pi)^3(\varepsilon - c^2/v^2 - æ_\perp^2 c^2/\omega^2)} e^{i\omega z/v}. \tag{61}$$

Решения однородного уравнения представляют свободные волны, то есть излучение:

$$E_\pm = \frac{4\pi q}{\omega(2\pi)^3} C_\pm e^{\pm i(\omega z/c)\sqrt{\varepsilon - æ_\perp^2 c^2/\omega^2}}. \tag{62}$$

Здесь амплитуды $C_\pm$ безразмерны.

Комбинация тангенциальных компонент находится из соотношения (59):

$$E_{æ}^{\mathrm{q}} = -\frac{æ_\perp^2 c^2}{v\omega}\frac{E^{\mathrm{q}}}{\varepsilon - c^2/v^2},\ (E_{æ})_\pm = \mp\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon - \frac{æ_\perp^2 c^2}{\omega^2}} E_\pm. \tag{63}$$

Характер написанных решений зависит от соотношения между коэффициентом диэлектрической проницаемости ε, параметром $æ_\perp$ и частотой ω. Если $\varepsilon < æ_\perp^2 c^2/\omega^2$, то показатели в экспонентах в (62) вещественны, при $z > 0$ необходимо взять отрицательный, а при $z < 0$ — положительный показатели, так что решения описывают затухающие от границы волны. Такие волны всегда возможны при определенных значениях ω и $æ_\perp$, но они нас не интересуют. Отвлечемся мы и от возможных решений, описывающих волны вдоль плоскости раздела сред. Наконец, если на границе нет разрыва и выполняется соотношение $\varepsilon = n^2 > c^2/v^2$, где n — показатель преломления, то это означает, что справедливо условие существования излучения Черенкова $v > c/n$. В частности, из (61) сравнительно легко можно получить формулу Тамма—Франка (50).

5. Амплитуды волн. Теперь примем условия $\dfrac{æ_\perp^2 c^2}{\omega^2} < \varepsilon_\pm < \dfrac{c^2}{v^2}$, для выполнения которых необходимо, чтобы было $\dfrac{\omega}{æ_\perp} > v$. Переходное излучение распространяется от границы раздела сред, то есть при положительных аппликатах в формулах (62) надо брать плюс, а при отрицательных — минус.

Для сокращения формул введем обозначения

$$\beta = \frac{v}{c},\ \zeta = \frac{æ_\perp c}{\omega},\ r_\pm = \sqrt{\varepsilon_\pm - \zeta^2},\ s_\pm = \varepsilon_\pm - \frac{1}{\beta^2} - \zeta^2 = -\frac{1}{\beta^2}(1 - \beta r_\pm)(1 + \beta r_\pm). \tag{64}$$

Запишем граничные условия (60), заранее сократив на общий множитель $\dfrac{4\pi i q}{\omega(2\pi)^3}$, выделив целую часть у возникающих дробей со знаменателями $s_\pm$ в первом равенстве и сократив на общий множитель дробей во втором:

$$\frac{\zeta^2}{s_-} - \varepsilon_- C_- = \frac{\zeta^2}{s_+} - \varepsilon_+ C_+,\ \frac{\zeta^2}{\beta\varepsilon_- s_-} + r_- C_- = \frac{\zeta^2}{\beta\varepsilon_+ s_+} - r_+ C_+. \tag{65}$$

Исключая по очереди два искомых коэффициента, найдем

$$C_+ = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{D\varepsilon_+}\frac{\beta\zeta^2}{1 - \beta r_-}\frac{1 - \beta^2\varepsilon_+ - \beta r_-}{1 - \beta^2 r_+^2},\ C_- = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{D\varepsilon_-}\frac{\beta\zeta^2}{1 + \beta r_+}\frac{1 - \beta^2\varepsilon_- + \beta r_+}{1 - \beta^2 r_-^2}, \tag{66}$$

где $D = \varepsilon_+ r_- + \varepsilon_- r_+$.

6. Предельные случаи. Если заряд нерелятивисткий, то есть $\beta \ll 1$, то оба коэффициента малы и при условии, что диэлектрические проницаемости ε не очень различаются, одного порядка:

$$C_\pm = \beta\zeta^2\frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{D\varepsilon_\pm}. \tag{67}$$

Сильное излучение возникает на высоких частотах, если заряд ультрарелятивистский, причем, как обычно для таких случаев, излучение идет узкими пучками в определенных направлениях. Действительно, пусть $\beta \sim 1, \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \gg 1$. На высоких частотах почти всегда оправдано использование формулы для диэлектрической проницаемости, которая характерна для дисперсии в плазме. Мы примем эту формулу, причем используем обозначение плазменной частоты:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}, \;\; \omega_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_{\mathrm{e}}}{m}}. \tag{68}$$

Введем безразмерные величины, имеющие порядок 1, выделив множитель γ:

$$\zeta = \frac{æ_\perp c}{\omega} = \frac{æ c}{\omega}\sin\theta = \frac{\theta_0}{\gamma}, \;\omega = \frac{\omega_{\mathrm{p}\,\pm}}{\Omega_\pm}\gamma, \;\varepsilon_\pm \sim 1 - \frac{\Omega_\pm^2}{\gamma^2}. \tag{69}$$

Тогда $D \sim 2, \; 1+\beta r_\pm \sim 2, \; \varepsilon_+ - \varepsilon_- \sim \dfrac{\omega_{\mathrm{p}\,-}^2 - \omega_{\mathrm{p}\,+}^2}{\omega^2} = \dfrac{\Omega_-^2 - \Omega_+^2}{\gamma^2}$,

$$1 - \beta r_\pm \sim 1 - \beta\sqrt{1 - \frac{\Omega_{\mathrm{p}\,\pm}^2}{\gamma^2} - \frac{\theta_0^2}{\gamma^2}} \sim 1 - \beta + \frac{\beta}{2\gamma^2}(\Omega_{\mathrm{p}\,\pm}^2 + \theta_0^2) \sim \frac{1+\theta_0^2+\Omega_\pm^2}{2\gamma^2}. \tag{70}$$

Числители последних дробей в формулах (66) при принятых предположениях можно заменить на -1 у C_+ и на 1 у C_+. Подставляя все это в указанные формулы, получим

$$C_+ \sim \frac{\Omega_+^2 - \Omega_-^2}{1+\theta_0^2+\Omega_+}\frac{\theta_0^2}{1+\theta_0^2+\Omega_-}, \; C_- \sim \frac{\Omega_-^2 - \Omega_+^2}{4\gamma^2}\frac{\theta_0^2}{1+\theta_0^2+\Omega_-} = -\frac{C_+}{4\gamma^2(1+\theta_0^2+\Omega_+^2)}. \tag{71}$$

Амплитуда волны, направленной в сторону движения заряда конечна, а в противоположную сторону — мала.

Литература

1. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.. Квантовая электродинамика. М. Наука. 1989, 728 с.
2. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М., Физматгиз, 1960, 562 с.
3. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. М., Наука, 1987, 488 с.
4. Гинзбург В. Л., Франк И. М. // Журн. экспер. теор. физ. 1946. Т. 16. С. 15.
5. Завлин В. Е., Шибанов Ю. А. Комптонизация рентгеновского излучения в плазме аккрецирующих нейтронных звезд // Астрон. журн. 1989. Т. 66. С. 983–995.
6. Зельдович Я. Б. Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением // Успехи физ. наук. 1975. Т. 115. С. 161–197.
7. Зельдович Я. Б., Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Влияние выделения энергии на спектр излучения в горячей Вселенной // Журн. экспер. теор. физ. 1972. Т. 62. С. 1217–1227.
8. Зельдович Я. Б., Левич Е. В. Бозе-конденсация и ударные волны в спектре фотонов // Журн. экспер. теор. физ. 1968. Т. 55. С. 24–23.
9. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Наука, 1966, 688 с.
10. Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А. Межгалактический газ в скоплениях галактик, микроволновое фоновое излучение и космология // Астрофизика и космическая физика. М.: Наука, 1982. С. 9–65.
11. Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комптон-эффект на тепловых электронах в источниках рентгеновского излучения // Астрон. журн. 1972. Т. 49. С. 58–73.
12. Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комптонизация, характерные спектры и тепловой баланс разреженной плазмы // Астрон. журн. 1974. Т. 51. С. 698–711.
13. Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комптонизация, спектр реликтового излучения и тепловая история Вселенной // Астрон. журн. 1974. Т. 51. С. 1162–1176.
14. Каплан С. А., Пикельнер С. Б. Межзвездная среда. М., Наука, 1963, 532 с.
15. Каплан С. А., Пикельнер С. Б. Физика межзвездной среды. М., Наука, 1979, 592 с.
16. Каплан С. А., Цитович В. Н.. Плазменная астрофизика. М., Наука, 1973, 440 с.
17. Кардашев Н. С. Астрон. журн. 1959. Т. 36. С. 838.
18. Компанеец А. С. Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами // Журн. экспер. теор. физ. 1956. Т. 31. С. 876–885.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. Наука, М., 1988, 512 с.
20. Левич Е. В., Сюняев Р. А. Нагрев газа вблизи квазаров, ядер сейфертовских галактик и пульсаров низкочастотным излучением // Астрон. журн. 1971. Т. 48. С. 461–470.
21. Нагирнер Д. И. Рассеяние пространственно однородного изотропного излучения на холодном электронном газе // Астрофизика. 1984. Т. 20. С. 149–156.
22. Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М. Функция Грина линейного уравнения Компанейца // Астрофизика. 1997. Т. 40. С. 97–116.
23. Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М. Коэффициент комптоновского ослабления при рассеянии максвелловскими электронами // Астрофизика. 2000. Т. 43. С. 473–482.
24. Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М., Грачев С. И. Точные и численные решения уравнения Компанейца: эволюция спектра и средних частот // Астрофизика. 1997. Т. 40. С. 350–364.
25. Нагирнер Д. И., Кикец Е. В., Поутанен Ю. Й. Однократное комптоновское рассеяние // Уч. зап. Ленингр. ун-та. 1991. N 427. (Труды Астрон. обсерв. ЛГУ. Т. 43). С. 28–70.
26. Поздняков Л. А., Соболь И. М., Сюняев Р. А. Комптонизация и формирование спектров рентгеновских источников. Методика расчетов методом Монте-Карло // Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 21. С. 238–307.
27. Поздняков Л. А., Соболь И. М., Сюняев Р. А. Комптонизация и формирование спектров рентгеновских источников. II // Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 31. С. 267–331.
28. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., Наука, 1983, 752 с.
29. Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. М., Наука, 1985, 504 с.
30. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., Наука, 1974, 392 с.

31. Физика космоса. Маленькая энциклопедия. Ред. Р. А. Сюняев. М., Советская энциклопедия, 1986, 784 с.

32. Шкловский И. С. Астрон. журн. 1953. Т. 30. С. 15.

33. Charles Ph. Black holes in our Galaxy: observation // Theory of Black Holes Accretion Discs / Eds. M. A. Abramowicz, G. B. Björnsson, J. E. Pringle. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. P. 1–21.

34. Dermer C. D., Sturner S. J., Schlickeiser R. Nonthermal Compton and synchrotron processes in jets of active galactic nuclei // Astrophys. J. Suppl. Ser. 1997. Vol. 109. P. 103–137.

35. Dolgov A. D., Doroshkevich A. G., Novikov D. I., Novikov I. D. Classification of singular points in polarization field of cosmic microwave background and eigenvectors of Stokes matrix // Письма в журн. эсперим. теор. физ. 1999. Т. 69. С. 395–401.

36. Frank J., King A., Raine D. Accretion Power in Astrophysics. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 294 p.

37. Ghisellini G. Pair production in steady synchrotron self-Compton models // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1989. Vol. 238. P. 449–479.

38. Ghisellini G., Haardt F., Svensson R. Thermalization by synchrotron absorption in compact sources: electron and photon distributions // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1998. Vol. 297. P. 348–354.

39. Ginzburg V. L., Syrovatskii S. I. Developments in the theory of synchrotron radiation and its reabsorption. Ann. Rev. Astron. Astrophys, 7, 375–420, 1969.

40. Madej J., Rożańska A. X-ray irradiated model stellar atmospheres. II. Comprehensive treatment of Compton scattering // Astron. Astrophys. 2000. Vol. 363. P. 1055–1064.

41. Madejski G. M. Black holes in active galactic nuclei: observation // Theory of Black Holes Accretion Discs / Eds. M. A. Abramowicz, G. B. Björnsson, J. E. Pringle. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. P. 22–40.

42. Marscher A. P., Gear W. K. Models for high-frequency radio outbursts in extragalactic sources, with application to the early 1983 millimetre-to-infrared flare of 3C 273 // Astrophys. J. 1985. Vol. 298. P. 114–127.

43. Menzel D. . Physical processes in gaseous nebulae. I. Absorption and emission of radiation. Astrophys. J. 1937. V. 85. N 4. P. 330–339. (Русский перевод: Д.Мензел. Поглощение и излучение света в условиях газовых туманностей. С. 9 в сб. "Физические процессы в газовых туманностях", под ред. Д.Мензела и др. ИЛ. 1948.)

44. Molnar S. M., Birkinshaw M. Inverse Compton scattering in mildly relativistic plasma // Astrophys. J. 1999. Vol. 523 P. 78–86.

45. Moskalenko I. V., Strong A. W. Anisotropic inverse Compton scattering in the Galaxy // Astrophys. J. 2000. Vol. 528. P. 357–367.

46. Nagirner D. I., Poutanen J. Single Compton scattering // Astrophys. Space Phys. Rev. 1994. Vol. 9. P. 1–80.

47. Peterson B. M. An Introduction to Active Galactic Nuclei. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 238 p.

48. Poutanen J. Accretion disc-corona models and X/γ-ray spectra of accreting black holes // Theory of Black Holes Accretion Discs / Eds. M. A. Abramowicz, G. B. Björnsson, J. E. Pringle. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. P. 100–122.

49. Poutanen J., Svensson R. The two-phase pair corona model for active galactic nuclei and X-ray binaries: how to obtain exact solutions // Astrophys. J. 1996. Vol. 470. P. 249–268.

50. Puy D., Grenacher L., Jetzer Ph., Signore M. Asphericity of galactic clusters and Sunyaev—Zel'dovich effect // Astron. Astrophys. 2000. Vol. 363. 415–424.

51. Rephaeli Y. Comptonization of the cosmic microwave background: the Sunyaev—Zeldovich effect // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1995. Vol. 33. P. 541–579.

52. Rybicki G. B., Lightman A. P. Radiative processes in astrophysics. Wiley-Interscience. John Wiley & Sons. N. Y. 1979. 382 p.

53. Svensson R. Thermalization mechanisms in compact sources // High Energy Processes in Accreting Black Holes / Eds. J. Poutanen and R. Svensson. Astronomical Society of the Pacific. Conference Series. 1999. Vol. 161. P. 361–374.

54. Weymann R. The energy spectrum of radiation in the expanding universe // Astrophys. J. 1966. Vol. 145. P. 560–571.

55. Xue Y.-J., Wu X.-P. Reconstruction of radial temperature profile of galaxy clusters // Astron. Astrophys. 2000. Vol. 360. L43–L46.

56. Zel'dovich Ya. B., Sunyaev R. A. The interaction of matter and radiation in a hot-model universe // Astrophys. Space Sci. 1969. Vol. 4. P. 301–316. (Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А. Взаимодействие вещества и излучения в горячей модели Вселенной // Astrophys. Space Sci. 1969. Vol. 4. P. 285–300.)