Санкт-Петербургский государственный университет

Д. И. Нагирнер

Комптоновское рассеяние в астрофизических объектах

Учебно-методическое пособие
для студентов астрономического отделения

Санкт-Петербург
2001

УДК 52–64
ББК 22.632
Н16

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского государственного университета

Нагирнер Д. И.

Н16

Комптоновское рассеяние в астрофизических объектах:
Учебно-методическое пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. — 32 (55) с.

В пособии дается представление о комптоновском рассеянии и его значении в формировании спектров астрофизических объектов.

Рассказывается об открытии эффекта Комптона и становлении квантовой теории, необходимой для его описания. Приводятся характеристики процесса: изменение частоты рассеиваемого фотона и эффективное сечение. Получено релятивистское кинетическое уравнение, описывающее пространственную и частную эволюцию излучения при многократном рассеянии, а также предельная форма уравнения, справедливая для нерелятивистских электронов. Рассмотрены случаи плоской и бесконечной однородной сред. Выводятся известные решения уравнения Компанейца, которые иллюстрируются рисунками. На рисунках отображены также некоторые численные решения этого уравнения. Перечисляются модели свечения объектов, в которых комптоновское рассеяние играет определяющую роль.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся по астрофизике.

ББК 22.632

© Д. И. Нагирнер, 2001

© Издательство
С.-Петербургского
университета, 2001

Рассеяние излучения электронами, называемое комптоновским, играет важную роль в формировании спектров ряда объектов в Метагалактике, изучаемых астрофизиками. Здесь дается понятие об этом виде рассеяния.

§ 1. Комптоновское рассеяние: открытие и описание

1. Немного истории. В 1923 году Artur Holly Compton (1892–1962) опубликовал статью об открытии эффекта, впоследствии получившего его имя. Эффект заключался в том, что при рассеянии излучения в линии молибдена (длина волны 0.71 $\mathring{A}$) на мишени — парафине — частота, а следовательно и энергия фотонов, уменьшалась (длина волны увеличивалась). Комптон дал правильную интерпретацию эффекта на основе законов сохранения энергии и импульса. С тех пор величина

$$\lambda_{\rm C} = \frac{h}{mc} = 0.024\,\mathring{A}, \quad \lambda\!\!\!^{-}_{\rm C} = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\lambda_{\rm C}}{2\pi}, \tag{1}$$

называется комптоновской длиной волны. За свое открытие Комптон в 1927 году получил Нобелевскую премию по физике вместе с Charles Thomson Ries Wilson (1869–1959) — изобретателем камеры Вильсона.

В эти годы создавалась квантовая теория. В 1926–1927 годах был разработан метод вторичного квантования, а в 1928 году Paul Adrian Morice Dirac (1902–1984) вывел уравнение Дирака, описывающее частицы со спином 1/2, в частности электроны, и предсказавшее существование позитронов.

Дело в том, что уравнение Дирака имело не два, а четыре независимых решения для частицы с одной величиной энергии. Два из них соответствовали двум проекциям спина электрона, а два других описывали частицы с отрицательной полной энергией. Энергия включала энергию покоя, так что ее отрицательность означала, что частицы имеют отрицательную массу. Частица с отрицательной массой покоя — очень своеобразное явление. Когда на нее действует сила, такая частица получает ускорение в противоположном направлении. Еще более странно поведение пары частиц, одна из которых имеет положительную, а другая — равную по величине отрицательную массы. Они по закону Ньютона притягивают друг друга с одинаковой силой, однако если обычная частица ускоряется в сторону притягивающей ее компаньонки, то частица с отрицательной массой — в ту же сторону. Таким образом пара будет ускоряться в сторону частицы с отрицательной массой. Ясно, что таких частиц быть не может.

Дирак придумал способ устранения этой трудности, названный теорией дырок. Он предположил, что все состояния с отрицательной энергией заняты, но не наблюдаемы. Тогда переход в эти состояния невозможен по принципу запрета Паули для фермионов: два фермиона, в частности два электрона, не могут находиться в одном состоянии. Между полностью заполненными состояниями с отрицательными энергиями и состояниями с положительными энергиями имеется энергетический зазор шириной в $2mc^2$.

Однако, ничто не воспрещает частице с отрицательной энергией получить прибавку энергии больше $2mc^2$ и перейти в состояние с положительной энергией. Тогда в море состояний с отрицательными энергиями образуется дырка. Отсутствие электрона с отрицательной энергией проявляется как частица с противоположными свойствами: у нее энергия положительна, но и заряд тоже положителен. Такие частицы не были тогда известны. Дирак предполагал, что это могут быть протоны, однако масса протона не равна массе электрона, так что, как доказал Hermann Weil (1885–1955), предположение о протоне оказалось несостоятельным. Предсказание существования указанной частицы, названной позитроном, оправдалось экспериментально.

Позитроны были открыты в 1932 году Carl David Anderson (1905–1991) в космических лучах. Это открытие весьма поучительно [4]. Дело в том, что позитроны видели и до опытов Андерсона. Некоторые физики-экспериментаторы замечали, что в камере Вильсона с магнитным полем иногда частица из радиоактивного образца при бета-распаде летела по противоположно направленной спирали (по сравнению с траекториями всех других частиц — электронов). Если считать, что такие неправильные частицы — тоже электроны, то надо признать, что они летят не из источника, а в источник. На эти события просто не обращали внимания, считая их случайными. Первым сказал Дираку о предполагаемом существовании новой частицы Patrik Meinard Steward Blackett (1897–1974). Он отметил, что неправильные события происходят слишком часто, чтобы их считать случайными. Однако Блэкетт не хотел публиковать свои результаты без тщательной проверки. Пока он перепроверял опыты, его опередил Андерсон.

Заслуга Андерсона состоит в прямом доказательстве того, что странно ведущие себя частицы не электроны, а частицы с массой электрона и противоположным зарядом. На пути частиц он поставил свинцовую пластинку. После прохождении пластинки электроны тормозились и радиус их круговой траектории уменьшался. Точно так же вели себя и частицы, движущиеся якобы в противоположную сторону. Если

бы это были обратные электроны, то надо было бы считать, что при прохождении через пластинку эти частицы приобретают дополнительную энергию, что невозможно. Задним числом обнаружилось, что на старых фотографиях, даже опубликованных, можно было видеть следы позитронов. За открытие позитрона Андерсон получил Нобелевскую премию в 1936 году. Заметим попутно, что Блэкетт также получил Нобелевскую премию, но в 1948 году, за оснащение камеры Вильсона управляющими счетчиками, что позволило сделать ряд открытий.

Помимо законов сохранения, как известно, рассеяние описывается сечением. Формулу для сечения комптоновского рассеяния вывели почти одновременно швед Oskar Klein (1894–1977) и японец Uoshio Nishina (1990–1951) в 1929 году, а также независимо от них советский физик Игорь Евгеньевич Тамм (1895–1971) в 1930 году. Эта формула называется формулой Клейна—Нишины, иногда Клейна—Нишины—Тамма.

Вывод подобных формул в то время был сопряжен с очень громоздкими выкладками и занимал много времени. В 1949 году Richard Feynman (1918–1988) придумал диаграммы Фейнмана, которые не только давали схему процессов квантовой электродинамики, но и позволяли очень просто выписывать и вычислять матричные элементы, через которые выражаются сечения и вероятности процессов. Только после этого в 1949 году оказалось возможным вывести выражения для матрицы сечений рассеяния электронами поляризованного излучения (U. Fano). Квантовая электродинамика устранила также необходимость введения моря занятых состояний с отрицательными энергиями и ликвидировала тем самым несимметрию описания электронов и позитронов.

2. Комптоновское рассеяние и изменение энергии фотона. Комптоновское рассеяние — это акт взаимодействия электрона и фотона, в результате которого эти частицы изменяют свои импульсы, энергии и состояния поляризации. Поэтому часто говорят, что частицы после рассеяния — не те, что были перед рассеянием. Подробное описание физики этого процесса и его использования при интерпретации наблюдений астрофизических объектов содержится в обзорах [6, 22, 23].

Пусть взаимодействуют фотон с импульсом $\mathbf{k}$ и электрон с импульсом $\mathbf{p}$. После рассеяния их импульсы изменяются и становятся равными соответственно $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{p}_1$. Энергии этих частиц ck, cp_0, ck_1, $cp_{0\,1}$. Для импульсов электрона справедливы обычные релятивистские соотношения [15]

$$p_0 = \sqrt{m^2c^2 + p^2},\ p_{0\,1} = \sqrt{m^2c^2 + p_1^2}. \tag{2}$$

Комптоновскому рассеянию отвечают две диаграммы Фейнмана [1], представленные на рис. 1. Электрон изображается сплошной линией, а фотон волнистой. Время течет снизу вверх. Взаимодействие происходит в точках, где встречаются электронные и фотонные линии.

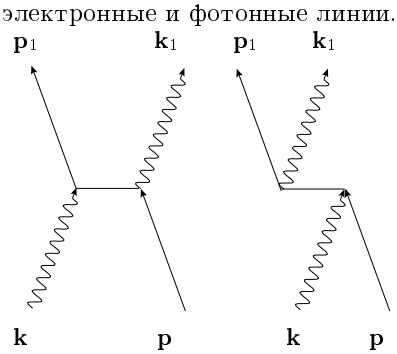

Рис. 1. Диаграммы комптоновского рассеяния.

Отметим, что свободный электрон не может поглотить или излучить фотон, так как при таких процессах невозможно сохранение импульса и энергии. Действительно, например, при поглощении электроном с импульсом $\mathbf{p}$ фотона с импульсом $\mathbf{k}$ должны были бы выполняться законы сохранения

$$\mathbf{p} + \mathbf{k} = \mathbf{p}_1, \quad p_0 + k = p_{0\,1}. \tag{3}$$

Исключение из двух равенств импульса $\mathbf{p}_1$ приводит к соотношениям, являющимся их следствиями:

$$\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{k})^2} = p_0 + k, \quad \mathbf{pk} = p_0 k. \tag{4}$$

Но последнее соотношение невозможно, так как его левая часть — скалярное произведение трехмерных векторов — всегда не превосходит pk, в то время как правая — всегда больше pk.

Комптоновское рассеяние электроном фотона (или наоборот) — это процесс второго порядка: взаимодействие происходит дважды [1]. Диаграммы отличаются последовательностью излучения и поглощения фотонов электроном. Между взаимодействиями линии изображают виртуальные электроны с необычными свойствами: у них не выполняются соотношения вида (2). Однако ничего страшного в этом нет, так как имеют значение состояния частиц только до начала и после конца полного процесса взаимодействия.

Независимо от вида диаграммы при рассеянии выполняются четыре закона сохранения

$$p_0 + k = p_{0\,1} + k_1, \quad \mathbf{p} + \mathbf{k} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1. \tag{5}$$

Выразим вектор импульса электрона после рассеяния через остальные и подставим в равенство, выражающее закон сохранения энергии:

$$p_0 + k - k_1 = \sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2}. \tag{6}$$

Возводя в квадрат и сокращая, получаем

$$kp_0 - \mathbf{kp} = k_1 p_0 - \mathbf{k}_1\mathbf{p} + kk_1 - \mathbf{k}\mathbf{k}_1. \tag{7}$$

Обозначим косинусы углов между парами векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$, $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{p}$ соответственно через μ, ζ и ζ_1. Тогда соотношение (7) перепишется в виде

$$k(p_0 - p\zeta) = k_1[p_0 - p\zeta_1 + k(1 - \mu)]. \tag{8}$$

Из него находится величина импульса фотона после рассеяния

$$k_1 = k\frac{p_0 - p\zeta}{p_0 - p\zeta_1 + k(1 - \mu)}. \tag{9}$$

Рассмотрим частный случай, когда до рассеяния электрон покоится, т. е. $p = 0$. Тогда $p_0 = mc$ и

$$k_1^0 = k^0\frac{mc}{mc + k^0(1 - \mu_0)}. \tag{10}$$

Вспомнив, что импульс фотона $k = \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$, перепишем формулу (10) через длины волн

$$\lambda_1^0 = \lambda^0 + \lambda_{\mathrm{C}}(1 - \mu_0) \tag{11}$$

или через величины, деленные на 2π:

$$\lambda\!\!\!^{-}{}_1^0 = \lambda\!\!\!^{-}{}^0 + \lambda\!\!\!^{-}_{\mathrm{C}}(1 - \mu_0). \tag{12}$$

При рассеянии фотона на покоящемся электроне частота фотона всегда уменьшается , и в этом заключается эффект Комптона. При $\mu_0 = 1$, т. е. при рассеянии вперед, рассеянный фотон пролетает, как будто не испытал взаимодействия, а электрон остается неподвижным. Рассеяние под прямым углом ($\mu_0 = 0$) дает увеличение длины волны ровно на λ_{C}. Максимальное увеличение λ на две комптоновские длины волны достигается, когда фотон изменяет свое направление на противоположное. Потеря энергии фотоном, называемая эффектом отдачи, происходит вследствие передачи им части своего импульса, а значит и энергии, первоначально покоящемуся электрону, который приходит в движение.

Напомним, что Комптон наблюдал рассеяние рентгеновского излучения на молекулах углеводорода, в которых электроны сравнительно слабо связаны с ядрами и могут считаться свободными и неподвижными: энергии ионизации малы по сравнению с энергией рентгеновского фотона, а движения молекул в твердом теле незначительны.

Если электрон не стоял на месте, то при различном соотношении направлений и величин импульсов реагирующих частиц фотон может как увеличивать, так и уменьшать свою энергию, но это уже не эффект Комптона в чистом виде, а скорее следствие эффекта Доплера. Действительно, мы должны перейти в систему отсчета, связанную с электроном до рассеяния, которую мы будем называть лабораторной. Там фотон уменьшит свою энергию, а затем нам надо вернуться в исходную систему отсчета. В результате таких переходов фотон меняет свою энергию вследствие эффекта Доплера. Однако в астрофизической литературе увеличение энергии фотонов при комптоновском рассеянии их энергичными электронами принято называть обратным эффектом Комптона.

Комптоновская длина волны очень мала — ей соответствует энергия, равная энергии покоя электрона 511 *кэВ*. Поэтому увеличение длины волны фотона при рассеянии на нерелятивистском электроне заметно, только если длина волны рассеиваемого фотона не очень существенно отличается от комптоновской. Горячие электроны могут передать значительную долю своей энергии фотону и вызывать гораздо бóльшие смещения длины волны, которые доступны измерениям даже в радиодиапазоне. Релятивистские же электроны сразу переводят излучение из радио в оптический диапазон, из оптического — в рентгеновский, из ультрафиолетового — в область гамма-излучения.

3. Эффективность комптоновского рассеяния. Комптоновское рассеяние обычно сравнивают с так называемым тормозным излучением, или свободно-свободными переходами, т. е. излучением электрона, пролетающего вблизи иона и тормозящегося им.

Коэффициент тормозного излучения, или, иначе, излучательная способность вещества, — количество энергии, излучаемой единицей объема за единицу времени в единичном телесном угле при взаимодействии электронов, импульсы которых распределены согласно формуле Максвелла с температурой T, с водородоподобными ионами с зарядом ядра Z, с точностью до множителя порядка 1 дается формулой Крамерса (см., например, [24])

$$\varepsilon_{\rm cc}(\nu) = n_{\rm e} n^{+} \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{c^3} \frac{k_{\rm B}T}{(2\pi m k_{\rm B}T)^{3/2}} e^{-h\nu/k_{\rm B}T}. \tag{13}$$

Здесь $n_{\rm e}$ и n^{+} — концентрации электронов и ионов, $k_{\rm B}$ — постоянная Больцмана, ν — частота излучения.

Напишем уравнение переноса излучения с учетом тормозных процессов и комптоновского рассеяния:

$$\frac{\partial I}{\partial l} = -(\alpha_{\rm cc} + \alpha_{\rm C}) I + \varepsilon_{\rm cc}(1+n) + \varepsilon_{\rm C}. \tag{14}$$

Здесь $\alpha_{\rm cc}$ и $\alpha_{\rm C}$ — коэффициенты ослабления при тормозном поглощении и комптоновском рассеянии соответственно, $\varepsilon_{\rm C}$ — коэффициент излучения за счет комптоновского рассеяния, I и n — интенсивность и средние числа заполнения фотонных состояний, $I = (2h\nu^3/c^2)n$, l — геометрическое расстояние вдоль луча. Уравнение переноса можно записать и для средних чисел заполнения:

$$\frac{\partial n}{\partial l} = -(\alpha_{\rm cc} + \alpha_{\rm C}) n + n_{\rm cc}(1+n) + n_{\rm C}, \tag{15}$$

где

$$n_{\rm cc} = \frac{c^2}{2h\nu^3}\varepsilon_{\rm cc}, \quad n_{\rm C} = \frac{c^2}{2h\nu^3}\varepsilon_{\rm C}. \tag{16}$$

Предположим, что вещество и излучение находятся в состоянии термодинамического равновесия (ТДР). Тогда интенсивность излучения не зависит от направления и дается формулой Планка

$$I_0 = \frac{2h\nu^3}{c^2} n_0, \quad n_0 = \frac{1}{e^{h\nu/k_{\rm B}T} - 1}. \tag{17}$$

Следствием ТДР является условие детального баланса, которое выполняется отдельно для тормозного и комптоновского процессов:

$$\alpha_{\rm cc} n_0 = n_{\rm cc}(1+n_0), \quad \alpha_{\rm C} n_0 = n_{\rm C}. \tag{18}$$

Из первого соотношения вытекает закон Кирхгофа—Планка

$$\alpha_{\rm cc} = n_{\rm cc} e^{h\nu/k_{\rm B}T}. \tag{19}$$

Не уточняя здесь слагаемого, описывающего излучение за счет комптоновского рассеяния, составим отношение коэффициентов ослабления. В качестве сечения рассеяния возьмем томсоновское $\sigma_{\rm T} = \dfrac{8\pi}{3} r_{\rm e}^2$, $r_{\rm e} = \dfrac{e^2}{mc^2}$. Тогда безразмерное отношение

$$\frac{\alpha_{\rm C}}{\alpha_{\rm cc}} = \frac{n_{\rm e}\sigma_{\rm T}}{n_{\rm cc} e^{h\nu/k_{\rm B}T}} = \frac{n_{\rm e}\dfrac{8\pi}{3}\left(\dfrac{e^2}{mc^2}\right)^2}{\dfrac{c^2}{2h\nu^3} n_{\rm e} n^{+} \dfrac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \dfrac{Z^2 e^6}{c^3} \dfrac{k_{\rm B}T}{(2\pi m k_{\rm B}T)^{3/2}}} = \frac{\overline{v}}{c} \frac{\sqrt{3}\pi^2}{n^{+}\lambda^3} \frac{\hbar c}{Z^2 e^2} = 2.342 \cdot 10^3 \frac{\overline{v}}{c} \frac{1}{Z^2 (n^{+}\lambda^3)}, \tag{20}$$

где $\overline{v} = \sqrt{\dfrac{8k_{\rm B}T}{\pi m}}$ — средняя скорость электронов. Для водородного газа надо положить $Z = 1$ и $n^+ = n_{\rm e}$. Отношение (20) представлено в виде произведения безразмерных множителей, в частности, произведение $n^+\lambda^3$ есть число ионов в кубике с длиной ребра, равной длине волны рассеиваемого излучения.

Из полученной формулы видно, что рассеяние электронами играет более существенную роль по сравнению с тормозным излучением при низких концентрациях электронов, высоких температурах газа и малых длинах волн излучения. Короче говоря, томсоновское и комптоновское рассеяние необходимо принимать во внимание в горячих разреженных средах, причем комптоновское рассеяние, т. е. рассеяние с изменением частоты излучения, существенно тогда, когда средние энергии электронов и/или фотонов велики настолько, что сравнимы с энергией покоя электрона. В таких средах это основной механизм обмена энергией между веществом и излучением.

Сечение комптоновского рассеяния в отличие от томсоновского зависит от частоты рассеиваемого фотона, о чем говорится в следующем пункте.

4. Сечение комптоновского рассеяния. Это сечение рассчитывается, как уже говорилось, методами квантовой электродинамики [1], которая является релятивистской теорией. Поэтому для записи релятивистского сечения комптоновского рассеяния введем релятивистские обозначения для некоторых величин.

Импульс электрона зададим четырехмерным вектором $\underline{p} = \{p_0, \mathbf{p}\}$, где использованы уже применявшиеся обозначения. Аналогично импульс фотона $\underline{k} = \{k, \mathbf{k}\}$. Четырехмерное скалярное произведение $\underline{pk} = p_0 k - \mathbf{pk}$. Для других векторов оно определяется точно так же, со знаком минус перед трехмерным скалярным произведением. В частности, $\underline{p}^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$, $\underline{k}^2 = k^2 - \mathbf{k}^2 = 0$: импульс электрона — времениподобный вектор, а импульс фотона — нулевой.

Существенной частью сечения Клейна—Нишины—Тамма является безразмерный лоренцевский инвариант

$$F(\xi, \xi_1) = \mu_0^2 - 1 + B, \quad B = \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi}. \tag{21}$$

Здесь

$$\xi = \underline{pk}/m^2c^2 = k^0/mc, \quad \xi_1 = \underline{pk}_1/m^2c^2 = k_1^0/mc \tag{22}$$

— безразмерные скалярные произведения импульсов электрона и фотона, равные соответственно безразмерному же импульсу фотона до и после рассеяния в лабораторной системе (где $p = 0$). Величина μ_0 — это уже использовавшийся косинус угла рассеяния в той же лабораторной системе отсчета, которая является собственной для электрона до рассеяния. Согласно (10) его можно записать в виде

$$\mu_0 = 1 + \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1}. \tag{23}$$

Величина B всегда больше 2, но при нерелятивистских электронах и мягких фотонах близка к 2. Написав сечение в виде

$$F(\xi, \xi_1) = \mu_0^2 + 1 + B - 2, \tag{24}$$

убеждаемся, что оно в лабораторной системе представляет собой сумму рэлеевской индикатрисы (слагаемое $\mu_0^2 + 1$) с небольшой добавкой. Эта добавка зависит от частот фотона до и после рассеяния, но не зависит от их направлений. Таким образом, комптоновское рассеяние в лабораторной системе — это комбинация рэлеевского и изотропного рассеяния.

Развернутое выражение для F имеет вид

$$F(\xi, \xi_1) = \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1}\right) + \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi}. \tag{25}$$

Полное сечение рассеяния представляется интегралом, который вычисляется:

$$\sigma_0 = \frac{r_{\rm e}^2}{2\xi^2}\int F x_1^2 d^2\omega_1 = \frac{r_{\rm e}^2}{2\xi^2}\int\limits_{-1}^{1} F\xi_1^2 d\mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\phi_0 = \frac{r_{\rm e}^2}{2\xi^2} 2\pi \int\limits_{\xi/(1+2\xi)}^{\xi} F d\xi_1 = \sigma_{\rm T} s_0(\xi), \tag{26}$$

где ϕ_0 — азимут рассеянного фотона в лабораторной системе, а $s_0(\xi)$ — профиль полного сечения:

$$s_0(\xi) = \frac{3}{8\xi^2}\left[4 + \left(\xi - 2 - \frac{2}{\xi}\right)\ln(1+2\xi) + 2\xi^2\frac{1+\xi}{(1+2\xi)^2}\right], \tag{27}$$

нормированный условием $s_0(0) = 1$.

5. Упрощенное сечение. Если пренебречь отличием величины B от 2 и принять, что в лабораторной системе рассеяние изотропно, заменив точное сечение (21) его средним значением $F^{\rm apr} = \overline{F} = 1+1/3 = 4/3$, что сохраняет нормировку на полное сечение вида (26), то дифференциальное сечение представится такой же формулой (26), но с гораздо более простым выражением для профиля $s_0(\xi)$:

$$s_0^{\rm apr}(\xi) = \frac{1}{1+2\xi}. \tag{28}$$

Многие величины могут быть оценены при использовании такого сечения, причем затраты усилий для этого значительно меньше, чем при точном сечении. На рис. 2 изображены графики точного и упрощенного полных сечений.

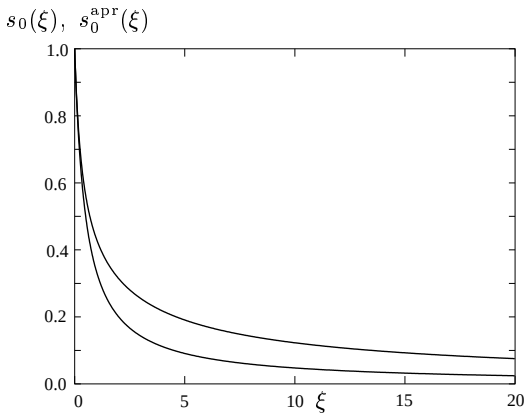

Рис. 2. Графики точного (верхний) и упрощенного (нижний) полных сечений.

На больших частотах эти функции сильно разнятся, однако при $\xi < 0.1$ они очень близки. Заметим тут, что значение безразмерной частоты ξ, равное 0.1, соответствует длине волны $0.1\lambda_{\rm C} = 0.24\,\mathring{A}$, т. е. область близости рассматриваемых функций включает видимую часть спектра, ультрафиолет и рентген.

Мы говорили об однократном взаимодействии электрона и фотона. Многократное рассеяние, т. е. взаимодействие электронного и фотонного газов посредством комптоновского рассеяния описывается кинетическим уравнением, которое мы сформулируем ниже.

§ 2. Кинетическое уравнение для комптоновского рассеяния и его частные случаи

1. Релятивистские обозначения. Упомянутое уравнение является релятивистским обобщением уравнения Больцмана. Для его написания подберем релятивистские аналоги величин, входящих в уравнение Больцмана.

В указанном уравнении, точнее в интеграле столкновений, производятся интегрирования по импульсам частиц. Однако трехмерный элемент объема в пространстве импульсов d^3p не является релятивистским инвариантом. Для получения его скалярного обобщения откажемся временно от соотношения (2) и будем считать нулевую составляющую четырехмерного импульса электрона p_0 независимой величиной. Очевидно, что произведение четырех дифференциалов $d^4p = dp_0 d^3p$ — скалярная величина. От искуственно введенной независимой координаты p_0 надо избавиться, т. е. взять по ней интеграл. Для учета соотношения (2) введем множителем инвариантную дельта-функцию $\delta\left(\underline{p}^2 - m^2c^2\right)$:

$$\begin{aligned}
\int \delta\left(\underline{p}^2 - m^2c^2\right) d^4p = d^3p \int dp_0\, \delta\left(p_0^2 - p^2 - m^2c^2\right) = \\
= d^3p \int dp_0\, \delta\left(\left(p_0 - \sqrt{p^2+m^2c^2}\right)\left(p_0 + \sqrt{p^2+m^2c^2}\right)\right) = \\
= d^3p \int dp_0\, \delta\left(\left(p_0 - \sqrt{p^2+m^2c^2}\right) 2\sqrt{p^2+m^2c^2}\right) = \frac{d^3p}{2\sqrt{p^2+m^2c^2}}.
\end{aligned} \tag{29}$$

При проведении выкладки было учтено, что в нуль в аргументе дельта-функции обращается только множитель с разностью, а при переходе к последнему выражению множитель с суммой был упрощен (заменен удвоенным корнем) и вынесен из-под знака этой функции в знаменатель, так как замена переменной интегрирования дает тот же результат. В дальнейшем в знаменателе вместо корня для краткости будем писать p_0, считая соотношение (2) выполненным. Итак, релятивистским инвариантом является отношение $\dfrac{d^3p}{p_0}$, что можно проверить и непосредственно, применив к нему преобразование Лоренца.

Действительно, пусть штрихованная система отсчета (в которой координаты векторов отмечены штрихами) движется по отношению к нештрихованной с безразмерной (в единицах скорости света) скоростью $\mathbf{V}$. Тогда координаты произвольного вектора $\underline{a} = \{a_0, \mathbf{a}\}$ к штрихованной системе преобразуются согласно формулам

$$a_0' = \Gamma(a_0 - \mathbf{Va}), \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{V}\Gamma a_0 + (\Gamma - 1)\left(\mathbf{a}\frac{\mathbf{V}}{V}\right)\frac{\mathbf{V}}{V}, \tag{30}$$

где $\Gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2}}$. В частности,

$$d\mathbf{p}\,' = d\mathbf{p} - \mathbf{V}\Gamma\frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{p_0} + (\Gamma - 1)\left(d\mathbf{p}\frac{\mathbf{V}}{V}\right)\frac{\mathbf{V}}{V}. \tag{31}$$

Матрица преобразования дифференциалов импульсов

$$\frac{D(\mathbf{p}\,')}{D(\mathbf{p})} = 1 - \Gamma\begin{pmatrix} V_\mathrm{x}\dfrac{p_\mathrm{x}}{p_0} & V_\mathrm{x}\dfrac{p_\mathrm{y}}{p_0} & V_\mathrm{x}\dfrac{p_\mathrm{z}}{p_0} \\ V_\mathrm{y}\dfrac{p_\mathrm{x}}{p_0} & V_\mathrm{y}\dfrac{p_\mathrm{y}}{p_0} & V_\mathrm{y}\dfrac{p_\mathrm{z}}{p_0} \\ V_\mathrm{z}\dfrac{p_\mathrm{x}}{p_0} & V_\mathrm{z}\dfrac{p_\mathrm{y}}{p_0} & V_\mathrm{z}\dfrac{p_\mathrm{z}}{p_0} \end{pmatrix} + (\Gamma - 1)\begin{pmatrix} \dfrac{V_\mathrm{x}V_\mathrm{x}}{V^2} & \dfrac{V_\mathrm{x}V_\mathrm{y}}{V^2} & \dfrac{V_\mathrm{x}V_\mathrm{z}}{V^2} \\ \dfrac{V_\mathrm{y}V_\mathrm{x}}{V^2} & \dfrac{V_\mathrm{y}V_\mathrm{y}}{V^2} & \dfrac{V_\mathrm{y}V_\mathrm{z}}{V^2} \\ \dfrac{V_\mathrm{z}V_\mathrm{x}}{V^2} & \dfrac{V_\mathrm{z}V_\mathrm{y}}{V^2} & \dfrac{V_\mathrm{z}V_\mathrm{z}}{V^2} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Определитель этой матрицы — якобиан преобразования:

$$\det\left|\frac{D(\mathbf{p}\,')}{D(\mathbf{p})}\right| = 1 - \Gamma\frac{\mathbf{Vp}}{p_0} + (\Gamma - 1) = \frac{\Gamma(p_0 - \mathbf{Vp})}{p_0} = \frac{p_0'}{p_0}. \tag{33}$$

Определитель вычисляется разложением на суммы, соответствующие слагаемым 1 и остальным. Все определители без единиц равны нулю, так как их элементы пропорциональны.

Точно так же показывается, что инвариантной величиной является отношение $\dfrac{d^3k}{k}$ для импульса фотона. При этом инвариантны и два множителя этого отношения, а именно $\dfrac{dk}{k}$ и $k^2d^2\omega$, где $\boldsymbol{\omega}$ — единичный вектор направления импульса фотона: $\mathbf{k} = k\boldsymbol{\omega}$, а $d^2\omega$ — элемент телесного угла, т. е. площади поверхности на единичной сфере. Для частиц с не равной нулю массой покоя это свойство не выполняется. Указанным свойством элемента объема импульса фотона объясняется форма интеграла в полном сечении (26), так как $x_1^2d^2\omega_1 = \xi_1^2d\mu_0d\phi_0 = d\xi_1d\phi_0$.

Еще одну инвариантную комбинацию надо найти для левой части кинетического уравнения. В уравнении Больцмана там стоит $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\mathbf{p}}{m}\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{r}f + \mathbf{F}\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{p}f$. На фотоны никакие силы не действуют, так что последнее слагаемое не нужно. Для дифференцирования необходим четырехмерный вектор-градиент. Он должен быть взят в виде $\underline{\nabla} = \left\{\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right\}$, так как скалярное произведение его с вектором $d\underline{r} = \{cdt, d\mathbf{r}\}$, т. е. $d\underline{r}\,\underline{\nabla} = dt\dfrac{\partial}{\partial t} + d\mathbf{r}\boldsymbol{\nabla}$ есть полный дифференциал, инвариантный относительно любого преобразования переменных, в том числе и лоренцевского. Инвариантом, следовательно, будет произведение $\underline{k}\,\underline{\nabla} = \dfrac{k}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k}\boldsymbol{\nabla} = \dfrac{k}{c}\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + c\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nabla}\right)$, которое и является релятивистским обобщением левой части уравнения Больцмана с учетом того, что скорость света постоянна. Именно такая комбинация производных, как в круглых скобках, стоит в левой части уравнения переноса излучения.

Релятивистскими инвариантами являются безразмерные средние числа заполнения фотонных состояний. Например, в случае выполнения ТДР это среднее число дается формулой Планка (17), которая написана в системе отсчета, связанной с фотонным газом и называемой сопутствующей, т. е. в такой,

в которой средний импульс фотонов равен нулю. Эту формулу можно записать в явно релятивистски ковариантном виде, т. е. справедливом в произвольной системе отсчета:

$$n_0 = \frac{1}{\exp(c\underline{k}\,\underline{V}/k_{\rm B}T) - 1}, \tag{34}$$

где $\underline{V} = \{\Gamma, \Gamma\mathbf{V}\}$ и $\mathbf{V}$ — четырехмерная и трехмерная безразмерные скорости сопутствующей системы относительно указанной произвольной.

Функцию распределения электронов $f_{\rm e}(\mathbf{p})$ также будем считать скаляром. Ее нормировка в произвольной системе отсчета имеет вид

$$\int \underline{p} f_{\rm e}(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{p_0} = n_{\rm e}\underline{V}, \tag{35}$$

где $n_{\rm e}$ — концентрация электронов в сопутствующей электронному газу системе отсчета, в которой средний импульс электронов равен нулю, а $\underline{V}$ имеет тот же смысл, что и в случае фотонного газа.

Часто можно допустить, что распределение электронов по импульсам в сопутствующей системе изотропно. Тогда функция распределения в этой системе зависит только от энергии (представим аргумент ее в безразмерном виде):

$$f_{\rm e}(\mathbf{p}) = n_{\rm e} f_{\rm e}(p_0/mc)/m^3c^3, \tag{36}$$

и имеет нормировку

$$\frac{4\pi}{m^3c^3}\int\limits_0^\infty p^2 f_{\rm e}(p_0/mc)dp = 1, \tag{37}$$

в которую преобразуется общее условие (35) при переходе в сопутствующую систему, т. е. при $\mathbf{V} = 0$.

В частности, релятивистское распределение Максвелла в сопутствующей системе отсчета задается формулой

$$f_{\rm e}(p_0/mc) = f_{\rm M}(p_0/mc), \quad f_{\rm M}(\gamma) = \frac{y}{4\pi K_2(y)} e^{-y\gamma}, \tag{38}$$

где $y = \dfrac{mc^2}{k_{\rm B}T_{\rm e}}$, а

$$K_\nu(y) = \int\limits_0^\infty e^{-y\,\mathrm{ch}\,\chi}\,\mathrm{ch}\,\nu\chi d\chi \tag{39}$$

— функция Макдональда. Появление этой функции есть следствие условия нормировки (37). Для произвольной системы отсчета формулу (38) надо переписать так:

$$f_{\rm M}(\underline{p}\underline{V}/c) = \frac{y}{4\pi K_2(y)} e^{-c\underline{p}\underline{V}/k_{\rm B}T_{\rm e}}. \tag{40}$$

Теперь мы имеем все, чтобы написать кинетическое уравнение для комптоновского рассеяния.

2. Релятивистское кинетическое уравнение комптоновского рассеяния. При написании этого уравнения принимается, что электронный газ релятивистский, но не вырожденный, так что запрет Паули не учитывается. Фотонный же газ может быть частично вырожден, и поэтому необходимо учитывать вынужденные переходы.

Для средних чисел заполнения состояний фотонов $n = n(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})$ в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t с импульсами около $\mathbf{k}$ уравнение имеет вид

$$\underline{k}\,\underline{\nabla}\, n = -\frac{r_{\rm e}^2}{2} m^2c^2 \int \frac{d^3p}{p_0}\frac{d^3p_1}{p_{0\,1}}\frac{d^3k_1}{k_1}\delta(\underline{p} + \underline{k} - \underline{p}_1 - \underline{k}_1)F(\xi,\xi_1)\left[f_{\rm e}(\mathbf{p})n(1+n_{11}) - f_{\rm e}(\mathbf{p}_1)(1+n)n_{11}\right], \tag{41}$$

причем для краткости не указываются аргументы n и обозначено $n_{11} = n(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}_1)$.

Первое слагаемое в квадратных скобках в уравнении (41) соответствует ослаблению при рассеянии, а второе — излучению. Интегралы берутся по импульсам электронов до и после рассеяния и по импульсам фотонов, участвующих в процессе рассеяния вместе с фотонами с импульсом $\mathbf{k}$. Дельта-функция отражает законы сохранения (3) и позволяет взять четырехкратный интеграл, так что останется интеграл по пяти переменным, как и в интеграле столкновений Больцмана.

Релятивистски ковариантное уравнение (41) можно рассматривать в любой системе отсчета. Наиболее удобно это делать в системе, связанной с электронным газом, которая называется сопутствующей. При

переходе в эту систему мы обезразмерим все наши величины. Импульсы и энергии фотона и электрона будем обозначать безразмерными величинами, положив $k = mcx$, $\mathbf{k} = mcx\boldsymbol{\omega}$, $p_0 = mc\gamma$, $\mathbf{p} = mc\mathbf{z} = mcz\boldsymbol{\Omega}$, $\underline{p} = mc\underline{z} = mc\{\gamma, \mathbf{z}\}$, $\underline{k} = mc\underline{x} = mc\{x, x\boldsymbol{\omega}\}$ и соответственно величины с индексом 1: $x_1 = k_1/mc$ и т. д. Примем также релятивистскую квантовую систему единиц, в которой постоянная Планка, скорость света и масса электрона принимаются в качестве основных единиц: $\hbar = c = m = 1$. В этой системе единица длины — комптоновская длина волны $\lambda\!\!\!^{-}_{\mathrm{C}} = \hbar/m\,c$, энергии — $m\,c^2$, частоты — $m\,c^2/\hbar$, импульса — $m\,c$. Классический радиус электрона совпадает с постоянной тонкой структуры $r_\mathrm{e} = e^2/mc^2 = e^2/\hbar\,c = 1/137.036$, а заряд электрона равен $e = \sqrt{r_\mathrm{e}} = 1/\sqrt{137.036}$.

В сопутствующей системе уравнение (41) записывается так:

$$x\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nabla}\right)n = -\frac{r_\mathrm{e}^2}{2}\int\frac{d^3z}{\gamma}\frac{d^3z_1}{\gamma_1}\frac{d^3x_1}{x_1}\delta(\underline{z}+\underline{x}-\underline{z}_1-\underline{x}_1)F(\xi,\xi_1)[f_\mathrm{e}(\mathbf{z})n(1+n_{11}) - f_\mathrm{e}(\mathbf{z}_1)(1+n)n_{11}], \qquad (42)$$

где теперь $n = n(\mathbf{r}, t, x, \boldsymbol{\omega})$, $n_{11} = n(\mathbf{r}, t, x_1, \boldsymbol{\omega}_1)$. К уравнению (42) надо добавить граничные и начальные условия.

Заметим, что величина

$$\xi = \underline{x}\,\underline{z} = x(\gamma - z\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Omega}) = \underline{x}_1\underline{z}_1 = x_1(\gamma_1 - z_1\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\Omega}_1) \qquad (43)$$

совпадает с частотой фотона x при $z = 0$ и с частотой x_1 при $z_1 = 0$. Произведение

$$\xi_1 = \underline{x}\,\underline{z}_1 = x(\gamma_1 - z_1\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Omega}_1) = \underline{x}_1\underline{z} = x_1(\gamma - z\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\Omega}) \qquad (44)$$

обладает противоположным свойством.

Теперь перейдем к частным случаям геометрии среды и распределения электронов.

3. Плоская атмосфера тепловых электронов. Рассмотрим эволюцию спектра излучения в плоскопараллельной среде, заполненной макроскопически неподвижным электронным газом с концентрацией частиц n_e. Система отсчета, связанная со средой, и является сопутствующей электронному газу.

Рассмотрим случай, когда электроны имеют релятивистское максвелловское распределение $f_\mathrm{M}(\gamma)$, определяемое формулой (38). Тогда

$$f_\mathrm{M}(\gamma_1) = f_\mathrm{M}(\gamma)e^{y(\gamma-\gamma_1)} = f_\mathrm{M}(\gamma)e^{-y(x-x_1)}. \qquad (45)$$

Уравнение (42) для такого случая после взятия интеграла по $\mathbf{z}_1$ перепишется в виде

$$x\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nabla}\right)n = -\frac{r_\mathrm{e}^2}{2}n_\mathrm{e}\int\frac{d^3z}{\gamma\gamma_1}\frac{d^3x_1}{x_1}\delta(\gamma+x-\gamma_1-x_1)F(\xi,\xi_1)f_\mathrm{M}(\gamma)\left[n(1+n_{11}) - e^{-y(x-x_1)}(1+n)n_{11}\right]. \qquad (46)$$

Чтобы взять интеграл по x_1 и тем самым избавиться от последней δ-функции, воспользуемся выражением (9) для энергии рассеянного фотона, которое мы перепишем в безразмерном виде:

$$x_1 = x\frac{\gamma - \mathbf{z}\boldsymbol{\omega}}{\gamma + x - \boldsymbol{\omega}_1(\mathbf{z} + x\boldsymbol{\omega})}. \qquad (47)$$

Тогда уравнение (46) превращается в

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nabla}\right)n = -\frac{r_\mathrm{e}^2}{2x}n_\mathrm{e}\int\frac{d^3z}{\gamma}\frac{x_1^2 d^2\omega_1}{\xi}F f_\mathrm{M}(\gamma)\left[n(1+n_{11}) - e^{-y(x-x_1)}(1+n)n_{11}\right]. \qquad (48)$$

При переходе к этому уравнению использовано тождество, являющееся следствием свойств дельта-функции:

$$\begin{aligned}\delta(\gamma + x - \gamma_1 - x_1) &= \delta\left(\gamma + x - x_1 - \sqrt{1 + (\mathbf{z} + x\boldsymbol{\omega} - x_1\boldsymbol{\omega}_1)^2}\right) = \\ &= \delta\left(\frac{2\underline{x}_1(\underline{z}+\underline{x}) - 2\underline{z}\underline{x}}{2\gamma_1}\right) = \gamma_1\frac{x_1}{\xi}\delta\left(x_1 - x\frac{\gamma - \mathbf{z}\boldsymbol{\omega}}{\gamma + x - \boldsymbol{\omega}_1(\mathbf{z} + x\boldsymbol{\omega})}\right).\end{aligned} \qquad (49)$$

В результате получилось уравнение с пятикратным интегралом, как обычно в кинетических уравнениях. Это уравнение также явно релятивистски ковариантно, хотя записано в обозначениях для сопутствующей системы отсчета.

Уравнение (46) можно преобразовать по-другому. Не вычисляя интеграла по x_1, отделим интегралы по импульсам электронов, от которых фотонные функции не зависят. Тогда уравнение запишется в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nabla}\right)n=-\frac{\sigma_{\rm T}}{x}n_{\rm e}\int\limits_0^\infty x_1dx_1\int d^2\omega_1R(x,x_1,\mu)\left[n(1+n_{11})-e^{-y(x-x_1)}(1+n)n_{11}\right]. \tag{50}$$

Здесь внутренний двойной интеграл берется по всем направлениям вектора $\boldsymbol{\omega}_1$, а

$$R(x,x_1,\mu)=\frac{3}{16\pi}\int\frac{d^3z}{\gamma}\frac{d^3z_1}{\gamma_1}\delta(\underline{z}+\underline{x}-\underline{z}_1-\underline{x}_1)F(\xi,\xi_1)f_{\rm M}(\gamma)=\frac{3}{8}\int\limits_{\gamma_*(x,x_1,\mu)}^\infty d\gamma f_{\rm M}(\gamma)R(x,x_1,\mu,\gamma) \tag{51}$$

— функция перераспределения по частотам и направлениям. Под интегралом стоит функция перераспределения при взаимодействии фотонного газа с электронами определенной энергии, а нижний предел интегрирования

$$\gamma_*(x,x_1,\mu)=\frac{1}{2}\left[x-x_1+Q\sqrt{1+\frac{2}{xx_1(1-\mu)}}\right], \tag{52}$$

где $Q=|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|=\sqrt{x^2+x_1^2-2\mu xx_1}$.

Функция $R(x,x_1,\mu,\gamma)$ выражается через сечение комптоновского рассеяния и функцию распределения электронов по энергиям:

$$R(x,x_1,\mu,\gamma)=\frac{z}{2\pi}\int d^2\Omega f_{\rm M}(\gamma_1)F(\xi,\xi_1)\int\frac{d^3z_1}{\gamma_1}\delta(\underline{x}_1+\underline{z}_1-\underline{x}-\underline{z})=\frac{z}{2\pi}\int d^2\Omega f_{\rm M}(\gamma)F(\xi,\xi_1)\delta(\xi-\xi_1-q). \tag{53}$$

Различные формулы для этой функции были получены несколькими авторами. Ссылки на их работы и полный вывод этих формул содержится в статье [21] и обзоре [41]. Здесь приведем формулу, которая получается, если сечение взять в упрощенном виде:

$$R(x,x_1,\mu,\gamma)=\frac{4}{3}\frac{1}{Q}. \tag{54}$$

Множитель, стоящий справа в уравнении (50) при n, является коэффициентом ослабления (поглощения) за счет комптоновского рассеяния. Его профиль, как и функция перераспределения (53), представляется интегралом по распределению импульсов электронов:

$$\overline{s}_0(x,y)=\frac{1}{x}\int f_{\rm M}(\gamma)\frac{d^3z}{\gamma}\xi s_0(\xi)=\frac{1}{2K_2(y)}\int\limits_1^\infty e^{-y\gamma}\frac{d\gamma}{z}[(\gamma+z)^2s_0(x(\gamma+z))+(\gamma-z)^2s_0(x(\gamma-z))]. \tag{55}$$

Способ численного вычисления этого коэффициента при любых температурах электронов и любых частотах x как при точном, так и при упрощенном выражениях для сечения дан в статье [19]. В последнем случае формула для профиля имеет вид

$$\overline{s}_0(x,y)=\frac{1}{K_2(y)}\int\limits_1^\infty e^{-y\gamma}\frac{d\gamma}{z}\frac{2\gamma^2+2x\gamma-1}{4x\gamma+4x^2+1}. \tag{56}$$

Кинетическое уравнение в виде (50) по форме совпадает с уравнениями, которые изучаются в теории переноса излучения. Тот факт, что функция перераспределения зависит не отдельно от направлений фотонов до и после рассеяния, а только от угла рассеяния $\arccos\mu$, отражает изотропию среды, где локально нет выделенного направления.

4. Однородное бесконечное пространство. Предположим, что тепловой электронный газ однородно заполняет все пространство и в этом пространстве находится изотропное, однородное поле излучения. Электроны и фотоны взаимодействуют через комптоновское рассеяние. Температура электронов поддерживается постоянной каким-то механизмом.

В таком случае среднее число заполнения фотонных состояний зависит только от двух переменных: частоты и времени, так что $n=n(x,t)$ и $n_{11}=n(x_1,t)$. Эта величина определяется уравнением

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t}=-\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty\Big[\overline{R}(x_1,x)n(x,t)\,(1+n(x_1,t))-vlR(x,x_1)n(x_1,t)\,(1+n(x,t))\Big]x_1dx_1. \tag{57}$$

Здесь функция перераспределения, усредненная по направлениям:

$$\overline{R}(x,x_1)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}R(x,x_1,\mu)d\mu. \tag{58}$$

Выражения для нее даются в статьях [21, 41].

Уравнение (57) становится определенным, если к нему добавить начальное условие, т. е. задать $n(x,0)$.

Из уравнения (57) вытекает условие сохранения числа фотонов, так как их число не меняется при рассеянии. Действительно, после умножения (57) на x^2 и интегрирования по всем частотам справа получается двойной интеграл, симметричный относительно частот падающего и рассеянного фотонов, и поэтому равный нулю, так что

$$\frac{dN_0}{dt}=0,\ N_0=\int\limits_0^\infty x^2n(x,t)dx, \tag{59}$$

и, следовательно,

$$N_0=\int\limits_0^\infty x^2n(x,t)dx=\int\limits_0^\infty x^2n(x,0)dx. \tag{60}$$

Обратимся к предельным случаям приведенных уравнений, когда распределение электронов по импульсам мало отличается от нерелятивистского максвелловского.

§ 3. Нерелятивистский предел

1. Почти нерелятивистские электроны. Примем теперь, что температура электронного газа и энергии фотонов не очень велики, точнее, что выполняются условия $k_{\rm B}T\ll mc^2$ и $h\nu\ll mc^2$, т. е. средние энергии электронов и фотонов значительно меньше энергии покоя электрона. Чтобы произвести предельный переход $y=mc^2/k_{\rm B}T\to\infty$, нам надо переопределить безразмерные частоты фотонов и импульсы электронов. Положим $x_{\rm t}=h\nu/k_{\rm B}T$, т. е. будем измерять энергии фотонов в средних (по порядку величины) энергиях электронов. Новая безразмерная частота связана со старой соотношением $x_{\rm t}=yx$. Для того чтобы выяснить, как нужно перенормировать импульсы электронов, заметим, что при $y\to\infty$ функция $K_2(y)\sim\sqrt{\pi/2y}e^{-y}(1+15/8y)$. При этом полные энергии электронов близки к их энергиям покоя: $\gamma=\sqrt{1+z^2}\sim1+z^2/2$. Следовательно, без учета поправочного слагаемого порядка $1/y$

$$f_{\rm M}(\gamma)\sim\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{3/2}e^ye^{-y(1+z^2/2)}. \tag{61}$$

Чтобы это распределение перешло в нерелятивистское максвелловское, надо положить $z\sqrt{y/2}=z_{\rm t}$ и $\mathbf{z}\sqrt{y/2}=\mathbf{z}_{\rm t}$. Это равносильно замене $\mathbf{p}=mc\sqrt{2/y}\mathbf{z}_{\rm t}$. Такие же замены сделаем и для величин с индексом 1.

Разложим по степеням $1/y\ll1$ все входящие в уравнение (48) сомножители, удерживая нулевую и две первых степени относительно $1/\sqrt{y}$.

Уточним разложение функции распределения электронов. С учетом сказанного выше имеем

$$f_{\rm M}(\gamma)d^3z\sim\frac{y}{4\pi\sqrt{\pi/2y}(1+15/8y)}e^{-y(z^2/2-z^4/8)}d^3z\sim\frac{d^3z_{\rm t}}{\pi^{3/2}}e^{-z_{\rm t}^2}\left[1+\frac{1}{2y}\left(z_{\rm t}^2-\frac{15}{4}\right)\right]. \tag{62}$$

Легко проверить, что интеграл по $z_{\rm t}$ от стоящего в этом разложении множителя при $1/y$ равен нулю, что является следствием сохранения условия нормировки. Так как мы удерживаем слагаемые порядка малости не больше $1/y$, то в конечном результате этот множитель окажется умноженным на слагаемое, не содержащее ни y, ни $z_{\rm t}$. Поэтому добавочное слагаемое в квадратных скобках в (62) можно вообще не принимать во внимание, а оставить только классическое (нерелятивистское) распределение Максвелла.

2. Разложение подынтегральной функции. Получим предельную форму кинетического уравнения для плоской среды. Для этого разложим входящие в уравнение (48) множители при функции распределения электронов.

Получим разложение частоты фотона после рассеяния x_1. Из формулы (47) для нее следует, что $x_{\rm t1}-x_{\rm t}=\Delta x$, а

$$\frac{\Delta x}{x_{\rm t}} \sim \frac{1+z^2/2-z\zeta}{1+z^2/2+x-(z\zeta_1+x\mu)} - 1 \sim \frac{1+z_{\rm t}^2/y - z_{\rm t}\zeta\sqrt{2/y}}{1+z_{\rm t}^2/y + x_{\rm t}(1-\mu)/y - z_{\rm t}\zeta_1\sqrt{2/y}} - 1 \sim$$
$$\sim \sqrt{2/y}z_{\rm t}(\zeta_1-\zeta) - x_{\rm t}(1-\mu)/y + 2z_{\rm t}^2\zeta_1(\zeta_1-\zeta)/y. \qquad (63)$$

Здесь, как и выше, для сокращения записи введены обозначения: $\zeta = \mathbf{\Omega\omega}$, $\zeta_1 = \mathbf{\Omega\omega}_1$, $\mu = \boldsymbol{\omega\omega}_1$.

Получим разложения скалярных произведений (22):

$$\xi = x(\gamma - z\zeta) \sim \frac{x_{\rm t}}{y}\left(1 + \frac{z_{\rm t}^2}{y} - z_{\rm t}\zeta\sqrt{\frac{2}{y}}\right), \qquad (64)$$

$$\xi_1 = x_1(\gamma - z\zeta_1) \sim \frac{x_{\rm t1}}{y}\left(1 + \frac{z_{\rm t}^2}{y} - z_{\rm t}\zeta_1\sqrt{\frac{2}{y}}\right). \qquad (65)$$

Основная часть сечения Клейна—Нишины — функция F — состоит из двух слагаемых. Слагаемое $B \sim 2$ с точностью до членов порядка $1/y^2$. Величина

$$\mu_0 = 1 - \frac{\underline{x}\,\underline{x}_1}{\xi\xi_1} = 1 - \frac{1-\mu}{(\gamma-z\zeta)(\gamma-z\zeta_1)} \sim \mu - (1-\mu)\left[\sqrt{\frac{2}{y}}z_{\rm t}(\zeta+\zeta_1) - \frac{2}{y}z_{\rm t}^2(1-\zeta^2-\zeta_1^2-\zeta\zeta_1)\right]. \qquad (66)$$

Отсюда

$$F \sim 1 + \mu^2 - 2(1-\mu)\mu\sqrt{\frac{2}{y}}z_{\rm t}(\zeta+\zeta_1) + \frac{2}{y}(1-\mu)z_{\rm t}^2[2\mu(1-\zeta^2-\zeta_1^2-\zeta\zeta_1) + (1-\mu)(\zeta+\zeta_1)^2]. \qquad (67)$$

Поскольку смещение частоты при рассеянии на нерелятивистских электронах мало, то в предположении достаточной гладкости среднего числа заполнения можно разложить и эту функцию. При этом аргументом получающейся функции будем считать не x, как раньше, а $x_{\rm t}$. Для получения той же точности, что и для всех остальных величин, надо учесть слагаемые в формуле Тейлора со второй производной:

$$n_{11} = n(x_{\rm t1}, \boldsymbol{\omega}_1) = n(x_{\rm t} + \Delta x, \boldsymbol{\omega}_1) = n_1 + \Delta x\, n_1' + \frac{(\Delta x)^2}{2}n_1''. \qquad (68)$$

Здесь $n_1 = n(x_{\rm t}, \boldsymbol{\omega}_1)$ и производные берутся по переменной $x_{\rm t}$. Разложение разности Δx следует из формулы (63), а ее квадрат $(\Delta x)^2 \sim x_{\rm t}^2(2/y)z_{\rm t}^2(\zeta-\zeta_1)^2$.

Разложение разности, стоящей в квадратных скобках в уравнении (48), получается из равенства (68) и разложения экспоненты:

$$n(1+n_{11}) - e^{\Delta x}(1+n)n_{11} \sim n\left[1 + n_1 + n_1'\Delta x + n_1''\frac{(\Delta x)^2}{2}\right] - \left[1 + \Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2}\right](1+n)\times$$
$$\times\left[n_1 + n_1'\Delta x + n_1''\frac{(\Delta x)^2}{2}\right] \sim n - n_1 - [n_1' + n_1(1+n)]\Delta x - [n_1'' + (2n_1' + n_1)(1+n)]\frac{(\Delta x)^2}{2}. \qquad (69)$$

Остальные множители, стоящие при дифференциалах переменных, по которым ведется интегрирование, тоже раскладываются:

$$\frac{x_1^2}{x\gamma\xi} = \frac{x_{\rm t1}^2}{x_{\rm t}^2}\frac{1}{\gamma(\gamma-z\zeta)} \sim \frac{1 + 2\sqrt{\frac{2}{y}}z_{\rm t}(\zeta_1-\zeta) - \frac{2}{y}[x_{\rm t}(1-\mu) + 2z_{\rm t}^2\zeta_1(\zeta_1-\zeta)z_{\rm t}^2(\zeta_1^2+\zeta^2-2\zeta_1\zeta)]}{[1+z_{\rm t}^2/y][1+z_{\rm t}^2/y - \sqrt{2/y}z_{\rm t}\zeta]} \sim$$
$$\sim 1 + \sqrt{2/y}z_{\rm t}(2\zeta_1-\zeta) - (2/y)[x_{\rm t}(1-\mu) + z_{\rm t}^2(1-3\zeta_1^2+2\zeta\zeta_1)]. \qquad (70)$$

Перемножение этих множителей и сечения дает

$$\frac{x_1^2}{x\gamma\xi}F \sim 1 + \mu^2 + \sqrt{\frac{2}{y}}z_{\rm t}[2\zeta_1(1-\mu+2\mu^2) - \zeta(1+2\mu-\mu^2)] + \frac{2}{y}\{-(1+\mu^2)(1-\mu)x_{\rm t} +$$
$$+ z_{\rm t}^2[-1+2\mu-3\mu^2+\zeta^2(1-\mu)^2 + 2\zeta_1^2(2-4\mu+5\mu^2) - 4\zeta\zeta_1\mu(2-\mu)]\}. \qquad (71)$$

Если объединить, наконец, все разложения, то подынтегральная функция представится в виде одного разложения, которое мы не выписываем из-за его громоздкости.

3. Усреднение по распределению Максвелла. Произведем сначала усреднение по направлениям импульсов электронов, распределение которых изотропно. Для этого приведем значения интегралов

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\Omega = 4,\ \frac{1}{\pi}\int d^2\Omega\zeta = \frac{1}{\pi}\int d^2\Omega\zeta_1 = 0,\ \frac{1}{\pi}\int d^2\Omega\zeta^2 = \frac{1}{\pi}\int d^2\Omega\zeta_1^2 = \frac{4}{3},\ \frac{1}{\pi}\int d^2\Omega\zeta\zeta_1 = \frac{4}{3}\mu. \tag{72}$$

Таким образом, все слагаемые порядка $\sqrt{2/y}$ при усреднении пропадут.

При усреднении по длинам импульсов понадобятся интегралы

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-z^2}z^2dz = \frac{1}{4},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-z^2}z^4dz = \frac{3}{8}. \tag{73}$$

Обозначим полное усреднение по распределению Максвелла угловыми скобками, т. е.

$$\frac{1}{\pi^{3/2}}\int e^{-z_\mathrm{t}^2}d^3z_\mathrm{t}\psi(\mathbf{z}_\mathrm{t}) = \langle\psi\rangle. \tag{74}$$

Тогда

$$\langle 1\rangle = 1,\ \langle z_\mathrm{t}^2\rangle = \frac{3}{2},\ \langle z_\mathrm{t}^2\zeta^2\rangle = \langle z_\mathrm{t}^2\zeta_1^2\rangle = \frac{1}{2},\ \langle z_\mathrm{t}^2\zeta\zeta_1\rangle = \frac{1}{2}\mu. \tag{75}$$

Легко показать также, что

$$\langle\Delta x\rangle = \frac{x_\mathrm{t}}{y}(1-\mu)(1-x_\mathrm{t}),\ \langle(\Delta x)^2\rangle = 2\frac{x_\mathrm{t}^2}{y}(1-\mu). \tag{76}$$

Исходя из приведенных формул, произведем усреднение по частям, без перемножения всех разложений. Усреднение произведения разложения (71) на не зависящие от y слагаемые из (69) дает

$$(n-n_1)\left\{1+\mu^2+\frac{2}{y}[1-2\mu-3\mu^2+2\mu^3-(1+\mu^2)(1-\mu)x_\mathrm{t}]\right\}. \tag{77}$$

Усреднение получающегося в (69) слагаемого порядка $1/y$, которое надо умножить на нулевое слагаемое в формуле (71), т. е. на $1+\mu^2$, приводит к выражению

$$-\frac{x_\mathrm{t}}{y}(1-\mu)\{(1-x_\mathrm{t})[n_1'+n_1(1+n)]+x_\mathrm{t}[n_1''+2n_1'(1+n)+n_1(1+n)]\}. \tag{78}$$

Еще одно не исчезающее в этом приближении слагаемое дает произведение членов порядка $1/\sqrt{y}$:

$$-3\frac{x_\mathrm{t}}{y}(1-\mu)(1+\mu^2)[n_1'+n_1(1+n)]. \tag{79}$$

Собирая все полученные слагаемые разложений после усреднения, получаем окончательно уравнение Бабуэль-Пейриссака—Рувийюа [25]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nabla}\right)n = \frac{r_\mathrm{e}^2}{2}n_\mathrm{e}\int d^2\omega_1\left\{(n_1-n)\left[(1+\mu^2)\left(1-\frac{2x_\mathrm{t}}{y}(1-\mu)\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{y}(1-2\mu-3\mu^2+2\mu^3)\right]+\frac{x_\mathrm{t}}{y}(1-\mu)(1+\mu^2)[4(n_1'+n_1)+x_\mathrm{t}(n_1''+n_1')+n(4n_1+2x_\mathrm{t}n_1')]\right\}. \tag{80}$$

Заметим, что при $y=\infty$ уравнение переходит в описывающее томсоновское рассеяние, причем все эффекты вынужденных переходов исчезают. Эффект отдачи и доплеровского смещения частоты, происходящие при комптоновском рассеянии, являются малыми поправками к томсоновскому рассеянию. Однако эта малая поправка может быть очень существенной, так как при рассеянии изменяется частота фотонов и может сильно измениться спектр рассеиваемого излучения. Оно может переместиться в другую область энергий, где первоначально излучение отсутствовало, т. е. малая поправка окажется добавленной к нулю.

Уравнение (80) можно переписать в другом виде, выделив слагаемое, пропорциональное n, все интегралы при котором вычисляются. В частности, интеграл от второго слагаемого в квадратных скобках оказывается равным нулю. Уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nabla}\right)n = -\sigma_\mathrm{T}n_\mathrm{e}\left(1-\frac{2}{y}x_\mathrm{t}\right)n+\frac{3}{16\pi}\sigma_\mathrm{T}n_\mathrm{e}\int d^2\omega_1\left\{n_1\left[(1+\mu^2)\left(1-\frac{2x_\mathrm{t}}{y}(1-\mu)\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{y}(1-2\mu-3\mu^2+2\mu^3)\right]+\frac{x_\mathrm{t}}{y}(1-\mu)(1+\mu^2)\left[4\Big(n_1'+n_1(1+n)\Big)+x_\mathrm{t}(n_1''+n_1'(1+2n)\right]\right\}. \tag{81}$$

Если исходить из упрощенного сечения, то упрощение вывода заключается только в том, что $F = 4/3$. Уравнение — аналог (81) — получается несколько проще:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nabla}\right) n = -\sigma_{\mathrm{T}} n_{\mathrm{e}} \left(1 - \frac{2}{y} x_{\mathrm{t}}\right) n +$$
$$+ \frac{\sigma_{\mathrm{T}} n_{\mathrm{e}}}{4\pi} \int d^2\omega_1 \left\{ n_1 \left[1 - \frac{2}{y}[x_{\mathrm{t}}(1-\mu) + \mu]\right] + \frac{x_{\mathrm{t}}}{y}(1-\mu)\left[4\Big(n_1' + n_1(1+n)\Big) + x_{\mathrm{t}}\Big(n_1'' + n_1'(1+2n)\Big)\right]\right\}. \quad (82)$$

До сих пор рассматривалось рассеяние в плоской среде. Теперь перейдем к изотропному пространству.

4. Бесконечное однородное пространство. Если слабо релятивистский (почти нерелятивистский) электронный газ и не очень жесткое поле излучения (выполняются неравенства $k_{\mathrm{B}}T \ll mc^2$ и $h\nu \ll mc^2$) заполняют онородное и изотропное пространство, то можно произвести такие же разложения, как и в предшествующих пунктах в уравнении (57). Однако проще воспользоваться предельным уравнением (81), выведенным для плоской среды. Положив в нем $n_1 = n$ и вычислив интегралы по направлениям, получим уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\sigma_0 n_{\mathrm{e}}}{y} \frac{1}{x_{\mathrm{t}}^2} \frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{t}}} \left[x_{\mathrm{t}}^4 \left(n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x_{\mathrm{t}}}\right)\right]. \quad (83)$$

Интересно отметить, что усреднение уравнения (82), выведенного с упрощенным сечением, приводит точно к такому же уравнению (83).

5. Комптонизация. Этим словом называется процесс формирования спектра излучения в ходе многократного комптоновского рассеяния и его результат. Как правило, рассматривается эволюция спектра от мягкого к более жесткому. Для оценки эффективности этого процесса оценим изменение малой частоты фотона.

Пусть первоначально фотон имел импульс $\mathbf{x}$ и частоту x, а рассеивающий его электрон — импульс $\mathbf{z}$ и энергию γ. Тогда частота фотона ξ в лабораторной системе определяется формулой (43). Формула, выражающая частоту x через ξ, т. е. согласно преобразованию Лоренца (30) для импульса фотона $\underline{x}$ с $\mathbf{V} = -\mathbf{z}/\gamma$, имеет вид

$$x = \xi(\gamma + z\zeta^0), \quad (84)$$

где ζ^0 — косинус угла между векторами $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}$. Аналогично

$$x_1 = \xi_1(\gamma + z\zeta_1^0), \quad (85)$$

где ζ_1^0 — косинус угла между импульсами $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}_1$. Этот косинус выражается через уже введенные углы:

$$\zeta_1^0 = \mu_0\zeta^0 + \sqrt{1-\mu_0^2}\sqrt{1-(\zeta^0)^2}\cos\phi_0, \quad (86)$$

где ϕ_0 — двугранный угол между двумя парами векторов $\mathbf{z}, \mathbf{x}$ и $\mathbf{z}, \mathbf{x}_1$.

Средняя частота рассеянного фотона находится по формуле, аналогичной (26):

$$\langle x_1\rangle\sigma_0(\xi) = \frac{r_{\mathrm{e}}^2}{2\xi^2}\int F x_1^3 d^2\omega_1 = \frac{r_{\mathrm{e}}^2}{2\xi^2}\int\limits_{-1}^{1} F\xi_1^2 d\mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\phi_0 x_1 =$$
$$= \frac{r_{\mathrm{e}}^2}{2\xi^2}\int\limits_{\xi/(1+2\xi)}^{\xi} F d\xi_1 \int\limits_0^{2\pi} d\phi_0 x \left[\gamma + z\left(\mu_0\zeta_0 + \sqrt{1-\mu_0^2}\sqrt{1-(\zeta^0)^2}\cos\phi_0\right)\right] =$$
$$= \frac{r_{\mathrm{e}}^2}{2\xi^2} 2\pi \int\limits_{\xi/(1+2\xi)}^{\xi} F d\xi_1 x(\gamma + z\mu_0\zeta_0) = \frac{r_{\mathrm{e}}^2}{2\xi^2} 2\pi \int\limits_{\xi/(1+2\xi)}^{\xi} F d\xi_1 x\left[\gamma + \mu_0\left(\frac{x}{\xi} - \gamma\right)\right]. \quad (87)$$

Здесь подставлены формула (86) для ζ_1^0 и формула для ζ^0, полученная из соотношения (84). Остается подставить выражение (23) для μ_0 и вычислить интеграл. Вычисление дает

$$\langle x_1\rangle s_0(\xi) = \left(\gamma - \frac{x}{\xi}\right) s_0(\xi) + \left(x - \gamma + \frac{x}{\xi}\right) s_1(\xi), \quad (88)$$

где

$$s_1(\xi) = \frac{3}{8\xi^3}\left[\ln(1+2\xi) + \frac{4}{3}\xi^2 - \frac{3}{2}\xi - \frac{\xi}{2}\frac{1}{1+2\xi} - \frac{1}{3}\frac{\xi^2}{(1+2\xi)^3}\right]. \tag{89}$$

Определим средние степени частоты фотона после рассеяния изотропными электронами, распределение которых задается функцией $f_{\rm e}(\gamma)$, формулой [41]

$$\overline{x_1^j \overline{s}_0}(x) = \frac{1}{x}\int \frac{d^3z}{\gamma}\xi f_{\rm e}(\gamma)\langle x_1^j\rangle s_0(\xi) = 4\pi x^j \int\limits_0^\infty z^2 dz f_{\rm e}(\gamma)\Psi_j(x,\gamma). \tag{90}$$

Средняя частота фотона после рассеяния будет получаться при $j = 1$, а стоящий множителем средний профиль ослабления задается той же формулой при $j = 0$. Вычислим сначала средние при закрепленной энергии электрона, т. е. интегралы

$$\Psi_j(x,\gamma) = \frac{1}{4\pi\gamma x^{j+1}}\int d^2\Omega\xi\langle x_1^j\rangle s_0(\xi) \tag{91}$$

при малых x (тогда и ξ малы), но произвольных γ. Имеем

$$s_0(\xi) \sim 1 - 2\xi + \frac{26}{5}\xi^2, \quad s_1(\xi) \sim 1 - 3\xi + \frac{47}{5}\xi^2, \tag{92}$$

$$\langle x_1^j\rangle s_0(\xi) \sim \xi\left(\gamma + \frac{6}{5}x - \frac{21}{5}\gamma\xi\right). \tag{93}$$

Усреднение по направлениям электронов с использованием формул (72) приводит к асимптотикам

$$\Psi_0(x,\gamma) \sim 1 - 2\frac{x}{\gamma}\left(\gamma^2 + \frac{z^2}{3}\right) + \frac{26}{5}x^2(\gamma^2 + z^2), \tag{94}$$

$$\Psi_1(x,\gamma) \sim \gamma^2 + \frac{z^2}{3} + \frac{1}{5}\frac{x}{\gamma}\left[6\gamma^2 + 2z^2 - 21\gamma^2(\gamma^2 + z^2)\right], \tag{95}$$

$$\Psi_1(x,\gamma) - \Psi_0(x,\gamma) \sim \frac{4}{3}z^2 - \frac{1}{15}\frac{x}{\gamma}(126\gamma^4 - 127\gamma^2 + 16). \tag{96}$$

Относительное изменение частоты фотона на единице оптического расстояния равно как раз последней разности. Таким образом, первое же рассеяние мягкого фотона релятивистским электроном увеличивает частоту фотона в $4z^2/3$ раз. Но частота фотонов растет и при рассеянии нерелятивистскими электронами, если их средняя энергия существенно больше энергии фотона.

Пусть мягкий фотон рассеивается нерелятивистскими электронами с $z^2 \ll 1$. Тогда из (96) находим

$$\Psi_1(x,\gamma) - \Psi_0(x,\gamma) \sim \frac{4}{3}z^2 - x. \tag{97}$$

Усредним эту разность по нерелятивистскому максвелловскому распределению с температурой $T_{\rm e} \ll mc^2/k_{\rm B}$, применив формулы (74). Однако нельзя забыть, что в указанных формулах усредняется квадрат $z_{\rm t}$, а не z. Поэтому надо ввести связывающий эти две величины множитель $2/\sqrt{y}$. Тогда получится

$$\overline{[x_1 - x]\overline{s}_0}(x) = 4\pi x\int\limits_0^\infty z^2 dz f_{\rm M}(\gamma)[\Psi(x,\gamma) - \Psi_0(x,\gamma)] \sim \frac{4}{y}x - x^2. \tag{98}$$

Так как $\overline{s}_0(x) \sim 1 - 2x$, то с принятой точностью полученную формулу можно записать в виде [23, 41]

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{4}{y} - x \tag{99}$$

и представить как дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{du} = x\frac{4}{y} - x^2. \tag{100}$$

Производная здесь берется по безразмерному оптическому расстоянию, совпадающему с числом рассеяний. Уравнение (100) является уравнением Бернулли и его решение легко находится:

$$\frac{1}{x} = e^{-4u/y}\left[\frac{1}{x_0} + \frac{y}{4}(e^{4u/y} - 1)\right]. \tag{101}$$

Переписанное в величинах x_t и $t = u/y$ оно выглядит проще:

$$x_\mathrm{t} = x_\mathrm{t}^0 \frac{e^{4t}}{1 + \dfrac{x_\mathrm{t}^0}{4}(e^{4t} - 1)} \tag{102}$$

и из него видно, что при малых x_t^0 и умеренных t частота растет экспоненциально. Затем рост замедляется и частота x_t стремится к своему асимптотическому значению 4. Мы увидим, что точное значение этого предела равно не 4, а 3.

Далее рассмотрим решения уравнения (83) и его обобщения (57), более точно описывающие многократное рассеяние.

§ 4. Решения кинетических уравнений

1. Уравнение Компанейца и его свойства. В этом параграфе опустим индекс t у частоты (введенный для того, чтобы отличать частоту, измеряемую в единицах $k_\mathrm{B}T/h$, от частоты, измеряемой в единицах mc^2/h) и будем писать просто x.

Уравнение (83) за счет выбора единицы измерения времени, равной $y/\sigma_0 n_\mathrm{e}$, приводится к уравнению без параметров:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x}\right)\right]. \tag{103}$$

Это уравнение описывает временную эволюцию однородного и изотропного поля излучения в бесконечном однородном и изотропном пространстве, заполненном равновесным нерелятивистским и невырожденным электронным газом. Оно было выведено А. С. Компанейцем в 1952 году (опубликовано [14] в 1956 после рассекречивания) и носит его имя.

Уравнение Компанейца в размерных величинах записывается следующим образом:

$$\frac{\partial n_\nu(t)}{\partial t} = \frac{\sigma_0 n_\mathrm{e}}{mc}\frac{h}{\nu^2}\frac{\partial}{\partial \nu}\left[\nu^4\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{h}\frac{\partial n_\nu(t)}{\partial \nu} + n_\nu(t) + n_\nu^2(t)\right)\right]. \tag{104}$$

Здесь $n_\nu(t) = n(x_\mathrm{t}, t) = n(x, t)$. В дальнейшем изучаем это уравнение в форме (103).

Из уравнения (103), так же как и из (57), вытекает закон сохранения числа фотонов. Действительно, после умножения уравнения (103) на x^2 и интегрирования по всем частотам получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^\infty x^2 n(x,t)dx = \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2\right)\right]dx = \left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} = 0. \tag{105}$$

Можно показать, что каждое из трех слагаемых в круглых скобках правой части уравнения Компанейца описывает отдельный эффект, а именно: слагаемое с производной — эффект Доплера, n — эффект Комптона, а n^2 — вынужденное рассеяние.

Уравнение (103) нелинейное и, к сожалению, точных аналитических решений не имеет. В разное время были найдены точные решения уравнений, получающихся из (103), если отбросить одно или два слагаемых в круглых скобках, т. е. пренебречь одним из указанных эффектов. Приведем все эти решения.

2. Линейное уравнение и функция Грина. При небольших числах заполнения $n \ll 1$ можно не учитывать вынужденное рассеяние и в уравнении (103) отбросить n^2. Уравнение перейдет в линейное:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x} + n\right)\right]. \tag{106}$$

Для линейного уравнения можно определить функцию Грина, выражающую любое решение через начальное распределение фотонов:

$$n(x,t) = \int\limits_0^\infty G(x,x_1,t)n(x_1,0)dx_1. \tag{107}$$

Функция Грина удовлетворяет тому же уравнению (106):

$$\frac{\partial G(x,x_1,t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial G}{\partial x}+G\right)\right], \tag{108}$$

с начальным условием

$$G(x,x_1,0) = \delta(x-x_1). \tag{109}$$

Интеграл (60) для этой функции переходит в

$$\int\limits_0^\infty x^2 G(x,x_1,t)dx = x_1^2. \tag{110}$$

Функция $G(x,x_1,t)$ была найдена А. С. Компанейцем путем разложения по собственным функциям (с. ф.) оператора правой части уравнения (106). Подробный вывод ее методом преобразования Лапласа приведен в статье [17].

Выражение для функции Грина представим в виде разложения по с. ф. линейного оператора Компанейца, как это было сделано им самим:

$$G(x,x_1,t) = \frac{x_1}{x}e^{(x_1-x)/2}[\chi_0(x)\chi_0(x_1) + \chi_2(x)\chi_2(x_1)e^{-2t} + \int\limits_0^\infty \chi_{9/4+\mu^2}(x)\chi_{9/4+\mu^2}(x_1)e^{-(9/4+\mu^2)t}d\mu]. \tag{111}$$

Две дискретные с. ф. из этого набора являются простыми комбинациями экспоненты и линейных функций:

$$\chi_0(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}e^{-x/2},\ \chi_2(x) = \frac{x-2}{\sqrt{2}}e^{-x/2}. \tag{112}$$

Они ортогональны и нормированы на единицу:

$$\int\limits_0^\infty \chi_0(x)\chi_2(x)dx = 0,\ \int\limits_0^\infty \chi_0^2(x)dx = \int\limits_0^\infty \chi_2^2(x)dx = 1. \tag{113}$$

С. ф. непрерывного спектра

$$\chi_{9/4+\mu^2}(x) = \left[\frac{2}{\pi}\frac{\mu\,\mathrm{sh}(\pi\mu)}{(1/4+\mu^2)(9/4+\mu^2)}\right]^{1/2}\frac{1}{x}W_{2,i\mu}(x) \tag{114}$$

выражаются через функции Уиттекера, связанные с функциями Макдональда (39):

$$W_{2,i\mu}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}\left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}-\mu^2\right)K_{i\mu}\left(\frac{x}{2}\right) - x\left(\frac{z}{2}\right)K'_{i\mu}\left(\frac{x}{2}\right)\right], \tag{115}$$

Функция $K_{i\mu}(x)$ вещественна в силу четности ее по индексу.

Функции (114) нормированы на δ-функцию

$$\int\limits_0^\infty \chi_{9/4+\mu^2}(x)\chi_{9/4+\mu_1^2}(x)dx = \delta(\mu-\mu_1) \tag{116}$$

и ортогональны дискретным с. ф.

$$\int\limits_0^\infty \chi_{9/4+\mu^2}(x)\chi_0(x)dx = \int\limits_0^\infty \chi_{9/4+\mu^2}(x)\chi_2(x)dx = 0. \tag{117}$$

Вместе все эти функции образуют полную систему на промежутке $[0,\infty)$, что выражается условием полноты

$$\chi_0(x)\chi_0(x_1)+\chi_2(x)\chi_2(x_1)+\int_0^\infty \chi_{9/4+\mu^2}(x)\chi_{9/4+\mu^2}(x_1)d\mu=\delta(x-x_1). \tag{118}$$

Легко усмотреть, что при произвольном начальном распределении $n(x,0)$ спектр излучения эволюционирует при $t\to\infty$ к виновскому. Действительно, $G(x,x_1,\infty)=(x_1^2/2)e^{-x}$, так что

$$\lim_{t\to\infty} n(x,t)=\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^\infty x_1^2 n(x_1,0)dx_1. \tag{119}$$

Функция $x^2n(x,\infty)$ имеет максимум при $x=2$. Среднее значение частоты по виновскому распределению равно 3. Соотношение (60) выполняется и при $t=\infty$. Для сравнения напомним, что согласно формуле Планка максимум распределения числа фотонов $x^2/(e^x-1)$ лежит при $x=1.59362426014$, а средняя частота равна 2.70117803292.

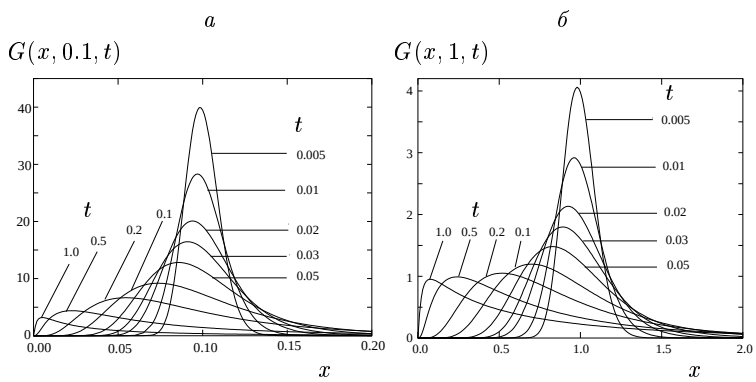

Рис. 3. Эволюция функции Грина $G(x,x_1,t)$ при $x_1=0.1$ (*а*) и $x_1=1$ (*б*).

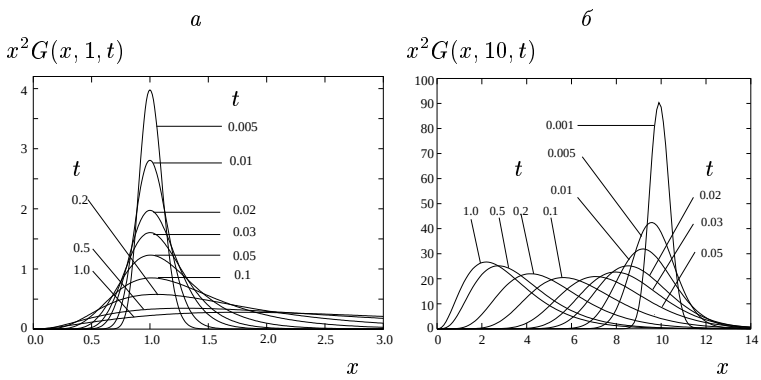

Рис. 4. Эволюция функции $x^2G(x,x_1,t)$ при $x_1=1$ (*а*) и $x_1=10$ (*б*).

В статье [18] были вычислены с. ф., входящие в формулу (111), и по ним найдена функция Грина. На рис. 3 и 4 представлены графики этой функции соответственно при $x_1=0.1$, 1 и 10, отражающие ее указанные выше свойства. При этом на рис. 3 дана сама функция Грина, а на рис. 4 дается произведение $x^2G(x,x_1,t)$.

3. Диффузионное решение. Если отбросить два слагаемых n и n^2, что допустимо при малых частотах, то получающееся уравнение

$$\frac{\partial n(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^4\frac{\partial n}{\partial x}\right] \tag{120}$$

тоже является линейным и для него определяется функция Грина тем же равенством (107), что и выше. Подстановками $x=e^{u-3y}$, $t=y$ с обратными им $y=t$, $u=3t+\ln x$ уравнение (120) приводится к уравнению диффузии

$$\frac{\partial^2 n}{\partial u^2}=\frac{\partial n}{\partial y}. \tag{121}$$

Соответствующая функция Грина в исходных переменных

$$G_{\rm dif}(x,x_1,t)=\frac{1}{2x_1\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{1}{4t}\left(\ln\frac{x}{x_1}+3t\right)^2\right). \tag{122}$$

Такая форма функции Грина была получена Я. Б. Зельдовичем и Р. А. Сюняевым [53].

Можно показать, что функция (122) является пределом (111) при малых частотах. Действительно, функция $G_\alpha(x,x_1,t)=\alpha G(\alpha x,\alpha x_1,t)$, где справа стоит функция Грина (111), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G_\alpha(x,x_1,t)}{\partial t}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial G_\alpha}{\partial x}+\alpha G_\alpha\right)\right], \tag{123}$$

которое переходит в (120) при $\alpha\to 0$. Поэтому

$$\lim_{\alpha\to 0}G_\alpha(x,x_1,t)=\frac{\alpha}{4\pi\alpha^2x^2}e^{-9t/4}\int\limits_0^\infty e^{-\mu^2t}(\alpha x\alpha x_1)^{1/2}d\mu\left[\left(\frac{x}{x_1}\right)^{i\mu}+\left(\frac{x_1}{x}\right)^{i\mu}\right]=$$

$$=\frac{x_1^{1/2}}{x^{3/2}}\frac{1}{\pi}e^{-9t/4}\int\limits_0^\infty e^{-\mu^2t}\cos\left(\mu\ln\frac{x}{x_1}\right)d\mu=\frac{x_1^{1/2}x^{-3/2}}{2}(\pi t)^{-1/2}e^{-9t/4-(\ln^2 x/x_1)/4t}=G_{\rm dif}(x,x_1,t). \tag{124}$$

Используя диффузионную функцию Грина (124), авторы статьи [7] показали, что планковский спектр малых частот преобразуется в набор планковских спектров с температурами из некоторого интервала.

4. Решение стационарного линейного уравнения. Если поле излучения не зависит от времени, то уравнение (103) переходит в стационарное линейное уравнение Компанейца

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^4\left(\frac{dn}{dx}+n\right)\right]=0. \tag{125}$$

Это уравнение сразу сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dn}{dx}+n=\frac{C_2}{x^4}. \tag{126}$$

Общее решение полученного линейного уравнения

$$n=C_1e^{-x}+C_2e^{-x}\int\limits_\beta^x e^{x'}\frac{dx'}{(x')^4}. \tag{127}$$

Здесь $\beta>0$ — некоторое число. Второе решение имеет смысл только при $x\ge\beta$. Взять $\beta=0$ нельзя, так как эта функция при $x\to 0$ стремится к бесконечности так сильно, что интеграл (60) не существует. Первое же решение описывает распределение Вина, т. е. правильное стационарное решение. Второе решение надо, по-видимому, отбросить как нефизическое.

Решение неоднородного уравнения вида (125), т. е. стационарного уравнения с источниками

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^4\left(\frac{dn}{dx}+n\right)\right]=f(x) \tag{128}$$

можно искать методом вариации произвольных постоянных, однако его можно получить гораздо проще. Проинтегрируем уравнение по x от 0 до x:

$$\left(\frac{dn}{dx}+n\right)=\frac{1}{x^4}\int\limits_0^x x_1^2f(x_1)dx_1. \tag{129}$$

Решение получившегося линейного уравнения представляется повторным интегралом

$$n(x)=e^{-x}\int\limits_0^x e^{x'}\frac{dx'}{(x')^4}\int\limits_0^{x'}x_1^2f(x_1)dx_1=e^{-x}\int\limits_0^x x_1^2f(x_1)dx_1\int\limits_{x_1}^x e^{x'}\frac{dx'}{(x')^4}. \tag{130}$$

Функция Грина, определяемая формулой, аналогичной (107):

$$n(x) = \int_0^\infty G(x, x_1) f(x_1) dx_1, \tag{131}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^4\left(\frac{dG}{dx} + G\right)\right] = \delta(x - x_1) \tag{132}$$

и может быть представлена в явном виде

$$G(x, x_1) = \begin{cases} e^{-x} x_1^2 \displaystyle\int_{x_1}^{x} \frac{dx'}{(x')^4}, & x_1 \le x, \\ 0, & x_1 \ge x. \end{cases} \tag{133}$$

В частном случае степенного спектра источника $f(x) = x^{æ}$ решение выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию [17] :

$$n(x) = \frac{x^{æ}}{æ(æ+3)} e^{-x} F(æ, æ+1, x) \sim \begin{cases} \dfrac{x^{æ}}{æ(æ+3)}, & x \ll 1, \\ \dfrac{x^{æ-1}}{æ+3}, & x \gg 1. \end{cases} \tag{134}$$

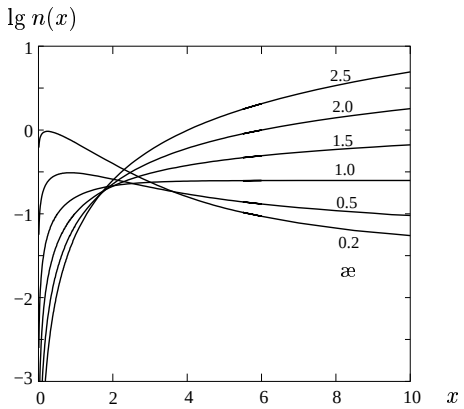

Рис. 5. Стационарные решения линейного уравнения при некоторых показателях степени частотной зависимости источника.

На рис. 5 приведены графики решений для некоторых значений æ.

5. Решение недиффузионного уравнения. Назовем так уравнение, которое получается из уравнения (103), если в его круглых скобках отбросить производную по частоте, определяющую частотную диффузию фотонов. Как видно из уравнения Компанейца в форме (104), это можно сделать при достаточно низкой температуре электронного газа. Уравнение примет вид

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(n + n^2\right)\right]. \tag{135}$$

Это уравнение обладает свойством автомодельности, а именно для его решений выполняется соотношение подобия: при произвольном $\alpha > 0$

$$n(\alpha x, \alpha t) = n(x, t), \tag{136}$$

т. е. одинаковое изменение масштаба частот и времени не изменяет решения.

Поскольку уравнение (135) — первого порядка, решаем его методом характеристик. Уравнения, определяющие характеристики (135), записываются так:

$$dt = -\frac{dx}{x^2(1+2n)} = \frac{dn}{3x(n+n^2)}. \tag{137}$$

Первыми интегралами уравнений характеристик являются следующие комбинации переменных: $x^4\mathcal{B} = C^4$ и $4Ct + 2^{1/2}F(\phi, 2^{-1/2})$, где $\mathcal{B} = n + n^2$,

$$F(\phi, k) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi_1}} \tag{138}$$

— эллиптический интеграл первого рода, а

$$\phi = \phi(\mathcal{B}) = 2\,\mathrm{arctg}(2^{-1/2}\mathcal{B}^{-1/4}). \tag{139}$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию, можно записать в неявном виде [17]

$$t = \frac{F(\phi_0, 2^{-1/2}) - F(\phi, 2^{-1/2})}{2^{3/2}C}, \tag{140}$$

где $\phi_0 = \phi(\mathcal{B}_0(x_0))$, $\mathcal{B}_0(x) = n(x,0)[1 + n(x,0)]$, $C = x\mathcal{B}^{1/4}(x) = x_0\mathcal{B}_0^{1/4}(x_0)$.

Если в найденном решении считать, что $n \gg 1$, т. е. числа заполнения фотонных состояний велики и вынужденное рассеяние играет определяющую роль, то, подставив предельные выражения $\mathcal{B} \sim n^2$, $\phi \sim 2^{1/2}n^{-1/2} \ll 1$, $F(\phi, 2^{-1/2}) \sim \phi$, сведем решение (140) к

$$t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x_0 n(x_0)} - \frac{1}{xn(x)}\right]. \tag{141}$$

Это решение, полученное Я. Б. Зельдовичем и Е. В. Левичем [8], удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} - 2x^2 n \frac{\partial n}{\partial x} = 4xn^2. \tag{142}$$

На рис. 6, взятом из статьи [17], показано, как эволюционирует начальный спектр $n(x,0) = xe^{-x}$ согласно уравнению (135) и его решению (140).

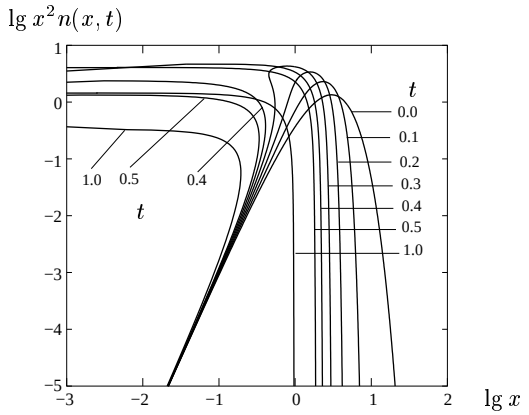

Рис. 6. Решения недиффузионного уравнения.

С течением времени спектр смещается в сторону низких частот, причем становится все круче. С некоторого момента спектр опрокидывается, что оказывается возможным из-за неявного вида решения. Причина такого нефизического поведения спектра в том, что когда интенсивность излучения очень резко меняется с частотой, нельзя пренебрегать производной в уравнении Компанейца, несмотря на малый коэффициент при ней. Кроме того, и само это уравнение становится неадекватным, так как при его выводе предполагалась возможность разложения интенсивности по формуле Тейлора (68), которая отсутствует при большой производной по частоте.

Тот же эффект возникает в решении (141), что можно показать и без вычислений. Действительно, одно из уравнений характеристик уравнения (142) гласит: $\dfrac{dx}{dt} = -2x^2 n$, т. е. скорость изменения частоты x со временем отрицательна и пропорциональна величине n. Поэтому чем выше точка на кривой решения, тем быстрее она продвигается в сторону меньших частот.

Эффект перехлеста спектра интерпретировался авторами [8] как появление ударной волны в частотном спектре излучения. Для выяснения его реального смысла необходимо получить решения без пренебрежения производной по частоте или точного интегрального уравнения, что возможно только численно.

6. Численные методы. Для расчета комптоновского рассеяния применялось несколько различных численных методов. Релятивистские астрофизические объекты, как правило, по томсоновскому рассеянию оптически тонки и излучение в них не вырождено (можно не принимать во внимание нелинейные эффекты). Поэтому первоначально ограничивались учетом только однократного рассеяния. Однако даже при редких многократных рассеяниях релятивистские электроны могут переводить фотоны в отдаленные спектральные области, создавая малую поправку к нулю (о чем уже говорилось). Учет последовательных рассеяний — наиболее широко используемый метод расчета [38, 43].

Многократное комптоновское рассеяния рассчитывали также методом Монте-Карло (см., например, работы [22, 33, 39].

Давно и успешно применяется так называемое дважды диффузионное приближение [48, 49]. Оно основано на соображении, что при небольших энергиях электронов пространственная и угловая структура излучения формируется за 2-3 рассеяния, а спектр ввиду малости его изменения при одном акте взаимодействия для своего формирования требует очень большого числа рассеяний. К уравнению (80) без нелинейных слагаемых применялся метод Эддингтона, так что частотный режим рассчитывался в приближении диффузии фотонов по частоте (с использованием дифференциального оператора Компанейца), а пространственно угловое распределение — в приближении диффузии в пространстве.

Другие численные методы, основанные на разделении частотной и пространственно угловой зависимости полей излучения, применялись в работах [35, 34] и др.

Метод, аналогичный применяемому в теории образования спектральных линий, использован в работе [44]. Этот метод основан на обращении матрицы коэффициентов после дискретизации интегрального уравнения для функции источников. Наиболее общий метод решения как стационарных, так и нестационарных задач о многократном комптоновском рассеянии был предложен авторами [27]. Эти методы требуют очень больших компьютерных ресурсов.

Частные задачи, сводящиеся к уравнениям, описывающим временную эволюцию пространственно однородного поля излучения в бесконечной среде, в линейном приближении численно решались несколькими авторами (например, [11, 30]).

Недавно С. И. Грачевым [3] был предложен эффективный метод решения линейных и нелинейных нестационарных (и как предел — стационарных) задач теории переноса излучения. Метод заключается в разложении решения по формуле Тейлора по приращению времени и установлении рекуррентных соотношений между коэффициентами разложения. Этим методом им получены аккуратные численные решения нелинейного уравнения Компанейца и точного уравнения (57) (для максвелловских электронов с функцией перераспределения, соответствующей упрощенному сечению). Об этих решениях скажем отдельно.

7. Эволюция однородного поля излучения. Численные решения интегрального уравнения (57) при максвелловских электронах с низкой температурой без учета вынужденного рассеяния полностью совпали с решениями линейного же уравнения Компанейца. Индуцированное рассеяние, приводящее к нелинейности уравнений, обнаруживает такие особенности решений, которые только угадывались при рассмотрении предельных случаев, обсуждавшихся выше.

Конечно, при решении нелинейного уравнения Компанейца никаких перехлестов не возникает. Вместе с тем решения обладают некоторыми особенностями.

Дело в том, что решения линейных уравнений при произвольных начальных распределениях фотонов по энергиям, при которых полное число фотонов конечно, обязательно эволюционируют к равновесному виновскому спектру. Это не всегда осуществляется по отношению к нелинейным уравнениям. Для них предельным является распределение Бозе—Эйнштейна, но согласно этому распределению полное число фотонов не может быть произвольным. Действительно, предельное безразмерное среднее число заполнения фотонных состояний имеет ограничение

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\exp(x-\mu)-1} \le \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\exp(x)-1} = 2.4041138. \tag{143}$$

Если величина интеграла (60) для начального распределения N_0 превосходит эту границу, то предельного распределения не существует.

На рис. 7 представлены графики функции $x^2 n(x,t)$, вычисленной в работе [20] при начальных распределениях, имитирующих дельта-функцию:

$$n(x,0) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}\varepsilon} e^{-(x-x_1)^2/\varepsilon^2}. \tag{144}$$

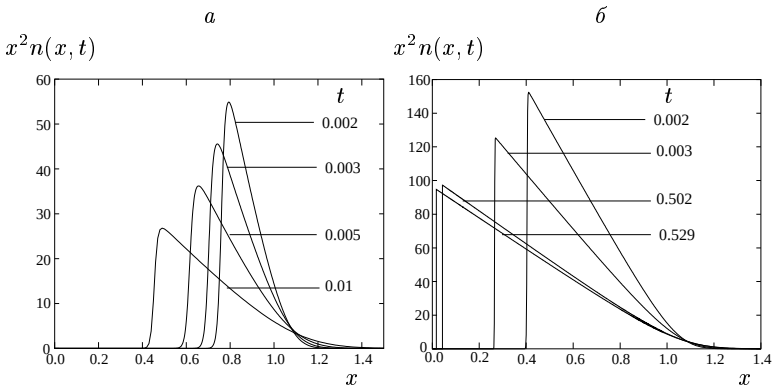

Рис. 7. Эволюция дельтаобразных начальных спектров:
а — при $N_0 = 10$, *б* — при $N_0 = 50$.

При расчетах бралось значение $\varepsilon = 0.01$. Если при $N_0 \leq 1$ решения нелинейного уравнения имеют тот же характер, что и на рис. 4, то с увеличением этого параметра сингулярность решений, выражающаяся в крутизне спектра и скорости его приближения к оси ординат, возрастает.

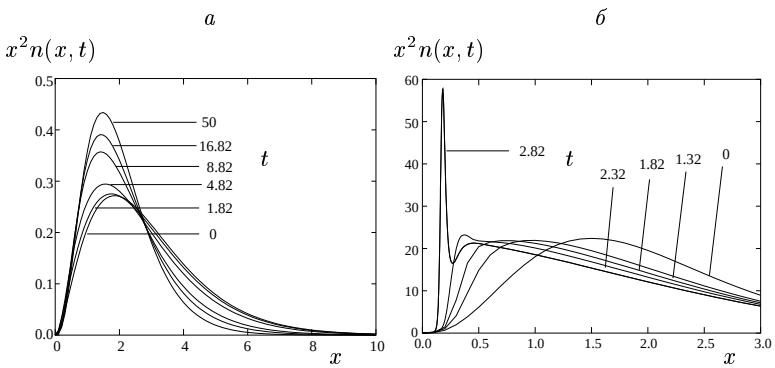

Рис. 8. Эволюция степенно-показательных начальных спектров (145):
а — при $N_0 = 1$, *б* — при $N_0 = 50$.

На рис. 8 из той же работы [20] показана эволюция спектра излучения при начальных распределениях

$$n(x,0) = \frac{8N_0}{3} x e^{-2x}. \tag{145}$$

Если $N_0 = 1$, никаких особенностей в поведении решения не возникает: оно плавно эволюционирует к распределению Бозе—Эйнштейна. Напротив, при $N_0 = 50$ с приближением к оси ординат возникают выступы, напоминающие ударные фронты или квазилинии. Решения точного, интегрального уравнения демонстрируют указанные явления еще в большей степени, чем полученные в приближении Компанейца.

Здесь мы привели решения уравнений, учитывающих только комптоновское рассеяние. Конечно, необходимо принимать во внимание и другие механизмы излучения и поглощения фотонов. Например, тормозной механизм, с которым сравнивалось комптоновское рассеяние в § 1, должен эффективно поглощать фотоны малых частот и препятствовать их накоплению. Результирующий спектр при этом должен быть планковским.

В заключение укажем объекты, в которых осуществляются условия для большой роли комптоновского рассеяния.

§ 5. Астрофизические объекты с большой ролью комптоновского рассеяния

1. Джеты из активных ядер галактик. Как показывают наблюдения [37, 42], из активных ядер галактик (АЯГ), в центре которых находится черная дыра массой в $10^8 \div 10^9\, M_\odot$, происходят выбросы очень горячего, полностью ионизованного вещества, называемые джетами. Самая распространенная модель джета — струя, состоящая из сгустков с разогнанными до релятивистских скоростей электронами,

энергии которых превосходят их энергию покоя в десятки и сотни раз (энергия покоя электрона соответствует температуре $6 \cdot 10^9$ K). В сгустках присутствует слабое магнитное поле напряженностью порядка 10^{-6} $Гс$. Электроны в магнитном поле излучают синхротронным механизмом фотоны в радиодиапазоне. Излученные фотоны рассеиваются теми же электронами и сильно увеличивают свою энергию, переходя в более энергичную часть спектра, в оптику, рентгеновский и гамма-диапазоны. Этот механизм называется синхрокомптоновским (по-английски Synchrotron Self-Compton).

Обычно принимается, что распределение электронов по импульсам изотропно, а по энергиям степенное $\gamma^{-æ}$ с характерными значениями γ порядка 10–100 и больше вплоть до некоторого предельного значения энергии. Тогда синхротронное излучение тоже имеет степенной спектр, пропорциональный $\nu^{-(æ-1)/2}$ [2]. В результате действия комптоновского механизма в рентгеновском диапазоне спектра комптонизованного излучения возникает так называемый бамп (bump), т. е. горб. На более высоких частотах энергии электронов не хватает и там интенсивность спектра быстро спадает (завал спектра). Чем дальше простирается степенной спектр электронов, тем на бóльших частотах происходит завал (в жестком рентгене или в гамма-диапазоне).

Энергия электронов переходит к фотонам, которые покидают джет. Для поддержания свечения необходима подкачка энергии электронному газу. Имеется несколько моделей такой подкачки. Возможна непрерывная инжекция релятивистских электронов или их ускорение каким-нибудь механизмом. Источником энергии является ядро галактики (central engine). На протяжении заметного времени существует стационарный режим свечения. Было показано [13], что в результате синхротронного излучения в качестве стационарного устанавливается именно степенное распределение электронов по энергиям. Впоследствии авторами [32] было получено численное решение стационарного уравнения типа Фоккера—Планка, определяющего распределение электронов с учетом всего спектра магнитотормозного излучения и поглощения (как синхротронного, так и циклотронного), комптоновских потерь, а также инжекции и вылета электронов из области. Расчеты показали, что степенной спектр электронов создается только на очень больших энергиях, а на малых и умеренных образуется максвелловское распределение с температурой, определяемой соотношением инжекции и потерь. Обзор работ по этой проблеме содержится в статье [50].

2. Нейтронные звезды и черные дыры в двойных системах. В таких системах происходит перетекание вещества с обычной звезды на компактную, в результате чего вокруг последней образуется аккреционный диск [26]. Теория аккреционных дисков изложена во многих книгах, например, в [29].

Внутри диска температура очень большая, там горячий электронный газ рассеивает фотоны, излучаемые каким-нибудь первичным механизмом: синхротронным, тормозным или двойным комптоновским. Рассеянные фотоны могут рождать электрон-позитронные пары, в свою очередь аннигилирующие и дающие фотоны для последующих каскадных процессов рассеяния, рождения и аннигиляции пар [31].

Комптоновскому рассеянию обязано и формирование спектра аккрецирующих вещество нейтронных звезд и черных дыр [5].

Из полярных областей звезд, окруженных дисками, выбрасываются джеты, масштаб которых значительно меньше, чем в случае АЯГ, так как масса нейтронной звезды или черной дыры здесь порядка массы Солнца. Можно думать, однако, что явления, происходящие в АЯГ и в двойных системах, подобны, так что изучение внутригалактических джетов, которые находятся гораздо ближе к нам и более доступны для наблюдений, помогает понять природу активности АЯГ. Некоторые авторы двойные системы с выбросами вещества называют миниквазарами. Проблемам образования, строения и свечения дисков и джетов из них посвящены многие статьи сборников, некоторые из которых мы упоминали [26, 50].

3. Рентгеновские источники. Перетекание вещества может происходить и в двойной системе с обычными звездами, если одна из них заполняет свою полость Роша. Тогда на второй образуется горячее пятно, дающее рентгеновское излучение, которое испытывает комптоновское рассеяние [10].

4. Горячие короны аккреционных дисков. Аккреционные диски образуются около компактных объектов (нейтронных звезд или черных дыр звездных масс) или вокруг черных дыр в центре галактик. Вещество дисков во внешних их частях имеет температуру порядка 10^5 K, т. е. частицы там нерелятивистские. Однако короны таких дисков, т. е. более разреженные их оболочки, имеют температуру $10^9 \div 10^{10}$ K (аналогично, электроны в короне Солнца, температура поверхности которого 6000 K, имеют температуру порядка 10^6 K). Механизмы нагрева вещества короны могут быть аналогичны тем, которые действуют на Солнце.

Короны дисков очень тонкие, так что в них рассеивается только малая доля излучения, идущего от диска. Однако рассеянное излучение оказывается в рентгеновском и гамма-диапазоне, где его до рассеяния не было совсем и где оно становится доступным наблюдению, так как фотоны там очень энергичны [45].

Необходимо принимать во внимание взаимное влияние короны и диска друг на друга [43]. Сравнительно

мягкие (УФ) фотоны диска, попадая в корону и рассеиваясь релятивистскими электронами, приобретают большую энергию и способность рождать пары. В свою очередь рассеянное в короне излучение частично возвращается в диск и разогревает его.

5. Реликтовое излучение. Согласно модели горячей Вселенной на ранних этапах ее эволюции она имела очень высокую температуру, так что вещество было полностью ионизовано, а излучение находилось в равновесии с веществом. Спектр излучения был чисто планковским. Несколько процессов возмущали этот спектр. В определенные эпохи остывания Вселенной произошли аннигиляция вещества и антивещества, а затем рекомбинация электронов с атомами. В ходе расширения и, как следствие, остывания вещество и излучение разделились. Однако излучение все время оставалось с большой точностью планковским. Оно дошло до настоящего времени в виде реликтового излучения (РИ), или микроволнового космического фона.

После эпохи рекомбинации образовались крупномасштабные структуры Вселенной: галактики и скопления галактик. При этих процессах также выделялась значительная энергия. Там, где образовались первичные структуры, излучение получило дополнительный вклад энергии и возникли локальные отклонения от теплового спектра. С течением времени отклонения локальной интенсивности от средней замывались при рассеянии на электронах, но все же какие-то искажения в пространственном распределении излучения, которое теперь наблюдается в радиодиапазоне как реликтовый тепловой фон с температурой 2.7 K, должны остаться. Расчет замывания и остаточной анизотропии реликтового излучения представляет большой интерес для космологии. Искажения спектра и их дальнейшая эволюция в значительной степени также определяются рассеянием. При расчетах искажений спектра применяется уравнение Компанейца [7, 12, 51]. Искажения изотропии РИ и его спектра по теоретическим оценкам составляют в настоящее время 10^{-5} от интенсивности РИ.

Движения первичных структур Вселенной могут порождать поляризацию излучения [28]. Ожидаемая степень поляризации возмущений РИ достигает 10 %, т. е. 10^{-6} от интенсивности самого РИ. В настоящее время технические возможности аппаратуры в радио-диапазоне подошли к тому уровню, который позволит наблюдать все эти явления.

6. Горячий газ в скоплениях галактик. Из наблюдений континуума и линий в рентгеновской области спектра следует, что в богатых скоплениях галактик имеется горячий электронный газ с температурой порядка 10^8 K. Масса газа сравнима с массой составляющих скопление галактик. Этот газ рассеивает микроволновое реликтовое излучение (РИ) и сдвигает его спектр в сторону бóльших частот. Фотоны получают дополнительную, хотя не очень большую энергию, так что на малых длинах волн излучение усиливается, а на более длинных — ослабляется. Это явление называется эффектом Сюняева—Зельдовича [9]. Обзор наблюдательных данных и теории этого эффекта представлен в работе [47].

Характер искажения спектра отражает также пекулярное движение скопления по отношению к реликтовому фону. Это же движение может создавать поляризацию рассеянного излучения. Наблюдения хода изменения спектра и поляризации РИ по телу не очень далеких скоплений может позволить выявить распределения плотности, температуры и макроскопической скорости движения электронного газа в скоплениях [46, 52].

7. Другие объекты. Комптоновское рассеяние играет заметную роль и в ряде объектов, отличных от указанных выше. Например, межзвездное излучение в Галактике рассеивается энергичными электронами космических лучей [40]. Это излучение сильно неизотропно, так как идет в основном от галактической плоскости. Его преобразование в жесткие диапазоны мешает изучению излучения тех же диапазонов космического происхождения.

Рассчитываются модели звездных атмосфер с учетом комптоновского рассеяния рентгеновского излучения некоторого внешнего источника, например, аккреционного диска [36].

В работе [16] показано, что нелинейный (индуцированный) эффект Комптона способствует нагреву вещества внешних оболочек АЯГ и пульсаров.

Приведенные сведения демонстрируют важность дальнейшего изучения эффекта Комптона, уточнения его воздействия на спектры и (о чем здесь почти не говорилось) поляризацию излучения астрофизических объектов, разработки и создания эффективных и достаточно быстрых компьютерных программ расчета многократного комптоновского рассеяния в средах плоской и сферической геометрии.

Литература

1. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. 727 с.
2. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. М.: Наука, 1987. 488 с.
3. Грачев С. И. Новый метод решения нестационарных задач теории переноса излучения // Астрофизика. 2001. Т. 44. N 4. С. 619–632.
4. Дирак П. А. М. Воспоминания о необычайной эпохе. М.: Наука, 1990. 208 с.
5. Завлин В. Е., Шибанов Ю. А. Комптонизация рентгеновского излучения в плазме аккрецирующих нейтронных звезд // Астрон. журн. 1989. Т. 66. С. 983–995.
6. Зельдович Я. Б. Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением // Успехи физ. наук. 1975. Т. 115. С. 161–197.
7. Зельдович Я. Б., Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Влияние выделения энергии на спектр излучения в горячей Вселенной // Журн. экспер. теор. физ. 1972. Т. 62. С. 1217–1227.
8. Зельдович Я. Б., Левич Е. В. Бозе-конденсация и ударные волны в спектре фотонов // Журн. экспер. теор. физ. 1968. Т. 55. С. 24–23.
9. Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А. Межгалактический газ в скоплениях галактик, микроволновое фоновое излучение и космология // Астрофизика и космическая физика. М.: Наука, 1982. С. 9–65.
10. Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комптон-эффект на тепловых электронах в источниках рентгеновского излучения // Астрон. журн. 1972. Т. 49. С. 58–73.
11. Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комптонизация, характерные спектры и тепловой баланс разреженной плазмы // Астрон. журн. 1974. Т. 51. С. 698–711.
12. Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комптонизация, спектр реликтового излучения и тепловая история Вселенной // Астрон. журн. 1974. Т. 51. С. 1162–1176.
13. Каплан С. А., Цытович В. Н. Плазменная астрофизика. М.: Наука, 1972. 440 с.
14. Компанеец А. С. Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами // Журн. экспер. теор. физ. 1956. Т. 31. С. 876–885.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
16. Левич Е. В., Сюняев Р. А. Нагрев газа вблизи квазаров, ядер сейфертовских галактик и пульсаров низкочастотным излучением // Астрон. журн. 1971. Т. 48. С. 461–470.
17. Нагирнер Д. И. Рассеяние пространственно однородного изотропного излучения на холодном электронном газе // Астрофизика. 1984. Т. 20. С. 149–156.
18. Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М. Функция Грина линейного уравнения Компанейца // Астрофизика. 1997. Т. 40. С. 97–116.
19. Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М. Коэффициент комптоновского ослабления при рассеянии максвелловскими электронами // Астрофизика. 2000. Т. 43. С. 473–482.
20. Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М., Грачев С. И. Точные и численные решения уравнения Компанейца: эволюция спектра и средних частот // Астрофизика. 1997. Т. 40. С. 350–364.
21. Нагирнер Д. И., Кикец Е. В., Поутанен Ю. Й. Однократное комптоновское рассеяние // Уч. зап. Ленингр. ун-та. 1991. N 427. (Труды Астрон. обсерв. ЛГУ. Т. 43). С. 28–70.
22. Поздняков Л. А., Соболь И. М., Сюняев Р. А. Комптонизация и формирование спектров рентгеновских источников. Методика расчетов методом Монте-Карло // Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 21. С. 238–307.

23. Поздняков Л. А., Соболь И. М., Сюняев Р. А. Комптонизация и формирование спектров рентгеновских источников. II // Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 31. С. 267–331.

24. Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. М.: Наука, 1985. 502 с.

25. Babuel-Peyrissac J. P., Rouvillois G. Radiative transfer in an LTE atmosphere: an integral kernel formulation of the Compton scatter source term // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1970. Vol. 10. P. 1277–1290.

26. Charles Ph. Black holes in our Galaxy: observation // Theory of Black Holes Accretion Discs / Eds. M. A. Abramowicz, G. B. Björnsson, J. E. Pringle. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. P. 1–21.

27. Dermer C. D., Sturner S. J., Schlickeiser R. Nonthermal Compton and synchrotron processes in jets of active galactic nuclei // Astrophys. J. Suppl. Ser. 1997. Vol. 109. P. 103–137.

28. Dolgov A. D., Doroshkevich A. G., Novikov D. I., Novikov I. D. Classification of singular points in polarization field of cosmic microwave background and eigenvectors of Stokes matrix // Письма в журн. эксперим. теор. физ. 1999. Т. 69. С. 395–401.

29. Frank J., King A., Raine D. Accretion Power in Astrophysics. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 294 p.

30. Guilbert P. W. Numerical solution of time dependent Compton scattering problems by means of an integral equation // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1981. Vol. 197. P. 451–460.

31. Ghisellini G. Pair production in steady synchrotron self-Compton models // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1989. Vol. 238. P. 449–479.

32. Ghisellini G., Haardt F., Svensson R. Thermalization by synchrotron absorption in compact sources: electron and photon distributions // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1998. Vol. 297. P. 348–354.

33. Hanawa T. Monte Carlo simulation of Comptonization in plasma accreting onto neutron stars // Astrophys. J. 1991. Vol. 366. P. 495–500.

34. Illarionov A., Kallman T., McCray R., Ross R. Comptonization of X-rays by low-temperatute electrons // Astrophys. J. 1979. Vol. 228. P. 279–292.

35. Lightman A., Rybicki G. B. Inverse Compton reflection: the steady-state theory // Astrophys. J. 1980. Vol. 236. P. 928–944.

36. Madej J., Rożańska A. X-ray irradiated model stellar atmospheres. II. Comprehensive treatment of Compton scattering // Astron. Astrophys. 2000. Vol. 363. P. 1055–1064.

37. Madejski G. M. Black holes in active galactic nuclei: observation // Theory of Black Holes Accretion Discs / Eds. M. A. Abramowicz, G. B. Björnsson, J. E. Pringle. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. P. 22–40.

38. Marscher A. P., Gear W. K. Models for high-frequency radio outbursts in extragalactic sources, with application to the early 1983 millimetre-to-infrared flare of 3C 273 // Astrophys. J. 1985. Vol. 298. P. 114–127.

39. Molnar S. M., Birkinshaw M. Inverse Compton scattering in mildly relativistic plasma // Astrophys. J. 1999. Vol. 523 P. 78–86.

40. Moskalenko I. V., Strong A. W. Anisotropic inverse Compton scattering in the Galaxy // Astrophys. J. 2000. Vol. 528. P. 357–367.

41. Nagirner D. I., Poutanen J. Single Compton scattering // Astrophys. Space Phys. Rev. 1994. Vol. 9. P. 1–80.

42. Peterson B. M. An Introduction to Active Galactic Nuclei. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 238 p.

43. Poutanen J. Accretion disc-corona models and X/γ-ray spectra of accreting black holes // Theory of Black Holes Accretion Discs / Eds. M. A. Abramowicz, G. B. Björnsson, J. E. Pringle. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. P. 100–122.

44. Poutanen J., Nagendra K. N., Swensson R. Green's matrix for Compton reflection of polarized radiation from cold matter // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1996. Vol. 283. P. 892–904.

45. Poutanen J., Svensson R. The two-phase pair corona model for active galactic nuclei and X-ray binaries: how to obtain exact solutions // Astrophys. J. 1996. Vol. 470. P. 249–268.

46. Puy D., Grenacher L., Jetzer Ph., Signore M. Asphericity of galactic clusters and Sunyaev—Zel'dovich effect // Astron. Astrophys. 2000. Vol. 363. 415–424.

47. Rephaeli Y. Comptonization of the cosmic microwave background: the Sunyaev—Zeldovich effect // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1995. Vol. 33. P. 541–579.

48. Sunyaev R. A., Titarchuk L. G. Comptonization of X-rays in plasma clouds, typical radiation spectra // Astron. Astrophys. 1980. Vol. 86. P. 121–138.

49. Sunyaev R. A., Titarchuk L. G. Comptonization of low-frequency radiation in accretion disks: angular distribution and polarization of hard radiation // Astron. Astrophys. 1985. Vol. 143. P. 374–388.

50. Svensson R. Thermalization mechanisms in compact sources // High Energy Processes in Accreting Black Holes / Eds. J. Poutanen and R. Svensson. Astronomical Society of the Pacific. Conference Series. 1999. Vol. 161. P. 361–374.

51. Weymann R. The energy spectrum of radiation in the expanding universe // Astrophys. J. 1966. Vol. 145. P. 560–571.

52. Xue Y.-J., Wu X.-P. Reconstruction of radial temperature profile of galaxy clusters // Astron. Astrophys. 2000. Vol. 360. L43–L46.

53. Zel'dovich Ya. B., Sunyaev R. A. The interaction of matter and radiation in a hot-model universe // Astrophys. Space Sci. 1969. Vol. 4. P. 301–316. (Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А. Взаимодействие вещества и излучения в горячей модели Вселенной // Astrophys. Space Sci. 1969. Vol. 4. P. 285–300.)

Содержание

§ 1. Комптоновское рассеяние: открытие и описание ... 3
1. Немного истории ... –
2. Комптоновское рассеяние и изменение энергии фотона ... 4
3. Эффективность комптоновского рассеяния ... 6
4. Сечение комптоновского рассеяния ... 7
5. Упрощенное сечение ... 8
§ 2. Кинетическое уравнение для комптоновского рассеяния и его частные случаи ... 8
1. Релятивистские обозначения ... –
2. Релятивистское кинетическое уравнение комптоновского рассеяния ... 10
3. Плоская атмосфера тепловых электронов ... 11
4. Однородное бесконечное пространство ... 12
§ 3. Нерелятивистский предел ... 13
1. Почти нерелятивистские электроны ... –
2. Разложение подынтегральной функции ... –
3. Усреднение по распределению Максвелла ... 15
4. Бесконечное однородное пространство ... 16
5. Комптонизация ... –
§ 4. Решения кинетических уравнений ... 18
1. Уравнение Компанейца и его свойства ... –
2. Линейное уравнение и функция Грина ... –
3. Диффузионное решение ... 20
4. Решение стационарного линейного уравнения ... 21
5. Решение недиффузионного уравнения ... 22
6. Численные методы ... 24
7. Эволюция однородного поля излучения ... –
§ 5. Астрофизические объекты с большой ролью комптоновского рассеяния ... 25
1. Джеты из активных ядер галактик ... –
2. Нейтронные звезды и черные дыры в двойных системах ... 26
3. Рентгеновские источники ... –
4. Горячие короны аккреционных дисков ... –
5. Реликтовое излучение ... 27
6. Горячий газ в скоплениях галактик ... –
7. Другие объекты ... –
Литература ... 28

У ч е б н о е и з д а н и е

Дмитрий Исидорович Нагирнер

КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ
В АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

Учебно-методическое пособие

Лицензия ЛР № 040050 от 15.08.96.

Подписано в печать с оригинала-макета 28.08.2001.

Формат 60×84 1/16. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 3,25. Уч. изд. л. 3,43. Тираж 50 экз. Заказ № 512

РОПИ Издательства Санкт-Петербургского университета.
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

ЦОП типографии Издательства СПбГУ.
199034, Санкт-Петербург, наб. Макарова, 6.