

Лекция 1. Механическое равновесие звезд

Звезда – небесное тело с $M \sim 0.1 - 100 M_{\odot}$.

Для двух протонов $F_{\text{кул}}/F_{\text{грав}} \sim 10^{39}$. Но по мере увеличения массы тел роль гравитации возрастает, т.к. тела в целом электронейтральны, а антигравитации не существует. У небесных тел с $R > 1000$ км связь частиц в единое целое происходит вследствие гравитационного взаимодействия.

$$G \simeq 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г}\cdot\text{с}^2$$

Таблица 1: Сравнение характеристик электрического и гравитационного поля

Электрическое поле	Гравитационное поле	
$\mathbf{F}_{q_oq} = q_oq/r^2 \cdot (\mathbf{r}/r)$	$\mathbf{F}_{m_o m} = -Gm_o m / r^2 \cdot (\mathbf{r}/r)$	$q \iff -Gm$
$\mathbf{E}_q = q/r^2 \cdot (\mathbf{r}/r)$	$\mathbf{g}_m = -Gm/r^2 \cdot (\mathbf{r}/r)$	Аддитивность
$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$	$\mathbf{g} = \sum \mathbf{g}_i$	Т-ма Гаусса
$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$	$\int \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi Gm$	
$\rho_q = dq/dV; \text{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho_q$	$\rho = dm/dV; \text{div}\mathbf{E} = -4\pi G\rho$	
$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$	$\mathbf{g} = -\text{grad}\varphi$	
$\varphi_k = \sum_{i \neq k} q_i/r_{ik} \text{ или } \int \rho_q/r \cdot dV$	$\varphi_k = -\sum_{i \neq k} Gm_i/r_{ik} \text{ или } -G \int \rho/r \cdot dV$	Аддитивность
$U = 0.5 \sum_{k=1}^N q_k \varphi_k \text{ или } 0.5 \int \rho_q \varphi dV$	$U = 0.5 \sum_{k=1}^N m_k \varphi_k \text{ или } 0.5 \int \rho \varphi dV$	
$\Delta\varphi = -4\pi\rho_q$	$\Delta\varphi = 4\pi G\rho$	Уравнение Лапласа

Сферически симметричное поле

Закон сохранения массы:

$$dV = 4\pi r^2 dr \implies \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \text{или} \quad \frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}. \quad (I.1)$$

По теореме Гаусса: $-4\pi r^2 g = -4\pi Gm(r) \implies$

$$g = 0 \quad \text{внутри сферической оболочки,} \quad (I.2a)$$

$$\text{в центре звезды} \quad g_c = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Gm}{r^2} = 0, \quad (I.2b)$$

$$g = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{Gm}{r^2} \quad \text{при} \quad 0 < r \leq R. \quad (I.2c)$$

Из (I.2c) получаем выражение для потенциала:

$$\varphi(r) = -\int_r^\infty \frac{Gm}{r^2} dr \stackrel{?}{=} -\int_0^M \frac{Gdm}{r} \quad (\varphi_\infty \equiv 0!) \quad (I.3)$$

Согласно Табл.1, выражение для гравитационной энергии:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{V_*} \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_0^M \varphi dm \stackrel{?}{=} -\int_0^M \frac{Gm}{r} dm < 0. \quad (I.4)$$

Уравнение гидростатического равновесия:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2} = -\rho g = -\rho \frac{d\varphi}{dr}, \quad \text{или} \quad \frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (I.5)$$

причем, согласно (1.2b):

$$\left(\frac{dP}{dr} \right)_{r=0} = 0. \quad (I.5a)$$

Теорема вириала. Домножая (I.5) на $4\pi r^3$ и интегрируя по частям получим:

$$4\pi r^2 P(r) - 3 \int_0^r P \cdot 4\pi r^2 dr = - \int_0^m \frac{Gm}{r} dm. \quad (I.6a)$$

Тогда для звезды в целом, с учетом $P(R) = 0$, (I.1) и (I.4), имеем:

$$U = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm. \quad (I.6)$$

Характерные времена

На примере Солнца сравним характерное время установления гидростатического t_{hyd} и теплового t_{th} равновесия в звезде с временем ядерной эволюции t_{nuc} .

$$M_\odot = 1.99 \cdot 10^{33} \text{ г}, \quad R_\odot = 6.96 \cdot 10^{10} \text{ см}, \quad L_\odot = 3.83 \cdot 10^{33} \text{ эрг/с}$$

$$t_{hyd} \sim \frac{R_\odot}{V_s} \sim 30 \text{ мин}; \quad t_{th} \sim \frac{Q}{L_\odot} \stackrel{?!}{\sim} \frac{|U|}{L_\odot} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ лет}; \quad t_{nuc} \sim \frac{10^{-3} M_\odot c^2}{L_\odot} \sim 5 \cdot 10^9 \text{ лет.}$$

Здесь V_s – средняя скорость звука в звезде, а Q – тепловая энергия звезды.

Видно, что для звезды в целом $t_{hyd} \ll t_{th} \ll t_{nuc}$

Поэтому внутреннее строение звезды определяется, главным образом, условием гидростатического равновесия, и свойства звезды в первом приближении можно понять без анализа ее термической структуры.

Показатель адиабаты γ

При адиабатическом процессе, т.е. при $S(t) = const$:

$$\frac{P(t)}{P_0} = \left[\frac{\rho(t)}{\rho_0} \right]^\gamma \quad \text{или} \quad P = K_0 \rho^\gamma, \quad \text{где} \quad K_0 = P_0 / \rho_0^\gamma = const, \quad (I.7)$$

и

$$T dS = 0 = dE + P d\left(\frac{1}{\rho}\right) \implies E = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} \text{ эрг/г} \quad (\gamma > 1!). \quad (I.8)$$

Пусть γ - средний по звезде показатель адиабаты. Тогда (!) теорема вириала примет вид:

$$U = -3(\gamma - 1) \int_0^M E dm = -3(\gamma - 1)Q. \quad (I.9)$$

В частности, для одноатомного газа $\gamma = 5/3 \implies U = -2Q$ или

$$Q = -U/2. \quad (I.10)$$

Необходимое условие устойчивости звезд

Пусть $r_e(m)$, $\rho_e(m)$ и $P_e(m)$ – зависимости от массы соответствующих величин в звезде, которая находится в состоянии гидростатического равновесия. Пусть также γ – средний показатель адиабаты, характеризующий свойства вещества звезды.

Предположим, что звезда *адиабатически* расширилась (сжалась) гомологическим образом, т.е. радиус каждой ее точки увеличился (уменьшился) в одинаковой степени: $r(m) = \xi r_e(m)$, где $\xi(m) = const$. Рассмотрим совокупность гомологичных газовых шаров, каждый из которых характеризуется величиной $\xi > 0$. Вообще говоря, эти газовые шары не будут находиться в состоянии гидростатического равновесия, но закон сохранения массы для них, конечно же, выполняется, поэтому

$$\rho(m) = \rho_e(m) / \xi^3. \quad (I.11)$$

Поскольку изменение радиуса происходило адиабатически, т.е. $P/P_e = (\rho/\rho_e)^\gamma$, то для удельной энергии, согласно (I.8) и (I.11) имеем

$$E(m) = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{E_e(m)}{\xi^{3\gamma - 3}}.$$

Полная энергия звезды W меняется в зависимости от ξ следующим образом:

$$W = Q + U = \int_0^M E dm - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = Q_e \xi^{3-3\gamma} - \xi^{-1} |U_e|.$$

Согласно (1.9) $U_e = (3 - 3\gamma) Q_e$, поэтому

$$W = \frac{|U_e|}{(3\gamma - 3)} \xi^{3-3\gamma} - \frac{|U_e|}{\xi} \implies \frac{dW}{d\xi} = \frac{|U_e|}{\xi^2} (1 - \xi^{4-3\gamma}). \quad (I.12)$$

Из (I.12) следует, что если $\gamma \neq 4/3$, то функция $W(\xi)$ имеет экстремум при $\xi = 1$. Иными словами, среди рассматриваемых конфигураций экстремум полной энергии соответствует гидростатически равновесной звезде. Так как

$$\left(\frac{d^2W}{d\xi^2} \right)_{\xi=1} = 3(\gamma - 4/3) \cdot |U_e|, \quad (I.13)$$

то этот экстремум является минимумом при $\gamma > 4/3$ и максимумом при $\gamma < 4/3$.

Поскольку состояния, соответствующие максимуму энергии, являются неустойчивыми, из (I.12) следует, что звезды с $\gamma < 4/3$ существовать не могут.

Замечание 1. Условие $\gamma > 4/3$ является необходимым, но не достаточным условием устойчивости звезд, поскольку мы рассматривали устойчивость лишь относительно одного, специального типа возмущений (адиабатически-гомологических).

Замечание 2. При выводе критерия неустойчивости предполагалось, что величина γ одинакова во всех областях звезды. В реальной ситуации звезда теряет устойчивость, когда γ становится $< 4/3$ в области с массой более 10-20% M_* . Именно это обстоятельство приводит к гибели достаточно массивных звезд и феномену сверхновых. Позднее вы познакомитесь с причинами, по которым γ может стать $< 4/3$.

Дополнение к лекции 1: для каких тел важна гравитация.

Сила взаимодействия двух половинок продолговатого тела:

$$F_g \sim \frac{G(M/2)^2}{R^2} = \frac{GM^2}{4R^2}.$$

Будем считать, что форма тела не слишком отличается от сферической, поэтому давление на границе двух половинок тела и его плотность порядка:

$$P_g \sim \frac{F_g}{4\pi R^2}, \quad \rho \sim \frac{M}{4R^3}$$

соответственно.

Гравитационное притяжение сжимает тело, вызывая его деформацию, величина которой связана с давлением законом Гука:

$$P = E \frac{\Delta R}{R},$$

где E – т.н. модуль Юнга.

Примем, что сжатие существенно, если величина относительной деформации превышает несколько процентов, скажем, 3%. Тогда гравитация начинает играть заметную роль в случае тел, для которых выполняется условие:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{P_g}{E} \sim \frac{GM^2}{16\pi ER^4} \sim \frac{GR^2\rho^2}{\pi E} \geq 0.03,$$

т.е. для тел с размером

$$R \geq \frac{1}{\rho} \left(\frac{0.03\pi G}{G} \right)^{1/2} \sim 1 \text{ км},$$

где для численной оценки принято $E = 10^{11}$ эрг/см³, $\rho = 3$ г/см³.

Как форма гравитирующего (невращающегося!) тела зависит от его размеров? Для ответа на этот вопрос оценим, максимальную высоту гор на планетах. Пусть имеется (цилиндрическая) гора высотой h с массой m и площадью основания S . Тогда создаваемое горой давление на кору планеты

$$P = \frac{gm}{S} = \rho gh.$$

Под давлением кора начнет деформироваться, и гора будет оседать. Примем, что проседание коры станет существенным, когда относительная деформация ее вещества $\Delta l/l$ превысит 3%. Тогда из закона Гука получим:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\rho gh}{E} \leq 0.03 \quad \implies \quad h \leq \frac{0.03E}{\rho g},$$

что для Земли, например, дает $h \leq 10$ км.

Поскольку $g = GM/R^2 \sim 4\rho R$, имеем: $h/R \propto R^{-2}$, т.е. относительный размер неровностей быстро убывает с увеличением размеров планет.

Лекция 2. Политропные звезды

Интегральные соотношения для политропных звезд

Аппроксимируем реальную зависимость $P(\rho)$ вдоль радиуса звезды степенной, т.е. предположим, что

$$P(r) = K \cdot [\rho(r)]^{1+1/n} \quad \text{или} \quad \log P = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log \rho + \text{const.} \quad (II.1)$$

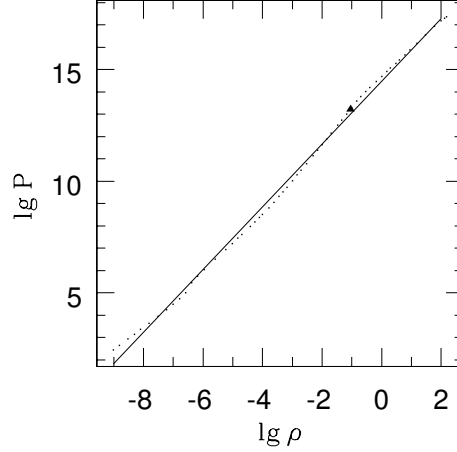


Рис. 1: Аппроксимация истинной зависимости $P(\rho)$ для Солнца (пунктирная линия) законом (II.1) с $n \simeq 2.5$ (сплошная линия). Треугольником отмечена точка, в которой $m = 0.99 M_{\odot}$, $r = 0.80 R_{\odot}$.

Тогда $\rho^{-1} dP = (n+1) d(P/\rho)$, и из (I.5) с учетом $\rho(R) = 0$ и $n > 0$, следует:

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{R} - (n+1) \frac{P(r)}{\rho(r)}. \quad (II.2)$$

С помощью (I.6) и (II.2) выражение для U примет вид:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^M \varphi dm = -\frac{GM^2}{2R} + \frac{n+1}{6} U.$$

Из этого рекуррентного соотношения получаем:

$$U = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} < 0 \quad \implies \quad n \leq 5. \quad (II.3)$$

Из (II.3), в частности, следует, что изотермические звезды из идеального газа ($P = \rho \mathcal{R}T/\mu$) не могут существовать, т.к. для них $n = \infty$.

Из (I.9) следует, что тепловая энергия политропной звезды:

$$Q \equiv \int_0^M E dm = \frac{1}{(\gamma-1)(5-n)} \frac{GM^2}{R} > 0 \quad (\gamma > 1!). \quad (II.4)$$

Полная энергия политропной звезды:

$$W \equiv U + Q = \frac{(4-3\gamma)}{(\gamma-1)(5-n)} \frac{GM^2}{R} < 0 \quad (\gamma > \frac{4}{3}!) \quad (II.5)$$

Структура политропных звезд

A) $n = 0$: несжимаемая жидкость $\rho(r) = const$

$$m_r = \frac{4}{3}\pi\rho_c r^3; \quad P(r) = P_c - \frac{2}{3}\pi G\rho_c r^2; \quad (II.6)$$

B) $0 < n \leq 5$

Обозначим:

$$\rho/\rho_c = \theta^n, \text{ и } r = \alpha\xi, \text{ где } \alpha = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{(1-n)/n}}{4\pi G} \right]^{1/2} = const. \quad (II.7)$$

Тогда из (I.1), (I.5) и (II.1) получим для функции $\theta(\xi)$ уравнение Эмдена:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0, \quad \text{или} \quad \theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' + \theta^n = 0, \quad (II.8a)$$

с начальными условиями: ¹

$$\theta = 1, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (II.8b)$$

Решение ищется в интервале $0 \leq \xi \leq \xi_n$, где ξ_n – значение ξ , при котором $\theta(\xi) = 0$.

Если $n=1$, то $\theta = \sin \xi/\xi \implies \xi_1 = \pi$.

Если $n=5$, то $\theta = (1 + \xi^2/3)^{-1/2} \implies \xi_5 = \infty$.

При других n уравнение (II.8a) интегрируется численно. Чтобы избежать сингулярности при $\xi = 0$, интегрировать начинают не с 0, а с некоторого малого значения ξ , учитывая, что при $\xi \ll 1$ справедливо разложение:

$$\theta \simeq 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{n\xi^4}{120} - \dots \quad (II.8c)$$

Обозначим:

$$\eta_n \equiv \int_0^{\xi_n} \theta^n \xi^2 d\xi \stackrel{?}{=} -\xi_n^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_n}, \quad \text{так что} \quad M = \int_0^R 4\pi\rho r^2 dr = 4\pi\rho_c \alpha^3 \eta_n.$$

¹Если $P = K\rho^{1+1/n}$, то, согласно (I.5a), $(d\rho/dr)_{r=0} = \rho_c/P_c (dP/dr)_{r=0} = 0$. Но $d\theta/d\xi = \alpha/n \theta^{1-n} \cdot d\rho/dr$, откуда и получается второе начальное условие.

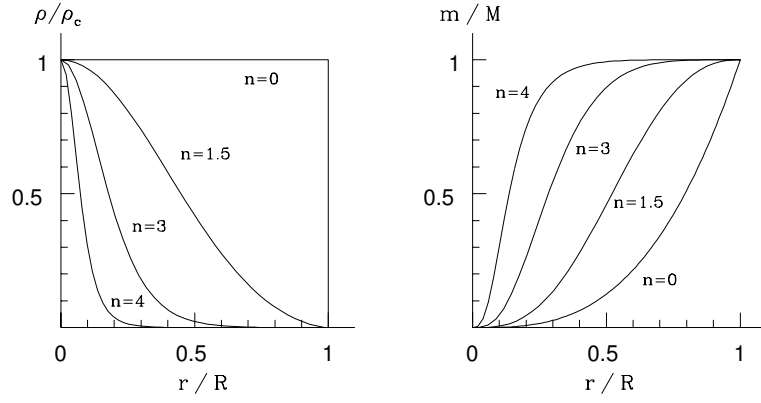


Рис. 2: Структура политропных звезд с разными значениями n .

Тогда

$$R = \xi_n \cdot \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \cdot \rho_c^{(1-n)/2n}, \quad (II.9a)$$

$$M = \frac{\eta_n}{\sqrt{4\pi}} \left[\frac{(n+1)K}{G} \right]^{3/2} \cdot \rho_c^{(3-n)/2n}. \quad (II.9b)$$

Исключая из этих соотношений ρ_c получим, что при данном n

$$R \propto M^{(1-n)/(3-n)}. \quad (II.10)$$

Таблица 2: Параметры политропных моделей

n	ξ_n	η_n	$\rho_c/\bar{\rho}$	f_n
0	2.45	4.90	1.00	2.88
1.0	3.14	3.14	3.29	4.29
1.5	3.65	2.71	5.99	4.86
2.0	4.35	2.41	11.4	5.39
3.0	6.90	2.02	54.2	6.39
4.0	15.0	1.80	622	7.39
5.0	∞	1.73	∞	8.65

Из (II.9) и Табл.2 следует, что когда $n = 1$, при любой ρ_c звезда имеет один и тот же радиус $R_{n=1} = (\pi K/2G)^{1/2}$, а когда $n = 3$ – одну и ту же массу при всех ρ_c :

$$M_{n=3} \simeq 1.29 \left(\frac{K}{G} \right)^{3/2}. \quad (II.11)$$

Если обозначить через $\bar{\rho}$ среднюю плотность звезды, то из (II.9) следует, что

$$\rho_c = \bar{\rho} \cdot \frac{\xi_n^3}{3\eta_n}, \quad \bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}. \quad (II.12)$$

Отношение $\rho_c/\bar{\rho}$ приведено в Табл.2.

Эволюция центральных областей политропных звезд

Если давление в центре звезды определяется невырожденным газом, т.е. если $P_c = \rho_c \mathfrak{R} T_c / \mu_c$, то из (II.1) и (II.9) получается следующее выражение для температуры в центре звезды:

$$T_c = \frac{\mu_c}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{\xi_n}{(n+1)\eta_n} \cdot \frac{GM}{R}. \quad (II.13)$$

Подставляя параметры Солнца для $n = 3$ и $\mu_c = 0.62$ (см. ниже) получим $T_c^\odot \simeq 1.2 \cdot 10^7$ К, что всего на 30% меньше истинного значения.

По порядку величины соотношение (II.13) можно получить, заменив в уравнении гидростатического равновесия (I.5) dP/dr на P_c/R и $\rho Gm/r^2$ на $\rho_c GM/R^2$, что даст (II.13) без множителей, зависящих от n .

Исключая R из (II.12) и (II.13) находим, что для звезды данной массы изменение температуры и плотности в центре связаны соотношением:

$$T_c = \frac{(4\pi)^{1/3} G}{\mathfrak{R} f_n} \cdot \mu_c \rho_c^{1/3} M^{2/3} \simeq 3 \cdot 10^6 \rho_c^{1/3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{2/3}, \quad (II.14)$$

где $f_n = (n+1)\eta_n^{2/3}$ – множитель, величина которого меняется всего в 2 раза при $1 \leq n \leq 5$ – см. Табл.2. Для численной оценки принято $f_n = 6.2$, $\mu_c = 0.6$.

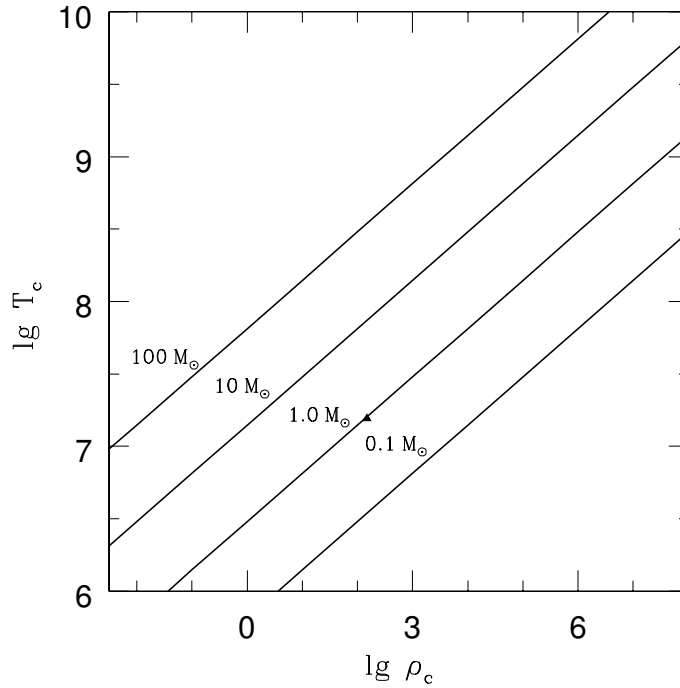


Рис. 3: Изменение параметров в центре политропных невырожденных звезд разной массы. Треугольником показаны параметры в центре Солнца, соответствующие т.н. стандартной модели.

Лекции 3. Уравнение состояния звездного вещества Область "высоких" температур

Предполагаем наличие локального термодинамического равновесия (ЛТР) в недрах звезд!!!

Общие соотношения между термодинамическими производными

$$K_1 \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho, \quad K_2 \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T, \quad C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_\rho, \quad C_P = C_V + \frac{T}{\rho^2} \cdot \frac{K_1^2}{K_2}. \quad (III.1)$$

$$\gamma \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S = \frac{C_P}{C_V} \cdot \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T = \frac{\rho}{P} \cdot K_1 + \frac{T}{P\rho} \cdot \frac{K_2^2}{C_V}. \quad (III.2)$$

$$\nabla_{ad} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_S = \frac{K_1}{\gamma \rho C_V}. \quad (III.3)$$

Идеальный газ

$$P_i = n_i kT, \quad \rho \cdot E_i = n_i \cdot \left(\frac{3}{2} kT + \varepsilon_i \right), \quad P = \Sigma P_i, \quad E = \Sigma E_i \quad (III.4)$$

$$\mu_{it} = kT \cdot \ln \left[\frac{n_i}{g_i} \left(\frac{h^2}{2\pi m_i kT} \right)^{3/2} \right] + \varepsilon_i, \quad \text{эрг.} \quad (III.5)$$

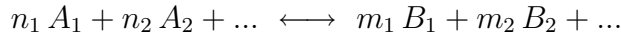
Для водородной плазмы: $\varepsilon_1 = \varepsilon_e = 0$, $\varepsilon_0 = -\chi_H$, $g_1 = g_e = g_0 = 2$,

$$n_1 = n_e, \quad \rho = m_H \cdot (n_0 + n_1),$$

$$P = (n_0 + n_1 + n_e)kT, \quad \rho \cdot E = \frac{3}{2}(n_0 + n_1 + n_e)kT - n_0\chi_H, \quad \implies$$

$$P = \frac{\rho \mathfrak{R} T}{\mu}, \quad \text{где } \mu = \frac{n_0 + n_1}{n_0 + 2n_1} \text{ и } \mathfrak{R} \equiv \frac{k}{m_H} \simeq 8.31 \cdot 10^7 \text{ эрг/г/К}$$

Согласно Ландау, Лившиц т.V § 101, для "химической" реакции



при ЛТР выполняется условие:

$$n_1 \cdot \mu_{tA_1} + n_2 \cdot \mu_{tA_2} + \dots = m_1 \cdot \mu_{tB_1} + m_2 \cdot \mu_{tB_2} + \dots \quad (III.6)$$

В частности, для реакции $p + e \longleftrightarrow H$ имеем: $\mu_{1t} + \mu_{et} = \mu_{tH} \implies$ **уравнение Саха:**

$$\frac{n_e n_1}{n_0} = 4 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\chi_H}{kT} \right). \quad (III.7)$$

Если обозначить: $x \equiv n_1/(n_0 + n_1)$, так что $0 \leq x \leq 1$, $B \equiv 1.5 + \chi_H/kT$ и $\phi(x) \equiv x(1-x)/(2-x)/(1+x)$, то

$$\mu = \frac{1}{1+x}, \quad \gamma = \frac{5}{3} - \frac{4\phi}{3} \frac{(\chi_H/kT)^2}{3+2B^2\phi}, \quad \nabla_{ad} = \frac{2}{5} \cdot \left[1 + \frac{2\phi}{5} \cdot \frac{\chi_H}{kT} \cdot \frac{1+B}{1+B\phi} \right]^{-1}.$$

Так как $\phi \geq 0$, $B > 0$, получаем, что в зоне неполной ионизации $\gamma < 5/3$, $\nabla_{ad} < 0.4$.

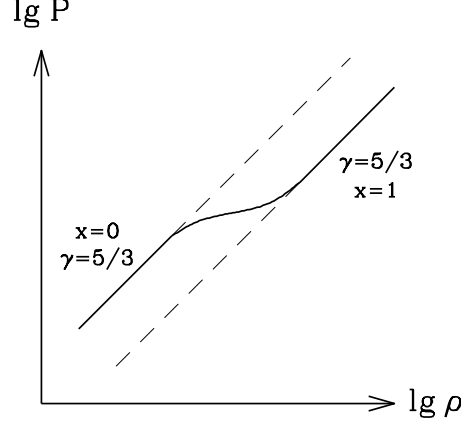


Рис. 4: Качественный характер изменения показателя адиабаты γ в водороде при изменении степени ионизации $x \equiv n_1/(n_1 + n_0)$.

Пусть $X\rho$, $Y\rho$ и $Z\rho$ – масса H, He и тяжелых элементов в см^3 . Например, в фотосфере (!) Солнца $X = 0.70$, $Y = 0.27$, $Z = 0.03$. ($A \simeq 16$).

Таблица 3: Число частиц при полной ионизации

Элемент	H	He	Тяжелые элементы
Число ядер	$X(\rho/m_p)$	$Y(\rho/4m_p)$	$Z(\rho/Am_p)$
Число e^-	$X(\rho/m_p)$	$2Y(\rho/4m_p)$	$A/2 \cdot (Z\rho/Am_p)$

$$P = \left(2X + \frac{3}{4}Y + \frac{Z}{2} \right) \frac{\rho}{m_p} kT = \frac{\rho \mathcal{R}T}{\mu} \implies \quad (III.8a)$$

$$\mu = \frac{1}{2X + 0.75Y + 0.5Z} \quad \text{– среднее число нуклонов на частицу.} \quad (III.8b)$$

В частности, в фотосфере Солнца $\mu \simeq 0.62$.

$$\text{Т.к. } X + Y + Z = 1, \quad \text{то } P = (0.75 + 1.25X - 0.25Z) \rho \mathcal{R}T. \quad (III.9)$$

$$n_e = \frac{\rho}{m_p} (X + 0.5Y + 0.5Z) \implies$$

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_p}, \quad \text{где } \mu_e = \frac{2}{1+X} \text{ – среднее число нуклонов на электрон.} \quad (III.10)$$

Чернотельное излучение

Внутри звезд всегда $E_{rad}/c^2 \ll \rho$, т.е. плотность обусловлена веществом.

$$P_r = \frac{a}{3}T^4, \quad E_r = \frac{aT^4}{\rho}, \quad a = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} \simeq 7.55 \cdot 10^{-15} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{К}^4}. \quad (III.11)$$

$$S_r = \frac{4aT^3}{3\rho}, \quad \mu_{rt} = 0. \quad (III.12)$$

Пусть $\beta = P_{gas}/(P_{gas} + P_r)$. Тогда вне зон ионизации ($\mu = const$):

$$\gamma = \beta + \frac{2}{3} \frac{(4 - 3\beta)^2}{8 - 7\beta}, \quad \implies \quad \gamma(1) = 5/3, \quad \gamma(0) = 4/3. \quad (III.13)$$

$$C_V = \frac{3P}{2\rho T} (8 - 7\beta), \quad \implies \quad C_V(1) = \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{R}}{\mu}, \quad C_V(0) = \frac{12aT^3}{\rho}.$$

$$\nabla_{ad} = \frac{2(4 - 3\beta)}{32 - 24\beta - 3\beta^2} \quad \implies \quad \nabla_{ad}(1) = 2/5, \quad \nabla_{ad}(0) = 1/4.$$

Условию $P_g = P_r$, т.е. $\beta = 0.5$ (при $\mu = 1$) соответствует граница:

$$\lg T = 7.50 + \frac{1}{3} \lg \rho. \quad (III.14)$$

Чем больше масса звезды, тем больше величина P_r/P в ее центре.

Таблица 4: Давление излучения в центре звезд НГП с X=0.7 и Z=0.03

M/M_\odot	$T_c, 10^7 K$	$\rho_c, \text{г/см}^3$	P_r/P	Ссылка
1	1.4	90	< 0.001	Iben I., ApJ 147, 624, 1967
5	2.7	18	0.02	Iben I., ApJ 143, 483, 1966
15	3.2	5.3	0.10	Ziolkowski J., Acta Astron. 22, 327, 1972
60	3.9	2.0	0.36	Ziolkowski J., Acta Astron. 22, 327, 1972
130	4.3	1.3	0.52	Apenzeller I., A&A 5, 355, 1970

Тепловая энергия звезд, состоящих из невырожденного газа есть

$$Q = \int_0^M \left(\frac{3\mathfrak{R}T}{2\mu} + 3\frac{P_r}{\rho} \right) dm.$$

Из теоремы вириала

$$U = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm = - \int_0^M \left(3\frac{\mathfrak{R}T}{\mu} + 3\frac{P_r}{\rho} \right) dm.$$

Поэтому полная энергия звезды

$$E_{tot} = Q + U = - \int_0^M \frac{3\mathfrak{R}T}{2\mu} dm = \frac{1}{2} \bar{\beta} U,$$

т.е. звезда гравитационно связана, но эта связь определяется лишь веществом – это следствие условия $E_{rad}/c^2 \ll \rho$.

Образование электрон-позитронных пар

Когда T становится $\sim m_e c^2/k \simeq 6 \cdot 10^9$ К, возможен процесс $\gamma \longleftrightarrow e^- + e^+$.

Уравнение электронейтральности принимает вид:

$$\frac{\rho}{m_p \mu_e} = n_- - n_+. \quad (III.15)$$

Если $\beta \ll 1$ и $T \geq 6 \cdot 10^9$ К, то $n_- \simeq n_+$ и

$$P_{r+p} = \left(\frac{1}{3} + \frac{11}{12} \right) aT^4; \quad E_{r+p} = \left(1 + \frac{7}{4} \right) \frac{aT^4}{\rho}; \quad (III.16)$$

(см. Ландау, Лившиц т.V, § 105; и Лекцию 4 ниже.)

При рождении пар γ становится $< 4/3$, поэтому невозможно существование сверхмассивных ($M \sim 10^6 M_\odot$) звезд.

Лекции 4. Уравнение состояния звездного вещества Область "низких" температур

Вырождение электронного газа

Пусть $f_e = f_e(\varepsilon)$ – вероятность обнаружить электрон в ячейке фазового пространства с энергией ε .

Если $T = 0$, то $f_e = 1$ при $\varepsilon < \varepsilon^{max} \equiv E_F$, и $f_e = 0$ при $\varepsilon > E_F$.

В этом случае число электронов равно числу энергетических состояний в элементе фазового пространства:

$$n_e dV = \frac{2}{h^3} dp_x dp_y dp_z dV = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp dV. \quad \implies$$

$$n_e = \int_0^{p_F} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \quad \implies \quad p_F \simeq \left(\frac{1.03\rho}{10^6 \mu_e} \right)^{1/3} m_e c.$$

$$P_e = \int_0^{p_F} p_x v_x \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp, \quad \rho \cdot E_e = \int_0^{p_F} \varepsilon \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp,$$

где $p = m_e v (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ и $\varepsilon = (p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2}$, причем $p_x v_x = pv/3$.

Если $v = p/m_e$ и $\varepsilon = p^2/2m_e$ (нерелятивистский газ), то

$$P_e^{nonr} = \frac{8\pi}{15m_e h^3} p_F^5 = 9.9 \cdot 10^{12} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}, \quad E_e^{nonr} = \frac{3}{2} \frac{P_e}{\rho}. \quad (\text{без массы покоя!})$$

Если $v \simeq c$ и $\varepsilon = pc$ (ультрарелятивистский газ), то

$$P_e^{rel} = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4 = 1.2 \cdot 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}, \quad E_e^{rel} = 3 \frac{P_e^{rel}}{\rho}.$$

$P_e^{nonr} = P_e^{rel}$ при $\rho/\mu_e \simeq 10^6$ г/см³.

Подставляя в (II.11) получим предельную массу белого карлика (БК):

$$M_{Ch} = \frac{5.75}{\mu_e^2} M_\odot.$$

Для He, C и O $\mu_e = 2 \longrightarrow M_{Ch} = 1.44 M_\odot$. Для Fe $\mu_e = 56/26 \longrightarrow M_{Ch}^{Fe} = 1.24 M_\odot$.

Из (II.9) следует, что при $\lg \rho_c \ll 7$ для холодных БК

$$M \propto \sqrt{\rho_c}, \quad R \propto 1/\rho_c^{1/6}.$$

При $T > 0$ среднее число заполнения ячеек фазового пространства

$$f_e = \left[1 + \exp \left(\frac{\varepsilon - \mu_t}{kT} \right) \right]^{-1}.$$

Тогда
$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty f_e p^2 dp, \quad P_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty f_e p v p^2 dp, \quad E_e = \frac{8\pi}{\rho h^3} \int_0^\infty f_e \varepsilon p^2 dp.$$

Так как $n_e \equiv \rho/m_p \mu_e = F_1(T, \mu_t)$, $P_e = F_2(T, \mu_t)$, то мы имеем параметрическое задание уравнения состояния $P_e = F(\rho/\mu_e, T)$.

Вырождение наступает, когда T становится $\leq T_F = p_F^2/2m_e k$.

Для электронов $T_F \simeq 3 \cdot 10^5 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{2/3} K \implies$ в металлах e -газ вырожден!

Для протонов и нейтронов $T_F \simeq 1.6 \cdot 10^3 \rho^{2/3} K \implies$ в звездах p -газ не вырожден!

Пример 1. В нерелятивистском пределе при $T/T_F \ll 1$:

$$P_e \simeq 9.9 \cdot 10^{12} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right], \quad S_e \simeq C_V \simeq C_P \simeq \pi^2 \frac{\mathfrak{R}}{\mu_e} \left(\frac{T}{T_F} \right).$$

Пример 2. Рассмотрим ситуацию доминирования $e^+ - e^-$ пар.

При ЛТР $\mu_+ + \mu_- = \mu_\gamma = 0$, т.е. $\mu_+ = -\mu_-$. Если $n_- \simeq n_+$, то

$$\int_0^\infty \left[1 + \exp \left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT} \right) \right]^{-1} p^2 dp = \int_0^\infty \left[1 + \exp \left(\frac{\varepsilon + \mu}{kT} \right) \right]^{-1} p^2 dp; \implies \mu = 0!$$

Тогда ($\varepsilon = pc$, $v = c$)

$$P_p = P_- + P_+ \simeq 2 P_- \simeq \frac{16\pi c^2}{m_e h^3} \int_0^\infty \left[1 + \exp \left(\frac{pc}{kT} \right) \right]^{-1} p^3 dp \propto T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{1 + \exp(x)}.$$

Аналогично показывается, что $E_p \propto T^4$ – см. (III.16).

Пример 3. Почему существуют нейтронные звезды?

Свободный нейтрон распадается $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}$ с $t_{1/2} \simeq 15$ мин. Но когда $E_F > (m_n - m_p)c^2 \simeq 1.3$ МэВ, то новому электрону нет места. Для релятивистских электронов $E_F = p_F c \simeq 5.1 \cdot 10^{-3} (\rho/\mu_e)^{1/3}$ МэВ. \implies При $\rho/\mu_e > 2 \cdot 10^7$ г/см³ нейтроны распадаться не могут.

Влияние кулоновского взаимодействия на уравнение состояния

Газ нейтральных частиц

Во внешних оболочках холодных звезд и планет при $T \leq 4000$ К вещество состоит из смеси атомов и молекул. Пусть n – концентрация частиц, а

$$\bar{l} \simeq n^{-1/3} \sim 10^{-8}/\rho^{1/3} \text{ см}, \quad r_1 \sim 10^{-8} \text{ см}$$

среднее расстояние между частицами и характерный размер атома/молекулы соответственно. Тогда при $\bar{l} \leq 10 r_1$, т.е. при $\rho > 10^{-3} \text{ г/см}^{-3}$ надо учитывать взаимодействие частиц друг с другом. С разумной точностью поведение газа в этих условиях описывается уравнением ван-дер-Ваальса:

$$P = \frac{n}{1 - bn} kT - an,$$

где параметры a и b выбираются из условия наилучшего согласия с экспериментом.

Когда \bar{l} становится $\sim r_1$ происходит диссоциация, а затем и ионизация в результате уменьшения энергии связи электрона с "родительским" ядром.

Учет кулоновских взаимодействий в плазме

Пусть плазма состоит из ядер (A, Z) с концентрацией n_z и электронов с $n_e = Zn_z$. Среднее расстояние между ионами $l_i = n_z^{-1/3}$. Если бы заряды в плазме были распределены равномерно, то в среднем кулоновское взаимодействие было равно 0, и плазма была бы идеальным газом. Однако электроны концентрируются вблизи ионов, создавая область с размером r_D (радиус Дебая), внутри которой потенциал (в первом приближении) имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right), \quad \text{где} \quad r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi Z n_e}} \sim 10^{-11} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \text{ см.}$$

Заряды, удаленные от иона на $r \gg r_D$, не оказывают на него влияния.

Мерой неидеальности плазмы служит безразмерное отношение:

$$\Gamma = \frac{Z^2 e^2}{l_i kT} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{l_i}{r_D}\right)^2 \simeq 10^5 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \frac{\rho^{1/3}}{T}.$$

В центре Солнца, например, $\Gamma \simeq 0.05$.

Если $\Gamma \ll 1$, то выражение для P и E имеет вид:

$$P = nkT \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{3} \Gamma^{3/2}\right), \quad \rho \cdot E = \frac{3}{2} nkT \left(1 - \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \Gamma^{3/2}\right).$$

При $\Gamma \sim 1$ вещество ведет себя, как жидкость, а при

$$\Gamma \geq \Gamma_m \simeq 150, \quad \text{т.е. при} \quad T \leq T_m \simeq 2 \cdot 10^3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \rho^{1/3}$$

ионы образуют кристаллическую решетку, внутри которой находится газ свободных электронов. Например, в центре углеродного ($Z = 6$, $A = 12$) белого карлика с $\lg \rho_c = 9$ кристаллическое ядро начинает формироваться, если $T < 3 \cdot 10^7$ К.

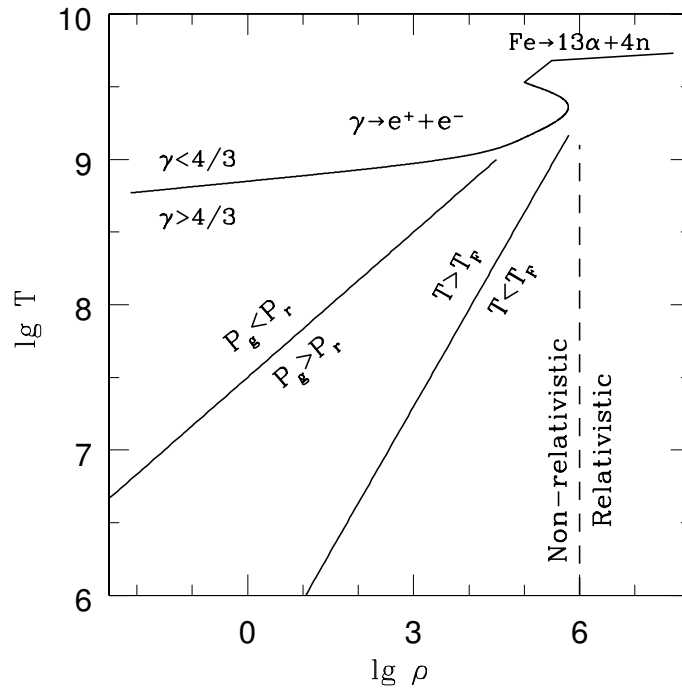


Рис. 5: Относительный вклад различных компонент в уравнение состояния. Также проведена линия, выше которой γ становится меньше $4/3$ за счет образования пар и фотодиссоциации Fe.

Лекция 5. Термоядерные реакции и β -процессы

Свойства атомных ядер

Ядерные силы:

- а) изотопически инвариантны; $\varphi_n \propto r^{-1} \exp(-r/r_n)$, где $r_n \sim 10^{-13}$ см.
- б) зависят от спинов нуклонов.

Кулоновские силы: $\varphi_e = Z_1 Z_2 e^2 / r$. $\varphi_e(r_n) \sim 3$ МэВ.

Величина

$$\frac{\Delta E}{A} = \frac{m_A c^2 - Z m_p c^2 - (A - Z) m_n c^2}{A}$$

есть энергия связи на нуклон. Она \sim нескольких МэВ.

Капельная модель ядра (Н.Бор, 1932).

Почему не распадаются нейтроны в атомных ядрах?

Типы ядерных реакций

Запись ${}^{15}_7\text{N} + {}^1_1\text{H} \longrightarrow {}^4_2\text{He} + {}^{12}_6\text{C}$ эквивалентна ${}^{15}\text{N}(p, \alpha){}^{12}\text{C}$.

$Q_n = \Sigma m_f c^2 - \Sigma m_i c^2$ - энергосвободное. При $Q_n > 0$ реакция называется экзотермической, а при $Q_n < 0$ - эндотермической (пороговая).

Реакции типа ${}^2\text{D}({}^2\text{D}, p){}^3\text{T}$ идут по сильному взаимодействию. $\sigma \sim \pi r_n^2 \sim 10^{-25}$ см².

В реакции ${}^2\text{D}(p, \gamma){}^3\text{He}$ дополнительно участвует электромагнитное взаимодействие \Rightarrow вероятность взаимодействия домножается на $e^2/\hbar c \simeq 1/137$.

Реакция $n \longrightarrow p + e + \tilde{\nu}$ - пример реакции слабого взаимодействия. На самом деле, это двухступенчатая реакция через виртуальный W -бозон:

$$n \longrightarrow p + W^-, \quad W^- \longrightarrow e + \tilde{\nu}$$

Вероятность слабого взаимодействия мала из-за большой массы W^\pm и Z^0 бозонов ($\simeq 90$ ГэВ).

Скорость ядерных реакций

Число взаимодействий ядер i и k в 1 см³ за 1 с:

$$\mathcal{N} = N_i N_k \frac{v \sigma}{(1 + \delta_{i,k})},$$

где v - относительная скорость частиц, N - концентрация ядер, а $\delta_{i,k}$ - символ Кронекера. \Rightarrow скорость энергосвободения

$$\varepsilon (\text{эрг/с/г}) = \frac{\mathcal{N} Q_n}{\rho} \propto X_i X_k \rho \langle \sigma v \rangle.$$

В центре звезд $T \leq 10^{10}$ К. Поскольку $m_p c^2 / k \sim 10^{13}$ К, то движение нуклонов - нерелятивистское.

Г.Гамов показал, что вероятность подбарьерного перехода $\simeq \exp(-2\pi Z_i Z_k e^2 / \hbar v)$. Само сечение σ должно быть $\propto \pi \lambda^2$, где $\lambda \sim \hbar/p$. $\Rightarrow \sigma \propto p^{-2} \propto E^{-1} \Rightarrow$

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\frac{2\pi Z_i Z_k e^2}{\hbar v}\right).$$

Выражая v из соотношения $E = A_* m_p v^2 / 2$, где $A_* = A_i A_k / (A_i + A_k)$, и учитывая, что

$$N(E) dE \propto \frac{E^{1/2}}{T^{3/2}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE$$

получим:

$$\langle \sigma v \rangle \propto \frac{1}{T^{3/2}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{E^{1/2}}\right) dE, \quad \text{где } b = \frac{\pi \sqrt{2m_p} e^2}{\hbar} Z_1 Z_2 A_*^{1/2}.$$

Интеграл оценим методом перевала. Пусть

$$f(E) = \frac{E}{kT} + \frac{b}{E^{1/2}}. \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dE} = \frac{1}{kT} - \frac{b}{2E^{3/2}}; \quad \xi \equiv \frac{d^2 f}{dE^2} = \frac{3b}{4E^{5/2}}.$$

В минимуме, т.е. при $E = E_0$,

$$\frac{df}{dE} = 0. \quad \Rightarrow \quad E_0 = (bkT/2)^{2/3}, \quad f(E_0) = 3b^{2/3}(4kT)^{-1/3} \equiv B/T^{1/3}, \quad \xi_0 \propto T^{-5/3}.$$

Вблизи минимума $f(E) \simeq f(E_0) + \xi_0(E - E_0)^2/2$. Тогда если $S(E) \simeq S(E_0)$ (нерезонансная реакция), то

$$\langle \sigma v \rangle \propto \frac{S(E_0)}{T^{3/2}} e^{-B/T^{1/3}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\xi_0}{2}(E - E_0)^2\right] dE \propto T^{-3/2} e^{-B/T^{1/3}} \xi_0^{-1/2} \int_{-E_0}^\infty e^{-x^2} dx.$$

Заменяя нижний предел интегрирования с $-E_0$ на $-\infty$ получим окончательно:

$$\varepsilon = A \frac{X_i X_k \rho}{T^{2/3}} \exp\left(-\frac{B}{T^{1/3}}\right).$$

Поскольку

$$d\left(\frac{\rho X_i}{A_i m_p}\right) = -\frac{\rho \varepsilon}{Q_n} dt, \quad \text{то} \quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial t}\right)_m = -\frac{\varepsilon}{Q_i}, \quad Q_i \equiv \frac{Q_n}{A_i m_p}, \quad \text{т.е.}$$

$$\left(\frac{\partial X_{i,k}}{\partial t}\right)_m = -\frac{A_0 \rho X_i X_k}{T^{2/3}} \exp\left(-\frac{B_0}{T^{1/3}}\right) c^{-1},$$

где $A_0 = A \cdot (A_i m_p / Q_n)$, $B_0 = 42.5(Z_i^2 Z_k^2 A_*)^{1/3}$,

Протон-протонный цикл

$${}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \longrightarrow {}^2_1\text{D} + e^+ + \nu, \quad Q_n = 1.44 - 0.25 = 1.19 \text{ МэВ}, \quad (A_0 = 4.2 \cdot 10^{-15}, B_0 = 33.8;)$$

$${}^2_1\text{D} + {}^1_1\text{H} \longrightarrow {}^3_2\text{He} + \gamma, \quad Q_n = 5.49 \text{ МэВ}, \quad (A_0 = 4.0 \cdot 10^3, B_0 = 37.2;)$$

Далее в 86 % случаев на Солнце идет реакция:

$${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \longrightarrow {}^4_2\text{He} + 2p, \quad Q_n = 12.86 \text{ МэВ}, \quad (A_0 = 1.3 \cdot 10^{10}, B_0 = 122.8;)$$

Чистый результат рр-цикла: $4 {}^1_1\text{H} \longrightarrow {}^4_2\text{He} + 2e^+ + 2\nu, \quad Q_n = 26.23 \text{ МэВ}$

В 14 % случаев – протекает цепочка реакций:

$${}^3_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \longrightarrow {}^7_4\text{Be} + \gamma, \quad {}^7_4\text{Be} + e^- \longrightarrow {}^7_3\text{Li} + \nu, \quad {}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \longrightarrow 2 {}^4_2\text{He}.$$

90 % нейтрино имеют энергию 0.86 МэВ и 10 % - 0.38 МэВ.

Наконец, в 0.02 % случаев рождаются нейтрино с $E_\nu = 14.06 \text{ МэВ}$:

$${}^7_4\text{Be} + {}^1_1\text{H} \longrightarrow {}^8_5\text{B} + \gamma, \quad {}^8_5\text{B} \longrightarrow {}^8_4\text{Be}^* + e^- + \nu, \quad {}^8_4\text{Be}^* \longrightarrow 2 {}^4_2\text{He}$$

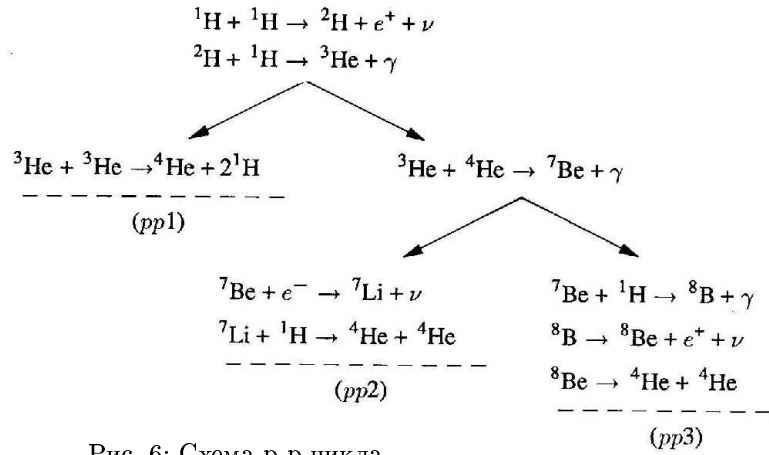


Рис. 6: Схема р-р цикла

Метод Б.Понтекорво – Р.Дэвиса (Homestake, USA):

$$\nu_e + {}^{37}_{17}\text{Cl} \longleftrightarrow {}^{37}_{18}\text{Ar} + e^-, \quad E_\nu > 1.2 \text{ МэВ}, \quad t_{1/2} = 35^d, \quad F = 0.33 \pm 0.03.$$

Метод В.А.Кузьмина (SAGE, Россия + GALLEX, Italy):

$$\nu_e + {}^{71}_{31}\text{Ga} \longrightarrow {}^{71}_{32}\text{Ge} + e^-, \quad E_\nu > 0.23 \text{ МэВ}, \quad t_{1/2} = 11^d.$$

$$F_{SAGE} = 0.52 \pm 0.06, \quad F_{GALLEX} = 0.60 \pm 0.06.$$

Регистрация электронов отдачи при упругом рассеянии (Супер-Камиоканде, Япония):

$$\nu_e + e^- \longrightarrow \nu_e + e^-, \quad E_\nu > 6.5 \text{ МэВ}, \quad F = 0.47 \pm 0.02.$$

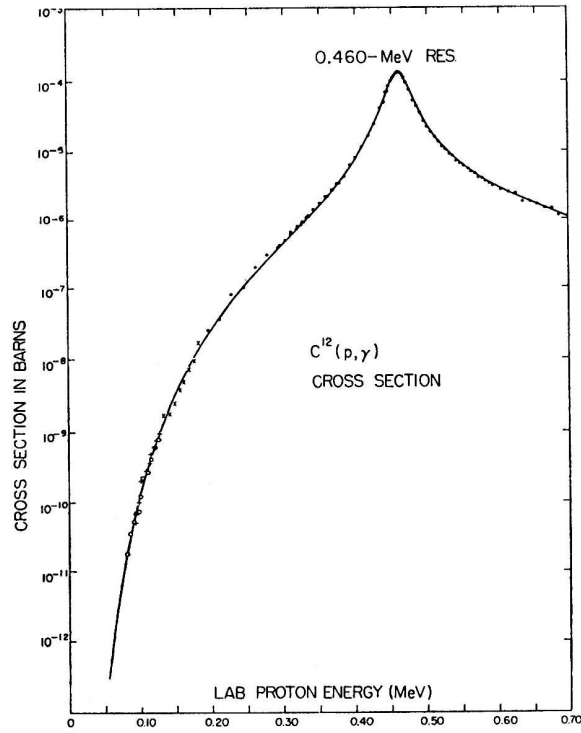


Рис. 7: Зависимость сечения реакции $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$ от энергии. (Fowler et al., ARA&A 5, 525 1967)

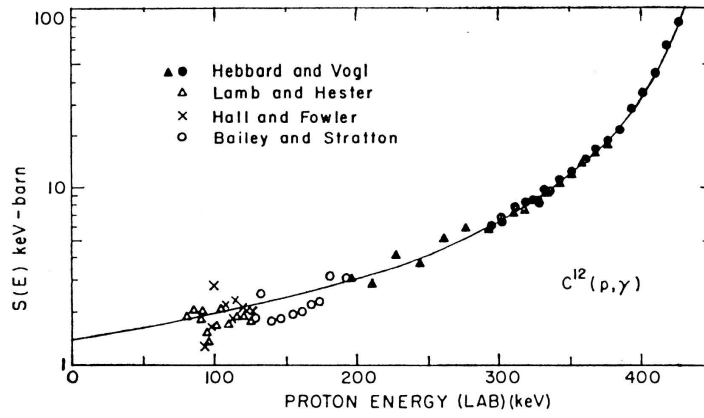
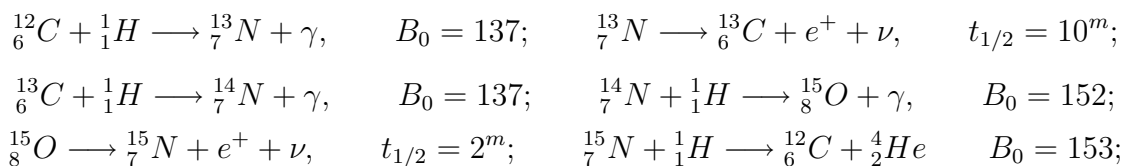


Рис. 8: Зависимость от энергии множителя S для реакции $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$. (Fowler et al., ARA&A 5, 525 1967)

Лекция 6. Термоядерные реакции в звездах. (Продолжение)

CNO-цикл



Вместо последней реакции возможен процесс:

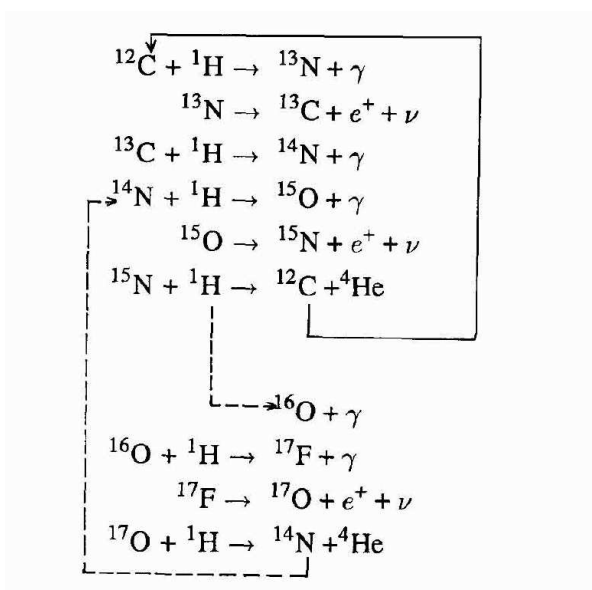
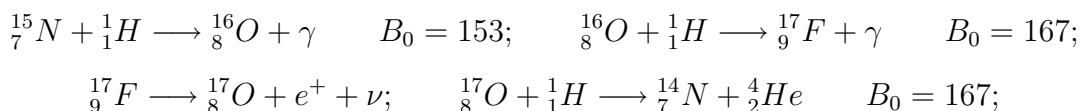


Рис. 9: Схема CNO цикла

В узком температурном интервале зависимость $\varepsilon(\rho, T)$ можно записать в виде:

$$\varepsilon_{pp} = \rho X_H^2 \varepsilon_0 (T/T_0)^n, \quad \varepsilon_{CNO} = \rho X_H X_{CNO} \varepsilon_0 (T/T_0)^n.$$

ε_{pp}			ε_{CNO}		
T_{06}	ε_0	n	T_{06}	ε_0	n
1	4.0-9	10.6	10	3.4-4	22.9
5	1.8-3	5.95	15	1.94	19.9
10	6.8-2	4.60	20	4.5+2	18.0
15	0.377	3.95	30	4.1+5	15.6
20	1.09	3.54	50	6.2+8	13.6
30	4.01	3.03	100	1.9+12	10.2

Из таблицы следует, что в центре Солнца ($T_c \simeq 1.5 \cdot 10^7$ К) $\varepsilon_{CNO}/\varepsilon_{pp} \sim 0.1$. Вместе с тем, $L_{\odot}^{CNO}/L_{\odot} \simeq 1.3\%$ – почему?

Устойчивых ядер с $A = 5$ и $A = 8$ не существует. \implies Мы - звездные люди!

Горение гелия и более тяжелых элементов

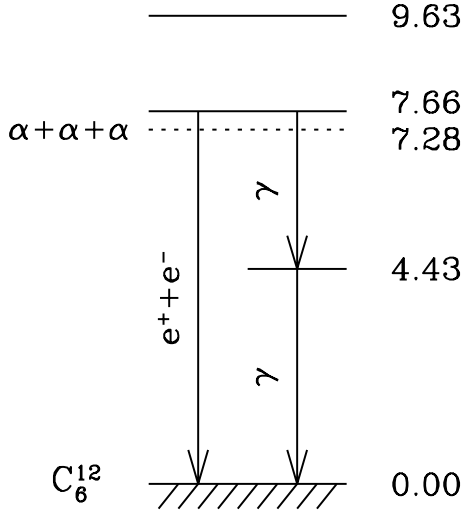
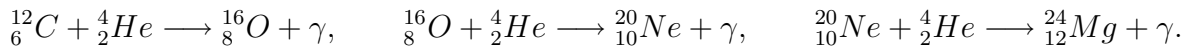


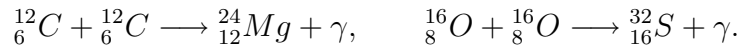
Рис. 10: Схема энергетических уровней ядра ${}^{12}_6\text{C}$.



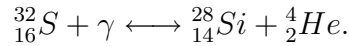
Возможны также реакции:



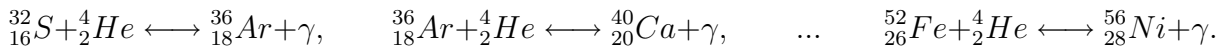
Но когда ядер ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ много, то уже мало ${}^4_2\text{He}$, поэтому более важную роль играют реакции типа:



При $T \sim 10^9$ К имеется достаточно много γ -квантов с энергией \sim МэВ, которые вызывают фотодиссоциацию ядер, порождая реакции типа:



Возникающие при этом α -частицы реагируют и с другими ядрами, порождая, в конечном счете, элементы группы Fe:



При расчете Q_n в этих реакция надо учитывать как Q_n^+ , так и Q_n^- .

Нейтринное излучение

Сечение рассеяния нейтрино веществом $\sigma_\nu \sim 3 \cdot 10^{-44} (E_\nu/\text{МэВ})^2 \text{ см}^2 \implies l_\nu \sim 10^{20}/\rho$ см.

Аннигиляция пар $e^- e^+$: $e^- + e^+ \longrightarrow \nu + \tilde{\nu}$.

Процесс эффективен при $T \sim T_* = 2m_e c^2/k \sim 10^{10}$ К. Тогда ϵ_ν (эрг/г/с) $\propto T^9 \exp(-T/T_*)$.

Свободно-свободное излучение на ядре (A,Z): $e^- + Z^+ \longrightarrow e^- + Z^+ + \nu + \tilde{\nu}$.

Процесс доминирует при высоких плотностях и при сравнительно низкой температуре: $\epsilon_\nu \simeq 0.8 Z^2/AT_8^6$

Фоторождение нейтрино: $e^- + \gamma \longrightarrow e^- + \nu + \tilde{\nu}$.

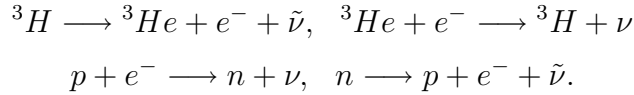
Процесс эффективен при $\rho < 10^4$ г/см³ и $T_8 = 1 \div 4$. Тогда $\epsilon_\nu \propto T^8$

Плазменные нейтрино: $\Gamma \longrightarrow \nu + \tilde{\nu}$.

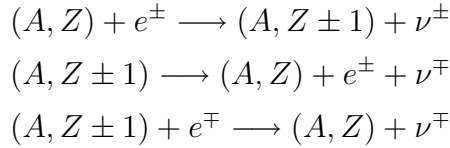
$\omega_p^2 = 4\pi N_e e^2/m_e$. Процесс эффективен при высоких плотностях и $T_8 \sim 3$.

Урка процессы: Г.А.Гамов, М.Шенберг (1941) и В.С.Пинаев (1963).

Примеры:



В общем виде:



Процесс эффективен при средних и высоких плотностях и $T_9 > 1$, $\epsilon_\nu \propto T^6$.

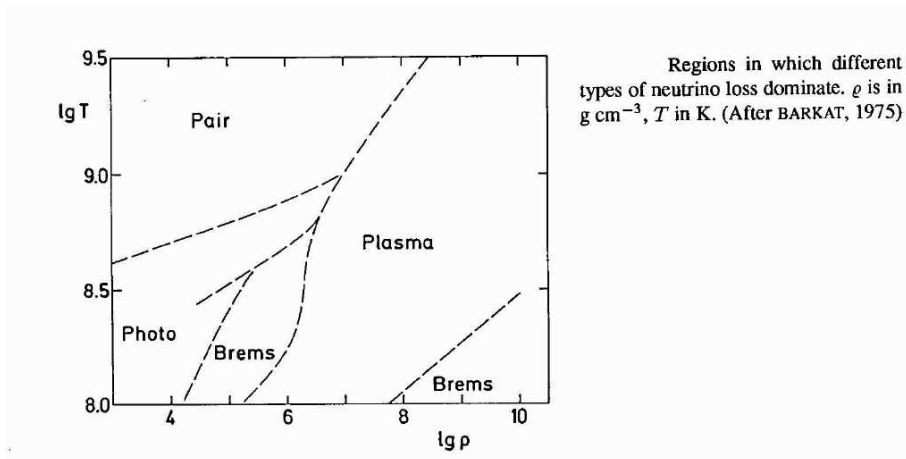


Рис. 11: Роль различных процессов рождения нейтрино.

Лекция 7. Перенос энергии излучением внутри звезд

Элементарные процессы: b-b, b-f, f-f + рассеяние.

Если l_ν – средняя длина свободного пробега кванта, то $\sigma_\nu(\text{см}^2) = 1/nl_\nu$ – определение эффективного сечения взаимодействия. Когда имеем несколько сортов частиц и/или процессов, то $l_\nu = 1/\sum n_i \sigma_\nu^i$.

Назовем коэффициентом непрозрачности величину

$$\kappa_\nu \left(\frac{\text{см}^2}{\Gamma} \right) = \frac{\sum n_i \sigma_\nu^i}{\rho} \quad \implies \quad l_\nu = \frac{1}{\kappa_\nu \rho}.$$

Если $l \gg$ характерного размера системы L , то вещество с излучением практически не взаимодействует и потери носят объемный характер. **Пример:** начальные стадии сжатия протозвездного облака и нейтринное излучение.

Если $l \sim L$, то в системе значительный поток энергии $\implies t_r = E/\dot{E} \sim$ времени между столкновениями частиц t_c , т.е. времени установления локального термодинамического равновесия (ЛТР). Поэтому κ и I_γ взаимосвязаны. **Пример:** звездные атмосферы.

Если $l \ll L = T/T'$, то излучение диффундирует сквозь систему перенося энергию. При этом $t_r \gg t_c \implies$ ЛТР. **Пример:** звездные недра.

Диффузионное приближение

Пусть $F_{rad}^\nu d\nu$ (эрг/с/см²) – поток энергии, переносимый вдоль оси \mathbf{r} за 1 сек. через 1 см² квантами в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$. Тогда:

$$F_{rad}^\nu = c \cdot h\nu \cdot \frac{n_\nu^-}{6} - c \cdot h\nu \cdot \frac{n_\nu^+}{6} \simeq -\frac{c}{6} \cdot 2l_\nu \cdot \frac{d(h\nu \cdot n_\nu)}{dr}, \quad (1)$$

где n_ν – концентрация (см⁻³) соответствующих фотонов.

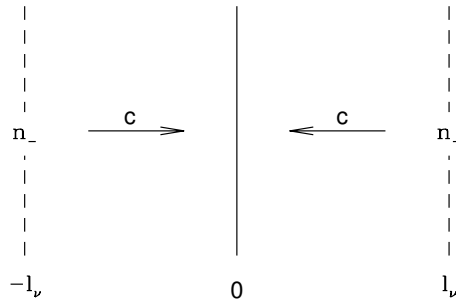


Рис. 12: К выводу соотношения (1).

Обозначив через $L^\nu(r)_{rad} d\nu$ – энергию, переносимую за 1 сек. фотонами в том же спектральном диапазоне через сферу с поверхностью $4\pi r^2$, имеем:

$$F_{rad}^\nu d\nu = \frac{L_{rad}^\nu d\nu}{4\pi r^2} = -\frac{l_\nu c}{3} \cdot \frac{d}{dr} (h\nu \cdot n_\nu d\nu). \quad (2)$$

При ЛТР с учетом $p = h\nu/c$, $\mu_{tr} = 0$ и двух поляризаций фотона имеем:

$$n_\nu d\nu = \frac{2}{\exp(h\nu/kT) - 1} \cdot \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{4\pi B_\nu}{c h\nu} d\nu, \quad (3)$$

где

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} - \text{функция Планка.} \quad (4)$$

Интегрируя по всем частотам получим для болометрического потока и светимости:

$$F_{rad} = \frac{L_{rad}}{4\pi r^2} = -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty l_\nu \frac{dB_\nu}{dr} d\nu = -\frac{4\pi}{3} \frac{dT}{dr} \int_0^\infty l_\nu \frac{dB_\nu}{dT} d\nu = -\frac{4\pi}{3} \frac{dT}{dr} \bar{l} \frac{dB}{dT}, \quad (5)$$

где

$$B = \int_0^\infty B_\nu d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \quad \sigma = \frac{ac}{4} \simeq 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ эрг/с/см}^2/\text{K}^4. \quad \implies \quad (6)$$

$$\bar{l} = \frac{\pi}{4\sigma T^3} \cdot \int_0^\infty l_\nu \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \quad \implies \quad \bar{l}\rho = \frac{1}{\bar{\varkappa}} = \frac{\pi}{4\sigma T^3} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \quad (7)$$

Величины \bar{l} и $\bar{\varkappa}$ называются Росселандовым средним.

Пример 1. При томсоновском рассеянии $\sigma_T \simeq 6.7 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$. Поэтому

$$\bar{\varkappa}_T = \varkappa_T = \frac{0.19}{(1 + X)}. \quad (8)$$

Пример 2. При f-f поглощении водородоподобным ионом с зарядом Z (с учетом вынужденного излучения и усредненное по Максвелловскому распределению скоростей электронов):

$$\frac{1}{l_\nu} = \rho \varkappa_\nu^{f-f} \simeq 1.8 \cdot 10^8 \frac{Z^2 n_e n_Z}{T^{1/2} \nu^3} (1 - e^{-x}) \propto \frac{\rho^2}{T^{7/2}} \cdot \frac{1 - e^{-x}}{x^3},$$

где n_e , n_Z – концентрации электронов и ионов соответственно, а $x = h\nu/kT$. Тогда из (7) получаем формулу Крамерса:

$$\bar{\varkappa}_{f-f} = \varkappa_0(Z) \rho T^{-7/2}. \quad (9)$$

Для чисто водородной полностью ионизованной плазмы $\bar{\varkappa}_0 \simeq 2 \cdot 10^{23}$, поэтому в центре Солнца $\bar{l}_{f-f} \sim 0.03 \text{ мм}$.

Пример 3. Роль спектральных линий. Рассмотрим меандр с $\varkappa = b$ в линиях и $\varkappa = a$ в континууме, причем $a \ll b$ и ширина зубцов и впадин одинакова. Тогда $\bar{\varkappa} = 2a$, т.е. вдвое больше, чем при отсутствии "спектральных линий".

С учетом (7), соотношение (5) запишется в виде:

$$4\pi r^2 F_{rad} = L_{rad} = -\frac{64\pi\sigma r^2}{3\bar{\varkappa}\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{3\bar{\varkappa}\rho L_{rad}}{64\pi\sigma r^2 T^3}. \quad (10)$$

Т.к. $dT/dr = (dT/dP) \cdot (dP/dr)$, то в случае переноса энергии *только* излучением:

$$\frac{dT}{dr} = -\nabla_{rad} \frac{T}{P} \frac{\rho Gm}{r^2}, \quad \text{где} \quad \nabla_{rad} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{rad} = \frac{3P \bar{\kappa} L_{rad}}{64\pi Gm\sigma T^4}. \quad (11)$$

(В дальнейшем Росселандово среднее мы будем обозначать через κ .)

При высоких плотностях тепло могут переносить вырожденные электроны. В общем виде

$$F_{cond} = -D_e \frac{dT}{dr}, \quad (12)$$

где D_e – коэффициент диффузии. Если ввести

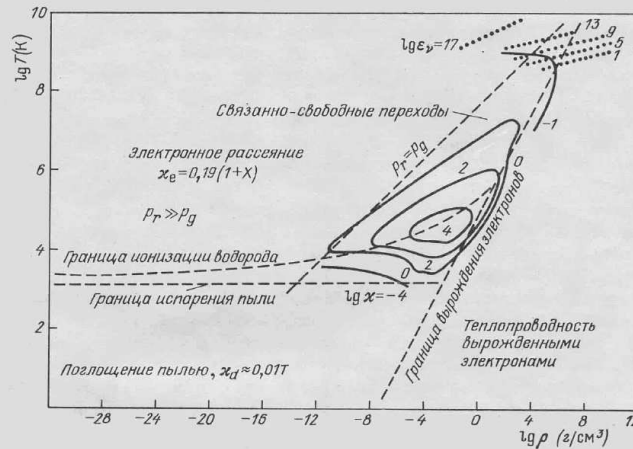
$$\kappa_{cond} \equiv \frac{16\sigma T^3}{3D_e \rho},$$

то (12) запишется в виде, аналогичном (10):

$$F_{cond} = \frac{16\sigma T^3}{3\kappa_{cond} \rho} \frac{dT}{dr}. \quad (13)$$

Если поток тепла $F = F_{rad} + F_{cond}$, имеем:

$$F = \left(\frac{1}{\kappa_{cond}} + \frac{1}{\kappa_{rad}} \right) \frac{16\sigma T^3}{3\rho} \frac{dT}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_{cond}} + \frac{1}{\kappa_{rad}}.$$



Основные механизмы непрозрачности вещества. Линии постоянного κ показаны для смеси $X = 0,7; Z = 0,02$ (Кокс, Стюарт, 1965). Указаны область вырождения вещества и зона с преимущественной ролью давления излучения. Пунктиром отмечены линии постоянной скорости охлаждения нейтрино ($lg \epsilon_\nu = \text{const}$) – Боде и др. (1967)

Рис. 13:

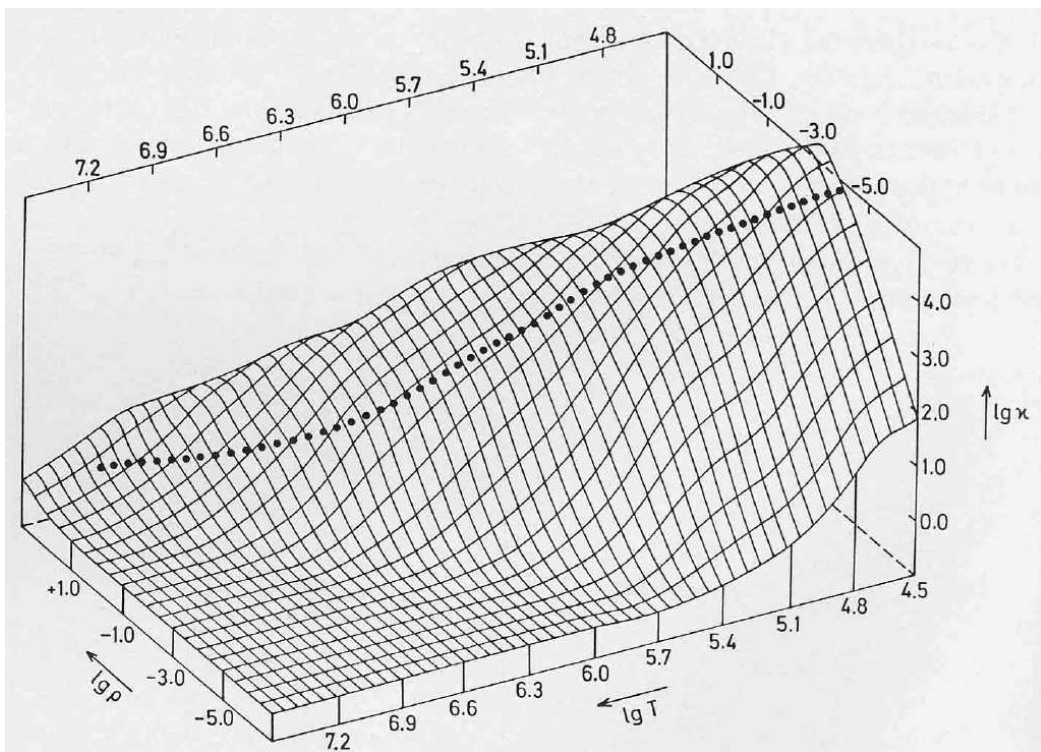
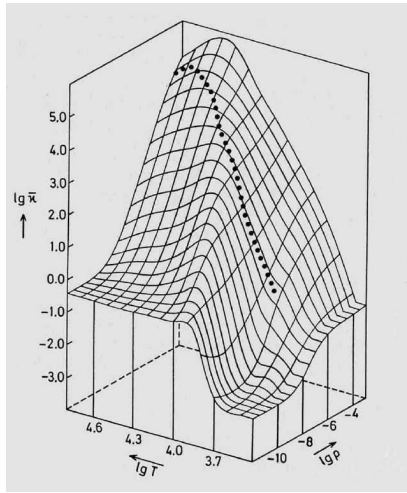


Рис. 14: Характер изменения непрозрачности внутри звезды с $M = 5M_{\odot}$ (пунктирная линия).

Лекция 8. Конвекция в звездах

Условие возникновения конвекции

Пусть малый элемент объема газа слегка сместился на расстояние $\Delta r \ll r$ наружу ($\Delta r > 0$) от исходного положения. Если после этого элемент не стремится возвратиться к исходному положению, а продолжает удаляться от него, то возникает конвекция. При каком условии это произойдет?

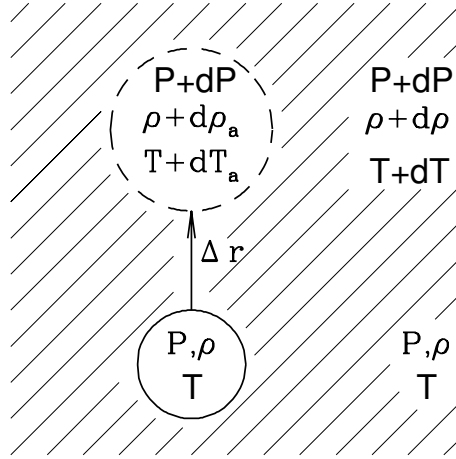


Рис. 15: К выводу критерия Шварцшильда

Будем приписывать величинам, относящимся к элементу, индекс a , оставляя аналогичные параметры окружающей среды без индексов. Медленно всплывая, элемент расширяется, но $P_a(r) = P_c(r)$. Предположим, что теплообмен элемента с окружающей средой *почти* отсутствует, тогда $S_a(r) \simeq const$, т.е. ρ_a и T_a будут меняться внутри элемента (почти) по адиабатическому закону. Элемент будет всплывать, если в каждой точке $\rho_a < \rho$. Поскольку

$$\rho_a(r + \Delta r) = \rho(r) + \left(\frac{d\rho}{dr} \right)_a \Delta r \quad \text{и} \quad \rho(r + \Delta r) = \rho(r) + \frac{d\rho}{dr} \Delta r,$$

где $\rho(r)$ – плотность на уровне, с которого элемент начинает всплывать, то конвекция возникнет, когда

$$\frac{d\rho}{dr} > \left(\frac{d\rho}{dr} \right)_a. \quad (8.1)$$

Если химсостав вещества не меняется вдоль r , то из условия $P_a = P$ имеем:

$$\begin{aligned} dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho dT + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T d\rho = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho dT_a + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T d\rho_a \quad \implies \\ \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \left[\frac{d\rho_a}{dr} - \frac{d\rho}{dr} \right] &= \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \left[\frac{dT}{dr} - \frac{dT_a}{dr} \right] = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho \left[\frac{d \ln T}{d \ln P} - \frac{d \ln T_a}{d \ln P} \right] \frac{dP}{dr}. \end{aligned}$$

Поскольку $(\partial P/\partial \rho)_T > 0$, $(\partial P/\partial T)_\rho > 0$, а $dP/dr < 0$, условие возникновения конвекции (8.1) запишется в виде:

$$\frac{d \ln T}{d \ln P} \equiv \nabla > \nabla_{ad} \equiv \frac{d \ln T_a}{d \ln P}. \quad (8.2)$$

Но величина ∇ заранее не известна, более того, именно ее и надо найти.

При наличии конвекции излучение переносит лишь часть общего потока тепла L_r , т.е. $L_r = L_r^{rad} + L_r^{conv}$, причем согласно (10) и (11)

$$L_r^{rad} = \frac{64\pi\sigma GmT^4}{3\kappa P} \nabla. \quad (8.3)$$

Если бы все тепло переносилось только излучением, то для этого потребовался бы градиент ∇_{rad} , который определяется из соотношения:

$$L_r = \frac{64\pi\sigma GmT^4}{3\kappa P} \nabla_{rad}, \quad \text{т.е.} \quad \nabla_{rad} \equiv \frac{3}{64\pi\sigma G} \kappa \frac{P}{T^4} \frac{L_r}{m} = \nabla \frac{L_r}{L_r^{rad}}. \quad (8.4)$$

Следовательно, $\nabla_{rad} \geq \nabla$, причем равенство имеет место лишь при отсутствии конвекции. Тогда из (8.2) следует, что конвекция возникнет, если выполняется условие (K.Schwarzschild, 1906):

$$\nabla_{rad} > \nabla_{ad}. \quad (8.5)$$

В отличие от (8.2) в критерий Шварцшильда (8.5) входят лишь величины, которые известны в данной точке – см. (8.4).

Замечание 1. Соотношение (8.5) получено выше для "всплывающего" ($\Delta r > 0$) элемента, однако тот же результат получится, если рассмотреть "тонущие" ($\Delta r < 0$) элементы.

Замечание 2. Вообще говоря, (8.5) является лишь необходимым условием появления конвекции. Но для звезд критерий Шварцшильда можно использовать и в качестве достаточного условия .

Из (8.4) следует, что ∇_{rad} может быть большой либо за счет высокой непрозрачности κ , либо за счет большого отношения L_r/m . Поэтому конвекция возникает либо во внешних слоях звезд с низкой T_{ef} , у которых в зонах неполной ионизации не только велика непрозрачность, но и мала величина ∇_{ad} , либо в центральных областях при сильной зависимости скорости ядерных реакций от температуры.

Если в среде имеется градиент химсостава, т.е. $dX_i/dr \neq 0$, то вместо (8.5) условием начала конвекции следует считать критерий Леду (P.Ledoux, 1957):

$$\nabla_{rad} > \nabla_{ad} + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \mu} \right)_{P,\rho} \cdot \frac{d \ln \mu}{d \ln P}, \quad (8.6)$$

который получается, если учесть, что $P = P(\rho, T, \mu)$. В результате ядерных превращений $d\mu/dr$ становится < 0 , так что $d\mu/dP > 0$. Поскольку для идеального газа $(\partial T/\partial \mu)_{P,\rho} > 0$, в зоне переменного химсостава может возникнуть ситуация, когда критерий (8.5) выполнен, а (8.6) – нет, т.е. градиент химсостава, обусловленный ядерной эволюцией, препятствует началу конвекции.

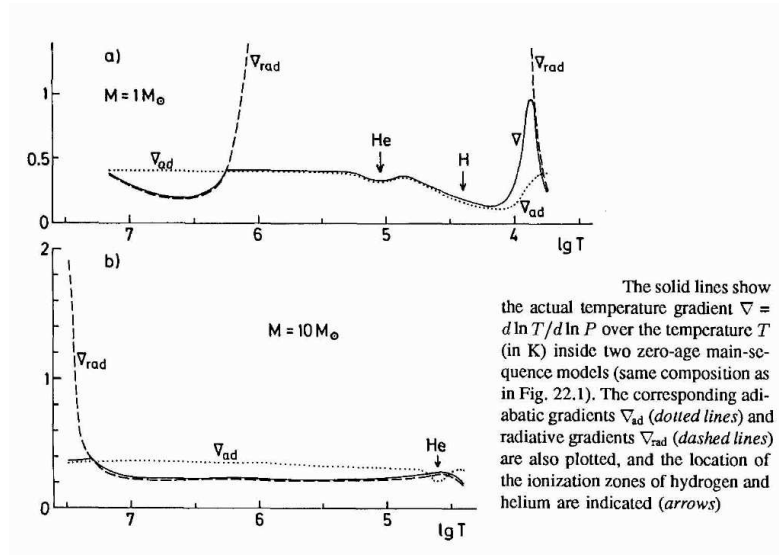


Рис. 16:

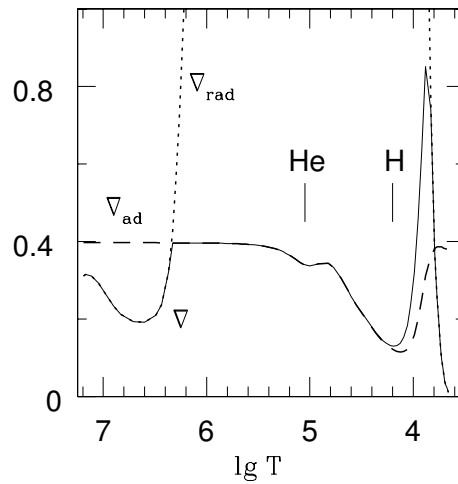


Рис. 17: Изменение градиентов внутри Солнца по расчетам С.Аюкова

Задача 1. Какой из критериев – (8.5) или (8.6) – надо применять в зонах неполной ионизации с однородным химсоставом $X_i(r) = const$?

Задача 2. Полагая $\rho = \rho(P, S)$ с учетом $(\partial \rho / \partial S)_P = -\gamma T \rho^2 / P < 0$, покажите, что в конвективной зоне $dS/dr < 0$.

Перенос энергии конвекцией

Пусть условие (8.5) или (8.6) выполнено. Тогда по аналогии с (8.4) напишем:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dT}{dP} \cdot \frac{dP}{dr} = -\nabla \frac{T}{P} \frac{\rho G m}{r^2}. \quad (8.7)$$

В Приложении показано, как в рамках т.н. локальной теории пути перемешивания найти величину ∇ . Эта феноменологическая теория предполагает, что возник-

нув, конвективные элементы проходят в среднем расстояние l_m , после чего растворяются в окружающей среде. Единственным параметром теории является величина $\alpha = l_m/H_p$, где $H_p = -P/(dP/dr) = P/\rho g$ – т.н. шкала высот по давлению. Величина α выбирается так, чтобы модель звезды наилучшим образом соответствовала наблюдениям. Как правило, $0.5 < \alpha < 2$.

Задача 3. Показать, что в изотермической атмосфере, т.е. при $T(r), g(r) = const$, в случае идеального газа $\rho = \rho_0 \exp(-h/H_p)$, где $H_p = \mathcal{K}T/\mu g$. Найти H_p для атмосфер Земли, Солнца и нейтронной звезды с $M = M_\odot$, $R = 10$ км и $T_{ef} = 10^6$ К.

Введем обозначения:

$$\delta \equiv \frac{(\partial P/\partial \rho)_T}{(\partial P/\partial T)_\rho}, \quad U_0 \equiv \frac{6acT^3 g}{\kappa_{CP} \alpha^2 P^2} \sqrt{\frac{2P\delta}{T}}. \quad (8.8)$$

При этом U_0 – безразмерная величина, а для идеального газа $\delta = T/\rho$, если $\mu = const$.

Тогда вводя вспомогательную величину ξ такую, что $\nabla = \xi^2 + \nabla_{ad} - U_0^2$, можно получить следующее уравнение для ξ :

$$(\xi - U_0)^3 + \frac{8U_0}{9} (\xi^2 - U_0^2 + \nabla_{ad} - \nabla_{rad}) = 0, \quad (8.9)$$

которое имеет всего один вещественный корень, т.е. ∇ определяется однозначно.

Пусть конвекция происходит в центральных областях звезды. При $r \rightarrow 0$, κ и все термодинамические величины стремятся к (конечным) центральным значениям, тогда как $g \rightarrow 0$. Поэтому вблизи центра $U_0 \rightarrow 0$. Тогда из (8.9) следует, что и $\xi \rightarrow 0$, а следовательно $\nabla \simeq \nabla_{ad}$. \implies Структура конвективного ядра звезды слабо зависит от неопределенности теории конвекции.

Конвекция в зоне ядерного горения перемешивает вещество и т.к. $t_{conv} \ll t_{nuc}$, то

$$\bar{X}_i = \frac{1}{M_{conv}} \int X_i dm. \quad (8.10)$$

У поверхности звезды g, κ, T и c_P стремятся к конечным значениям, а $P \rightarrow 0$, поэтому во внешних конвективных зонах $U_0 \gg 1$. Можно показать (см. Приложение 1), что с ростом U_0 $\nabla \rightarrow \nabla_{rad}$ – согласно (8.4) это значит, что $L_r^{rad} \rightarrow L_r$, т.е. конвекция становится малоэффективной.

При промежуточных значениях U_0 роль конвекции существенна, и для определения величины ∇ следует решать уравнение (8.9). Таким образом, недостатки локальной теории конвекции сильнее всего сказываются на структуре конвективных оболочек.

Критическая светимость

Поскольку $P = P_g + aT^4/3$,

$$-\frac{Gm}{r^2} \rho = \frac{dP}{dr} = \frac{dP_g}{dr} + \frac{4a}{3} T^3 \frac{dT}{dr}.$$

В зоне лучистого переноса, согласно (7.10),

$$L_r = -\frac{16\pi a c r^2}{3\kappa \rho} T^3 \frac{dT}{dr},$$

поэтому

$$\frac{dP_g}{dr} = -\frac{\rho Gm}{r^2} \left(1 - \frac{L_r}{L_r^c}\right), \quad \text{где } L_r^c = \frac{4\pi c Gm}{\kappa}. \quad (8.11)$$

Если $\varepsilon_\nu = 0$ и $\partial/\partial t \simeq 0$, то $dT/dr < 0$. Поэтому при $L_r > L_r^c$ из условия $dP_g/dr > 0$ следует, что $d\rho/dr > 0$, т.е. там, где $L_r > L_r^c$ плотность газа возрастает наружу.

Когда такая ситуация возникает во внутренних областях звезды, то инверсия плотности порождает конвекцию, вследствие чего L_r^{rad} становится меньше L_r , и инверсия плотности исчезает. Но если L_r превысит величину L_r^c вблизи поверхности звезды, где из-за малой плотности конвекция малоэффективна, то начинается истечение вещества в окружающее пространство (звездный ветер) – таков механизм потери массы у горячих звезд.

При $\kappa = \kappa_T$ $L_c \simeq 3 \cdot 10^4 L_\odot \cdot (M/M_\odot)$ – эта величина называется Эддингтоновским пределом.

Лекция 9. Полная система уравнений для расчета строения и эволюции звезды

Закон сохранения энергии

Пусть ε_{nuc} (эрг/г/с) – скорость выделения энергии в ядерных реакциях без учета энергии, уносимой нейтрино, а ε_ν (эрг/г/с) – удельная мощность нейтринного излучения, не связанного с ядерными реакциями. Тогда для тонкого сферического слоя с массой dm первый закон термодинамики примет вид:

$$dQ = \varepsilon_{nuc} dm dt - \frac{dL_m}{dm} dm dt - \varepsilon_\nu dm dt = \left[dE + Pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] dm \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial L_m}{\partial m} \right)_t = \varepsilon_{nuc} - \varepsilon_\nu - \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_m + \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_m. \quad (9.1)$$

Каков физический смысл слагаемых с производными по времени? Для ответа на этот вопрос проинтегрируем уравнение (9.1) от 0 до M , учитывая, что t и m – независимые переменные. Пусть L_γ – полная фотонная светимость звезды, а $L_{nuc} = \int \varepsilon_{nuc} dm$ и $L_\nu = \int \varepsilon_\nu dm$ – ядерная и нейтринная светимость звезды соответственно.

$$\int_0^M \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_m dm = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^M E dm \right) = \frac{\partial E_*}{\partial t}, \quad \text{где } E_* \text{ – полная тепловая энергия звезды.}$$

Возьмем интеграл $I = \int P (\partial \rho^{-1} / \partial t) dm$ по частям, полагая $u = P$, $dv = (\partial \rho^{-1} / \partial t) dm$. Тогда $du = dP/dm dm = -Gm dm / 4\pi r^4$,

$$v = \int (\partial \rho^{-1} / \partial t) dm = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dm}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} \int 4\pi r^2 dr = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \quad \Longrightarrow$$

$$I = 4\pi r^2 P \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_0^M + \int_0^M 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \frac{Gm}{4\pi r^4} dm = 0 + \int_0^M \frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{Gm}{r^2} dm = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = \frac{\partial U}{\partial t} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial(U + E_*)}{\partial t} = L_{nuc} - L_\nu - L_\gamma.$$

Если $L_{nuc} = L_\nu = 0$, то для звезды, состоящей из идеального газа с $\gamma = 5/3$ (для которой $E_* = -U/2$), получим:

$$L_\gamma = -\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (14)$$

Следовательно, слагаемое с временными производными в (9.1) описывает выделение энергии за счет работы сил тяготения. В данном случае ($\gamma = 5/3$) ровно половина совершаемой работы идет на нагрев звезды, а половина – уносится излучением наружу.

Математическая формулировка задачи

$$\left(\frac{\partial r}{\partial m}\right)_t = \frac{1}{4\pi\rho r^2}, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)_t = -\frac{Gm}{4\pi r^4},$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial m}\right)_t = -\nabla \frac{T}{P} \frac{Gm}{4\pi r^4}, \quad \left(\frac{\partial L_r}{\partial m}\right)_t = \varepsilon_n - \varepsilon_\nu - \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_m + \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_m.$$

Причем:

$$\text{при } \nabla_{rad} < \nabla_{ad} \text{ (зона лучистого переноса):} \quad \nabla = \nabla_{rad}, \quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial t}\right)_m = \frac{\varepsilon_n}{Q_n^*}.$$

$$\text{при } \nabla_{rad} \geq \nabla_{ad} \text{ (конвективная зона):} \quad \nabla = \nabla_{conv}, \quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial t}\right)_m = \frac{L}{m_{conv} Q_n^*}.$$

$$\text{Здесь } \nabla_{rad} = \frac{3\kappa L_r P}{16\pi a c G m T^4}, \quad \nabla_{ad} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_S, \quad P, E, \kappa, \varepsilon_n, \varepsilon_\nu = f(\rho, T, X_i).$$

Граничные условия

Внешняя граница (поверхность) звезды

Первым граничным условием на поверхности звезды является соотношение:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 \quad \text{при} \quad m = M, \quad (9.7)$$

связывающее светимость, радиус и эффективную температуру.

В звездных атмосферах температура газа T при $\tau < 1$ меняется слабо. В частности, в рамках т.н. эддингтоновского приближения (для плоской атмосферы):

$$T = T_{ef} (0.5 + 0.75\tau)^{1/4}.$$

Тогда, полагая $T \simeq T_{ef}$ и $m_r \simeq M$, из уравнений

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \equiv -\rho \frac{GM}{R^2} \quad \text{и} \quad \frac{d\tau}{dr} = -\rho \kappa \quad \text{окончательно получим:}$$

$$\frac{\rho_{ph} \mathfrak{K} T_{ef}}{\mu} \simeq \frac{g}{\kappa_{ph}} \quad \text{при} \quad m = M, \quad (9.8)$$

При известной зависимости $\kappa = \kappa(\rho, T)$ это соотношение служит вторым граничным условием, связывая величины R , ρ_{ph} и T_{ef} . Химический состав и масса звезды – параметры задачи.

Центр звезды.

В центре звезды имеем естественные условия:

$$r = 0, \quad L_r = 0 \quad \text{при} \quad m = 0. \quad (9.9)$$

Формально в правых частях уравнений (9.3) и (9.4) при $r=0$ имеется сингулярность типа $0/0$, поэтому численное решение основной системы следует начинать не из центра, а из некоторой малой его окрестности. Легко показать, что на малом расстоянии r от центра:

$$\rho = \rho_c, \quad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c, \quad P = P_c - \frac{2}{3}\pi Gr^2 \rho_c^2, \quad L_r = m\xi_c,$$

$$\xi_c \equiv \varepsilon_n^c - \varepsilon_\nu^c - \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_c + \frac{P_c}{\rho_c^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_c,$$

$$T = T_c - \frac{2}{3}\pi Gr^2 \rho_c^2 \frac{\gamma_c T_c}{P_c} \quad - \text{адиабатическая конвекция,}$$

$$T = T_c - \frac{\varkappa_c \xi_c \rho_c^2}{8acT_c^3} r^2 \quad - \text{лучистый перенос.}$$

Методы решения:

- 1) Метод Шварцшильда; 2) Метод Хеньи; 3) Комбинированный метод

Лекция 10. Эволюция звезд до главной последовательности

Коллапс исходного облака (сферически симметричный)

Из условия $GM^2/R > 1.5kT_o \cdot (M/\mu m_p)$ с учетом $\rho \simeq M/4R^3$ получаем, что облако начнет сжиматься под действием самогравитации, если его плотность

$$n = \frac{\rho}{\mu m_p} \geq \left(\frac{1.5kT_o}{\mu m_p G} \right)^3 \frac{1}{4\mu m_p M^2} \simeq 4 \cdot 10^5 \left(\frac{T_o}{30} \right)^3 \left(\frac{2}{\mu} \right)^5 \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 \text{ см}^{-3}. \quad (10.1)$$

(критерий Джинса). Значения $n \geq 10^5 \text{ см}^{-3}$, $T \sim 30 \text{ К}$ и $\mu \simeq 2$ характерны для внутренних областей глобул и молекулярных облаков.

Поскольку $F_{gas} = \rho^{-1} dP/dr \propto T_o/R$, а $F_{grav} = GM/r^2 \propto 1/R^2$, при изотермическом (!) сжатии облака F_{gas} растет медленней, чем F_{grav} , поэтому вскоре после начала сжатия переходит в режим свободного коллапса.

Протозвезды

Коллапс происходит за время:

$$t_{ff} \simeq \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \simeq 5 \cdot 10^4 \frac{M/M_\odot}{(T_o, \text{ К}/30)^{1.5}} \text{ лет}. \quad (10.2)$$

В протозвездном облаке давление и плотность нарастают к центру. Поэтому, согласно (10.2), коллапс протекает неоднородно: центральные области сжимаются быстрее периферических.

Поскольку $\tau \propto \rho R \propto 1/R^2$, облако по мере сжатия становится все более непрозрачным. Это приводит к росту температуры, и следовательно, к более быстрому росту давления, чем в режиме изотермического коллапса. Сильней всего это проявляется в центральных областях, где плотность растет наиболее быстро. В конечном итоге градиент давления становится сравнимым с F_{grav} , и в центре облака возникает гидростатически равновесное ядро – зародыш звезды, которое имеет массу $\sim 1\%$ массы облака. Ядро протозвезды не видно в оптике из-за большой оптической толщи оболочки. Дальнейшая эволюция протозвезды – это аккреция вещества оболочки на центральное ядро. Торможение падающего газа происходит в ударной волне на внешней границе ядра. С течением времени масса ядра растет, а оболочки уменьшается. В конечном итоге оболочка становится прозрачной для оптического излучения, и на этом фаза протозвезды завершается. Наблюдаемое в видимой области спектра гидростатически равновесное ядро принято называть молодой звездой.

Молодые звезды малой массы ($M < 2-3 M_\odot$)

Линия на диаграмме $\lg L - \lg T_{ef}$, соответствующая положению молодых звезд разной массы в момент, когда оболочка становится прозрачной, называется *линией рождения звезд*. В этот момент молодые звезды с массой $M < 2 - 3 M_\odot$ полностью конвективны. Определим форму их трека на Г-Р диаграмме.

Имеем: $T_c \propto M/R$ и $\rho_c \propto M/R^3$. Т.к. $S \propto \ln(T^{3/2}/\rho) \simeq const$ в конвективной звезде, то: $T_c^{3/2}/\rho_c \simeq T_{ef}^{3/2}/\rho_{ph}$. Кроме того имеем: $L \propto R^2 T_{ef}^4$ и $\rho_{ph} T_{ef} \propto M/R^2/\kappa_{ph}$. Если $\kappa_{ph} \propto T_{ef}^4 \rho_{ph}^{0.5}$, то комбинируя эти соотношения получим трек Хаяши:

$$\lg L \propto 62 \cdot \lg T_{ef}. \quad (10.3)$$

Т.о. сжатие происходит почти при постоянной T_{ef} : трек почти вертикальный, и $L \propto R^2$.

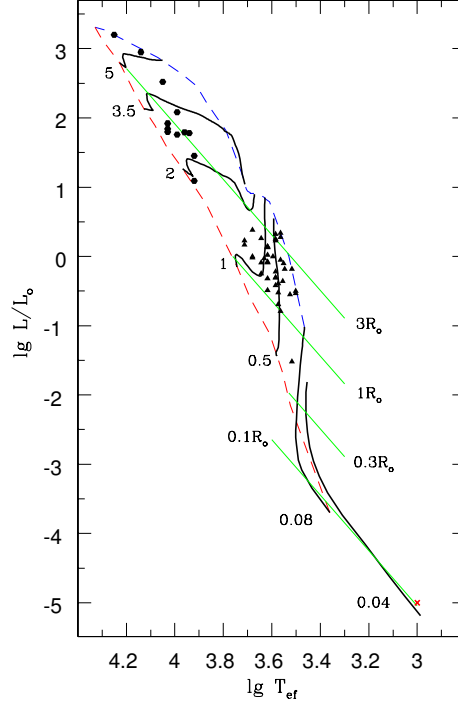


Рис. 18: Эволюционные треки молодых звезд. Кружками отмечено положение Ae/Be звезд Хербига, треугольниками – звезд типа Т тельца, а крестиком – коричневого карлика Gliese 229B.

С другой стороны, согласно (14),

$$L \propto -\frac{dU}{dt} \propto \frac{d(M^2/R)}{dt} \propto -\frac{1}{R^2} \frac{dR}{dt} \implies \frac{1}{R^2} \frac{dR}{dt} \propto -R^2 \implies R \propto t^{-1/3},$$

т.е. по мере приближения к ГП сжатие замедляется.

Во внутренних слоях звезды $\kappa \propto \rho T^{-7/2}$ (закон Крамерса). Поскольку в конвективной зоне $\rho \propto T^{3/2}$, получаем, что $\kappa \propto 1/T^2$ вдоль радиуса звезды, т.е. имеет минимальное значение в центральной области. По мере сжатия T_c растет ($T_c \propto M/R$), поэтому вначале в центре, а затем и в его окрестности вещество становится все более прозрачным для излучения. В результате у молодых звезд с $M > 0.8 M_\odot$ формируется лучистое ядро и они переходят на т.н. лучистый трек.

Комбинируя соотношения $T_c^4/R \propto \kappa \rho L/R^2$, $T_c \propto M/R$, $\rho \propto M/R^3$ и $L \propto R^2 T_{ef}^4$ с законом Крамерса получим форму трека в этом случае:

$$\lg L \propto 0.8 \cdot \lg T_{ef}. \quad (10.4)$$

Звезды с $M < 0.8 M_{\odot}$ приходят на главную последовательность полностью конвективными. По мере их сжатия T_c растет, но отношение T/T_F уменьшается, т.к. оно $\propto T/\rho^{2/3} \propto M^{1/3}R$, причем быстрее для звезд малых масс. У звезд с $M < 0.08 M_{\odot}$ давление вырожденного газа останавливает рост T_c до того, как она поднимется до величины, необходимой для того, чтобы ядерные реакции поддерживали тепловой баланс звезды. Такие объекты называются коричневыми карликами.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Когда начинается вырождение электронного газа $P = \rho \mathfrak{R}T/\mu_i + K_0\rho^{5/3}$. Поскольку в политропной звезде $P_c \propto M^2/R^4$ и $\rho_c \propto M/R^3$, имеем для параметров газа в центре:

$$T_c = a_1 \frac{P_c}{\rho_c} - b_1 \rho_c^{2/3} = a_2 \frac{M}{R} - b_2 \frac{M^{2/3}}{R^2}, \quad (10.5)$$

где a_i, b_i – постоянные величины для данного индекса политропы. Тогда:

$$\frac{dT_c}{dR} = -\frac{a_2 M^{2/3}}{R^2} \left(M^{1/3} - \frac{2b_2}{Ra_2} \right) \implies T_c = T_c^{max} = \frac{a_2^2 M^{4/3}}{4b_2} \quad \text{при } R = R_c = \frac{2b_2}{a_2 M^{1/3}}.$$

Существенно, что после того, как R станет $< R_c$ величина T_c начнет уменьшаться!

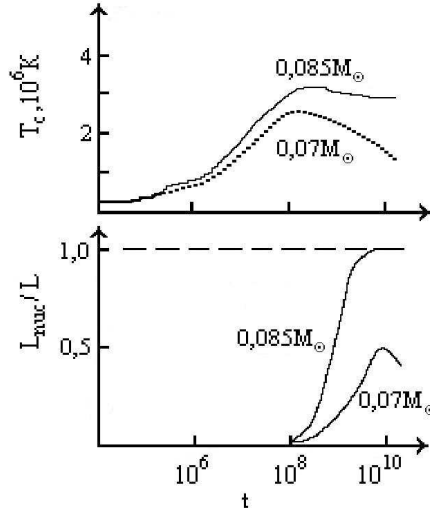


Рис. 19: Изменение центральной температуры и относительного вклада ядерной светимости с течением времени у звезд вблизи предела Кумара.

Время сжатия до главной последовательности (шкала Кельвина-Гельмгольца):

$$t_{KH} \sim \frac{GM^2}{RL} \simeq 3 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \frac{R_{\odot}}{R} \frac{L_{\odot}}{L} \text{ лет}, \quad (10.6)$$

причем величины R и L следует принимать равными значениям на ГП. t_{KH} падает с ростом массы, т.к. на ГП (см. следующую Лекцию) $L \propto M^n$, где $n > 2$ и $R \propto M \implies t_{KH} \propto M^{-n}$. Для звезд с $M < 0.8 M_{\odot}$ $t_{KH} >$ возраста Вселенной.

Перед главной последовательностью у звезд с $M > 0.8 M_{\odot}$ в центре появляется конвективная зона, но при $M > 2 M_{\odot}$ она исчезает еще до прихода на ГП, а у звезд меньших масс – после начала реакций $p - p$ цикла.

Особенности коллапса при учете вращения облака.

Из-за дифференциального вращения Галактики протозвездные облака вращаются вокруг оси, т.е. имеют ненулевой угловой момент $J \simeq MR^2\omega$. В процессе коллапса величина J почти не меняется, поэтому скорость вращения облака растет ($\omega \propto R^{-2}$), и оно приобретает форму эллипсоида. Если J достаточно велико, в какой-то момент центробежная сила на экваторе $\omega^2 R$ станет больше силы тяготения GM/R^2 , и облако распадается на два фрагмента (двойную систему). При этом угловой момент облака перейдет в орбитальный момент системы, что позволит каждой из протозвезд продолжать сжатие. Если исходный момент облака достаточно велик, фрагментация может повториться еще (несколько) раз. Таков механизм формирования двойных и кратных систем.

Если же исходный угловой момент облака не слишком велик, то в конце коллапса образуется сравнительно медленно вращающаяся молодая звезда, окруженная газо-пылевым диском, причем $M_d \leq 0.01 M_{\odot}$, но $J_d \simeq J_o$. Объекты этого типа отождествляют с неправильными переменными звездами типа Т Тельца. С наблюдательной точки зрения – это субгиганты спектральных классов F5-M, в спектре которых наблюдаются эмиссионные линии водорода и некоторых других элементов. Кроме того, для них характерно избыточное (по сравнению со звездами ГП тех же спектральных классов) излучение в УФ и ИК континууме. "Средние" значения параметров звезд Т Тельца: $M = 0.8 M_{\odot}$, $R = 2 R_{\odot}$, период осевого вращения $P_{rot} = 3^d$, индукция магнитного поля у поверхности $B \sim 1 - 3$ кГс, возраст – от 10^5 до 10^7 лет.

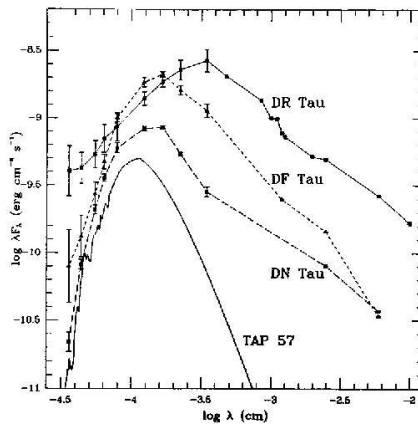


Рис. 20: Спектры звезд типа Т Тельца

Из-за вязкого трения вещество диска аккрецирует на центральную звезду с темпом аккреции \dot{M}_{ac} , величина которого лежит в интервале $10^{-9} - 3 \cdot 10^{-7} M_{\odot}/\text{год}$. Магнитное поле звезды останавливает диск на расстоянии $\sim 1 - 3 R_*$ от поверхности. Вещество диска вмораживается в магнитные силовые линии, и вдоль них соскальзывает к поверхности, разгоняясь гравитационным полем до скорости ~ 300 км/с. При столкновении газа с поверхностью звезды возникает ударная волна, в которой

кинетическая энергия аккрецируемого газа трансформируется в излучение, которое ответственно за наблюдаемую эмиссию в линиях и континууме.

У некоторых звезд Т Тельца наблюдалось увеличение блеска в сотни раз, вероятно, связанные с увеличением \dot{M}_{ac} до величины $\sim 10^{-4} M_{\odot}/\text{год}$. По имени звезды FU Ori объекты этого типа, которых известно сейчас несколько штук, называют фуорами. Основной вклад в наблюдаемый спектр фуоров дает не звезда, а аккреционный диск, т.е. $L_* < L_{ac} = GM\dot{M}_{ac}/R$. По-видимому, неустойчивости в диске, приводящие к росту \dot{M}_{ac} , происходят у молодых звезд с возрастом менее 1 млн. лет.

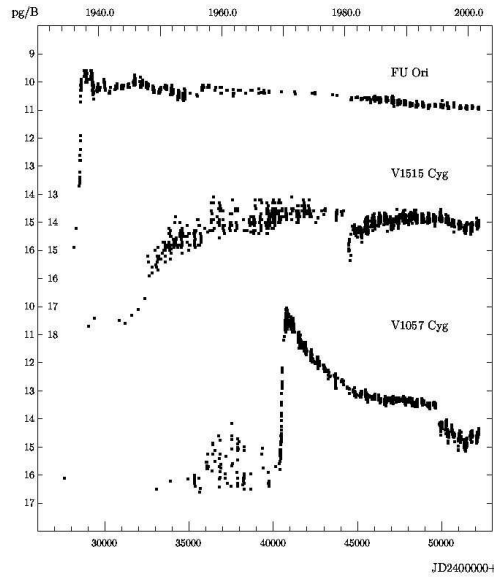


Рис. 21: Кривые блеска фуоров FU Ori, V1515 Cyg и V1057 Cyg.

Дисковую аккрецию сопровождает истечение вещества с поверхности внутренних областей диска – т.н. дисковый ветер. Темп потери массы у звезд типа Т Тельца $\dot{M}_w \sim 0.1 \dot{M}_{ac}$, а предельная скорость истечения $V_{\infty} \sim 300$ км/с. На расстояниях свыше 10 а.е. от звезды дисковый ветер коллимируется, образуя биполярные джеты. Ветер выметает остатки протозвездного облака.

Наличие дисков вокруг звезд типа Т Тау подтверждено наблюдениями. Эволюция диска определяется двумя процессами: а) истощением массы диска в результате аккреции и истечения; б) оседанием пыли к центральной плоскости. Если оседание пыли происходит достаточно быстро, начинается слипание пылинок и формирование все более и более крупных тел – зародышей планет. Если зародыши успевают вырасти до размера ~ 1 км до того как диск диссипирует, их дальнейший рост происходит, в основном, за счет аккреции окружающего газа. Т.о. планеты образуются из дис-

ков, окружающих молодые звезды, поэтому эти диски называют протопланетными. В Солнечной системе свыше 98 % углового момента сосредоточено в орбитальном моменте планет-гигантов.

Молодые звезды промежуточной массы (от 3 до 8 M_{\odot}).

Качественно у этих звезд эволюция протекает так же, как и у менее массивных звезд, но у них нет конвективных зон вплоть до прихода на ГП. Объекты этого типа отождествляют с т.н. звездами Ae/Be Хербига – неправильными переменными спектральных классов В-F5 с эмиссией в линиях H I, He I и некоторых других элементов. У Ae/Be звезд Хербига также наблюдаются (протопланетные?) диски и биполярные джеты. Светимость и T_{eff} , а также скорость истечения ($V_{\infty} \sim 10^3$ км/с) и темп потери массы у Ae/Be звезд Хербига намного превышают аналогичные величины для звезд типа Т Тельца, поэтому они эффективно нагревают и рассеивают остатки протозвездного облака, препятствуя последующему звездообразованию.

Образование звезд с массой $\geq 8 M_{\odot}$

Из (10.1) следует, что продолжительность стадии протозвезды, определяемая временем сжатия внешних областей облака t_{ff} , тем больше, чем массивней облако, тогда как время превращения молодой звезды в звезду ГП t_{KH} , согласно (10.6), наоборот, уменьшается с ростом массы. При $M \geq 8 M_{\odot}$ величина t_{ff} становится больше t_{KH} . Это значит, что гидростатически равновесное ядро протозвезды успевает превратиться в звезду ГП еще до того, как коллапсирующая оболочка станет прозрачной в видимом диапазоне. Поэтому когда оболочка рассеется, перед нами предстанет уже сформировавшаяся звезда ГП. Примером может служить звезда η Car – одна из наиболее массивных звезд галактики: $M \simeq 70 M_{\odot}$, $L \sim 10^6 L_{\odot}$. Иными словами, у звезд с $M \geq 8 M_{\odot}$ стадия молодой звезды отсутствует – это видно из Рис.18, на котором линия рождения пересекает начальную главную последовательность (НГП) в районе $8 M_{\odot}$. В Галактике известно почти 300 таких звезд-коконов, которые представляют собой яркие источники ИК излучения.

Воздействие формирующейся звезды большой массы на окружающий газ протозвездного облака очень велико: давление излучения и ветра не только останавливает сжатие внешних областей, но и заставляет их двигаться в обратном направлении. В результате, масса звезды M_* оказывается заметно меньше массы родительского облака M_o , причем с ростом M_o отношение M_*/M_o быстро уменьшается. Например, при $M_o = 150 M_{\odot}$ $M_*/M_o < 0,5$. Возможно, это обстоятельство объясняет отсутствие в Галактике звезд с массой заметно превышающей $100 M_{\odot}$.

Ежегодно в Галактике рождаются звезды с общей массой $\sim 3 M_{\odot}$. Распределение рождающихся звезд по массам описывается т.н. начальной функцией масс. Согласно Солпитеру

$$\frac{dN}{dM} \propto M^{-2.35},$$

так что массивные звезды рождаются очень редко.

Лекция 11. Строение и эволюция звезд главной последовательности

Структура звезд ГП

Модели звезд НГП в разумном приближении можно построить, полагая $dX_i/dr = 0$, $(\partial/\partial t)_m = 0$. Для Солнца подбирают химсостав и параметр конвекции α , чтобы получить наблюдаемые значения R и T_{ef} при наблюдаемом возрасте и химическом составе.

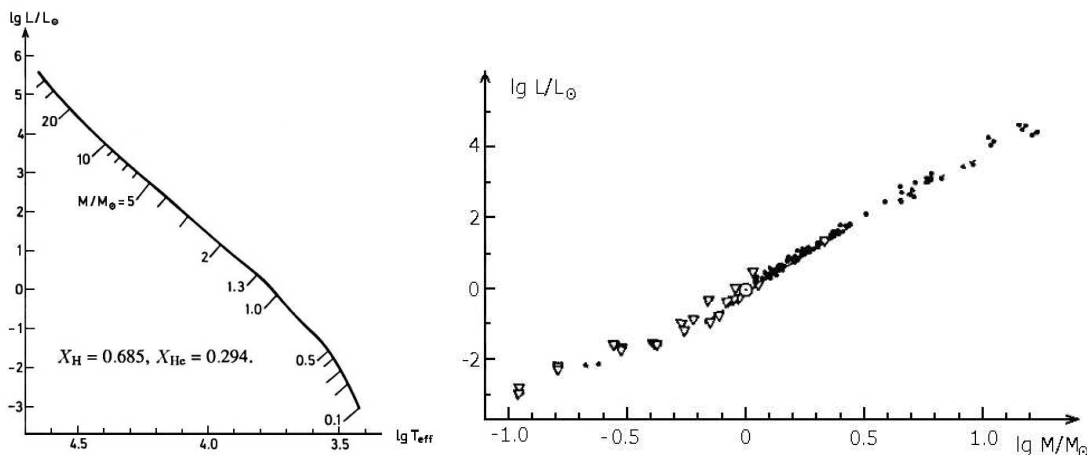


Рис. 22: Слева – НГП для звезд с $X_H = 0.685$, $Y = 0.294$, $Z = 0.001$. Справа – наблюдаемая зависимость светимость-масса, построенная по двойным звездам (Popper D.M., Ann.Rev. A&A 18, 115, 1980).

Зависимость $L(M)$ и $R(M)$ вдоль ГП

Очень массивные звезды ($M > 100M_\odot$.)

Давление определяется излучением, непрозрачность томпсоновская:

$$P_c \propto T_c^4 \propto \frac{M^2}{R^4}, \quad \rho \propto \frac{M}{R^3} \quad L \propto \frac{RT_c^4}{\rho}, \quad \Rightarrow \quad L \propto M.$$

Массивные звезды ($M > 10M_\odot$.)

Давление определяется газом, непрозрачность томпсоновская:

$$T_c \propto \frac{M}{R}, \quad \rho \propto \frac{M}{R^3} \quad L \propto \frac{RT_c^4}{\rho}, \quad \Rightarrow \quad L \propto M^3.$$

Звезды с $M \simeq M_\odot$

Давление определяется газом, непрозрачность крамерсовская, pp -цикл:

$$T_c \propto \frac{M}{R}, \quad \rho \propto \frac{M}{R^3} \quad L \propto \frac{RT_c^4}{\kappa \rho}, \quad \kappa \propto \frac{Z\rho}{T^{7/2}}, \quad L \propto R^3 \rho \varepsilon, \quad \varepsilon \propto \rho T_c^4 \quad \Rightarrow \quad L \propto G^{7.8} M^{5.5}$$

\Rightarrow Ограничения на dG/dt , исходя из постоянства климата на Земле.

Субкарлики - звезды с пониженным содержанием металлов.

Время жизни на ГП: $t_{MS} \sim 0.008c^2 \cdot 0.1M/L \propto 1/M^{n-1}$, т.е. массивные звезды живут на ГП меньше. При $X_H^0 = 0.602$, $X_{He}^0 = 0.354$ и $Z = 0.04$ $t_{MS} \simeq 20, 33$ и 80 млн. лет для звезд с массами $8, 6$ и $4 M_\odot$ соответственно. Для Солнца $t_{MS} \simeq 11$ млрд. лет, а у звезд с $M < 0.8M_\odot$ t_{MS} превышает возраст Вселенной.

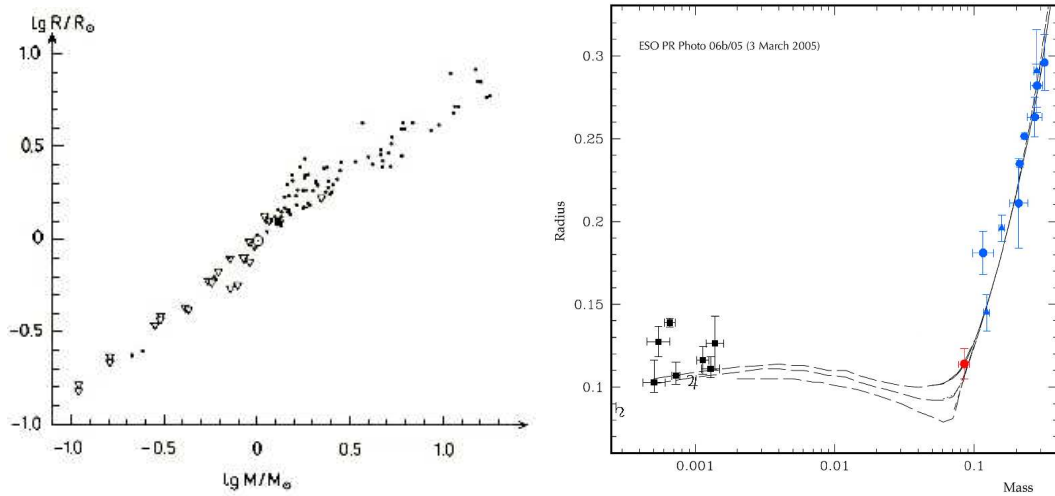


Рис. 23: Зависимость радиуса от массы звезд ГП, коричневых карликов и планет-гигантов

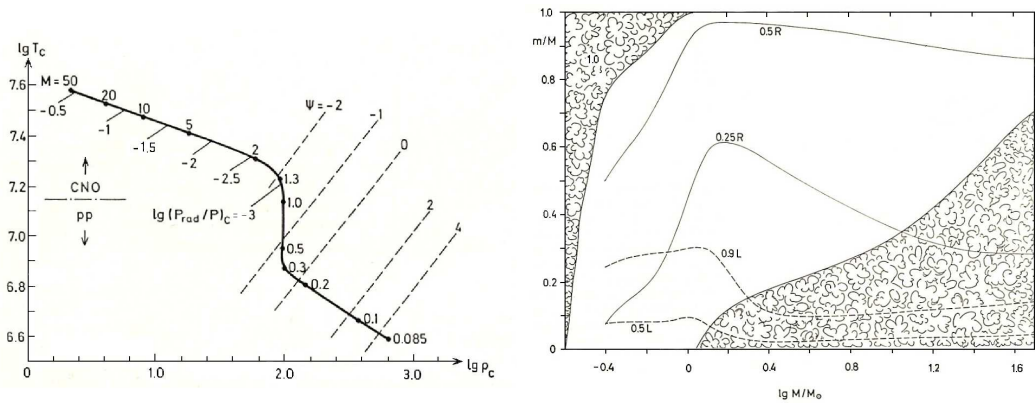


Рис. 24: Температура и плотность в центре звезд НГП разных масс (слева) и структура звезд НГП (справа).

Изменение параметров звезд по мере выгорания H

Факторы, определяющие характер эволюции на ГП ($4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + 2e^+$):

- 1) Уменьшение числа частиц $\implies P \propto \mu^{-1} = 0.75 + 1.25X - 0.25Z$ падает;
- 2) Уменьшение количества $e \implies$ падает κ .

В результате по мере выгорания водорода ρ_c , T_c и светимость(!)растут. Изменение R не столь тривиально - см. Рис.27,29. Последствия роста ρ_c для звезд малой массы (вырождение e-газа).

Т.к. $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$, то линия $\lg L = 4 \lg T_{ef} + const$ - есть линия постоянного радиуса.

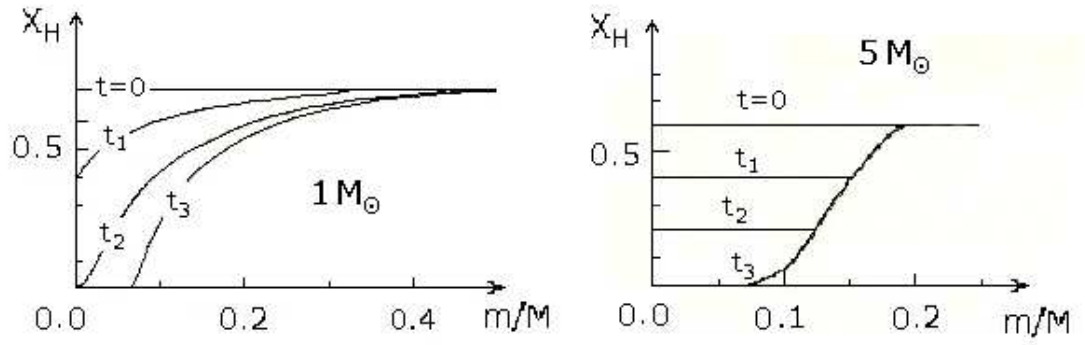


Рис. 25: Изменение концентрации водорода X_H с течением времени у звезд ГП: левый рисунок – для звезды с $M = 1 M_{\odot}$ (лучистое ядро); правый рисунок – для звезды с $M = 5 M_{\odot}$ (конвективное ядро, размер которого меняется в ходе эволюции).

Лекция 12. Эволюция звезд с $M < 8M_{\odot}$ после ГП

Появление слоевого источника

У звезд с $M > 1.3M_{\odot}$ на ГП имеется конвективное ядро, внешняя граница которого намного превышает размер области, где происходит горение водорода. Когда водород в конвективном ядре выгорает полностью, температура за пределами ядра слишком мала для горения H, поэтому звезда начинает сжиматься для компенсации потерь на излучение с поверхности. сжиматься как целое. При этом T повышается, а звезда движется, как и до ГП, по лучистому треку: $\lg L = 0.8 \lg T_{ef} + const.$ Спустя некоторое время на внешней границе ядра температура повышается настолько, что H загорается: появляется слоевой источник. У звезд с $M < 1.3M_{\odot}$ конвекции в ядре на ГП не было, поэтому слоевой источник появляется сразу после исчерпания H в центре. Это причина наличия загиба вправо при $M < 1.3M_{\odot}$.

Эмпирическая закономерность:

Когда область под слоевым источником сжимается, внешняя область - расширяется. Когда область под слоевым источника расширяется, внешняя область - сжимается.

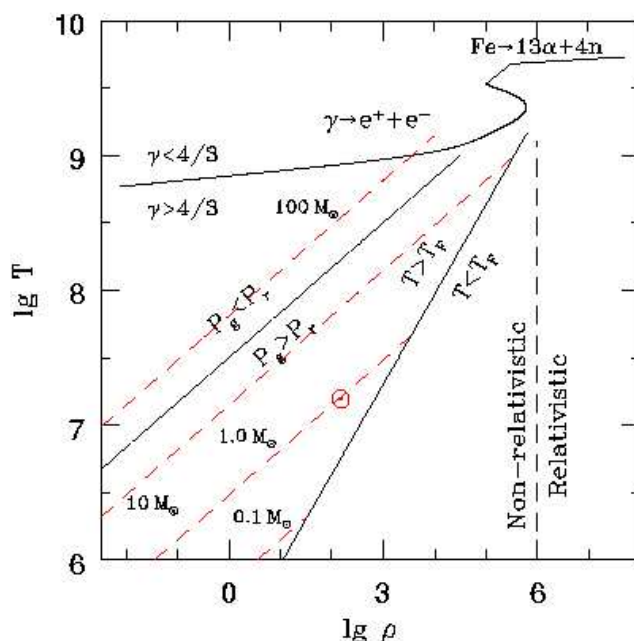


Рис. 26: Схема, поясняющая характер эволюции центральных областей звезд разных масс.

Звезды малой массы ($M < 0.8M_{\odot}$)

Сжатие ядра порождает расширение оболочки и движение звезды по треку Хаяши, но в обратном направлении – см. Рис.28. В ядре наступает вырождение еще при $T_c < 10^8$ К, поэтому гелий не загорается и в центральных областях формируется горячий He белый карлик. Слоевой источник сдвигается все ближе к поверхности, утончается и в конце концов пропадает. Оболочка сбрасывается и БК оказывается голым. $t > t_H!$

Звезды с массой $0.8M_{\odot} < M < 2.3M_{\odot}$

Вначале тот же путь, что и у маломассивных звезд, но вырождение не столь велико и He загорается. Время эволюции определяется ядерной шкалой, но из-за роста L темп продвижения по треку нарастает.

Из-за наличия нейтринных потерь T_{max} достигается не в центре! При этом происходит He вспышка: на несколько секунд $L \sim 10^{10}L_{\odot}$! Вырождение снимается, ядро расширяется, T падает и начинается стационарное горение. Почти вся выделенная энергия поглощается при расширении ядра и оболочки: внешне все меняется плавно с $t \sim t_{th}^e$.

При горении He $\Delta m/\text{нуклон} = (12.0111 - 3 \cdot 4.0026)/12 \simeq 2.6 \cdot 10^{-4} \implies t_{nuc}^{He} \sim 3 \cdot 10^{-4} * 0.1 M_* c^2 / L_*$, т.е. $\ll t_{nuc}^H$.

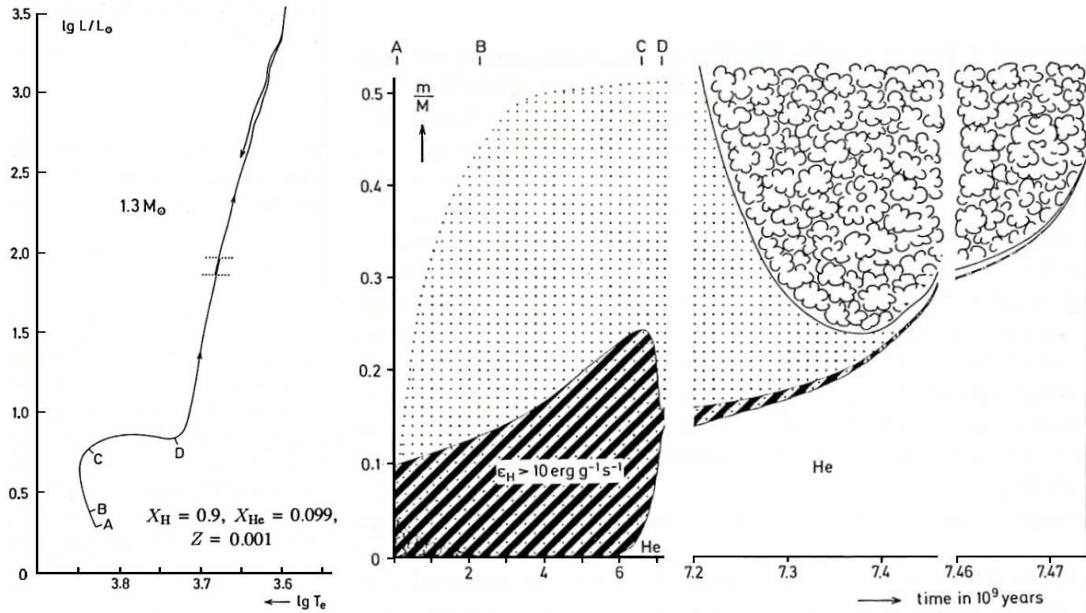


Рис. 27: Эволюция звезды с $M=1.3M_{\odot}$

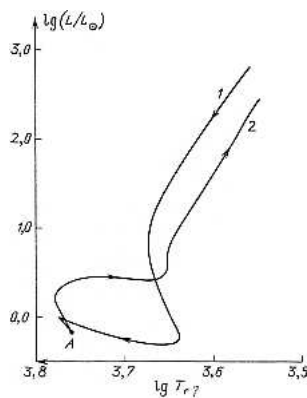
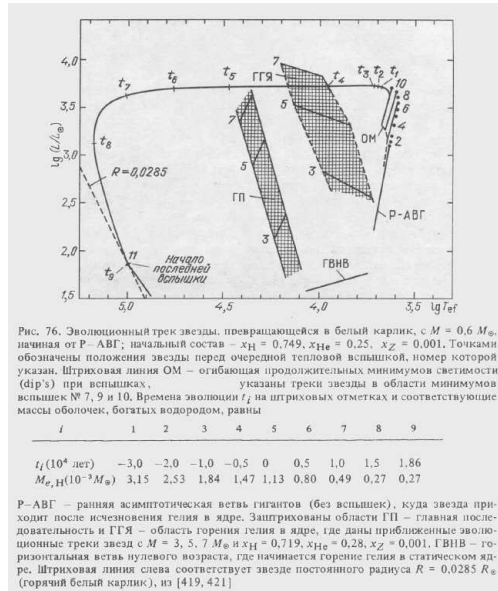


Рис. 28: Эволюционные треки Солнца до и после прихода на ГП.



Звезды с массой $2.3M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$

Когда сформировалось He ядро, оно невырождено и изотермично. Горение H в слоевом источнике с течением времени увеличивает массу He ядра. Когда его масса превысит $\sim 10\%$ массы звезды (предел Шенберга-Чандрасекара) ядро начинает сжиматься в тепловой шкале времени T_{KH} . При этом оболочка звезды расширяется, и звезда превращается в красного гиганта. Быстрый ($t = T_{KH} \ll t_{nuc}$) переход из одной области в другую – причина наличия т.н. провала Герцшпрунга на диаграмме ГР.

Загорание He в ядре происходит плавно. Петли на диаграмме ГР как отражение эволюции ядра. Формирование вырожденного C-O ядра. Причина вспышки в H-He слоевом источнике – положительная теплоемкость звезды, хотя вырождения нет.

Наличие вырождения не позволяет загореться $^{12}\text{C} \implies$ формирование C-O БК.

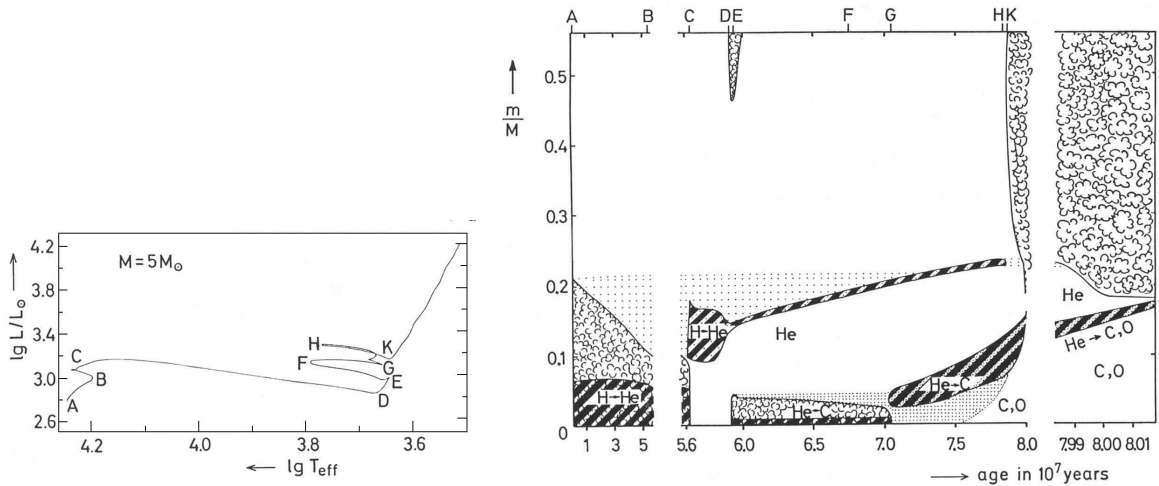


Рис. 29: Эволюция звезды с $M=5M_{\odot}$ и $X_H = 0.602$, $Y = 0.354$, $Z = 0.044$.

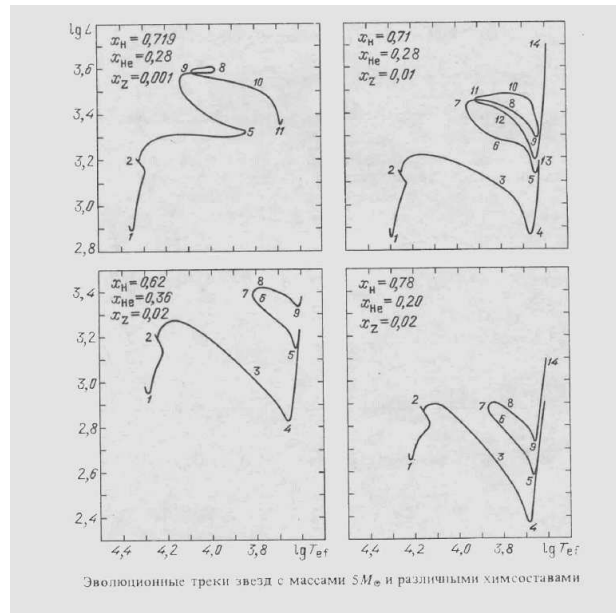


Рис. 30: Изменение формы эволюционного трека звезды с $M = 5 M_{\odot}$ в зависимости от начального химического состава.

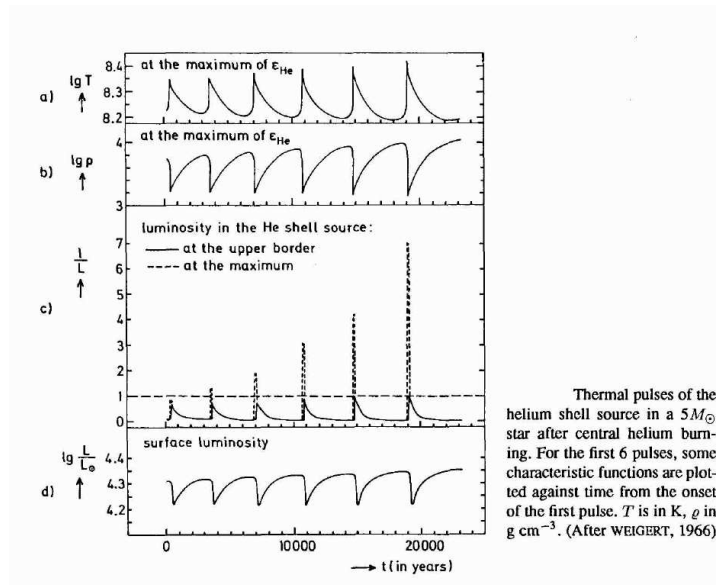


Рис. 31: Пульсационная неустойчивость в слоевых источниках в случае звезды с $M = 5 M_{\odot}$.

Лекция 13. Эволюция звезд с $M > 8 M_{\odot}$ после ГП.

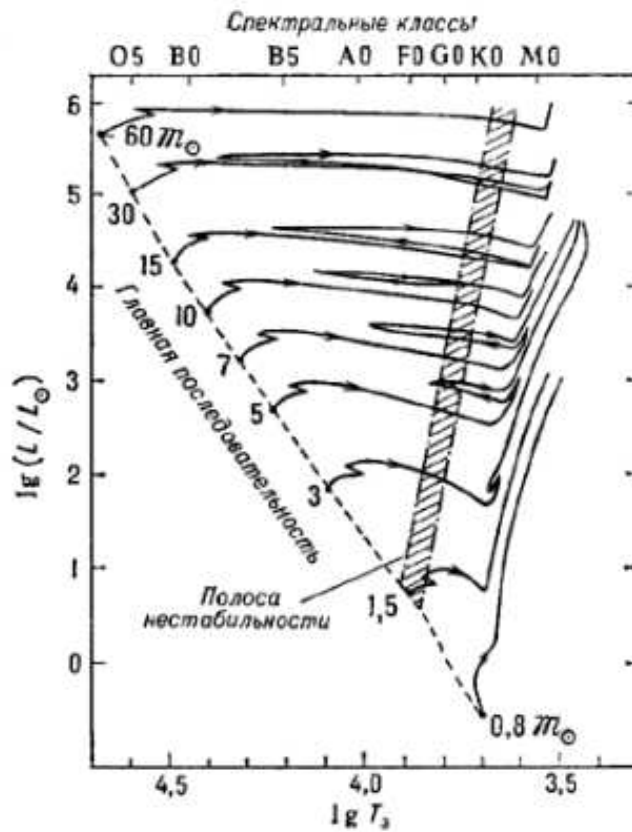


Рис. 32: Эволюционные треки звезд разных масс.

Интерпретация диаграмм ГР звездных скоплений.

1) Время жизни на ГП сильно зависит от M_* , а время ухода в область гигантов $\ll t_{\text{ГП}} \implies$ форма изохрон почти повторяет форму трека.

2) Населенность некоторого участка изохроны $AB \propto t_{AB} \implies$ провал Герцшпрунга и провал вблизи точки поворота у рассеяных скоплений. (Наличие неразрешенных двойных ухудшает согласие теории с наблюдениями!)

Сравнение формы изохрон с диаграммой ГР скоплений позволяет найти: 1) возраст скопления; 2) химсостав; 3) расстояние.

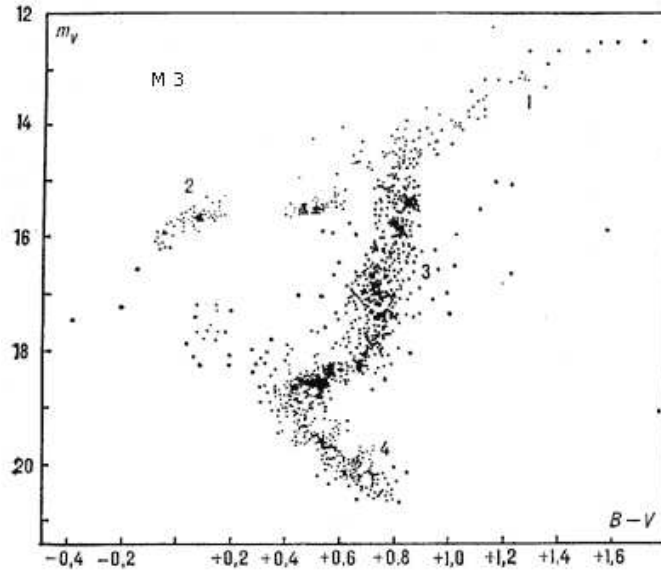


Рис. 33: Диаграмма цвет-величина шарового скопления М3.

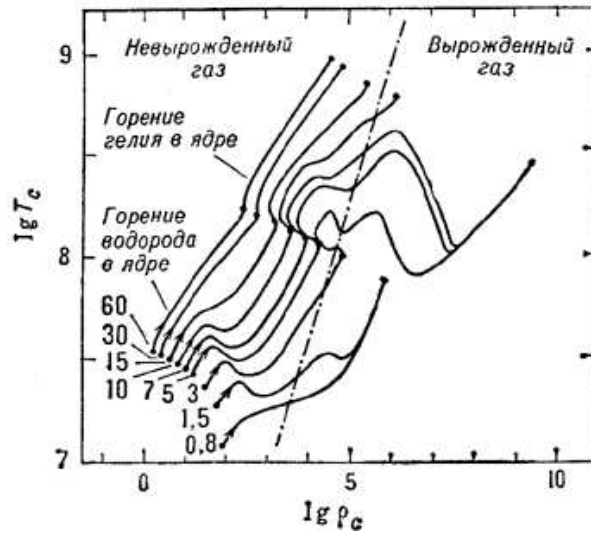


Рис. 34: Изменение параметров в центре звезд разной массы, полученное из численных расчетов.

Эволюция массивных звезд и сверхновые II типа

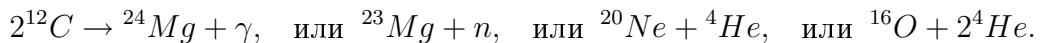
Схема ядерной эволюции звезды:

ядерное горение → *исчерпывается топливо* → *сжатие ядра* → *нагрев ядра* → *ядерное горение* и т.д.

Поскольку калорийность ядерного горючего падает с ростом A , а светимость звезды с течением времени становится все больше и больше, ее эволюция идет все ускоряющимися темпами. Например, у звезды с массой $25 M_{\odot}$ выгорание в центральной области водорода происходит за 7 млн. лет, гелия – за 0.5 млн лет, углерода – за 600 лет, неона – за 1 год, а превращение кремния в элементы железного пика – за 1 день.

Ограничивает ли пульсационная неустойчивость массу звезд на ГП? Вероятно звезд с $M > 200 M_{\odot}$ нет!

Если (!) потеря массы сравнительно мала, то вплоть до AGB тот же путь, что и у звезд с $M < 8 M_{\odot}$, но затем происходит загорание C и O. У звезд с $8 < M/M_{\odot} < 12$ углерод сгорает в невырожденном ядре, но образуется вырожденное O, Ne, Mg ядро:



Последующее сжатие ядра сопровождается нейтронизацией O и/или Mg. \Rightarrow коллапс, образование НЗ и вспышка SN II.

У звезд с $M > 12 M_{\odot}$ идет превращение ^{16}O в ^{30}S и ^{32}Si , а затем т.н. горение Si:



и т.д. вплоть до $^{52}\text{Fe} + ^4\text{He} \leftrightarrow ^{56}\text{Ni} + \gamma$. Затем ядро ^{56}Ni превращается в ядро ^{56}Fe :



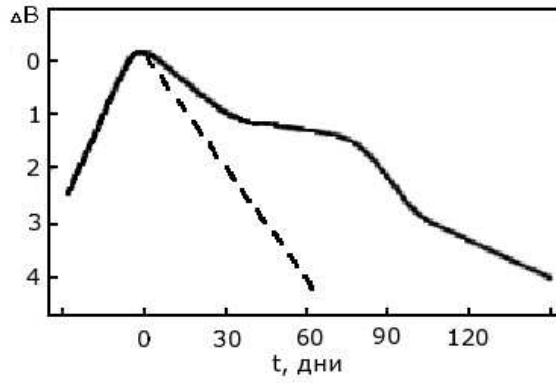


Рис. 35: Схематическое изображение кривых блеска сверхновых II типа.

При $T \sim 3 \cdot 10^9$ К реакции фотодиссоциации типа $^{56}\text{Fe} + \gamma \rightarrow 14^4\text{He}$ и далее $^4\text{He} + \gamma \rightarrow 2p + 2n$ ведут к потере устойчивости, коллапсу, образованию НЗ и вспышке SN II. Роль нейтрино. SN 1987a.

У звезд с $M > 40 - 50 M_{\odot}$ температура в центре настолько высока, что потеря устойчивости происходит из-за рождения пар – см. Рис.26. Коллапс ядра приводит к термоядерному взрыву кислорода. Результат коллапса – полный разлет или образование ЧД.

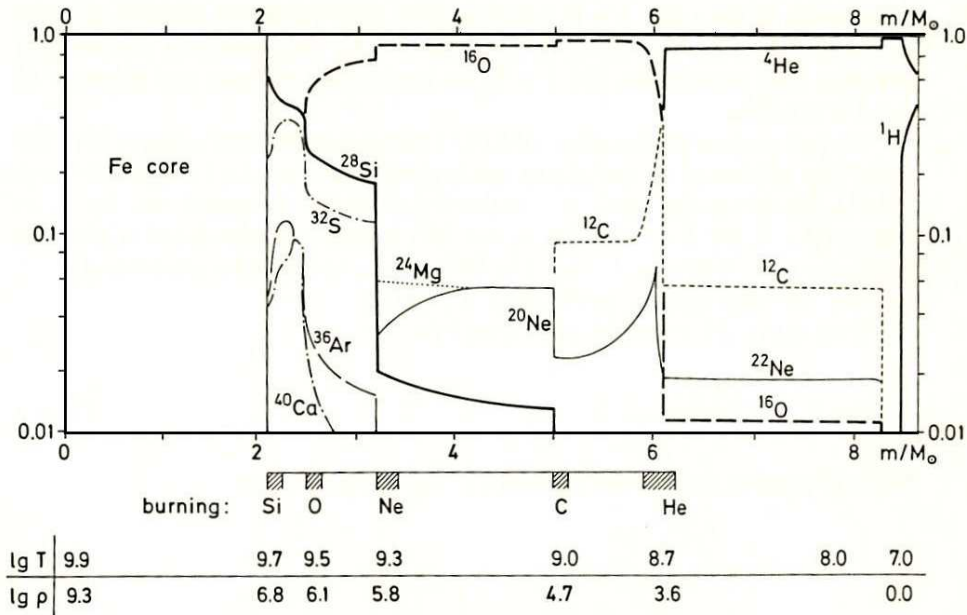


Рис. 36: Структура звезды с массой $25 M_{\odot}$ на поздних стадиях эволюции (предсверхновая II типа).

Потеря массы массивными звездами приводит к изменению формы трека. На ГП звезды с $M < 50 M_{\odot}$ теряют до 20% массы, а более массивные - до 90% \Rightarrow формирование звезд Вольфа-Райе (WR). Механизм потери - давление излучения в линиях и на пыли (при низких T_{ef}) + пульсационная неустойчивость.

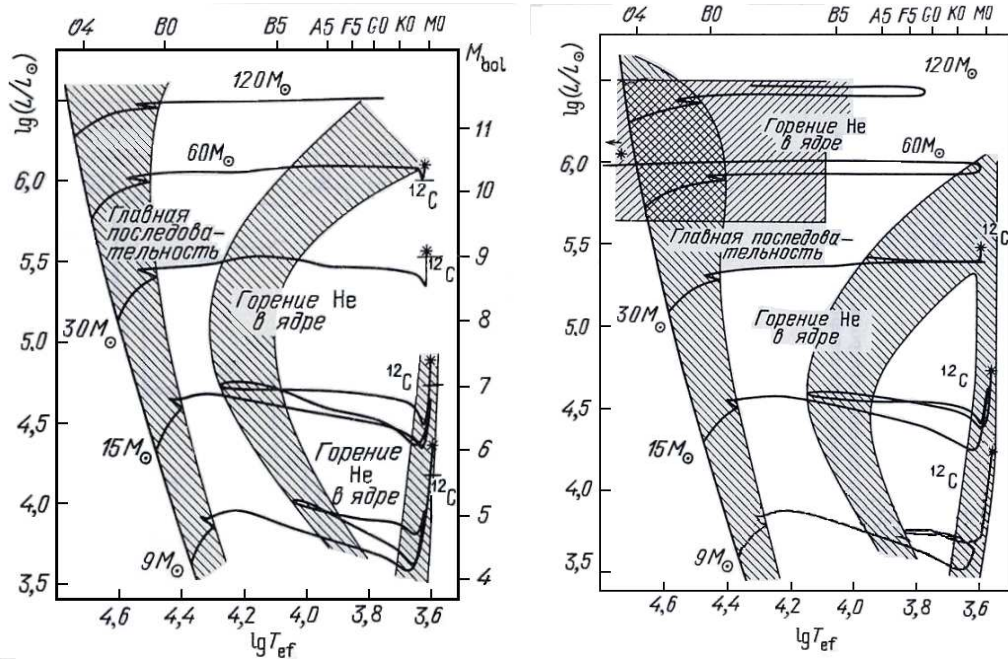


Рис. 37: Эволюционные треки массивных звезд, рассчитанные без учета потери массы (слева) и в предположении, что $\dot{M}_w \approx 70 L/c^2$ (справа). Горизонтальной чертой отмечено место загорания углерода в ядре, а звездочкой – место, где звезда теряет устойчивость (предсверхновая). По данным A.Maeder, A&A 99, 97, 1981

Лекции 14. Белые карлики

Механическое равновесие белых карликов

БК образуются из ядер звезд, масса которых на ГП $\leq 8M_\odot$. При рождении БК его $T_{ef} > 10^5$ К, но даже тогда в основной массе звезды электронный газ вырожден: $T \leq T_F$. Первая теория БК была создана Чандрасекхаром (S.Chandrasekhar, 1931), показавшим, что давление в этих объектах определяется сильно вырожденными электронным газом.

Рассмотрим газ фермионов с массой m , имея ввиду электроны или нейтроны. Пусть m_e – масса электрона, m_p – масса нуклона, а $x = p_F/mc$. Тогда с учетом $E_F = mc^2(x^2 + 1)^{1/2}$, из (3.?) следует, что при $T \ll T_F$:

$$\frac{\rho}{\mu} = \frac{8\pi m^3 c^3 m_p}{3h^3} x^3, \quad P = \frac{8\pi m^4 c^5}{h^3} \left[x\sqrt{1+x^2} \left(\frac{2}{3}x^2 - 1 \right) + \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right], \quad (XIV.1)$$

где $\mu \equiv \mu_e = 2/(1+X)$ для электронов и $\mu = 1$ – для нейтронов.

В пределе $x \ll 1$ и $x \gg 1$ из (XIV.1) соответственно получаем:

$$P(\rho) = K\rho^{5/3}, \quad K = 1.0 \cdot 10^{13} (m_e/m)\mu^{-5/3} \quad \text{при} \quad \rho \ll 10^6 \mu (m/m_e)^3, \quad (XIV.2)$$

$$P(\rho) = K\rho^{4/3}, \quad K = 1.2 \cdot 10^{15} \mu^{-4/3} \quad \text{при} \quad \rho \gg 10^6 \mu (m/m_e)^3. \quad (XIV.3)$$

Для электронов обе формулы дают одинаковый результат при $\rho \approx 10^6 \mu_e$ г/см³.

Используя (XIV.1) в качестве зависимости $P(\rho)$ Чандрасекхар численно решил уравнения (1.1) и (1.5) при различных значениях ρ_c . В рамках его теории можно считать, что при $\lg \rho_c < 6$ структура БК описывается политропой с $n=3/2$ и K из (XIV.2), поэтому согласно (1.15) для маломассивных БК:

$$M = 0.50M_{\odot} \sqrt{\frac{\rho_c}{10^6}} \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^{\frac{5}{2}}, \quad R = 1.1 \cdot 10^4 \text{ км} \left(\frac{10^6}{\rho_c}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^{\frac{5}{6}}, \quad R \propto K \cdot M^{-\frac{1}{3}}. \quad (\text{XIV.4a})$$

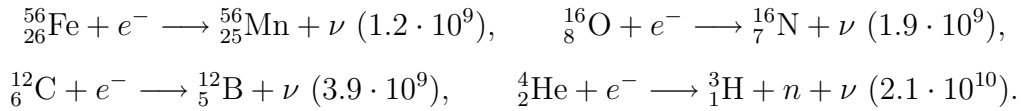
В теории Чандрасекхара при $\lg \rho_c \gg 6$ структура БК приближается к структуре политропной звезды с $n=3$ и K из (XIV.3), т.е. при $\rho_c \rightarrow \infty$ радиус $R \rightarrow 0$, а масса

$$M \rightarrow M_{max} \equiv M_{Ch} \simeq \frac{5.75}{\mu_e^2} M_{\odot}, \quad (\text{XIV.4b})$$

как это следует из (1.16). Для He, C и O $\mu_e = 2 \rightarrow M_{Ch} = 1.44M_{\odot}$, а для Fe $\mu_e = 56/26 \rightarrow M_{Ch} = 1.24 M_{\odot}$.

Однако есть два эффекта, из-за которых ρ_c БК не может быть сколь угодно большой: нейтронизация и эффекты ОТО.

1) Процесс нейтронизации ядер приводит к понижению упругости вырожденного e-газа $\Rightarrow \gamma$ становится $< 4/3$ и БК теряет устойчивость. Ниже приведены некоторые важные реакции нейтронизации и указана пороговая плотность ρ_{cr} (г/см³), при которой она начинается:



2) Из (XIV.4) следует, что на поверхности БК с $M=0.5M_{\odot}$ $V_{\infty} = (2GM/R)^{1/2} \simeq 0.01c$. Поскольку при увеличении массы радиус БК уменьшается, отношение V_{∞}/c растет с ростом ρ_c . Поэтому при расчете структуры самых массивных БК следует учитывать эффекты ОТО – см. ниже. Более того, у гелиевых БК потеря устойчивости происходит не столько из-за нейтронизации, сколько из-за эффектов ОТО, поскольку для нейтронизации гелия необходима наибольшая плотность.

Нейтронизация и эффекты ОТО ненамного меняют максимально возможную массу БК, предсказываемую теорией Чандрасекхара: например, для углеродного БК $M_{max} = 1.40 M_{\odot}$ вместо $M_{Ch} = 1.44 M_{\odot}$, а для железного – $M_{max} = 1.12 M_{\odot}$ вместо $M_{Ch} = 1.24 M_{\odot}$. Но в теории Чандрасекхара максимальная масса соответствует пределу $\rho_c \rightarrow \infty$ и $R \rightarrow 0$, тогда как в реальности M_{max} достигается при конечных значениях ρ_c и R : в частности, для углеродных БК $\rho_c^{max} \simeq 6.0 \cdot 10^9$ г/см³, $R_{min} = 1500$ км, а для железного – $\rho_c^{max} \simeq 1.2 \cdot 10^9$ г/см³, $R_{min} = 2200$ км. При $\rho_c > \rho_c^{max}$ гидростатически равновесные конфигурации, давление в которых определяется вырожденным электронным газом, неустойчивы, и, следовательно, не могут существовать.

Корректная теория БК также учитывает неидеальность электронного газа, обусловленную кулоновским взаимодействием электронов с ядрами. Это взаимодействие уменьшает P_e при той же плотности, причем для вырожденного электронного газа (в

отличие от классического газа) относительная величина поправки к давлению растет с уменьшением плотности. В результате, учет неидеальности e -газа уменьшает значение $M_{\text{БК}}^{\text{max}}$ всего на несколько процентов, зато кардинально меняет зависимость $M(R)$ в области малых масс (и ρ_c): закон $R \propto M^{-1/3}$ перестает работать, и при $M \sim 0.003 M_{\odot}$ радиус холодной вырожденной конфигурации, состоящей из смеси H и He достигает максимального значения ~ 30.000 км, а затем уменьшается с уменьшением массы. Эта область масс соответствует планетам-гигантам типа Юпитера, у которого, в частности, $M \simeq 0.001 M_{\odot}$, $R \simeq 143.000$ км. Как видно из рисунка для железного БК максимальное значение радиуса достигается при $M \sim 0.1 M_{\odot}$.

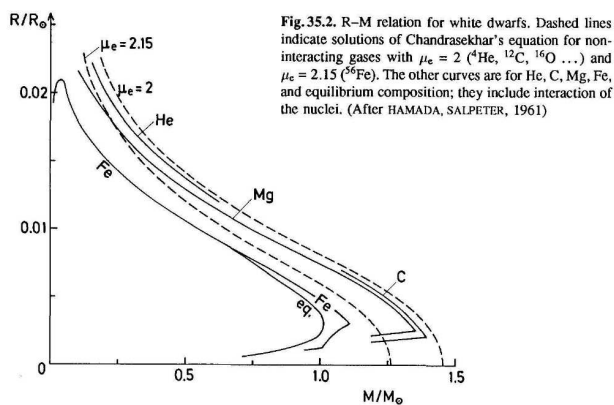


Рис. 38:

Остывание белых карликов

Первая теория остывания БК создана С.А.Капланом в 1949 г. и независимо Местелом (L.Mestel, 1951). По этой теории БК состоит из вырожденного ядра, в котором сосредоточена практически вся масса, и тонкой лучистой оболочки из невырожденного газа. За границу ядра принималась точка, в которой давление нуклонного $P = \rho \mathfrak{R}T/\mu_i$ и нерелятивистского электронного газа (XIV.2) одинаковы. Поэтому на границе ядра имеем:

$$\rho_c = 2.4 \cdot 10^{-8} \mu_i T_c^{3/2}. \quad (XIV.5)$$

Из уравнений гидростатического равновесия (1.5) и лучистой теплопроводности (VII.3) в случае, когда непрозрачность определяется законом Крамерса $\varkappa = \varkappa_0 \rho T^{-7/2}$, получаем:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{16\pi ac G m_r T^{13/2}}{3\varkappa_0 L_r \rho} = \frac{16\pi ac G M \mathfrak{R} T^{15/2}}{3\varkappa_0 L \mu_i P} \equiv \frac{C_1}{L} \frac{T^{15/2}}{P}. \quad (XIV.6)$$

Здесь учтено, что масса оболочки мала, а ее светимость L постоянна, так что C_1/L – константа. При $P(R) = T(R) = 0$ решение (XIV.6) есть:

$$P = \sqrt{\frac{4C_1}{17L}} T^{17/4}, \quad \rho = \frac{\mu_i}{\mathfrak{R}} \sqrt{\frac{4C_1}{17L}} T^{13/4}. \quad (XIV.7)$$

Считая, что (XIV.7) применимо вплоть до границы с ядром, из (XIV.5) получим:

$$L = C_2 M T_c^{7/2}. \quad (XIV.8)$$

Из-за высокой теплопроводности вырожденного электронного газа можно считать ядро изотермическим, поэтому (XIV.8) связывает светимость БК с его центральной температурой.

Теплоемкость вырожденного электронного газа при $T \ll T_F$ в T_F/T раз меньше, чем теплоемкость газа невырожденных ядер атомов. Поэтому вся тепловая энергия БК сосредоточена в ядрах. Если они образуют газ, то запас тепла БК $Q_c = 3\mathfrak{R}T_c M/2\mu_i$. Решая уравнение $dQ_c/dt = -L$ с учетом (XIV.8) находим, что время остывания ядра БК от температуры T_{c0} до температуры T_c есть:

$$t = C_3 \left(\frac{1}{T_c^{5/2}} - \frac{1}{T_{c0}^{5/2}} \right) \quad (XIV.9)$$

В пределе $T_c \ll T_{c0}$ получим: $T_c \propto t^{-2/5}$. С учетом (XIV.8) отсюда следует: $L(t) \propto t^{-7/5}$ и $T_{ef} \propto t^{-7/20}$, поскольку радиус БК практически не меняется.

Теория Каплана-Местела была уточнена с учетом трех обстоятельств:

- 1) Охлаждение ядра нейтринным излучением на ранних этапах остывания
- 2) Возникновение конвекции в оболочке
- 3) Переход ядерной компоненты из газообразного состояния в твердое при понижении температуры до величины $\simeq 2 \cdot 10^6 Z^2 (\rho/10^9)^{1/3}$ К, где Z - заряд атомного ядра.

Первые два фактора увеличивают скорость остывания БК, а кристаллизация ядер увеличивает теплоемкость нуклонной компоненты, т.е. запас тепла БК, тем самым

t, лет	T_{ef}, K	L/L_{\odot}	T_c, K
$3 \cdot 10^6$	$5.8 \cdot 10^4$	0.7	$7 \cdot 10^7$
$9 \cdot 10^7$	$3.0 \cdot 10^4$	0.04	$2.5 \cdot 10^7$
$9 \cdot 10^8$	$1.3 \cdot 10^4$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$7.1 \cdot 10^6$
$8 \cdot 10^9$	$3.9 \cdot 10^3$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^5$

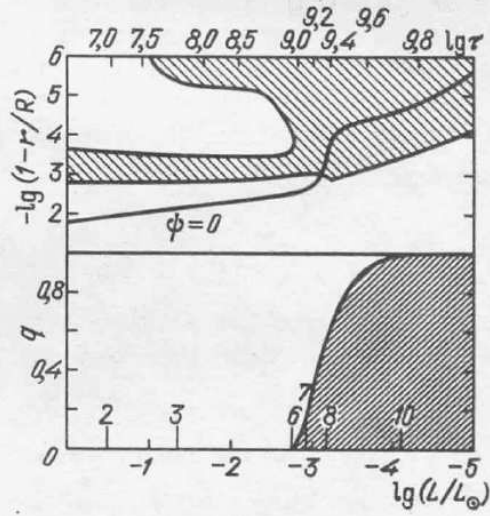
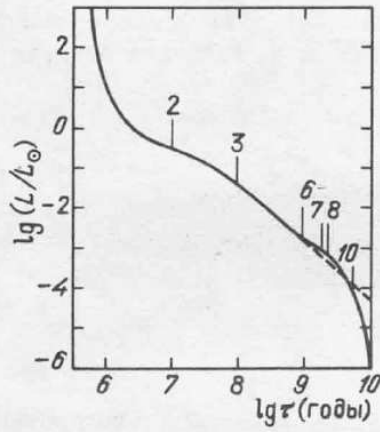


Рис. 104. Кривая охлаждения белого карлика: светимость L в зависимости от возраста τ . Номера соответствуют моделям из табл. 49: 2 – модель с $L_{\nu} = L$, 3 – модель, где электронная теплоемкость $c_{ve,1/2}$ равна ионной $c_{vi,1/2}$, 6 – начало кристаллизации, 7 – модель, где $\theta_{1/2} = T_{1/2}$, 8 – конвекция достигает вырожденного ядра, 10 – кристаллическое ядро достигает $q = 0,99$. Штриховой линией указана кривая остывания по степенному закону (из [457])

Рис. 105. Рост кристаллического ядра (мелкая штриховка) и поведение внешней конвективной зоны (крупная штриховка) при охлаждении белого карлика, указана также кривая вырождения $\psi = 0$. Моменты 2 – 10 соответствуют моделям из табл. 49 (см. подпись к рис. 104); $q = \frac{m}{M}$ – доля внутренней массы (из [457])

Рис. 39:

замедляя его остывание. В Таблице приведены некоторые параметры остывающего углеродного БК с $M = 1M_{\odot}$.

Сверхновые типа Ia

Если на С-О белый карлик с $M < M_{Ch}$ в двойной системе происходит аккреция вещества второй компоненты с темпом аккреции M_{ac} , то в какой-то момент масса БК дойдет до величины M_{Ch} и карлик должен сколлапсировать. Однако, скорей всего, до этого дело не доходит.

Типичной является ситуация, когда аккрецируемое вещество содержит достаточно много водорода, который, попадая на поверхность БК, сгорает в слоевом СНО-источнике и превращается в гелий. При $M_{ac} \leq 10^{-8} M_{\odot}/\text{год}$ окружающий С-О ядро слой гелия оказывается вырожденным. По мере накопления аккрецируемого вещества давление и температура в слое гелия нарастают, что в конечном итоге приводит к вспышечному возгоранию гелия – аналог гелиевой вспышки у маломассивных

звезд. В результате возникает две волны детонации, одна из которых распространяется внутрь, инициируя возгорание вырожденного углерода (и кислорода), а вторая – движется наружу, поджигая гелий.

Энергия связи БК $E_g \simeq GM^2/R$, что при $M = 1 M_\odot$, $R \simeq 10^9$ см составляет $\sim 3 \cdot 10^{50}$ эрг. При превращении 1 г углерода в Fe выделяется $\sim 5 \cdot 10^{17}$ эрг, поэтому детонация $M = 1 M_\odot$ углерода приводит к выделению $\sim 10^{51}$ эрг, что достаточно для разрушения БК.

При $M_{ac} > 10^{-8} M_\odot/\text{год}$, выгорание гелия происходит в спокойном режиме, так что эволюция такого БК сводится к постепенному росту C-O ядра. При приближении массы БК к M_{Ch} плотность и температура во внутренних областях повышается настолько, что происходит возгорание углерода (и кислорода), а распространяющаяся наружу детонационная (или дефлаграционная) волна приводит к разрушению БК.

Считается, что указанные механизмы ответственны за феномен сверхновых типа I, для которых характерны следующие наблюдательные проявления:

- в спектрах нет линий водорода
- сверхновые этого типа связаны со старым населением галактик
- в максимуме блеска светимость близка к 10^{43} эрг/с
- нет компактных остатков после взрыва
- кинетическая энергия разлетающейся оболочки $\sim 10^{51}$ эрг.

Сверхновые типа SN Ia служат "стандартной свечой".

Свечение оболочек SN I происходит за счет энерговыделения при распадах:

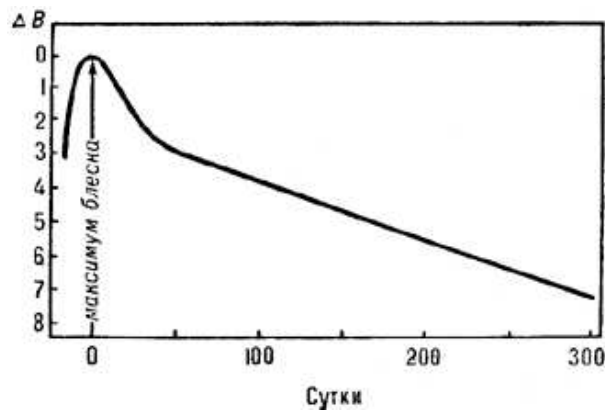
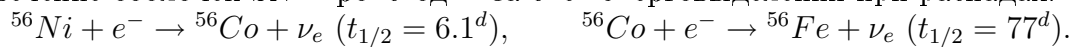


Рис. 40: Схематическая кривая блеска сверхновых типа I.

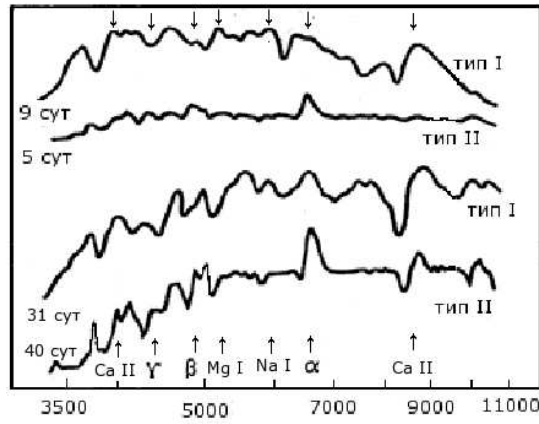


Рис. 41: Сравнение спектров сверхновых I и II типа на различных этапах.

Лекция 15. Нейтронные звезды

Предположим, что уравнение состояния вещества НЗ описывается соотношением (XIV.1) для газа вырожденных нейтронов, а теория тяготения – ньютоновская. Тогда, как и в случае БК, получим, что при "малых" плотностях (нерелятивистское вырождение) $M_{\text{НЗ}} \propto \rho_c^{1/2}$, $R_{\text{НЗ}} \propto \rho_c^{-1/6}$, а максимальная масса НЗ определяется переходом нейтронов в ультрарелятивистский предел и равна $M_{\text{НЗ}}^{\text{max}} \simeq 5.75 M_{\odot}$, т.е. M_{Ch} из (XIV.4b) при $\mu = 1$. Однако, в отличие от БК, такое приближение плохо описывает НЗ по следующим причинам.

Из последнего соотношения в (XIV.4a) и выражения для K (XIV.2) следует, что при одинаковой массе $R_{\text{НЗ}} = R_{\text{БК}} \cdot (m_e/m_n) \mu_e^{5/3} \simeq R_{\text{БК}}/600$ при $\mu_e = 2$. Т.о. уже при $M=0.5 M_{\odot}$ радиус НЗ ~ 20 км, а $V_{\infty}/c \sim 0.3$, поэтому строение НЗ нельзя рассматривать в рамках теории тяготения Ньютона. Именно эффекты ОТО ограничивают максимально возможную массу НЗ, причем происходит это при $\lg \rho \leq \text{XIV.5}$, т.е. до того, как нейтроны станут релятивистскими: для нейтронов формулы (XIV.2) и (XIV.3) дают одинаковый результат при $\lg \rho \simeq 16$.

Из (1.15b) и (XIV.2) следует, что при одинаковой массе $\rho_c^{\text{НЗ}} = \rho_c^{\text{БК}} \cdot (m_n/m_e)^3 / \mu_e^5$, что при $M=0.5 M_{\odot}$ и $\mu_e = 2$ дает $\rho_c^{\text{НЗ}} \sim 2 \cdot 10^{14}$ г/см³. Эта величина сравнима с ядерной плотностью $\rho_{\text{нuc}} \simeq 5 \cdot 10^{14}$ г/см³, которая получается делением массы нейтрона на объем, соответствующий радиусу действия ядерных сил $r_n \sim 10^{-13}$ см. Отсюда следует, что нейтронный газ нельзя рассматривать как идеальный газ невзаимодействующих частиц.

Равновесный состав вещества НЗ находится из условия минимума энергии $E = +E_{\text{нuc}}(A, Z) + E_e + E_{ei} + E_n + \dots$. Возможность образования "равновесных" ядер обусловлена т.н. пикноядерными реакциями, которые могут идти даже при $T=0$ из-за наличия "нулевых" колебаний решетки с энергией $E_0 = \hbar \omega_0 / 4\pi$, где $\omega_0 = (4\pi Z^2 e^2 N_i / m_i)^{1/2}$

– плазменная частота ионов кристалла. За $t \sim 10^5$ лет $H \rightarrow {}^4\text{He}$ при $\rho \sim 10^6$ г/см³, ${}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}$ при $\rho \sim 10^9$ г/см³ и т.д.

Появление свободных нейтронов происходит при $\rho \simeq 4 \cdot 10^{11}$ г/см³. При $\rho \geq 4 \cdot 10^{12}$ г/см³ давление вырожденных нейтронов превосходит P_e . Вплоть до ρ_{nuc} вещество представляет собой смесь переобогащенных нейтронами ядер, образующих кристаллическую решетку, свободных нерелятивистских нейтронов и релятивистских электронов. При $\rho > \rho_{nuc}$ свойства вещества известны плохо: в этом диапазоне уравнение состояния зависит от ядерных сил, причем нужно учитывать многочастичное взаимодействие. Открыт вопрос о возможности перехода п и р в сверхтекучее состояние, возможности образования нейтронного кристалла, фазового перехода в состояние кварковой материи и т.д. От этих эффектов зависит скорость остывания Н.З. и форма зависимости $R(M)$ вблизи $M_{Н.З.} = M_{max}$.

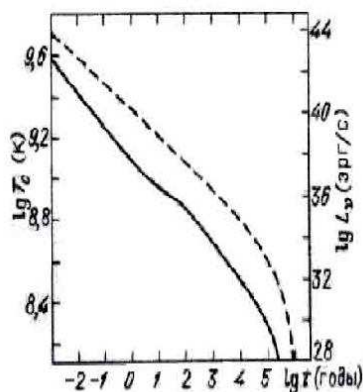


Рис. 42: Изменение центральной температуры (сплошная кривая) и нейтринной светимости (штриховая кривая) остывающей нейтронной звезды.

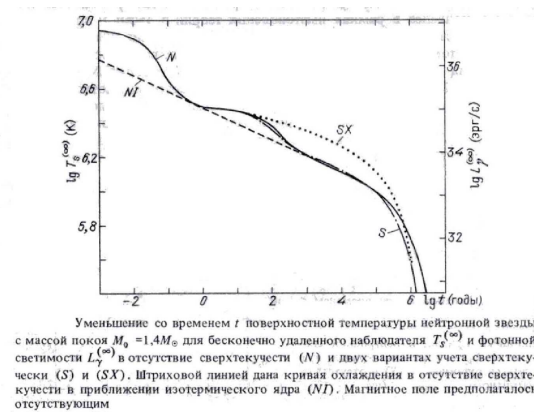


Рис. 43:

Остывание Н.З. вплоть до $T_c \sim 4 \cdot 10^8$ К определяется нейтринными потерями, а далее за счет излучения электромагнитных волн с поверхности, как и в случае БК.

Эффекты ОТО

Обозначим

$$\rho = \rho_0(1 + E/c^2), \quad r_g = 2Gm_r/c^2.$$

Тогда (уравнения Толмена-Оппенгеймера-Волкова):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G(\rho + P/c^2)(m_r + 4\pi r^3 P/c^2)}{r^2(1 - r_g/r)}$$

$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dm_r^b}{dr} = \frac{4\pi r^2 \rho_0}{(1 - r_g/r)^{1/2}}.$$

Максимальная масса Н.З. определяется эффектами ОТО:

- 1) Энергия и давление "весят";
- 2) $r \rightarrow r_g$, т.к. с ростом M падает R .

По оценкам разных авторов $M_{\text{Н.З.}}^{\text{max}} = 1.5 \div 2.6 M_{\odot}$. Этому соответствует $R \simeq 10$ км.

НЗ также не могут иметь массу меньше $M_{\text{min}} \simeq 0.1 M_{\odot}$, поскольку при $\lg \rho_c \leq 14.2$ нейтроны начнут распадаться. Звезде с M_{min} соответствует $R \simeq 150$ км.

Дополнение.

Описание конвекции в приближении пути перемешивания.

А. Вывод выражения для ∇_{conv}

Рассмотрим область, в которой происходит конвекция. Предположим, что в силу случайных причин плотность газа в некотором малом объеме dV , который будем называть конвективным элементом (КЭ), стала меньше чем в окружающей среде. Тогда этот КЭ начнет всплывать, причем можно считать, что в начальный момент его плотность ρ_0 и температура T_0 были такими же, как и в окружающей среде. Однако по мере подъема малые исходные различия в ρ и T между КЭ и окружающей средой будут сначала возрастать, а затем, достигнув максимальной величины, уменьшаться, так что пройдя некоторое расстояние l_m , называемое длиной пути перемешивания, КЭ растворится в окружающей среде и исчезнет. Скорость движения КЭ v_e также вначале нарастает, а затем уменьшается.

На расстоянии Δr от исходной точки разность температур КЭ (индекс e) и окружающей среды (индекс c) будет равна:

$$\Delta T \equiv T_e - T_c = \left(\frac{dT_e}{dr} - \frac{dT_c}{dr} \right) \Delta r. \quad (D2.1)$$

Заменив в (D2.1) T на ρ получим аналогичное выражение для разности плотностей $\Delta \rho$.

Будем считать, что КЭ всплывает достаточно медленно, в том смысле, что время, за которое его размер меняется заметным образом, много меньше, чем время, за которое через КЭ проходит звуковая волна. В этом случае давление внутри КЭ будет таким же, как и в окружающей среде, т.е. $P_e(r) = P_c(r)$, или $dP_c = dP_e \equiv dP$.

Конвекция эффективно перемешивает вещество, т.е. градиент химсостава в рассматриваемой области отсутствует. Поэтому

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho dT_{e,c} + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T d\rho_{e,c} \implies \Delta \rho = -\frac{\Delta T}{\delta}, \quad \text{где } \delta \equiv \frac{(\partial P / \partial \rho)_T}{(\partial P / \partial T)_\rho}. \quad (D2.2)$$

В данный момент поверхность сферы с радиусом r пересекает множество КЭ, каждый из которых перед этим прошел различное расстояние Δr и имеет определенные значения величин v_e , ∇T и $\nabla \rho$. Следовательно, чтобы определить, какой тепловой поток переносит конвекция через данную поверхность, надо учесть вклад всех КЭ внутри области с $r_0 - l_m^{max} < r < r_0 + l_m^{max}$. Иными словами, корректная теория конвекции должна быть *нелокальной*. Такой подход сталкивается с принципиальными трудностями, и лишь в последнее десятилетие, благодаря разработке новых методов описания турбулентности и появлению достаточно мощных компьютеров, стали появляться трехмерные расчеты конвективных зон звезд.

Чтобы упростить ситуацию, как правило, используют *локальную* теорию конвекции, в которой фигурируют тем или иным способом усредненные параметры КЭ. Обычно, в этих теориях предполагается, что отношение "средней" длины пути перемешивания l_m к шкале высот по давлению $H_P = -P / (dP/dr) = P/g\rho$ постоянно внутри конвективной зоны. Величина $\alpha \equiv l_m/H_P$ является параметром теории и выбирается из наилучшего согласия модели звезды с наблюдениями. Локальные теории

конвекции отличаются друг от друга различным способом усреднения параметров КЭ. Приводимый ниже подход заимствован из книги Киппенхана и Вейгерта [?].

Будем предполагать, что перед тем как пересечь поверхность сферы с $r = r_0$ "средний" КЭ прошел расстояние $\Delta r = l_m/2$. Тогда согласно (D2.1) средний избыток температуры КЭ в рассматриваемой точке будет равен:

$$\Delta T = \left(\frac{dT_e}{dr} - \frac{dT_c}{dr} \right) \frac{l_m}{2} = \left(\frac{dT_e}{dP} - \frac{dT_c}{dP} \right) \frac{dP}{dr} \frac{l_m}{2} = (T_c \nabla_c - T_e \nabla_e) \frac{l_m}{2H_P}. \quad (D2.3)$$

Здесь мы обозначили через ∇_e и ∇_c производные $d \ln T / d \ln P$, которые описывают изменение параметров внутри КЭ по мере его подъема и в окружающей среде соответственно. Величины с индексом c – это должным образом усредненные по множеству КЭ параметры, и именно они являются аналогами одноименных физических величин (ρ, T и т.п.) в зонах лучистого равновесия. По этой причине мы будем опускать в дальнейшем индекс c у переменных, характеризующих окружающую КЭ среду. Наша цель – найти величину $\nabla_{conv} \equiv \nabla_c$, используя которую можно написать выражение для dT/dr в конвективной зоне:

$$\frac{dT}{dr} \equiv -\nabla_c \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} = \nabla_c \frac{T \rho G m}{P r^2}. \quad (D2.4)$$

Поскольку $\Delta T/T \ll 1$, заменим в последнем равенстве (D2.3) T_e на T . Тогда

$$\Delta T \simeq (\nabla_c - \nabla_e) \frac{\alpha T}{2}. \quad (D2.5)$$

Результирующая сила $f(r)$, действующая на единичный объем КЭ и заставляющая его всплывать (или тонуть), равна $\rho g - \rho_e g = -g \Delta \rho$. По мере подъема КЭ она вначале нарастает от 0 до f_{max} , а затем уменьшается, обращаясь в ноль при $\Delta r = l_m$. Примем, что на участке пути от 0 до $l_m/2$ среднее значение силы \bar{f} равно $0.5 * f(l_m/2)$. Тогда с учетом (D2.2) и (D2.5) имеем:

$$\bar{f} = -\frac{g}{2} \Delta \rho = \frac{g}{2\delta} \Delta T = (\nabla_c - \nabla_e) \frac{\alpha g T}{4\delta}$$

Предположим далее, что в среднем половина работы, совершаемой этой силой идет на преодоление сил вязкости, а половина – на прирост кинетической энергии КЭ, так что

$$\frac{\rho v_e^2}{2} = \frac{1}{2} \bar{f} \frac{l_m}{2} = (\nabla_c - \nabla_e) \frac{\alpha g T l_m}{16\delta},$$

где v_e – скорость среднего КЭ при пересечении сферы с радиусом r_0 . Следовательно:

$$v_e^2 = (\nabla_c - \nabla_e) \frac{\alpha g T l_m}{8\rho\delta}, \quad (D2.6)$$

Рассмотрим теперь изменение температуры по мере подъема (или опускания) среднего КЭ, считая, что его характерный размер – d_e , площадь поверхности – S_e , объем – V_e , а масса $M_e = V_e \rho_e$. Обозначим через S удельную энтропию КЭ, а через dQ – количества тепла, теряемое КЭ за время dt в результате излучения энергии в окружающее пространство. Тогда:

$$\frac{dQ}{M_e} = T_e dS = T_e \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT_e + \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP \right] = c_P \left[dT_e - \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S dP \right].$$

Поскольку $dr = v_e dt$, и $\nabla_{ad} \equiv (\partial \ln T / \partial \ln P)_S$, это выражение можно переписать в виде:

$$\frac{dT_e}{dr} = \frac{1}{c_P M_e v_e} \frac{dQ}{dt} - \frac{T_e}{H_P} \nabla_{ad}. \quad (D2.7)$$

Аналогично (7.4) можно написать для "светимости" КЭ:

$$L_e = \frac{4acT_e^3}{3\kappa\rho} \left| \frac{dT}{dn} \right| S_e,$$

подразумевая, что производная $T' \equiv dT/dn$ вычисляется вдоль нормали к поверхности КЭ. Если положить $T' \simeq \Delta T / (d_e/2)$, учесть, что $dQ/dt = -L_e$, то с помощью (D2.5) получим из (D2.7):

$$\frac{\nabla_e - \nabla_{ad}}{\nabla_c - \nabla_e} = \frac{4acT_e^3}{3\alpha H_P c_P \kappa \rho_e^2 v_e} A.$$

Здесь через A обозначено безразмерное отношение $l_m^2 S_e / d_e V_e$, которое зависит от формы и размера "среднего" КЭ. Принято считать, что $A = 9/2$, и тогда, полагая $T_e \simeq T$, $\rho_e \simeq \rho$, находим:

$$\frac{\nabla_e - \nabla_{ad}}{\nabla_c - \nabla_e} = \frac{6acT^3}{\alpha H_P c_P \kappa \rho^2 v_e} \quad (D2.8)$$

При наличии конвекции $L_r = L_r^{rad} + L_r^{conv}$, поэтому согласно (8.3) и (8.4):

$$\frac{16\pi acGmT^4}{3\kappa P} \nabla_{rad} = \frac{16\pi acGmT^4}{3\kappa P} \nabla_c + L_r^{conv}. \quad (D2.9)$$

Т.к. $\Delta P = 0$, то в расчете на единицу массы вещество КЭ обладает избыточным теплом $c_P \Delta T$ по сравнению с окружающей средой. Поток вещества, связанный с движением КЭ равен $4\pi r^2 \rho v_e$, поэтому переносимый конвекцией тепловой поток $L_r^{conv} = 4\pi r^2 \rho v_e c_P \Delta T$. Тогда из (D2.5) и (D2.9) получим, учитывая, что $H_P = P/g\rho$ и $g = Gm/r^2$:

$$\frac{\nabla_{rad} - \nabla_c}{\nabla_c - \nabla_e} = \frac{3\kappa\rho^2 c_P \alpha H_P}{8acT^3} v_e \quad (D2.10)$$

Соотношения (D2.6), (D2.8) и (D2.10) дают три уравнения для трех неизвестных величин: ∇ , ∇_e и v_e . Перемножив почленно (D2.8) и (D2.10) получим:

$$\frac{(\nabla_e - \nabla_{ad})(\nabla_{rad} - \nabla_c)}{(\nabla_c - \nabla_e)^2} = \frac{9}{4}. \quad (D2.11)$$

Выразим теперь v_e из (D2.6) и подставим в (D2.8). Вводя безразмерную переменную

$$U_0 \equiv \frac{6acT^3 g}{\kappa c_P \alpha^2 P^2} \sqrt{\frac{2P\delta}{T}}, \quad \text{получим:} \quad \nabla_e - \nabla_{ad} = 2U_0 \sqrt{\nabla_c - \nabla_e}. \quad (D2.12)$$

Перепишав левую часть (D2.12) в виде $(\nabla_c - \nabla_{ad}) - (\nabla_c - \nabla_e)$ получим квадратное уравнение относительно $\sqrt{\nabla_c - \nabla_e}$, решив которое найдем, что

$$\sqrt{\nabla_c - \nabla_e} = -U_0 + \xi, \quad \text{где} \quad \xi = \sqrt{\nabla_c - \nabla_{ad} + U_0^2}. \quad (D2.13)$$

Подставляя это выражение в (D2.11) получим кубическое уравнение относительно ξ :

$$(\xi - U_0)^3 + \frac{8U_0}{9} (\xi^2 - U_0^2 + \nabla_{ad} - \nabla_{rad}) = 0. \quad (D2.14)$$

Можно показать, что оно имеет всего один вещественный корень, что дает возможность однозначно найти величину ∇_c .

Замечание 1. Характерное время для процесса конвекции $t_{conv} \sim H_P/v_e$, причем, как правило, $t_{hyd} \ll t_{conv} \ll t_{nuc}$. Это значит, что в конвективных зонах сохраняется гидростатическое равновесие, а химсостав остается одинаковым внутри всей зоны, даже если ядерные реакции происходят лишь внутри ее части. При т.н. тепловых вспышках в слоевых источниках или в вырожденном ядре гидростатическое равновесие кратковременно нарушается, и для описания конвективного переноса энергии и перемешивания вещества применяются более сложные модели конвекции.

Замечание 2. Из (D2.12) следует, что при $U_0 \rightarrow 0$, $\nabla_e \rightarrow \nabla_{ad}$. При этом, согласно (D2.13), и $\nabla_c \rightarrow \nabla_{ad}$.

В. Конвективный перехлест и полуконвекция

При описании конвекции в рамках локальных теорий возможно явление, называемое конвективным перехлестом (convective overshooting): разогнавшись, КЭ по инерции может вылететь за внешнюю или внутреннюю границу конвективной зоны $r = R_c$. Оценки показывают, что КЭ может проникать в область лучистого переноса на расстояние $\Delta r \sim$ нескольких % от H_P . Рассмотрим случай, когда R_c – верхняя граница конвективной зоны. При $r > R_c$ КЭ имеет температуру меньше, чем окружающая среда, которая вынуждена будет терять тепло на нагрев КЭ. В результате непосредственно за границей конвективной зоны температура будет убывать наружу быстрее, чем раньше, т.е. величина ∇_{rad} возрастет. Из-за этого условие начала конвекции $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$ будет выполняться уже вплоть до $R_c^1 > R_c$. Это приведет и к смещению верхней границы области перехлеста, и, тем самым, еще увеличит протяженность конвективной зоны и т.д. В конечном итоге протяженность конвективной зоны может возрасти на величину $\sim H_P$. Рассуждения в случае, когда R_0 – нижняя граница конвективной зоны, совершенно аналогичны. При *нелокальном* описании конвекции проблема перехлеста решается автоматически.

Корректный учет конвективного перехлеста особенно важен на поздних стадиях эволюции, когда в звезде имеется несколько конвективных областей, разделенных тонкой зоной лучистого переноса. Например, когда звезда находится на асимптотической ветви гигантов, тонкая "лучистая прослойка" имеется между внешней конвективной зоной и слоевым источником, в котором ${}^4_2\text{He}$ превращается в ${}^{12}_6\text{C}$. Если конвективный перехлест достаточно велик, то углерод попадет на поверхностные слои звезды, и у нее будет наблюдаться повышенное содержание ${}^{12}_6\text{C}$. С другой стороны, проникающие в слоевой источник КЭ приносят в зону горения дополнительные порции гелия, увеличивая тем самым время жизни звезды на этой стадии эволюции.

В рамках локальных теорий конвекции серьезной проблемой является вопрос о том, насколько эффективно градиент химсостава подавляет конвекцию. Иными словами, будет ли происходить конвекция в области, где она должна быть согласно критерию Шварцшильда, но не должна быть по критерию Леду, т.е. при выполнении

условий:

$$\nabla_{ad} < \nabla_{rad} < \nabla_{ad} + \nabla_{\mu}, \quad \text{где } \nabla_{\mu} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \mu} \right)_{P,\rho} \frac{d \ln \mu}{d \ln P} > 0. \quad (D2.15)$$

Наиболее серьезно эта проблема возникает при изучении эволюции массивных звезд на главной последовательности (ГП) и на стадии горения гелия в ядре. В частности, вблизи начальной ГП у этих звезд конвекция происходит в области $r < R_c$, намного более протяженной, чем зона, в которой происходит ядерное горение ($R_{nuc} < R_c$). Внутри области с $r < R_c$ конвекция поддерживает химсостав одинаковым, но с течением времени размер конвективной зоны убывает, поэтому вне ядра формируется область, внутри которой обилие водорода растет наружу ($dX/dr > 0$).

Поскольку $\mu = (2X + 0.75Y + 0.5Z)^{-1} = (1 + 1.25X - 0.25Z)^{-1}$, получаем, что в этой зоне

$$\frac{d\mu}{dr} = -\frac{1.25}{\mu^2} \cdot \frac{dX}{dr} < 0, \quad \implies \quad \frac{d \ln \mu}{d \ln P} > 0.$$

Для смеси излучения и невырожденного, полностью ионизованного газа $(\partial T / \partial \mu)_{P,\rho} > 0$, (убедитесь в этом самостоятельно!). Поэтому в интересующей нас области $\nabla_{\mu} > 0$, причем оказывается, что в некоторой ее части, называемой зоной полуконвекции (semiconvection), выполняется неравенство (D2.15).

Вначале считалось, что подобного рода области конвективно устойчивы, поскольку при смещении КЭ от исходного положения на него начинает действовать сила, направленная в противоположную сторону. Но Като (S.Kato, 1966) указал на принципиальную возможность ситуации, когда за счет теплообмена с окружающей средой, при возвращении в исходное положение КЭ приобретет кинетическую энергию, и, следовательно, будет колебаться вокруг исходного положения с постепенно нарастающей амплитудой. При этом будет происходить постепенное перемешивание вещества, за что этот процесс и называют полуконвекцией или колебательной конвекцией. При наличии достаточного времени вещество полуконвективной зоны достаточно хорошо перемешивается, величина ∇_{μ} уменьшится, и конвекция перейдет в "нормальный" режим, поскольку тогда будет выполнен как критерий Шварцшильда (S), так и критерий Леду (L) – см. (D2.15).

До сих пор нет единого мнения о том, как корректно описать процесс теплообмена конвективных элементов разного размера с окружающей средой, и как следует усреднять параметры множества КЭ. Поэтому оценка эффективности полуконвекции колеблется в работах разных авторов от весьма высокой до пренебрежимо малой. Если полуконвекция достаточно быстро перемешивает вещество, то вскоре неоднородность химсостава исчезает, и наличие или отсутствие конвекции определяется по S-критерию. Если же перемешивание в полуконвективной зоне происходит слишком медленно по сравнению с характерным временем изменения структуры звезды, то можно считать, что конвекции нет вообще, что и предсказывает L-критерий. Из-за отсутствия надежной теории большинство исследователей вообще не рассматривает структуру зон полуконвекции, а рассчитывают два эволюционных трека: один с использованием S-критерия, а другой – критерия Леду, и затем пытаются сделать вывод об эффективности полуконвекции из сравнения полученных результатов с наблюдениями.

У звезд с массами от 10 до 40 M_{\odot} дополнительное перемешивание (S-модели) не только увеличивает время жизни на ГП, но и в несколько раз повышает свети-

мость. В результате верхняя часть полосы ГП на диаграмме Г-Р расширяется настолько, что практически полностью смыкается с областью голубых сверхгигантов, т.е. звезд находящихся на более поздних стадиях эволюции. Однако к тому же результату приводит эволюция L-моделей, рассчитанная с учетом потери массы за счет сильного звездного ветра. Модели, рассчитанные с критерием Леду, превращаются в красные сверхгиганты еще до того, как в центре звезды загорится гелий, но вскоре после начала 3α -реакций L-модели уходят в область голубых сверхгигантов. С другой стороны, гелий в ядрах S-моделей загорается, когда звезда ненамного отошла от главной последовательности, т.е. также в области голубых сверхгигантов. Таким образом оказывается, что решить вопрос об эффективности полуконвекции из сравнения расчетов с наблюдениями – задача нетривиальная.