ЭФФЕКТЫ КРАТНОСТИ ЗВЕЗДНЫХ СБЛИЖЕНИЙ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ДИФФУЗИИ В ЛОКАЛЬНО-ОДНОРОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗВЕЗДНОЙ СРЕДЕ: УСТРАНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ РАСХОДИМОСТИ

А. С. Расторгуев[1,2*], Н. Д. Уткин[1,2], О. В. Чумак[1]

[1] *Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова*

[2] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет*

Поступила в редакцию 17.11.2016 г.

Впервые использован для прямого расчета коэффициентов диффузии в фазовом пространстве звездной системы введенный Агекяном λ-фактор, учитывающий эффект кратности звездных сближений с большими прицельными параметрами. Простые оценки показали, что кумулятивный эффект — суммарный вклад далеких сближений в изменение скорости пробной звезды — с учетом кратности звездных сближений является конечным, и логарифмическая расходимость, присущая классическому описанию диффузии, устраняется, как было показано ранее Кандрупом с использованием другого, более сложного подхода. В этом случае выражения для коэффициентов диффузии, как и в классическом описании, содержат логарифм отношения двух независимых величин: среднего межчастичного расстояния и прицельного параметра тесного сближения. Однако физический смысл этого логарифмического множителя радикально меняется: он отражает не расходимость, а наличие двух характерных масштабов, присущих звездной среде.

Ключевые слова: гравитирующие системы, случайные силы, парные сближения, коэффициенты диффузии, приближение Фоккера–Планка.

DOI: 10.7868/S032001081708006X

ВВЕДЕНИЕ

Современное описание столкновительных процессов в звездных системах началось с пионерских работ первой половины XX в. (Шарлье, 1917; Джинс, 1919; Спитцер, 1924; Росселанд, 1928; Смарт, 1938; Вильямсон, Чандрасекар, 1941; Чандрасекар, 1941а,б, 1942). Исчерпывающий глубокий исторический обзор работ по кинетической теории однородных систем с дальнодействием, включающий и звездную среду, можно найти в работе Шавани (2013). Чандрасекар (1941а) первым использовал распределение Хольцмарка (1919) для случайной силы в однородной звездной среде и показал, что асимптотика этого распределения в приближении больших сил полностью совпадает с распределением силы, вызванной взаимодействием с ближайшим соседом (Герц, 1909). Именно это важнейшее обстоятельство лежит в основе столкновительной кинетики звездных систем, рассматривающей изменения скорости звезд в рамках гипотезы парных сближений. Действительно, большие по величине случайные изменения скоростей звезд возникают при тесных сближениях пробной звезды со звездами поля на характерное расстояние, существенно меньшее по сравнению со средним межчастичным расстоянием. Совокупный (так называемый кумулятивный) эффект ряда таких последовательных сближений, рассматриваемых как независимый случайный процесс изменения скорости, позволяет рассчитать коэффициенты диффузии в пространстве скоростей и вывести выражения для столкновительного члена в уравнении Больцмана $\frac{\partial f(t,\vec{R},\vec{V})}{\partial t} = -\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}}$, в приближении Фоккера–Планка. Последовательное развитие теории иррегулярных сил в звездной динамике в XX в. основывалось именно на этих базовых принципах.

Существует несколько способов оценки кумулятивного эффекта: по углу отклонения вектора скорости пробной звезды (Вильямсон, Чандрасекар, 1941; Паренаго, 1954), по скорости изменения

*Электронный адрес: rastor@sai.msu.ru

продольного (динамическое трение) и нормального (рассеяние или диффузия) компонентов скорости пробной звезды (Чандрасекар, 1941а; Кинг, 2002; Бинни, Тримен, 2008, и др.). Все оценки темпа изменения скорости и кинетической энергии обычно приводят к близким значениям характерного времени этих процессов, которое часто отождествляют со столкновительным временем релаксации. Характерной чертой выражений для коэффициентов диффузии и времени релаксации является наличие логарифмической расходимости на верхнем пределе интегрирования по прицельным параметрам в рамках концепции последовательных независимых парных сближений. Логарифмический множитель $\Lambda = \ln \frac{d_{\max}}{p_{90}}$ — аналог так называемого кулоновского логарифма, встречающегося в физике плазмы, — входит в выражения для линейного и квадратичного коэффициентов диффузии $\left\langle \Delta V_{\|} \right\rangle$, $\left\langle \Delta V_{\perp}^2 \right\rangle$. Здесь $d_{\max}$ — верхний предел прицельного параметра, $p_{90} = \frac{G(m+m_f)}{V_0^2}$ — прицельный параметр тесного сближения, при котором вектор относительной скорости сближающихся звезд отклоняется на угол 90°, где G — гравитационная постоянная, m и m_f — массы пробной звезды и звезды поля соответственно, V_0 — величина относительной скорости звезд.

Проблема верхнего предела интегрирования по прицельному параметру неоднократно обсуждалась в работах по обоснованию звездной динамики. Так, Вильямсон и Чандрасекар (1941), Паренаго (1954), Энон (1958) отмечали, что в рамках концепции парных сближений естественным верхним пределом прицельного параметра является среднее межчастичное расстояние, равное $\bar{d} \approx 0.554\nu^{-1/3}$ (здесь ν — средняя концентрация звездной среды), поскольку все более слабые сближения в действительности кратные и незавершенные. Изменения относительной скорости описываются формулами гиперболического относительного движения в предположении их завершенности (см., например, Бинни, Тримен, 2008, с. 155), неприменимыми для далеких сближений, формальный учет которых приводит к значительной переоценке кумулятивного эффекта. Мы разделяем эту точку зрения и отмечаем, что трактовка всех сближений (в том числе далеких) как парных фактически включает в рассчитываемые коэффициенты диффузии не только иррегулярные силы, но и в какой-то степени регулярный компонент силы. Амбарцумян (1938), Огородников (1958), Бинни и Тримен (2008) и другие авторы, упомянутые в последней монографии, напротив, считают, что $d_{\max}$ следует положить равным характерному размеру всей звездной системы (радиусу звездного скопления, толщине галактического диска, джинсовской длине, размеру регулярной орбиты звезды, размеру характерной неоднородности в звездной системе). Однако отметим, что точный выбор максимального значения прицельного параметра не является критичным для практических целей (вычисления коэффициентов диффузии, оценки характерных времен) вследствие сравнительно слабой логарифмической расходимости, которая не может радикально изменить динамические оценки. Действительно, в солнечной окрестности нашей Галактики $\bar{d} \approx 1$ пк, $p_{90} \approx 1$–2 а.е. и $\Lambda \approx \ln \frac{\bar{d}}{p_{90}} \sim 11$–12. Выбрав в качестве $d_{\max} \sim H_z \approx 100$ пк (эффективную толщину тонкого диска), мы увеличим кулоновский логарифм Λ до значений $\Lambda \sim 15$–16, т.е. всего на 40–45%, что не приведет к радикальному изменению всех наших динамических оценок. Тем не менее проблема оптимального выбора верхнего предела прицельного параметра имеет другую сторону, непосредственно связанную с физическими основаниями столкновительной кинетики звездных систем. Мы уверены, что более глубокое понимание этих явлений и попытки описать их непротиворечивым образом имеют фундаментальное значение для звездной динамики. Именно эта проблема и обсуждается в данной работе.

КРАТНОСТЬ ЗВЕЗДНЫХ СБЛИЖЕНИЙ

Агекян (1959, 1962) предложил и реализовал вероятностный подход к описанию звездных сближений и вывел аналитическое выражение для вероятности звездного сближения $\Phi\left(V^2, h\right)$ в результате которого скорость пробной звезды изменяется на заданную величину, для нескольких частных случаев. Здесь $h = \frac{\Delta V^2}{V^2}$, ΔV^2 — изменение квадрата скорости (т.е. кинетической энергии) пробной звезды. Слабым местом подхода Агекяна была расходимость выражения для вероятности на малых значениях изменения скорости, $\Phi(V^2, h) \sim |h|^{-3}$, что, в частности, препятствовало вычислению среднего изменения энергии звезды. Совершенно очевидно, что причиной отмеченной расходимости является кратность звездных сближений, обеспечивающих малые изменения скорости. Чтобы смягчить эффект расходимости, Агекян (1961) ввел редукционный множитель, учитывающий кратность сближений (обозначим его как λ-фактор Агекяна). Он численно равен отношению модуля величины полной случайной силы $\left|\delta\vec{F}\right|$, действующей на пробную звезду со стороны всех звезд в тонком сферическом слое $(p, p+dp)$, окружающем пробную звезду, к арифметической сумме модулей сил $\sum\left|\vec{F_i}\right|$, вызванных этими же звездами, т.е.

$$\lambda(p) = \frac{\left|\delta\vec{F}\right|}{\sum\left|\vec{F}_i\right|} < 1. \qquad (1)$$

Физический смысл λ-фактора состоит в том, что полная случайная сила равна геометрической сумме векторов силы от каждой звезды, в то время как классические расчеты кумулятивного эффекта фактически реализуют простое арифметическое суммирование эффектов от отдельных сближений, считающихся независимыми. Очевидно, что истинная роль каждой звезды поля (вклад в вектор случайной силы $\left|\delta\vec{F}\right|$) в среднем меньше, чем следует из расчетов результата ее парного сближения с пробной звездой, из-за гравитационного нивелирования вкладов далеких звезд. С увеличением прицельного параметра числитель выражения (1) уменьшается, в то время как знаменатель растет. Быстрое уменьшение λ-фактора с расстоянием непосредственно связано с тем, что на больших расстояниях угловое распределение звезд поля становится все более равномерным, и вклады отдельных звезд в случайную силу эффективно компенсируют друг друга. В то же время случайная сила, действующая на пробную звезду, должна определяться лишь распределением ближайших соседей, где поляризация углового распределения больше, и эффект нивелирования сравнительно невелик. Поэтому можно ожидать, что верхний предел интегрирования по прицельному параметру не превышает нескольких средних межчастичных расстояний $\bar{d}$.

Позднее эти проблемы рассматривал Кандруп (1980), сделавший качественный вывод о том, что силы, действующие со стороны далеких звезд, должны эффективно компенсировать друг друга. В его следующей фундаментальной работе (Кандруп, 1981) дается количественное описание поля иррегулярных сил в локально-однородной звездной среде. Он первым отметил, что интегрирование коэффициентов диффузии, входящих в столкновительный член Фоккера–Планка, по прицельным параметрам не должно приводить к расходимости на верхнем пределе. К подобному выводу пришла Петровская (1992), исследовавшая тонкий гравитирующий звездный слой.

В данной работе мы впервые вычисляем коэффициенты диффузии с учетом редукционного фактора Агекяна (1), компенсирующего переоценку вклада далеких сближений в изменение скорости, для трехмерной пуассоновой среды. Для вычисления редукционного фактора $\lambda(p)$ Агекян (1961) применил методику, приводящую к распределению Хольцмарка (1919), и получил следующее строгое выражение для однородной бесконечной среды со средней концентрацией ν:

$$\lambda(p) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^3}\exp\left(-a\frac{4\pi}{3}\nu p^3 x^{3/2}\right)dx, \qquad (2)$$

где $a = \frac{2}{5}\sqrt{2\pi} \approx 1.00265$. Принимая во внимание, что $\frac{4\pi}{3}\nu p^3 \equiv N(p)$ — среднее число звезд поля в пределах сферы радиуса p, где p — прицельный параметр рассматриваемого сближения, перепишем (2) в эквивалентном виде, считая λ-фактор функцией $N = N(p)$:

$$\lambda(N) = \int\limits_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^3}\exp\left(-aNx^{3/2}\right)dx. \qquad (3)$$

Таким образом, λ-фактор Агекяна полностью определяется средним числом звезд в пределах сферы, радиус которой равен прицельному параметру рассматриваемого сближения. Это будет использовано в тексте статьи. Редукционный фактор $\lambda(p)$ при больших значениях N показывает хорошо известное асимптотическое поведение $\lambda(N) \sim \sim N^{-2/3} \sim p^{-2}$ (Агекян, 1961) и быстро уменьшается с ростом прицельного параметра. Рисунок 1 показывает зависимость λ-фактора Агекяна от прицельного параметра, выраженного в единицах среднего межчастичного расстояния $p' = p/\bar{d}$. Видно, что уже на двух средних межчастичных расстояниях эффект кратности сближений завышает случайную силу более чем на порядок. Этот факт качественно обосновывает интуитивный вывод Вильямсона и Чандрасекара (1941) о том, что в 3-мерной пуассоновой модели звездной среды основной вклад в случайную гравитационную силу вносят ближайшие соседи пробной звезды.

Строго говоря, логически правильно будет использовать λ-фактор Агекяна для учета вклада звездных сближений непосредственно в процессе интегрирования по прицельному параметру в обычной схеме расчетов коэффициентов диффузии в приближении Фоккера–Планка (см., например, формулы L.1–L.26 в монографии Бинни и Тримена, 2008) или при выводе вероятностей сближения с заданным изменением скорости, описывающих марковский процесс изменений скорости со столкновительным интегральным членом Колмогорова–Феллера (Агекян, 1959; Петровская, 1969а,б). Отметим, что Агекян получил явный вид λ-фактора спустя два года после публикации своей первой фундаментальной работы, в которой он предложил вероятностный подход к описанию случайного процесса изменения скорости пробной звезды (Агекян,

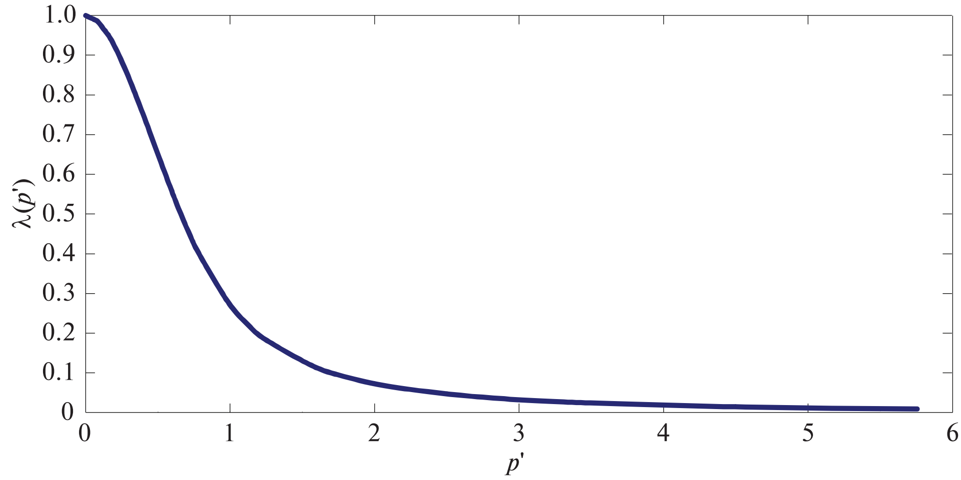

Рис. 1. Зависимость λ-фактора Агекяна от прицельного параметра $p\prime$, выраженного в единицах среднего межчастичного расстояния $\bar{d}$.

1959). Исходя из большой сложности использованного Агекяном (1959, 1962) метода вывода вероятности сближения с заданным изменением скорости, можно предположить, что ему вряд ли удалось бы получить аналитическое выражение для указанной вероятности даже для простейших случаев, если бы в алгоритм интегрирования по прицельным параметрам был сразу заложен λ-фактор. Поэтому Агекян (1961, 1962) принял паллиативное решение и ввел редуцирующий множитель к уже найденной ранее вероятности. Скорректированная таким способом вероятность имеет вид

$$\tilde{\Phi}(V^2, h) = \lambda(\bar{p})\Phi(V^2, h), \qquad (4)$$

где $\bar{p}$ — некоторое эффективное среднее значение прицельного параметра, при котором сближение со звездой поля приводит к относительному изменению квадрата скорости, в среднем равному h. При этом удается "смягчить" расходимость выражения для вероятности на больших прицельных параметрах (или малых относительных изменениях квадрата скорости) до $\tilde{\Phi}(V^2, h)\,|h|^{-1}$ (Агекян, 1961), а сам метод коррекции вероятности является следствием интегральной теоремы о среднем (Фихтенгольц, 1969).

Вероятностный подход оказался в высшей степени продуктивным в задачах аналитической звездной динамики, но, по нашему мнению, недостаточно востребованным вследствие крайней сложности вычислений. Так, Петровская (1969а,б) использовала его для описания изменений скорости пробной звезды в иррегулярном силовом поле в рамках чисто разрывного случайного процесса. Действительно, редуцированную вероятность сближения (4) можно непосредственно подставить в выражение для столкновительного члена в самой общей форме уравнения баланса (формула (7.62) в монографии Бинни и Тримена, 2008), которое в результате примет вид интегро-дифференциального уравнения Колмогорова—Феллера для фазовой плотности. В серии работ Калиберда и Петровской (1970, 1971, 1972) и Калиберда (1971, 1972) с помощью численных методов получены равновесные решения уравнения Колмогорова—Феллера для локального распределения скоростей звезд разных масс. Несомненным преимуществом описания столкновительной кинетики в рамках чисто разрывного случайного процесса по сравнению с классическим описанием диффузии в пространстве скоростей является возможность прямого вычисления не только темпа потери массы, но и потерь энергии, что, очевидно, ускоряет динамическую эволюцию звездной системы и уменьшает время ее жизни.

СТРОГИЙ УЧЕТ КРАТНОСТИ ЗВЕЗДНЫХ СБЛИЖЕНИЙ В ТРЕХМЕРНОЙ СРЕДЕ В ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим задачу о вычислении коэффициентов диффузии в однородной бесконечной трехмерной среде с учетом кратности звездных сближений и с использованием фундаментального результата Агекяна (1961). Эта задача кажется вполне разрешимой в рамках классического подхода, в отличие от отмеченных нами выше трудностей, возникающих с вероятностным описанием. В отличие от подхода Кандрупа (1981), мы выполним прямое интегрирование коэффициентов диффузии по прицельному параметру, чтобы понять, сохранится ли логарифмическая расходимость на больших масштабах.

При выводе модифицированных выражений для коэффициентов диффузии мы будем опираться на классический подход, описанный в монографии Бинни и Тримена (2008, Приложение L.6). Исходные выражения для компонентов тензора диффузии в пространстве скоростей для пробной звезды, усредненные по углу ориентации относительной орбиты сближающихся звезд, имеют вид (k, $l = 1$, 2, 3)

$$\langle \Delta V_k \rangle = -\Delta V_{\|} \left(\overrightarrow{e_k} \cdot \overrightarrow{e_1'} \right), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta V_k \Delta V \rangle_l = \left(\Delta V_{\|} \right)^2 \left(\overrightarrow{e_k} \cdot \overrightarrow{e_1'} \right) \left(\overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_1'} \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(\Delta V_{\perp} \right)^2 \Big[\left(\overrightarrow{e_k} \cdot \overrightarrow{e_2'} \right) \left(\overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_2'} \right) + \\ + \left(\overrightarrow{e_k} \cdot \overrightarrow{e_3'} \right) \left(\overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_3'} \right) \Big], \end{aligned} \tag{6}$$

где $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ — орты лабораторной системы координат, $\left(\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\right)$ — орты системы координат, связанной с центром масс сближающихся звезд, причем единичный вектор $\overrightarrow{e_1'}$ направлен вдоль вектора их начальной относительной скорости $\overrightarrow{V_0} = \overrightarrow{V} - \overrightarrow{V_f}$ (см. рис. L.1 в монографии Бинни, Тримена, 2008). Изменения продольного и поперечного компонентов скорости, входящие в формулы (5) и (6) для коэффициентов диффузии, переведенные в лабораторную систему отсчета, будут равны соответственно (см. там же, рис. L.7)

$$\Delta V_{\|} = \frac{2Gm_f p_{90}}{V_0 \left(p^2 + p_{90}^2 \right)}, \quad \Delta V_{\perp} = \frac{2Gm_f p}{V_0 \left(p^2 + p_{90}^2 \right)}, \tag{7}$$

где m_f, V_0, p — масса звезды поля, величина относительной скорости и прицельный параметр соответственно.

Изменение компонента скорости $\Delta V_{\|}$ рассчитывается за единичный интервал времени и, следовательно, может трактоваться как ускорение пробной звезды (точнее, замедление вследствие динамического трения) в стохастическом поле иррегулярных сил. Логика рассуждений подсказывает, что, с одной стороны, интегрирование изменения скорости $\Delta V_{\|}$ по прицельному параметру в этом случае следует проводить с весом $\lambda(p)$, равным редукционному фактору для стохастической силы, действующей на пробную звезду. С другой стороны, коэффициенты $\left(\Delta V_{\|}\right)^2$ и $(\Delta V_{\perp})^2$ можно рассматривать как изменения компонентов тензора кинетической энергии за единичное время, в рамках нашей концепции пропорциональные работе случайной силы; это означает, что их интегрирование по прицельному параметру следует проводить с тем же весом $\lambda(p)$.

Как и в классическом случае, мы учитываем, что за единичное время пробная звезда испытает $d\eta(p) = 2\pi \nu_f V_0 p dp$ сближений со звездами поля с относительной скоростью V_0 и прицельными параметрами, заключенными в интервале $(p, p + dp)$. Напомним, что ν_f есть концентрация звезд поля с относительной скоростью $\overrightarrow{V_0}$, т.е. $\nu_f = f\left(\overrightarrow{V_f}\right) d\overrightarrow{V_f}$, $\overrightarrow{V_f} = \overrightarrow{V} - \overrightarrow{V_0}$, где $\overrightarrow{V_f}$ — скорость звезды поля, $f\left(\overrightarrow{V_f}\right)$ — функция распределения звезд поля по скоростям. Здесь мы ограничимся только интегрированием по прицельному параметру, поскольку последующее интегрирование по распределению скоростей звезд поля проводится так же, как в классических работах по звездной динамике (см., например, приложение L в монографии Бинни, Тримена, 2008), приводя к потенциалам Розенблата (Розенблат и др., 1957).

λ-фактор Агекяна не выражается в элементарных функциях, и мы используем его простую кусочно-непрерывную аппроксимацию. Во-первых, для удобства (что будет ясно из дальнейшего изложения) мы будем считать λ-фактор функцией $\tilde{\lambda}(n)$, где $n = (N/N_0)^{2/3}$, а $N_0 \approx 0.7122$ — среднее число звезд (математическое ожидание) в пределах сферы с радиусом, равным среднему межчастичному расстоянию $\bar{d}$. Следовательно, мы естественным образом вводим в рассмотрение параметр $\bar{d}$ как один из масштабных параметров звездной среды. С помощью численных методов мы нашли следующую аппроксимацию λ-фактора с точностью порядка 2–3%:

$$\tilde{\lambda}(n) = \begin{cases} a \exp[-bn^c] + d, & n \le 1, \\ en^{-1}, & n > 1, \end{cases} \tag{8}$$

где $a \approx 0.863 \pm 0.001$, $b \approx 2.281 \pm 0.002$, $c \approx 0.924 \pm 0.0005$, $d \approx 0.141 \pm 0.002$, $e \approx 0.235 \pm 0.001$ (на уровне значимости 95%). Такой точности вполне достаточно для оценки интегралов от изменений скорости (7).

Текущие значения прицельного параметра и среднего числа звезд в сфере соответствующего радиуса связаны следующим очевидным соотношением

$$p^2 = \bar{d}^2 \, (N/N_0)^{2/3} = \bar{d}^2 n. \tag{9}$$

Следующим шагом в вычислении коэффициентов диффузии является интегрирование изменений скорости $\Delta V_{\|}$, $\left(\Delta V_{\|}\right)^2$, $(\Delta V_{\perp})^2$ по прицельному параметру с учетом веса, равного $d\eta(p) = 2\pi \nu_f V_0 p dp$:

$$DV_{\|} = \pi \nu_f V_0 \int_0^\infty \Delta V_{\|} \tilde{\lambda}(n) \, d\left(p^2\right), \tag{10}$$

$$DV_{\parallel}^2 = \pi \nu_f V_0 \int\limits_0^\infty \left(\Delta V_{\parallel}\right)^2 \tilde{\lambda}(n)\, d\left(p^2\right), \qquad (11)$$

$$DV_{\perp}^2 = \pi \nu_f V_0 \int\limits_0^\infty \left(\Delta V_{\perp}\right)^2 \tilde{\lambda}(n)\, d\left(p^2\right). \qquad (12)$$

Очевидно, что $DV_{\parallel}^2 \ll DV_{\perp}^2$ поскольку интеграл (11) сходится и отмеченное неравенство выполняется уже в классическом приближении. Сходимость тем более будет иметь место в нашем случае после умножения подынтегрального выражения на быстро уменьшающуюся функцию $\tilde{\lambda}(n)$. По этой причине мы можем и далее пренебречь вкладом (11) в коэффициент диффузии (6).

Далее мы воспользуемся выражением (9) и перейдем от интегрирования по прицельному параметру к интегрированию по переменной n, преобразуем линейный коэффициент диффузии (динамического трения) (10) к виду

$$DV_{\parallel} = \frac{2\pi G^2 m_f (m + m_f)\, \nu_f}{V_0^2} \times \qquad (13)$$

$$\times \int\limits_0^\infty \frac{\tilde{\lambda}(n)\, d\left(p^2\right)}{\left(p^2 + p_{90}^2\right)} = \frac{2\pi G^2 m_f (m + m_f)\, \nu_f}{V_0^2} K^2 \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \frac{\tilde{\lambda}(n)\, dn}{1 + K^2 n} = \frac{2\pi G^2 m_f (m + m_f)\, \nu_f}{V_0^2} I_1(K),$$

где $K = \bar{d}/p_{90}$ — отношение двух характерных пространственных масштабов звездной среды. Аналогичным образом мы выводим выражение для квадратичного коэффициента диффузии:

$$DV_{\perp}^2 = \frac{4\pi G^2 m_f^2 \nu_f}{V_0} \int\limits_0^\infty \frac{\tilde{\lambda}(n)\, p^2 d\left(p^2\right)}{\left(p^2 + p_{90}^2\right)} = \qquad (14)$$

$$= \frac{4\pi G^2 m_f^2 \nu_f}{V_0} K^4 \int\limits_0^\infty \frac{\tilde{\lambda}(n)\, n dn}{(1 + K^2 n)^2} =$$

$$= \frac{4\pi G^2 m_f^2 \nu_f}{V_0} I_2(K),$$

где мы вводим безразмерные функции

$$I_1(K) = K^2 \int\limits_0^\infty \frac{\tilde{\lambda}(n)\, dn}{1 + K^2 n}, \qquad (15)$$

$$I_2(K) = K^4 \int\limits_0^\infty \frac{\tilde{\lambda}(n)\, n dn}{(1 + K^2 n)^2},$$

зависящие от отношения масштабных факторов K и входящие в выражения (13) и (14) для коэффициентов диффузии.

Мы рассчитали значения интегралов (15) методом численного интегрирования для широкого интервала значений отношения K $(1 < K < 10^5)$. Отметим, что верхняя граница параметра K соответствует низкой концентрации звезд порядка 0.1 пк$^{-3}$, характерной для солнечной окрестности. На рис. 2 показано поведение интеграла I_1 с ростом верхнего предела интегрирования для параметра $K = \bar{d}/p90 = 1000$. Виден выход интеграла на плато уже на относительно малых значениях верхнего предела $n_{\max}$, демонстрирующий полное отсутствие логарифмической расходимости. Как следует из (9), $n_{\max} = \left(p_{\max}/\bar{d}\right)^2 \equiv \left(d_{\max}/\bar{d}\right)^2$, значит, интеграл близок к предельному значению на значениях прицельного параметра порядка 2–3 средних межчастичных расстояний, где происходит практически полное "экранирование" далеких сближений.

На рис. 3 показано поведение интеграла I_2 как функции верхнего предела интегрирования также для параметра $K = \bar{d}/p90 = 1000$. Видно, что этот интеграл сходится еще быстрее, и эффективное "экранирование" далеких сближений начинается уже с 1–2 средних межзвездных расстояний. Это происходит потому, что λ-фактор Агекяна быстро падает с ростом прицельного параметра.

На рис. 4 и 5 показана зависимость интегралов I_1 и I_2 от отношения масштабных факторов K.

Параметры линейных зависимостей I_1 и I_2 от $\lg K^2$ для значений $K > 10$ можно оценить, исходя из результатов наших вычислений, показанных на рис. 4 и 5:

$$I_1(K) \approx (2.306 \pm 0.010) \lg\left(K^2\right) - \qquad (16)$$
$$- (1.070 \pm 0.030) \approx 2 \ln (K/1.7),$$

$$I_2(K) \approx (2.302 \pm 0.040) \lg\left(K^2\right) - \qquad (17)$$
$$- (2.224 \pm 0.020) \approx 2 \ln (K/3.0),$$

где ln — натуральный логарифм. Подставляя выражения для интегралов (16) и (17) соответственно в формулы для коэффициентов диффузии (13) и (14), мы получим окончательные выражения для линейного и квадратичного коэффициентов диффузии с учетом гравитационного "экранирования" далеких сближений:

$$DV_{\parallel} \approx \frac{4\pi G^2 m_f (m + m_f)\, \nu_f}{V_0^2} \ln\left(\bar{d}/1.7 p_{90}\right), \qquad (18)$$

$$DV_{\perp}^2 \approx \frac{8\pi G^2 m_f^2 \nu_f}{V_0} \ln\left(\bar{d}/3.0 p_{90}\right). \qquad (19)$$

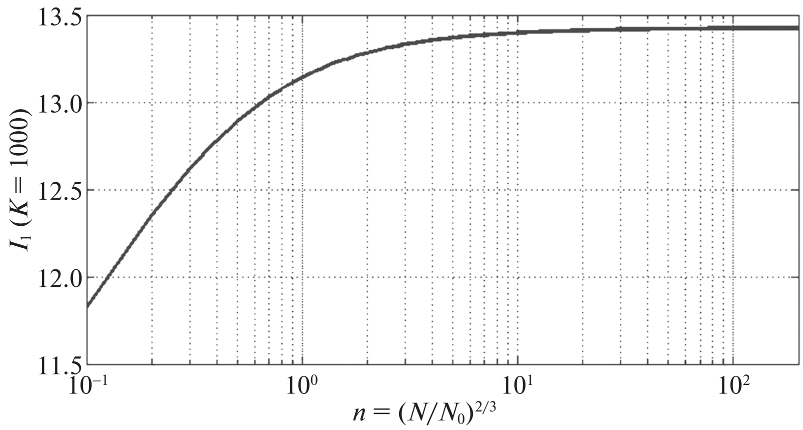

Рис. 2. Поведение интеграла I_1 $(K = 1000)$ в формуле (13) как функции верхнего предела интегрирования $n_{\max}$.

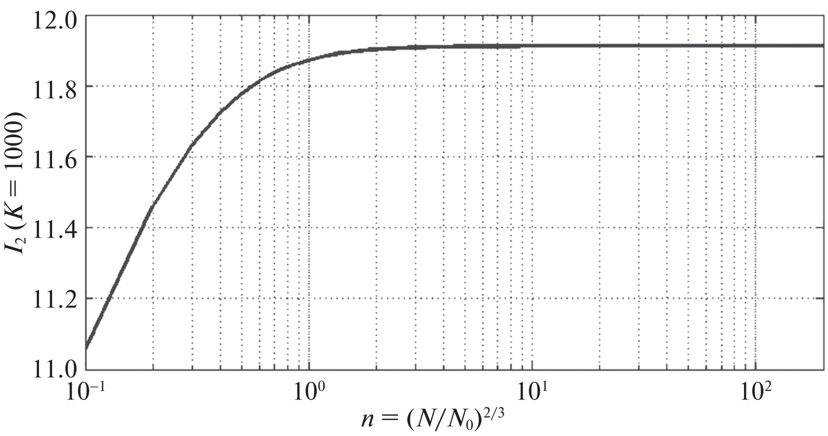

Рис. 3. Поведение интеграла I_2 $(K = 1000)$ в формуле (14) как функции верхнего предела интегрирования $n_{\max}$.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сравним рассчитанные нами коэффициенты диффузии с результатами классических вычислений: с интуитивным "обрезанием" далеких сближений на среднем межчастичном расстоянии (см., например, Вильямсон, Чандрасекар, 1941):

$$DV_{\|} \approx \frac{4\pi G^2 m_f \left(m + m_f\right) \nu_f}{V_0^2} \ln\left(\bar{d}/p_{90}\right), \qquad (20)$$

$$DV_{\perp}^2 \approx \frac{8\pi G^2 m_f^2 \nu_f}{V_0} \ln\left(\bar{d}/\sqrt{e} p_{90}\right). \qquad (21)$$

Выражения (18), (19) показывают, что в нашем приближении стоящие под знаком логарифма отношения примерно в 1.7–1.8 раза меньше, чем соответствующие члены в классических выражениях (20), (21). С практической точки зрения эта небольшая разность логарифмов (составляющая примерно 0.55, т.е. порядка 5–10% от значения кулоновского логарифма Λ) не играет абсолютно никакой роли при вычислениях коэффициентов диффузии тем или иным способом и соответствующих характерных времен. Однако с принципиальной точки зрения это означает, что эффективное значение верхней границы прицельного параметра при вычислении кумулятивного эффекта в рамках концепции парных сближений вряд ли должно превышать среднее межчастичное расстояние. Более далекие звезды вносят вклад скорее в регулярную силу или флуктуации плотности, которые нужно учитывать либо в рамках коллективных взаимодействий, либо с помощью методов фрактального анализа.

Таким образом, наши результаты как на логическом, так и на количественном уровне поддерживают точку зрения тех исследователей, которые ранее из совершенно разумных соображений ограничивали верхний предел интегрирования по прицельному параметру средним межчастичным расстоянием. Основываясь на (18) и (19), мы можем сказать, что сближения с прицельными параметрами $p \lesssim 0.6\bar{d}$ могут рассматриваться как действительно независимые и завершенные в рамках классического подхода, в то время как сближения с $p \gtrsim$

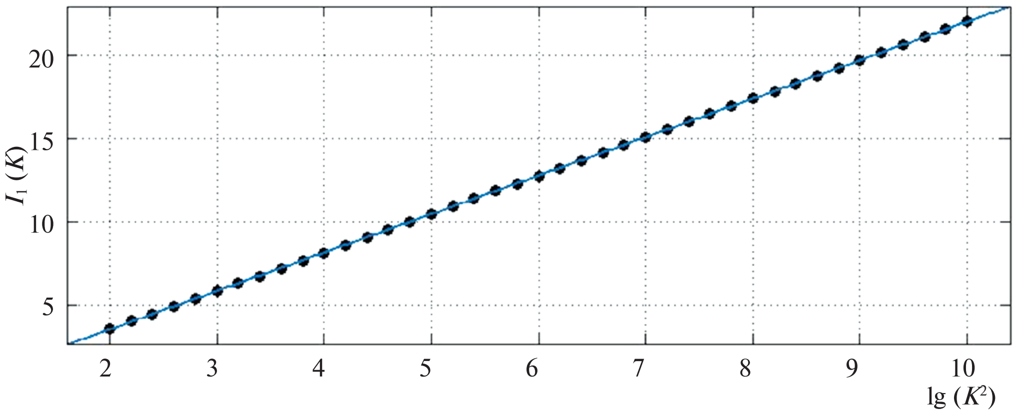

Рис. 4. Зависимость интеграла I_1 в формуле (13) от параметра K в интервале значений $10 < K < 10^5$. Точками показаны результаты вычислений с постоянным шагом по величине $\lg K^2$; сплошная линия — линейная аппроксимация интеграла как функции $\lg K^2$ (доверительные интервалы для уровня значимости 95% меньше размера символов).

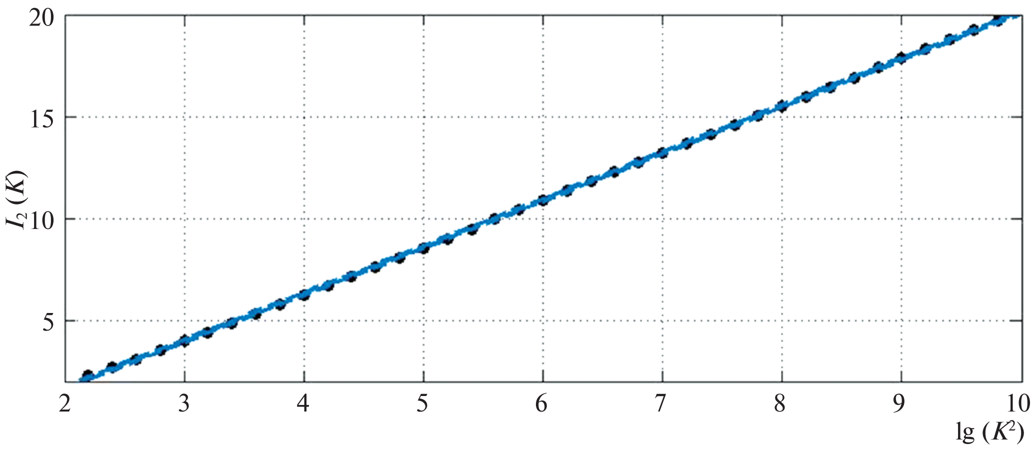

Рис. 5. Зависимость интеграла I_2 в формуле (14) от параметра K в интервале значений $10 < K < 10^5$. Обозначения те же, что на рис. 4.

$\gtrsim (2{-}3)\,\bar{d}$ фактически не вносят никакого вклада в иррегулярную силу в однородной пуассоновой системе.

И, наконец, еще более важно, что формулы (18) и (19), как и в классической концепции кумулятивного эффекта, содержат логарифмический множитель. Однако его физический смысл в рамках нашего подхода фундаментально отличается от классического случая. Так, мы показали, что учет кратности далеких сближений и гравитационного "экранирования" устраняет расходимость на верхнем пределе. В нашем случае логарифмический множитель появляется совершенно естественным образом и отражает наличие в звездной среде двух независимых пространственных масштабов: среднего межчастичного расстояния, $\bar{d} \approx \approx 0.554\nu^{-1/3}$, определяемого только средней концентрацией звезд, и параметра тесного сближения $p_{90} = \frac{G(m+m_f)}{V_0^2}$, отражающего динамические свойства звездного поля (зависящего как от масс, так и от характерных скоростей звезд). Важно отметить, что эти два фундаментальных параметра будут связанными между собой только в условиях вириального равновесия.

Практически к тем же выводам ранее пришел Кандруп (1981), анализировавший особенности кинетических процессов в локально-однородной звездной среде (т.е. однородной на масштабах порядка нескольких среднечастичных расстояний). Использовав распределение случайных сил, аналогичное распределению Хольцмарка, он строгим способом получил выражения для коэффициентов диффузии (формулы (139) и (140) его цитируемой работы), совпадающие с классическими выражениями для однородной звездной среды со средним межчастичным расстоянием в качестве верхнего предела интегрирования. Позволим себе полностью процитировать заключительную фразу его работы (с. 1059, Кандруп, 1981): "This equation (139, 140) is precisely the standard Fokker-Plank equation of conventional stellar dynamics, differing only in that here the logarithmic factor is not a divergence, but instead the ratio of two well-defined lengths. The basic conclusion of this stochastic analysis, therefore, is that the effects of nearby particles are adequately described in a binary encounter approximation and that because of statistical cancellations very distant particles contribute negligibly to the effects of fluctuations."

Из этого текста видно, что наши выводы об эффективном гравитационном "экранировании" сближений с прицельными параметрами, превышающими среднее межчастичное расстояние, качественно и количественно очень близки к выводам Кандрупа (1981), но получены гораздо более простым и прозрачным способом. Следовательно, искусственное "обрезание" прицельного параметра при вычислении кумулятивного эффекта представляется излишним.

λ-фактор Агекяна был рассчитан на основе распределений Хольцмарка для бесконечной однородной звездной среды. В реальных звездных системах характерный размер пространственных неоднородностей (флуктуаций плотности) заметно превышает среднее межчастичное расстояние. Следовательно, предлагаемый нами способ учета иррегулярных сил с эффективным обрезанием на масштабах, сопоставимых со средним межчастичным расстоянием, вполне пригоден и для описания неоднородных систем, что было, в частности, отмечено и Кандрупом (1981). Очевидно, влияние пространственных неоднородностей на звездную кинетику может проявляться через коллективные эффекты или эффекты, связанные с фрактальностью среды (Чумак, Расторгуев, 2015). Влэд (1994), Шавани (2009), Чумак и Расторгуев (2015, 2016) показали, что распределение случайной силы во фрактальной среде можно описывать полным аналогом распределения Хольцмарка с заменой средней концентрации звезд условной плотностью, рассчитанной на основе фрактальной размерности системы. На этой основе Чумак и Расторгуев (2017) выполнили детальные расчеты влияния случайной силы на звездную кинетику во фрактальной среде. Мы полагаем также, что фрактальные среды можно считать локально-однородными в пределах нескольких "межкластерных" расстояний.

Часто проводят аналогии между описанием плазмы и звездной системы ("гравиплазмы"). В этой связи хотелось бы отметить, что, несмотря на определенное сходство описательного аппарата для этих сред, между ними существуют серьезные различия. Так, аналогом дебаевского радиуса экранирования в плазме (размера области, за пределами которой плазму можно считать электронейтральной) в "гравиплазме" должно служить среднее межчастичное расстояние, как это показывают наши результаты и работа Кандрупа (1981).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-02-00472) и РНФ (грант 14-22-00041). Авторы благодарны П. Шавани и В. Ю. Теребижу, а также анонимному рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агекян Т.А., Астрон. журн. **36**, 46 (1959) [T.A. Agekyan, Sov. Astron. **3**, 41 (1959)].
2. Агекян Т.А., Астрон. журн. **38**, 1055 (1961) [T.A. Agekyan, Sov. Astron. **5**, 809 (1961)].
3. Агекян Т.А., *Курс астрофизики и звездной астрономии* (ред. А.А. Михайлов, М.: ГИФМЛ, 1962), т. 2, с. 554.
4. Амбарцумян В.А., Уч. зап. Ленинград. универ. № 22, 19 (1938).
5. Бинни, Тримен (J. Binney and S. Tremaine), *Galactic Dynamics* (Princeton: Princeton Univer. Press, 2008).
6. Вильямсон, Чандрасекар (R.E. Williamson and S. Chandrasekhar), Astrophys. J. **93**, 305 (1941).
7. Влэд (M.O. Vlad), Astrophys. J. Suppl. Ser. **218**, 159 (1994).
8. Герц (P. Hertz), Math. Ann. **67**, 387 (1909).
9. Джинс (J.H. Jeans), *Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics* (Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1919).
10. Калиберда В.С., Астрон. журн. **47**, 960 (1971) [V.S. Kaliberda, Sov. Astron. **14**, 773 (1971)].
11. Калиберда В.С., Астрон. журн. **48**, 969 (1972) [V.S. Kaliberda, Sov. Astron. **15**, 766 (1972)].
12. Калиберда В.С., Петровская И.В., Астрофизика **6**, 135 (1970) [V.S. Kaliberda, I.V. Petrovskaya, Astrophys. **6**, 63 (1970)].
13. Калиберда В.С., Петровская И.В., Астрофизика **7**, 663 (1971) [V.S. Kaliberda, I.V. Petrovskaya, Astrophys. **7**, 396 (1971)].
14. Калиберда В.С., Петровская И.В., Астрофизика **8**, 305 (1972) [V.S. Kaliberda, I.V. Petrovskaya, Astrophys. **8**, 184 (1972)].
15. Кандруп (H.E. Kandup), Phys. Rep. **63**, Issue 1, 1 (1980).
16. Кандруп (H.E. Kandrup), Astrophys. J. **244**, 1039 (1981).
17. Кинг И.Р., *Введение в классическую звездную динамику* (М.: URSS, 2002) [I.P. King, *An introduction to the classical Stellar Dynamics*, Moscow: URSS, 2002].
18. Огородников К.Ф., *Динамика звездных систем* (М.: ГИФМЛ, 1958) [K.F. Ogorodnikov, *Dinamika zvezdnykh sistem (The Dynamics of Stellar Systems)*, Moscow: Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., 1958].

19. Паренаго П.П., *Курс звездной астрономии* (М.: ГИФМЛ, 1954) [P.P. Parenago, *Kurs zvezdnoi astronomii (A course of Stellar Astronomy)*, Moscow: Gos. Izd. Tekhn.-Teor. Lit., 1954].
20. Петровская И.В., Астрон. журн. **46**, 824 (1970а) [I.V. Petrovskaya, Sov. Astron. **13**, 647 (1970a)].
21. Петровская И.В., Астрон. журн. **46**, 1220 (1970б) [I.V. Petrovskaya, Sov. Astron. **13**, 957 (1970b)].
22. Петровская И.В., Астрон. журн. **69**, 408 (1992).
23. Розенблат и др. (M.N. Rosenbluth, W.M. MacDonald, and D.L. Judd), Phys. Rev. **107**, 1 (1957).
24. Росселанд (S. Rosseland), MNRAS **88**, 208 (1928).
25. Смарт (W.M. Smart), *Stellar Dynamics* (Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1938).
26. Спитцер (L. Spitzer), MNRAS **100**, 396 (1940).
27. Фихтенгольц Г.М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления (изд. 7)* (М.: Наука, 1969), т. 2, с. 113.
28. Хольцмарк (J. Holtsmark), Ann. der Phys. **363**, 577 (1919).
29. Чандрасекар (S. Chandrasekhar), Astrophys. J. **93**, 323 (1941a).
30. Чандрасекар (S. Chandrasekhar), Astrophys. J. **94**, 511 (1941б).
31. Чандрасекар (S. Chandrasekhar), *Principles of Stellar Dynamics* (Chicago: Univer. Chicago Press, 1942) .
32. Чумак О.В., Расторгуев А.С., Baltic Astron. **24**, 30 (2015).
33. Чумак О.В., Расторгуев А.С., Письма в Астрон. журн. **42**, 346 (2016) [O.V. Chumak, A.S. Rastorguev, Astron. Lett. **42**, 307 (2016)].
34. Чумак, Расторгуев (O.V. Chumak and A.S. Rastorguev), MNRAS **464**, 2777 (2017).
35. Шавани (P.-H. Chavanis), Europ. Phys. J. B **70**, 413 (2009).
36. Шавани (P.-H. Chavanis), Europ. Phys. J. Plus **128**, art. id.126 (2013).
37. Шарлье (C.V.L. Charlier), *Statistical mechanics based on the law of Newton*, MeLuS **16**, 5 (1917).
38. Энон (M. Henon), Ann. d'Astrophysique **21**, 186 (1958).