

УДК 524.386-56

АНАЛИЗ КРИВЫХ БЛЕСКА ЗАТМЕННЫХ СИСТЕМ С ЭКЗОПЛАНЕТАМИ. СИСТЕМА HD 209458

© 2010 г. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук

*Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга,
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31.05.2010 г.; принята в печать 01.07.2010 г.

Выполнен анализ высокоточных кривых блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458. Показано, что параметры двойной системы HD 209458, полученные в разные эпохи и для разных длин волн, согласуются между собой при использовании метода доверительных областей для расчета интервалов ошибок. Продемонстрирована эффективность и надежность нового метода оценки интервалов ошибок. Даны надежные оценки линейного и квадратичного коэффициентов потемнения к краю звезды и их доверительных интервалов (ошибок). Выявлена зависимость коэффициентов потемнения к краю диска звезды от длины волны в диапазоне длин волн $\lambda = 3201\text{--}9708 \text{ \AA}$, которая значительно отличается от соответствующей теоретической зависимости, следующей из моделей тонких звездных атмосфер.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы, благодаря космическим миссиям (HST, CoRoT, Kepler), получены уникальные по точности кривые блеска затмения звезд экзопланетами (см., например, [1–4]).

Анализ кривой блеска HD 209458, полученной на HST в 2000 г., выполнен в работе Брауна и др. [1]. Анализ многоцветных кривых блеска HD 209458, полученных на HST в 2003 г., выполнен в работе Кнутсона и др. [2]. В обеих работах были получены радиусы экзопланеты и звезды, наклонение орбиты и коэффициенты потемнения к краю для звезды. Наиболее детальное исследование данных рядов наблюдений с HST выполнил Соуворз [5]. Он получил значения радиусов экзопланеты и звезды, наклонение орбиты, а также значения коэффициентов потемнения к краю для звезды в различных законах потемнения. Как это часто бывает на практике, очень высокая точность наблюдательных данных позволила автору работы [5], с одной стороны, получить наиболее надежные значения параметров двойной системы, а с другой — обусловила некоторые трудности с интерпретацией наблюдений. Во-первых, центральные значения геометрических параметров модели, найденные для разных длин волн λ , показали значительный разброс, в несколько раз превышающий ошибки параметров, найденные методом Монте-Карло. Во-вторых, значения геометрических параметров, найденные из анализа кривых блеска для разных эпох наблюдений, в пределах ошибок оказались не вполне согласующимися между собой.

Вряд ли такие трудности интерпретации связаны с особенностями используемой модели ввиду того, что результаты, полученные в рамках разных моделей (модель двух сферических звезд [6] и модель двух двухосных эллипсоидов [5, 7, 8]), применительно к высокоточным кривым блеска HD 209458 хорошо согласуются между собой.

Скорее всего, описанные трудности с интерпретацией связаны с тем, что автор работы [5] для оценки ошибок искомым параметров использовал метод Монте-Карло, который, как известно (см., например [9–12]), позволяет получить лишь “внутренние” ошибки (основанные на статистике нормального распределения найденных центральных значений параметров при жестком предположении о том, что модель идеально верна), которые могут быть занижены в 3–5 раз [9].

Поэтому мы дополнительно проанализировали высокоточные кривые блеска HD 209458 из работ [1, 2]. При этом, помимо использования для оценки ошибок параметров метода дифференциальных поправок, мы применили метод доверительных областей (см., например [13]). Данный метод использует статистику “внешнего” распределения наблюдаемых значений кривой блеска, порожденную этими нормально распределенными величинами, — функционал невязки, линейно зависящий от квадратов разностей наблюдаемых и теоретических значений кривой блеска (статистику с законом распределения χ^2_M , где M — число наблюдаемых точек на кривой блеска).

В методе доверительных областей, в отличие от методов Монте-Карло и дифференциальных поправок (которые эквиваленты друг другу [11, 12]), поиск и центральных значений параметров, и их ошибок осуществляется в рамках одной и той же статистики (например, статистики с законом распределения χ_M^2). При этом находятся “внешние” ошибки параметров, которые не зависят от конкретного вида распределения центральных значений искомым параметров. Кроме того, использование статистики с законом распределения χ_M^2 позволяет избежать искусственного предположения о том, что используемая модель идеально верна.

С использованием значений ошибок параметров, найденных методом доверительных областей (“внешних” ошибок), нам удалось согласовать между собой результаты интерпретации как многоцветных кривых блеска HD 209458, так и кривых блеска, полученных в разные эпохи. Кроме того, мы подтвердили значимое расхождение между наблюдаемыми и теоретическими зависимостями коэффициентов потемнения диска звезды от длины волны, найденные в работе [5].

2. МЕТОД ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Мы использовали модель двух сферических звезд на круговой орбите в отсутствие эффектов отражения и эллипсоидальности. Согласно данным, полученным для экзопланеты CoRoT-1b [3], орбитальный период которой ($P_{orb} = 1.509^d$) вдвое короче, чем в системе HD 209458 ($P_{orb} = 3.52474859^d$), полная наблюдаемая амплитуда эффекта отражения от планеты не превышает $\sim 0.0001^m$, а амплитуда эффекта эллипсоидальности оптической звезды, по-видимому, в несколько раз меньшей этой величины. Отсюда следует, что в пределах затмения (длительность которого составляет для системы CoRoT-1b ~ 0.07 от орбитального периода) изменения блеска, обусловленные эффектом отражения и эллипсоидальности, не превышают 10^{-5} зв. вел., что пренебрежимо мало. Учитывая неопределенность в форме планеты, связанную с возможным наличием у нее полупрозрачной атмосферы (протяженность которой может достигать $\sim 5\%$ от ее радиуса [14]), неопределенность, связанную с возможным быстрым осевым вращением планеты и ее вращательной деформацией, а также малую степень заполнения планетой своей полости Роша ($\mu < 0.5$), сферическое приближение для планеты можно считать вполне удовлетворительным.

При расчете кривой блеска в качестве функций распределения яркости по диску звезды использовался линейный закон потемнения к краю диска с

линейным коэффициентом потемнения к краю x

$$I(\rho) = I_0 \left(1 - x + x \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right), \quad (1)$$

и квадратичный закон потемнения к краю диска, отличающийся от линейного дополнительным слагаемым, содержащим квадратичный коэффициент потемнения к краю y

$$I(\rho) = I_0 \left[1 - x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right) - y \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right)^2 \right]. \quad (2)$$

Здесь ρ — полярное расстояние от центра диска звезды, I_0 — яркость в центре диска, а r — радиус диска звезды. Яркость в центре диска компонента 1 (звезды) далее будем обозначать как $I_0^{(1)}$. Яркость $I_0^{(2)}$ в центре компонента 2 (планеты) и соответственно яркость в любой точке ее диска предполагается равной нулю. Компонент 2 (планета) в орбитальной фазе $\theta = \pi$ затмевает компонент 1 (звезду). Единицей длины в наших моделях является расстояние между центрами звезды и планеты $a = 1$; орбита считается круговой. “Третий свет” в модели отсутствует. Радиусы звезды и планеты обозначим как r_1, r_2 , соответственно. Искомые параметрами модели являются радиусы звезды и планеты r_1, r_2 , соответственно, угол наклона орбиты i , коэффициент потемнения к краю x_1 , а в случае квадратичного закона потемнения к краю также и коэффициент потемнения y_1 .

Введем новые переменные

$$X_0^{(1)} = I_0^{(1)}(1 - x_1), \quad X_1^{(1)} = I_0^{(1)}x_1 \quad (3)$$

для линейного закона потемнения к краю и

$$X_0^{(1)} = I_0^{(1)}(1 - x_1 - 2y_1), \quad (4)$$

$$X_1^{(1)} = I_0^{(1)}(x_1 + 2y_1), \quad X_2^{(1)} = I_0^{(1)}y_1$$

для квадратичного закона потемнения к краю.

Тогда выражение для яркости в линейном законе потемнения к краю запишется как

$$I^{(1)}(\rho) = \left(X_0^{(1)} + X_1^{(1)} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_1^2}} \right), \quad (5)$$

а в квадратичном — как

$$I^{(1)}(\rho) = \left(X_0^{(1)} + X_1^{(1)} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_1^2}} + X_2^{(1)} \frac{\rho^2}{r_1^2} \right). \quad (6)$$

В таких переменных яркость в точке диска звезды линейно зависит от параметров $X_0^{(1)}$, $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$. При этом яркость в точке диска звезды для нелинейного закона потемнения отличается от соответствующей яркости для линейного закона потемнения одним слагаемым, содержащим коэффициент $X_2^{(1)}$. Компонент 2 в орбитальной фазе $\theta = \pi$ затмевает компонент 1.

Полный блеск звезды (компонент 1), который совпадает с полным блеском системы вне затмения, равен

$$L^{full} = 2\pi \int_0^{r_1} I^{(1)}(\rho) \rho d\rho = \quad (7)$$

$$= \pi r_1^2 \left(X_0^{(1)} + \frac{2}{3} X_1^{(1)} \right) = \pi r_1^2 I_0^{(1)} \left(1 - \frac{x_1}{3} \right)$$

в модели с линейным законом потемнения к краю и

$$L^{full} = 2\pi \int_0^{r_1} I^{(1)}(\rho) \rho d\rho = \quad (8)$$

$$= \pi r_1^2 \left(X_0^{(1)} + \frac{2}{3} X_1^{(1)} + \frac{1}{2} X_2^{(1)} \right) =$$

$$= \pi r_1^2 I_0^{(1)} \left(1 - \frac{x_1}{3} - \frac{y_1}{6} \right)$$

в модели с квадратичным законом потемнения к краю.

Полный блеск звезды в модели с квадратичным законом потемнения к краю

$$L^{(s)} = 2\pi \int_0^r I^{(s)}(\rho) \rho d\rho =$$

$$= X_0^{(s)} \pi r_s^2 + \frac{2}{3} X_1^{(s)} \pi r_s^2 + \frac{1}{2} X_2^{(s)} \pi r_s^2,$$

$$s = 1, 2.$$

Здесь для универсализации внешнего вида расчетных формул минимумов кривой блеска и сокращения числа уравнений затмеваемому компоненту (ближний компонент по отношению к земному наблюдателю) приписан индекс n , затмеваемому компоненту (дальний компонент по отношению к земному наблюдателю) — индекс f . При непосредственном расчете минимумов кривой блеска в диапазоне значений орбитальной фазы $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ (или $\cos \theta > 0$) переменную r_n следует заменить на r_1 , а переменную r_f — на r_2 . В диапазоне значений орбитальной фазы $\cos \theta < 0$ следует выполнить обратную замену: переменную r_f следует заменить на r_1 , а переменную r_n — на r_2 .

В новых обозначениях падение блеска при затмении составляет

$$L^{dec}(\Delta, r_f, r_n, X_0^{(f)}, X_1^{(f)}, X_2^{(f)}) = \quad (9)$$

$$= \iint_{S(\Delta)} I^{(f)}(S) dS,$$

где Δ — расстояние между центрами дисков, $S(\Delta)$ — область перекрытия дисков.

Для вычисления интеграла (9), также как это было сделано в [11], введем функции

$$Ax \equiv \begin{cases} \pi, & x < -1, \\ \arccos x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad (10)$$

и

$$Qx \equiv \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(\Delta, x, y) \equiv \mathcal{A} \left(\frac{x^2 + \Delta^2 - y^2}{2x\Delta} \right),$$

$$Q(\Delta, r_f, r_n) \equiv$$

$$\equiv \mathcal{Q} \left[\left(r_f^2 - (\Delta - r_n)^2 \right) \left[(\Delta + r_n)^2 - r_f^2 \right] \right],$$

а также полярную систему координат с началом в центре диска затмеваемой звезды и полярным углом φ , отсчитываемым в направлении от центра диска затмеваемого компонента “ f ” к центру диска затмеваящего компонента “ n ”. Тогда имеем:

$$L^{dec}(\Delta, r_f, r_n, X_0^{(f)}, X_1^{(f)}, X_2^{(f)}) = \quad (11)$$

$$= \int_0^{r_f^2} \Psi(\Delta, \sqrt{\rho}, r_n) I^{(f)}(\sqrt{\rho}) d\rho =$$

$$= X_0^{(f)} L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n) + X_1^{(f)} L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n) +$$

$$+ X_2^{(f)} L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n).$$

Выражения для вычисления L_0^{dec} и L_1^{dec} получены в [11].

Для L_2^{dec} , аналогично тому, как в [11] было получено выражение для L_0^{dec} , имеем

$$L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n) = \frac{2}{r_f^2} \int_0^{r_f} \rho^3 \Psi(\Delta, \rho, r_n) d\rho = \quad (12)$$

$$= \Psi(\Delta, r_f, r_n) \frac{r_f^2}{2} + \frac{r_n^2}{2r_f^2} (2\Delta^2 + r_n^2) \Psi(\Delta, r_n, r_f) -$$

$$- \frac{1}{8r_f^2} (\Delta^2 + 5r_n^2 + r_f^2) Q(\Delta, r_f, r_n).$$

Частные производные L_2^{dec} равны

$$\frac{\partial L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial \Delta} = \frac{2}{r_f^2} \Delta r_n^2 \Psi(\Delta, r_n, r_f) - \quad (13)$$

$$- \frac{\Delta^2 + r_n^2 + r_f^2}{2\Delta r_f^2} Q(\Delta, r_f, r_n),$$

$$\frac{\partial L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_f} = 2r_f \Psi(\Delta, r_f, r_n) - \quad (14)$$

$$- \frac{2}{r_f} L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n),$$

$$\frac{\partial L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_n} = \frac{2}{r_f^2} r_n (\Delta^2 + r_n^2) \times \quad (15)$$

$$\times \Psi(\Delta, r_n, r_f) - \frac{2}{r_f^2} r_n Q(\Delta, r_f, r_n).$$

Для круговой орбиты расстояние между центрами дисков звезд Δ зависит от фазы θ и угла наклона орбиты i как

$$\Delta(\theta, i) = \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta}. \quad (16)$$

Кривая блеска двойной системы в модели с линейным законом потемнения к краю описывается функцией

$$L(\theta, r_1, r_2, i, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}) = \quad (17)$$

$$= X_0^{(1)} L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_1^{(1)} L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i),$$

а в модели с квадратичным законом потемнения к краю — функцией

$$L(\theta, r_1, r_2, i, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}) = \quad (18)$$

$$= X_0^{(1)} L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_1^{(1)} L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + \\ + X_2^{(1)} L_2^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i).$$

Выражения для вычисления функций $L_{0,1,2}^{(1)}$ получены в работах [11, 12]. Отметим, что в работе [12] в выражении (16) для L_2^{dec} была допущена опечатка — пропущен коэффициент $1/r_f^2$ перед интегралом. Поэтому для вычисления L_2^{dec} и их производных следует использовать выражения (12)–(15) данной работы, а не выражения (16)–(19) из [12].

В наших моделях мы предполагаем полный блеск L^{full} известным (а при вычислениях нормированным на единицу). При этом мы исключаем с

помощью (7) параметр

$$X_1^{(1)} = \frac{3L^{full}}{2\pi r_1^2} - \frac{3}{2} X_0^{(1)} \quad (19)$$

в модели с линейным законом потемнения к краю и с помощью (8) параметр

$$X_2^{(1)} = \frac{2L^{full}}{\pi r_1^2} - 2X_0^{(1)} - \frac{4}{3} X_1^{(1)} \quad (20)$$

в модели с квадратичным законом потемнения к краю. Подставляя (19) и (20) соответственно в (17) и (18) получим выражения для кривых блеска при фиксированном полном блеске системы:

$$L(\theta, r_1, r_2, i, X_0^{(1)}) = \quad (21)$$

$$= \frac{3L^{full}}{2\pi r_1^2} L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) +$$

$$+ X_0^{(1)} \left(L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) - \frac{3}{2} L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) \right),$$

$$L(\theta, r_1, r_2, i, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}) = \quad (22)$$

$$= \frac{2L^{full}}{\pi r_1^2} L_2^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_0^{(1)} (L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) -$$

$$- 2L_2^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i)) + X_1^{(1)} (L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) -$$

$$- \frac{4}{3} L_2^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i)).$$

Также можно исключить $I_0^{(1)}$ в (3) и (4), выразив его с помощью правых частей (7) и (8), соответственно. Тогда получим:

$$X_0^{(1)} = \frac{3L^{full}(1 - x_1)}{\pi r_1^2(3 - x_1)} \quad (23)$$

для линейного закона потемнения к краю и

$$X_0^{(1)} = \frac{6L^{full}(1 - x_1 - 2y_1)}{\pi r_1^2(6 - 2x_1 - y_1)}, \quad (24)$$

$$X_1^{(1)} = \frac{6L^{full}(x_1 + 2y_1)}{\pi r_1^2(6 - 2x_1 - y_1)}$$

для квадратичного закона потемнения к краю. Выражениями, обратными (23) и (24), будут соответственно

$$x_1 = \frac{6L^{full}}{\pi r_1^2 X_0^{(1)} - 3L^{full}} \quad (25)$$

и

$$x_1 = \frac{\pi r_1^2(12X_0^{(1)} + 11X_1^{(1)}) - 12L^{full}}{3\pi r_1^2(X_0^{(1)} + X_1^{(1)})}, \quad (26)$$

$$y_1 = \frac{6L^{full} - \pi r_1^2(6X_0^{(1)} + 4X_1^{(1)})}{3\pi r_1^2(X_0^{(1)} + X_1^{(1)})}.$$

При поиске минимальных значений функционала невязки мы сначала минимизируем его по линейным параметрам $X_0^{(1)}$ и $X_1^{(1)}$, поскольку за счет линейности такую минимизацию можно провести аналитически, т.е. получить аналитические выражения для величин $\widetilde{X}_0^{(1)}(r_1, r_2, i)$ и $\widetilde{X}_1^{(1)}(r_1, r_2, i)$, которые доставляют минимум функционалу невязки при фиксированных r_1 , r_2 и i , а также для их производных. Как известно, при минимизации по линейным параметрам не меняется вид статистического распределения минимальных невязок, а лишь уменьшается число степеней свободы этого распределения. Дальнейшая минимизация производится уже в отношении нелинейной функции трех переменных r_1 , r_2 , i . При этом в методе дифференциальных поправок непосредственно находятся центральные значения r_1 , r_2 , i , $X_0^{(1)}$ и $X_1^{(1)}$ и их ковариации. После этого осуществляется переход к параметрам r_1 , r_2 , i , x_1 и y_1 по формулам (25) и (26). При этом оценки для их дисперсий в методе дифференциальных поправок находятся как для модели, полученной путем соответствующей замены переменных [12]. Следует подчеркнуть, что минимизация по нелинейным параметрам изменяет вид статистического распределения минимальных невязок [10], которое лишь асимптотически (при $M \rightarrow \infty$) стремится к распределению χ_M^2 . Поскольку в нашем случае число точек на кривых блеска HD 209458 велико ($M \gtrsim 500$), можно считать, что процедура минимизации функционала невязки между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска позволит получить надежные асимптотические доверительные области для искомого параметров модели. Далее по тексту мы коэффициенты потемнения в модели с линейным законом потемнения обозначаем как x без нижнего индекса “1”, в модели же с квадратичным законом потемнения линейный и квадратичный коэффициент потемнения по-прежнему обозначаются как x_1 и y_1 . Радиус звезды r_1 и радиус планеты r_2 мы далее в некоторых местах для наглядности обозначаем как r_s и r_p , соответственно.

3. НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

В нашей работе выполнен анализ высокоточных транзитных кривых блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работ [1, 2]. Кривые блеска были получены на Космическом телескопе имени Хаббла (HST).

Наблюдаемая кривая блеска, представленная в [1], получена на HST в апреле-мае 2000 г. Спектры получены с использованием спектрометра STIS со спектральной решеткой G750M. Наблюдения проводились в диапазоне 5813–6382 Å с разрешением $R = \lambda/\Delta\lambda = 5440$ (более подробно см.

работу [1]). Нормированная кривая блеска транзита экзопланеты по диску звезды представлена на рис. 1. Кривая блеска включает в себя 556 индивидуальных значений блеска двойной системы. Среднеквадратичная ошибка индивидуального измерения для разных точек кривой блеска находится в пределах от $\sigma_i^{obs} = 1.13 \times 10^{-4}$ до $\sigma_i^{obs} = 2.47 \times 10^{-4}$ (в долях внезатменной интенсивности). Величины относительных ошибок (в долях глубины затмения) лежат в пределах от $\sim 7 \times 10^{-3}$ до $\sim 1.5 \times 10^{-2}$.

В работе [2] представлены данные, полученные на HST с 3 мая по 6 июля 2003 г. Спектры получены с использованием спектрометра STIS со спектральными решетками G430L (диапазон 2930–5670 Å) и G750L (диапазон 5320–10190 Å). Привлечение двух спектральных решеток позволило охватить достаточно широкий волновой диапазон от 2900 Å до 10300 Å. Для дальнейшего анализа данных диапазон длин волн авторы работы [2] разделили на десять равных частей, что позволило получить кривые блеска в разных фотометрических полосах. Кривые блеска с центральными длинами волн 3201, 3750, 4300, 4849, 5398 Å включают в себя по 505 индивидуальных значений блеска. Кривые блеска с центральными длинами волн 5802, 6779, 7755, 8732, 9708 Å включают в себя по 548 индивидуальных значений блеска. Наблюдаемые транзитные кривые блеска из работы [2] представлены на рис. 2. Среднеквадратичная ошибка индивидуального измерения колеблется от $\sigma_i^{obs} = 1.79 \times 10^{-4}$ до $\sigma_i^{obs} = 6.09 \times 10^{-4}$ (по отношению к глубине затмения это составляет от $\sim 10^{-2}$ до $\sim 3 \times 10^{-2}$). Более детальная информация о наблюдательных данных и способе их обработки содержится в [2]. Мы предполагаем, что ошибки наблюдений описываются нормальным законом распределения, а систематические ошибки пренебрежимо малы.

4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КРИВЫХ БЛЕСКА HD 209458 В РАМКАХ ЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА ПОТЕМНЕНИЯ

При анализе наблюдаемых кривых блеска искомыми параметрами являлись радиус экзопланеты r_p , радиус звезды r_s , наклонение орбиты i и линейный коэффициент потемнения к краю для звезды x . Орбитальный период системы принят равным $P_{orb} = 3.52474859^d$ [2], отношение масс планеты и звезды $q = m_p/m_s = 0.00055$ [2], орбита системы предполагалась круговой, радиус относительной орбиты принят равным единице.

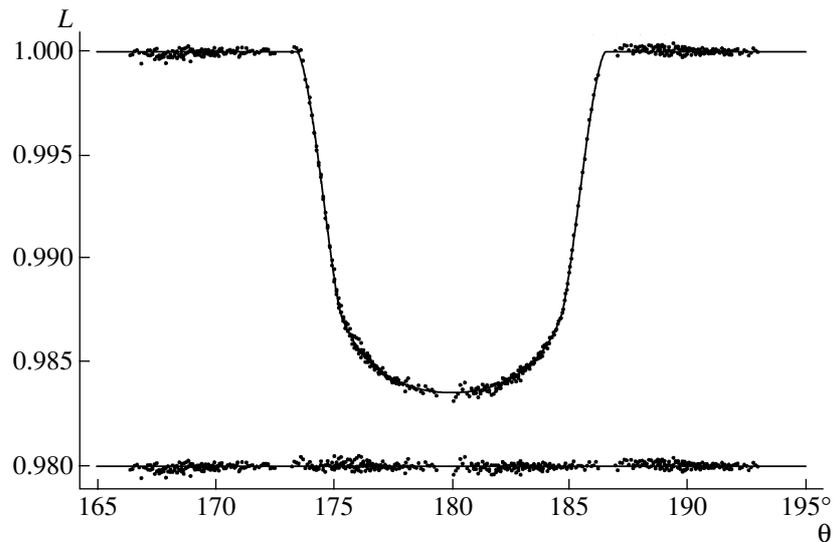


Рис. 1. Наблюдаемая (точки) и теоретическая (сплошная линия) кривые блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [1]. Внизу показаны отклонения наблюдаемых значений блеска от теоретической кривой блеска, рассчитанной в рамках модели с нелинейным (квадратичным) законом потемнения к краю.

4.1. Кривая блеска из работы Брауна и др. [1]

В табл. 1 приведены центральные значения найденных параметров и их ошибки, полученные методом дифференциальных поправок (который, как уже отмечалось, эквивалентен методу Монте-Карло [11, 12]) и методом доверительных областей в статистике с законом распределения χ^2_P (P — число искоемых параметров) и в статистике с законом распределения χ^2_M (M — число наблюдаемых точек). Принят уровень доверия $\gamma = 95\%$, что в случае метода дифференциальных поправок соответствует 2σ , где σ — стандартное отклонение.

Проверка адекватности модели наблюдательным данным показала, что отношение минимального значения невязки к $M - P$ (которое распределено по закону приведенного хи-квадрат с $M - P$ степенями свободы) $\chi^2_{red} = \widetilde{\chi^2_{M-P}} \simeq 1.103$. С использованием результатов работы [12] приходим к выводу, что наша модель может быть отвергнута на уровне значимости $\alpha \lesssim 0.05889$ (уровень доверия, соответствующий полуинтервалу $\sim 1.889\sigma$). Таким образом, наша модель отвергается на весьма низком уровне значимости ($\alpha = 6\%$) и поэтому является не очень хорошей, хотя и не безнадежно плохой, поскольку в нашем случае имеется возможность оценить доверительные интервалы для искоемых параметров в рамках статистики с законом распределения χ^2_M на уровне доверия $\gamma = 0.95$ и дать наиболее консервативные оценки ошибок параметров. Отметим, что для данной наблюдаемой реализации кривой блеска ошибки параметров в рамках метода доверительных областей, полученные с использованием статистики с

законом распределения χ^2_P , оказываются больше, чем полученные с использованием статистики с законом распределения χ^2_M . Вероятность такого события, рассчитанная с помощью формулы для закона распределения отношения этих интервалов из [12] (в предположении того, что модель идеально верна), весьма невелика — примерно 4%.

То, что наша модель оказалась не очень хорошей (отвергая модель, мы ошибаемся в менее чем в $\sim 6\%$ случаев, а в более чем $\sim 94\%$ случаев мы правы) не кажется удивительным. Во-первых, мы используем линейный закон потемнения, который лишь грубо описывает распределение яркости по диску звезды. Кроме того, в нашей модели мы не учитываем мелкой структуры на диске звезды — пятен, факелов, активных областей, — размеры которых могут быть сравнимы с размерами затмевающей планеты. Также мы не учитываем возможную физическую микропеременность звезды. Это должно приводить к коротким нерегулярностям в изменении блеска звезды при затмении ее планетой, превышающим статистическую погрешность наблюдений. Такие нерегулярности видны, особенно в нижней части кривой блеска Брауна и др. (рис. 1). Здесь отклонения блеска от средней кривой достигают (а иногда и превышают) 5×10^{-4} зв. вел., что в несколько раз больше статистической ошибки наблюдений. Именно то, что наша модель оказалась не очень хорошей, вынуждает нас брать уровень доверия 95%, а не 68%, как это принято делать в случае “хороших” моделей. За критерий “хорошей” модели удобно взять $\chi^2_{red} =$

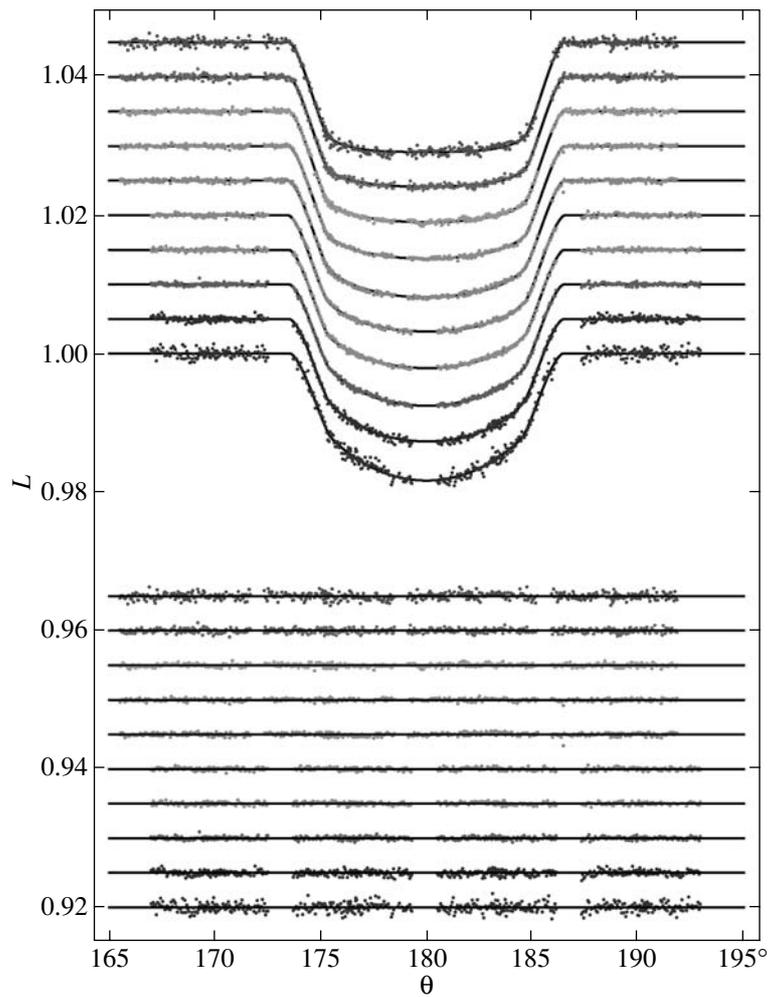


Рис. 2. Наблюдаемые кривые блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [2], построенные для длин волн (снизу вверх) 3201, 3750, 4300, 4849, 5398, 5802, 6779, 7755, 8732 и 9708 Å. Внизу указаны соответствующие распределения невязок. Сплошные линии — теоретические кривые, полученные в рамках модели с нелинейным (квадратичным) потемнением к краю.

$\widetilde{\chi^2_{M-P}} \leq 1 + 2t$, где t — величина порядка $\frac{P}{M}$ (из такого условия следует прохождение модели на уровне доверия $\gamma \rightarrow 50\%$ при $M \rightarrow \infty$).

В табл. 1 даны проекции асимптотической доверительной области D в пространстве четырех искомым параметров на оси параметров r_p, r_s, i, x (доверительные интервалы). Вероятность накрытия точного значения параметра указанной проекцией доверительной области D — доверительным интервалом, — превышает 95%. Вероятность накрытия точного решения задачи асимптотической доверительной областью D гарантируется близкой к заданной вероятности 95% (поскольку число точек на кривой блеска велико — $M > 500$). Вероятность совместного накрытия точного решения всеми проекциями доверительной области D (соответствующая попаданию точного решения в параллелепипед

в пространстве параметров, объемлющий доверительную область D) превышает заданную вероятность 95%. Подчеркнем, что все эти утверждения по поводу вероятностей накрытия точного решения доказаны на строгом математическом уровне [13], а также подтверждены результатами конкретного численного моделирования [11, 12]. Таким образом, задавая в качестве ошибок параметров проекции доверительной области D на оси этих параметров (доверительные интервалы), мы заведомо гарантируем то, что вероятность накрытия точного решения доверительной областью D равна заданной вероятности 95%. Это и дает нам основания брать в качестве консервативных оценок ошибок искомым параметров проекции доверительной области D на оси этих параметров (табл. 1), которые можно считать “внешними” ошибками искомым параметров r_p, r_s, i, x .

Таблица 1. Результаты интерпретации наблюдаемой кривой блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [1] в рамках линейного закона потемнения к краю: ошибки параметров получены в рамках метода дифференциальных поправок и метода доверительных областей с использованием статистики распределенной по закону χ^2_P (где P — число искоемых параметров), а также в рамках статистики с законом распределения χ^2_M (где M — число точек на кривой блеска)

Параметр	Метод дифференциальных поправок (2σ)	Метод доверительных областей, χ^2_P (95%)	Метод доверительных областей, χ^2_M (95%)	Значения параметров из работы Соуворза [5] (1σ)
r_s, R_\odot	0.11469 ± 0.000759	0.1147 ± 0.001186	0.1147 ± 0.00079	0.11482 ± 0.00035
r_p, R_\odot	0.014057 ± 0.0001149	0.01406 ± 0.0001808	0.01406 ± 0.0001211	0.014076 ± 0.000055
i , град	86.48 ± 0.083	86.48 ± 0.1318	86.48 ± 0.13	86.472 ± 0.038
x	0.49452 ± 0.009306	0.4944 ± 0.01406	0.4945 ± 0.00954	0.494 ± 0.004
χ^2_{red}		1.103		1.1457

Поясним метод построения проекции доверительной области D на ось параметра. Проекция четырехмерной доверительной области D на ось одного параметра (например, параметра r_p) строится следующим образом. Невязка между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска минимизируется по всем параметрам, кроме одного (например, параметра r_p). Затем строится кривая (близкая к параболе) этих минимальных невязок как функция одного параметра (например, параметра r_p). Эта кривая пересекается прямой (критическим уровнем), соответствующей заданному уровню значимости α (в рамках выбранной статистики — χ^2_M , χ^2_P). Значения параметра r_p , для которых невязка, минимальная по всем остальным параметрам (r_s , i , x), меньше критического уровня, объединяются в доверительный интервал, который и является проекцией четырехмерной доверительной области D на ось параметра r_p . Этот доверительный интервал накрывает точное значение параметра r_p с вероятностью, большей, чем заданный уровень доверия $\gamma = 1 - \alpha$. При этом гарантируется, что точное решение задачи (совокупность точных значений параметров r_p , r_s , i , x) накрывается четырехмерной доверительной областью D с заданной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$.

На рис. 3 приведена проекция доверительной области D на плоскость параметров r_p , i . Данная проекция характеризует форму доверительной области D . Изобразить же всю многомерную область D на бумаге не представляется возможным. Прямоугольник изображает проекцию области, определяемой ошибками параметров (на уровне 2σ), найденными методом дифференциальных поправок. Ввиду того, что модель с линейным коэффициентом потемнения в применении к высокоточной кривой блеска Брауна и др. [1] отвергается на весьма низком уровне значимости

(см. выше), различие между габаритами проекций доверительных областей, построенных на основе метода дифференциальных поправок и метода доверительных областей, в данном случае не очень велико (см., однако, далее рис. 11 и 12).

Вероятность накрытия точного значения для каждого из параметров интервалом $\pm 2\sigma$ соответствует заданной вероятности $\gamma = 95\%$. Однако вероятность совместного накрытия точного решения всеми интервалами, полученными в методе дифференциальных поправок, меньше (примерно ~ 1.5 раза) заданной вероятности $\gamma = 95\%$. Таким образом, указывая “внутренние” ошибки параметров, полученные методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло в предположении того, что модель идеально верна, мы заведомо занижаем вероятность одновременного попадания всех искоемых параметров в соответствующую четырехмерную область ошибок (см., также далее рис. 11 и 12). Этим и объясняется то, что результаты интерпретации наблюдательных данных, полученных в разные эпохи, в пределах “внутренних” ошибок часто не согласуются между собой, а сами значения ошибок параметров, найденные методом дифференциальных поправок (или методом Монте-Карло), часто оказываются нереалистично малыми.

4.2. Многоцветные кривые блеска из работы Кнутсона и др. [2]

Кривые блеска системы HD 20945, полученные в работе [2] для $\lambda = 3201, 3750, 4300, 4849, 5398, 5802, 6779, 7755, 8732, 9708 \text{ \AA}$, приведены на рис. 2 (длина волны λ возрастает снизу вверх). В табл. 2–4 приведены результаты интерпретации этих кривых блеска с использованием разных методов оценки ошибок искоемых параметров: методов доверительных областей в статистике χ^2_M

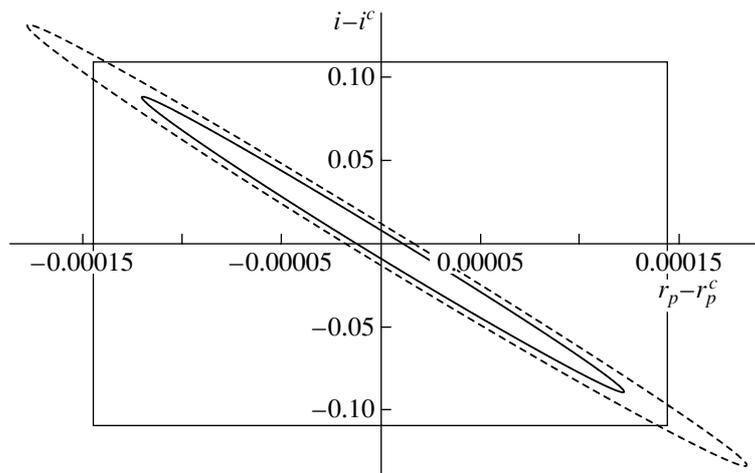


Рис. 3. Проекция доверительной области D (на уровне доверия 95%) на плоскость (r_p, i) , полученная при интерпретации кривой блеска из работы [1] в рамках модели с линейным законом потемнения. Малый “эллипс” (сплошная линия) соответствует доверительной области, полученной с использованием статистики с законом распределения χ^2_M , большой “эллипс” (штриховая линия) — с использованием статистики с законом распределения χ^2_P . Прямоугольник соответствует проекции доверительной области на уровне $2\sigma_{est}$, полученной методом дифференциальных поправок.

(табл. 2; здесь прочерки соответствуют вырождению “точной” доверительной области в пустое множество ввиду того, что модель отвергается на выбранном уровне значимости $\alpha = 5\%$) и в статистике χ^2_P (табл. 3), а также метода дифференциальных поправок (табл. 4; в статистике нормального распределения найденных центральных значений искоемых параметров и для гипотезы о том, что модель идеально верна). Особенно велико значение приведенного χ^2_{red} для кривой блеска $\lambda = 5802 \text{ \AA}$ ($\chi^2_{red} = 1.299$; соответствующий уровень значимости, по которому отвергается модель, очень мал: $\alpha = 5.168 \times 10^{-6}$). По-видимому, в эту кривую блеска вкрались какие-то дополнительные источники ошибок. Для остальных длин волн значения χ^2_{red} лежат в разумных пределах: $\chi^2_{red} = 1.021 - 1.122$.

Проверка адекватности модели наблюдательным данным показала, что минимизированное значение невязки в рамках статистики приведенного хи-квадрат превышает единицу (табл. 3).

Использование статистики с законом распределения χ^2_M при интерпретации кривых блеска на $\lambda = 3201, 3750, 4849, 5398, 6779, 7755, 8732 \text{ \AA}$ показало, что наша модель не отвергается по уровню значимости $\alpha = 5\%$ (и может быть принята). Во всех этих случаях могут быть построены “точные” (т.е. накрывающие точное решение с заданной вероятностью $\gamma = 95\%$) доверительные области D и получены проекции области D на оси параметров r_p, r_s, i, x (доверительные интервалы), которые можно считать наиболее консервативными “внешними” ошибками параметров (табл. 2). Для трех

кривых блеска ($\lambda = 4300, 5802, 9708 \text{ \AA}$) наша модель отвергается по уровню значимости $\alpha < 5\%$ и, таким образом, является “плохой”. Для этих кривых блеска удастся получить лишь “внешние” ошибки параметров (доверительные интервалы) в рамках статистики с законом распределения χ^2_P , соответствующие асимптотической доверительной области D, а также “внутренние” ошибки параметров в рамках статистики нормального распределения найденных центральных значений параметров с применением метода дифференциальных поправок. Хотя, как отмечалось в работе [10], не следует забывать и о том, что на практике мы имеем дело не с полной случайной наблюдаемой функцией (кривой блеска), а лишь с ее конкретной реализацией. Поэтому не исключена и возможность того, что возникшие трудности с интерпретацией (модель отвергается на весьма низком уровне значимости, и доверительная область D в рамках статистики с законом распределения χ^2_M вырождается в пустое множество) связаны не с недостатком модели, а со случайным уклонением наблюдаемой функции. Для другой реализации наблюдаемой функции, например, кривой блеска, полученной в другую эпоху, применяемая модель может оказаться вполне удовлетворительной и будет отвергаться на достаточно высоком уровне значимости, что позволит построить доверительную область D в рамках статистики с законом распределения χ^2_M . Это и дает нам основания строить асимптотическую доверительную область в рамках статистики с законом распределения χ^2_P (которая, по определению, никогда не вырождается в пустое множество) даже в том

Таблица 2. Результаты интерпретации наблюдаемых многоцветных кривых блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [2] в рамках линейного закона потемнения к краю: ошибки параметров получены в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения χ^2_M ; уровень доверия принят равным $\gamma = 0.95$

$\lambda, \text{Å}$	r_s	$\Delta_M(r_s)$	r_p	$\Delta_M(r_p)$	i	$\Delta_M(i)$	x	$\Delta_M(x)$
3201	0.112422	0.00909003	0.0136815	0.00168653	87.0418°	1.25441°	0.839899	0.112573
3750	0.111096	0.00518492	0.0135058	0.000908670	87.0084	0.685166	0.755113	0.0601379
4300	0.113224	—	0.0138670	—	86.9607	—	0.702653	—
4849	0.113315	0.00215386	0.0138638	0.000353872	86.6501	0.257024	0.617381	0.0267281
5398	0.114474	0.00332352	0.0140443	0.000534038	86.5317	0.387603	0.561101	0.0420762
5802	0.114536	—	0.0141229	—	86.4712	—	0.534661	—
6779	0.115384	0.00210354	0.0141542	0.000327598	86.3841	0.240432	0.436149	0.0332838
7755	0.114060	0.00232615	0.0139412	0.000348055	86.5030	0.266790	0.377645	0.0363709
8732	0.115301	0.00451503	0.0141478	0.000672640	86.3800	0.515776	0.317885	0.0829246
9708	0.114814	—	0.0141637	—	86.3856	—	0.276457	—

Таблица 3. Результаты интерпретации наблюдаемых многоцветных кривых блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [2] в рамках линейного закона потемнения к краю: ошибки параметров получены в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения χ^2_P ; уровень доверия принят равным $\gamma = 0.95$ (в последнем столбце указано значение приведенного χ^2_{red} и соответствующего уровня значимости α)

$\lambda, \text{Å}$	r_s	$\Delta_P(r_s)$	r_p	$\Delta_P(r_p)$	i	$\Delta_P(i)$	x	$\Delta_P(x)$	$\frac{\chi^2_{M-P}}{M-P} (\alpha)$
3201	0.112789	0.00564078	0.0137580	0.00103572	86.8383°	0.721357°	0.833506	0.0703594	1.103 (0.069)
3750	0.111132	0.00318612	0.0135114	0.000556307	86.9630	0.412798	0.754423	0.0371808	1.067 (0.174)
4300	0.113232	0.00197803	0.0138682	0.000343468	86.6565	0.241463	0.702492	0.0233387	1.121 (0.041)
4849	0.113315	0.00162566	0.0138639	0.000267189	86.6468	0.193893	0.617462	0.0201586	1.084 (0.118)
5398	0.114449	0.00171209	0.0140408	0.000274972	86.5227	0.198908	0.561665	0.0217482	1.046 (0.271)
5802	0.114557	0.00138946	0.0141275	0.000228711	86.4703	0.162999	0.533942	0.0205499	1.299 (5.168 × 10 ⁻⁶)
6779	0.115386	0.00125488	0.0141545	0.000195295	86.3806	0.143095	0.436699	0.0198472	1.061 (0.186)
7755	0.114069	0.00158054	0.0139423	0.000236676	86.4989	0.181210	0.378139	0.0247354	1.0739 (0.138)
8732	0.115295	0.00199596	0.0141482	0.000297907	86.3629	0.226904	0.323146	0.0361643	1.021 (0.403)
9708	0.114743	0.00268813	0.0141555	0.000389998	86.4012	0.301402	0.275733	0.0483915	1.122 (0.0334)

случае, когда модель отвергается на весьма низком уровне значимости и является “плохой”.

Интересно сравнить значения геометрических параметров системы HD 209458, полученные в разные эпохи. В табл. 5 приведены значения параметров и их ошибок для кривой блеска $\lambda\lambda 5813 - 6382) \text{ Å}$, полученной Брауном и др. [1] в апреле–мае 2000 г. и для кривой блеска с центральной длиной волны $\lambda 6779 \text{ Å}$ ($\Delta\lambda = 6279 -$

$- 7279 \text{ Å}$), полученной Кнутсоном и др. [2] в мае–июле 2003 г. Полуинтервалы максимальных различий в центральных значениях параметров составляют $\frac{|r_p^{(2000)} - r_p^{(2003)}|}{2} = 0.00004775$, $\frac{|r_s^{(2000)} - r_s^{(2003)}|}{2} = 0.00034050$, $\frac{|i^{(2000)} - i^{(2003)}|}{2} = 0.0515^\circ$. Эти различия не выходят за пределы “внутренних” ошибок 2σ и тем более не выходят

Таблица 4. Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [2] в рамках линейного закона потемнения к краю: ошибки параметров получены в рамках метода дифференциальных поправок; ошибка приведена на уровне 2σ

$\lambda, \text{Å}$	r_s^c	$2\sigma_{\text{est}}(r_s^c)$	r_p^c	$2\sigma_{\text{est}}(r_p^c)$	i^c	$2\sigma_{\text{est}}(i^c)$	x^c	$2\sigma_{\text{est}}(x^c)$
3201	0.113113	0.00424010	0.0138328	0.000794048	86.7178°	0.537230°	0.828541	0.0505626
3750	0.111175	0.00224100	0.0135199	0.000396390	86.9333	0.292384	0.753992	0.025672
4300	0.113224	0.00127895	0.0138670	0.000220652	86.6507	0.154521	0.702653	0.0153839
4849	0.113302	0.00107659	0.0138618	0.000176852	86.6440	0.1282050	0.617614	0.0134061
5398	0.114456	0.00107583	0.0140421	0.000172042	86.5177	0.1239884	0.561705	0.0140619
5802	0.114535	0.00093831	0.0141229	0.000154114	86.4712	0.1097888	0.534661	0.0144226
6779	0.115394	0.00076714	0.0141560	0.000118926	86.3777	0.0869080	0.436943	0.0125312
7755	0.114035	0.00098878	0.0139372	0.000146933	86.4998	0.1119664	0.379030	0.0157685
8732	0.115326	0.00120960	0.0141535	0.000179209	86.3547	0.1355734	0.323969	0.0223688
9708	0.114814	0.00185497	0.0141637	0.000267488	86.3856	0.2046620	0.276457	0.0342494

Таблица 5. Различия между значениями геометрических параметров, полученных по кривым блеска разных эпох: “внутренние” и “внешние” ошибки

Максимальное различие параметров	Различия в центральных значениях параметров	Метод дифференциальных поправок (2σ)	Метод доверительных областей, χ^2_P (95%)	Метод доверительных областей, χ^2_M (95%)
$\frac{ r_p^{(2000)} - r_p^{(2003)} }{2}$	0.000048	0.00012	0.00018	0.00033
$\frac{ r_s^{(2000)} - r_s^{(2003)} }{2}$	0.00034	0.00077	0.0012	0.0021
$\frac{ i^{(2000)} - i^{(2003)} }{2}$	0.051°	0.087°	0.13°	0.24°

за пределы доверительных интервалов Δ_M и Δ_P (табл. 5).

Интересно также сравнить значения геометрических параметров (r_p, r_s, i) для кривых блеска HD 209458, полученных Кнутсоном и др. [2] в одну эпоху (в мае–июле 2003 г.), но для разных длин волн. Результаты этого сравнения приведены в табл. 6. Видно, что в пределах “внутренних” ошибок 2σ значения геометрических параметров r_p, r_s, i , полученные для разных λ , не вполне согласуются между собой. В то же время при использовании “внешних” ошибок Δ_P , и особенно Δ_M , эти значения геометрических параметров хорошо согласуются.

5. ЗАВИСИМОСТЬ ЛИНЕЙНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПОТЕМНЕНИЯ ОТ ДЛИНЫ ВОЛНЫ

Поскольку простая модель с линейным законом потемнения в применении к кривым блеска Брауна

и др. [1] и Кнутсона и др. [2] не является безнадежно “плохой” и отвергается на уровне значимости α в несколько процентов (за исключением кривой блеска $\lambda = 5802 \text{ Å}$), имеет смысл проанализировать зависимость коэффициента потемнения x в линейном законе потемнения от длины волны λ и сравнить эту зависимость с соответствующей теоретической зависимостью, следующей из модели тонких звездных атмосфер.

В табл. 7 приведены найденные нами значения линейного коэффициента потемнения x и их ошибок ($2\sigma, \Delta_P, \Delta_M$) как функции λ . Минимизация функционала невязки для каждого значения λ проводилась по четырем параметрам r_p, r_s, i, x . Прочерки соответствуют случаям, когда модель отвергается на уровне значимости $\alpha < 5\%$. Как видно из табл. 7, в случае наиболее консервативной оценки “внешних” ошибок параметра x (метод, основанный на статистике χ^2_M), коэффициент потемнения x определяется с относительной погреш-

Таблица 6. Интервалы разброса найденных центральных значений искомым геометрических параметров, полученных по 10 кривым блеска для разных длин волн (в скобках указано отношение полуинтервала $(\max - \min)/2$ к соответствующим средним значениям интервалов ошибки из табл. 2, 3, 4)

Параметр	Максимальный разброс центральных значений ($\min - \max$)	Метод дифференциальных поправок (2σ)	Метод доверительных областей, χ^2_P (95%)	Метод доверительных областей, χ^2_M (95%)
r_s	0.111096–0.115394	0.112373–0.115507 (1.37)	0.112076–0.115984 (1.10)	0.109620–0.117820 (0.52)
r_p	0.0135058–0.0141542	0.0137074–0.0142326 (1.23)	0.013667–0.014293 (1.04)	0.013220–0.014600 (0.47)
$k = r_p/r_s$	0.121609–0.123362	0.121876–0.123264 (1.26)	0.12157–0.12357 (0.88)	0.12077–0.124219 (0.47)
i , град	86.3547–87.0400	86.36–86.74 (1.82)	86.31–86.77 (1.49)	86.13–87.15 (0.67)

Таблица 7. Коэффициенты потемнения к краю звездного диска, полученные в предположение линейного закона потемнения: центральные значения и интервалы ошибки получены в рамках метода дифференциальных поправок (ошибка приведена на уровне 2σ) и метода доверительных областей с использованием статистик с законами распределения χ^2_P и χ^2_M (уровень доверия принят равным $\gamma = 0.95$)

λ , Å	x^c	$2\sigma_{\text{est}}(x^c)$	x	$\Delta_P(x)$	x	$\Delta_M(x)$
3201	0.828541	0.0505626	0.833506	0.0703594	0.839899	0.112573
3750	0.753992	0.0256720	0.754423	0.0371808	0.755113	0.0601379
4300	0.702653	0.0153839	0.702492	0.0233387	–	–
4849	0.617614	0.0134061	0.617462	0.0201586	0.617381	0.0267281
5398	0.561705	0.0140619	0.561665	0.0217482	0.561101	0.0420762
5802	0.534661	0.0144226	0.533942	0.0205499	–	–
6779	0.436943	0.0125312	0.436699	0.0198472	0.436149	0.0332838
7755	0.379030	0.0157685	0.378139	0.0247354	0.377645	0.0363709
8732	0.323969	0.0223688	0.323146	0.0361643	0.317885	0.0829246
9708	0.276457	0.0340324	0.275733	0.0483915	–	–

ностью 8%–13% для синего конца спектра ($\lambda = 3201\text{--}3750$ Å), 4%–8% для видимого диапазона ($\lambda = 4849\text{--}6779$ Å) и 8%–26% для красного конца спектра ($\lambda = 7755\text{--}8732$ Å).

Графически зависимость линейного коэффициента x (в линейном законе потемнения к краю) от длины волны λ представлена на рис. 4 и 5. В качестве теоретической зависимости изменения коэффициента x с длиной волны использованы результаты работы Кларэ [15] для фотометрических систем *ugriz* и *UBVRIJ*. Использование разных фотометрических систем позволяет выяснить, насколько зависимость $x(\lambda)$ обусловлена выбором соответствующей фотометрической системы (необходимость такой проверки подчеркивалась в работе [5]).

На рис. 4 представлены найденные нами центральные значения линейного коэффициента по-

темнения x и их “внутренние” ошибки на уровне 2σ , полученные методом дифференциальных поправок. В целом наши результаты хорошо согласуются с результатами, полученными в работе Соуворза [5]. Из рис. 4 видно, что значения линейного коэффициента потемнения x , полученные из анализа наблюдаемых кривых блеска, расходятся с теоретическими значениями.

На рис. 5 приведены центральные значения линейного коэффициента потемнения x и наиболее консервативные оценки “внешних” ошибок, которые были получены методом доверительных областей, опирающемся на статистику с законом распределения χ^2_M . Напомним, что принятый нами уровень доверия $\gamma = 95\%$. Здесь же даны соответствующие теоретические зависимости $x(\lambda)$ из работы Кларэ [15]. Несмотря на увеличение интервала ошибок коэффициента потемнения x в 2–4 раза по сравнению с “внутренними” ошибками

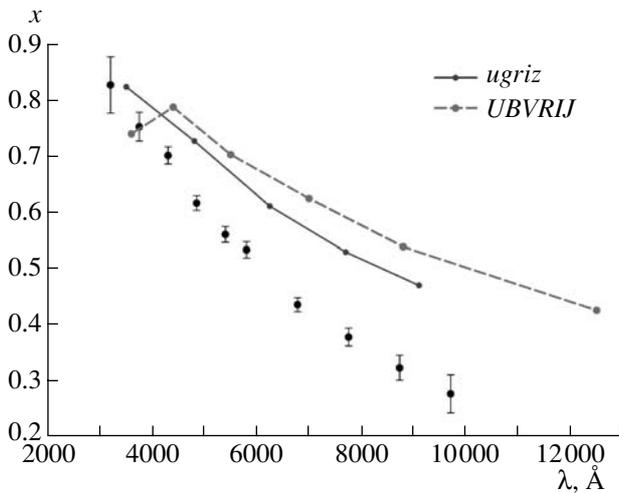


Рис. 4. Зависимость коэффициента потемнения к краю x звезды HD 209458 в предположении линейного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска из работы [2]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне 2σ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах $ugriz$ и $UBVRIJ$ приведены из работы [15].

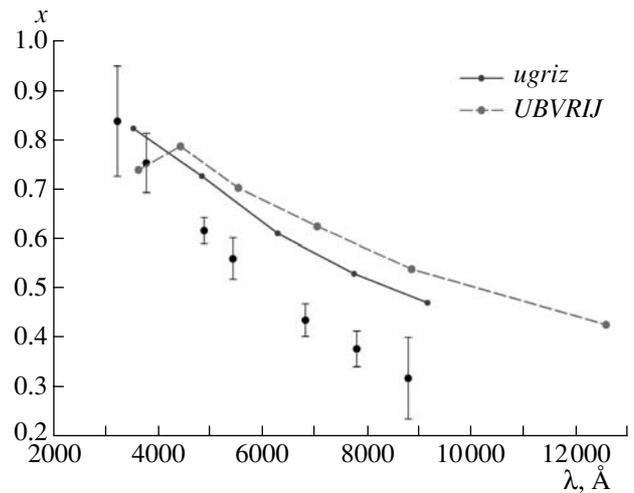


Рис. 5. То же, что на рис. 4, для случая, когда ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения χ^2_M ; уровень доверия составляет $\gamma = 0.95$.

на уровне 2σ , расхождение между наблюдаемыми и теоретическими значениями коэффициентов потемнения $x(\lambda)$ остается значимым. Наблюдаемые значения $x(\lambda)$ систематически меньше теоретических, и это различие нарастает по мере увеличения длины волны. Данный результат имеет большое значение для уточнения современных моделей тонких звездных атмосфер.

В табл. 2–4 приведены значения $x(\lambda)$ и их ошибки, полученные путем минимизации функционала невязки между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска по четырем параметрам r_p, r_s, i, x . В этом случае каждому значению x для данной длины волны λ соответствует свой набор геометрических параметров r_p, r_s, i . В то же время ясно, что значение параметра i не должно зависеть от длины волны λ . Значение радиуса планеты, из-за наличия у нее атмосферы, может зависеть от λ , но этот эффект мал и выявляется лишь для очень высокоточных кривых затмения (см., например, [16]). Поэтому мы выполнили определение коэффициентов потемнения к краю $x(\lambda)$ при фиксированных геометрических параметрах r_p, r_s, i , общих для всех λ . В качестве таковых были взяты средние арифметические значения параметров r_p, r_s, i из всех значений, найденных для разных λ : $\bar{r}_p = 0.0139657, \bar{r}_s = 0.113937, \bar{i} = 86.55^\circ$.

Значения коэффициентов потемнения $x(\lambda)$ и их ошибок, найденные путем минимизации функционала невязки при фиксированных значениях геометрических параметров $\bar{r}_p, \bar{r}_s, \bar{i}$, представлены в табл. 8. Можно полагать, что эти значения $x(\lambda)$ наиболее надежно отражают зависимость коэффициента потемнения x от длины волны λ , которая приведена на рис. 6. Здесь в качестве “внешних” ошибок приведены значения Δ_P , полученные с использованием статистики с законом распределения χ^2_P . В рамках статистики с законом распределения χ^2_M модель в большинстве случаев отвергается по уровню значимости $\alpha < 5\%$ ввиду того, что в данном случае используются более жесткие модельные предположения об одинаковом значении геометрических параметров для всех длин волн. Лишь для трех длин волн ($\lambda\lambda 4849, 5398, 8732 \text{ \AA}$) в этом случае модель может быть принята на уровне значимости $\alpha = 5\%$. В табл. 8 приведены соответствующие центральные значения $x(\lambda)$ и наиболее консервативные оценки “внешних” ошибок, полученные в рамках статистики с законом распределения χ^2_M .

6. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КРИВЫХ БЛЕСКА HD 209458 В РАМКАХ КВАДРАТИЧНОГО ЗАКОНА ПОТЕМНЕНИЯ

В работе [5] из анализа многоцветных кривых блеска HD 209458 [2] были определены также коэффициенты квадратичного потемнения к краю. Автор подчеркивает, что в случае наиболее точной

Таблица 8. Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [2] в рамках линейного закона потемнения к краю при фиксированных значениях параметров \bar{r}_p , \bar{r}_s и \bar{i} , средних для всех длин волн: ошибки параметров получены в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения χ^2_P и статистики с законом распределения χ^2_M ; ошибка приведена на уровне доверия $\gamma = 0.95$

$\lambda, \text{Å}$	x	$\Delta_P(x)$	x	$\Delta_M(x)$	χ^2_{red}
3201	0.805194	0.0196023	—	—	1.127
3750	0.732868	0.0117864	—	—	1.208
4300	0.697317	0.00718819	—	—	1.190
4849	0.608848	0.00705112	0.608828	0.00992982	1.103
5398	0.552146	0.00778080	0.552016	0.0194529	1.068
5802	0.552724	0.00662294	—	—	1.420
6779	0.445318	0.00680517	—	—	1.214
7755	0.395653	0.00922067	—	—	1.354
8732	0.352846	0.0125393	0.352893	0.00567959	1.110
9708	0.329928	0.0181280	—	—	1.158

кривой блеска, полученной Брауном и др. [1], модель с линейным законом потемнения может быть отвергнута. При этом автор работы [5] отмечает, что в данном случае модель с линейным законом потемнения “может быть отвергнута на высоком уровне значимости (более, чем 99.99%)”. Этот вывод автора [5] качественно согласуется с нашими результатами (см. выше), однако в данном случае имеются количественные расхождения. Обычно

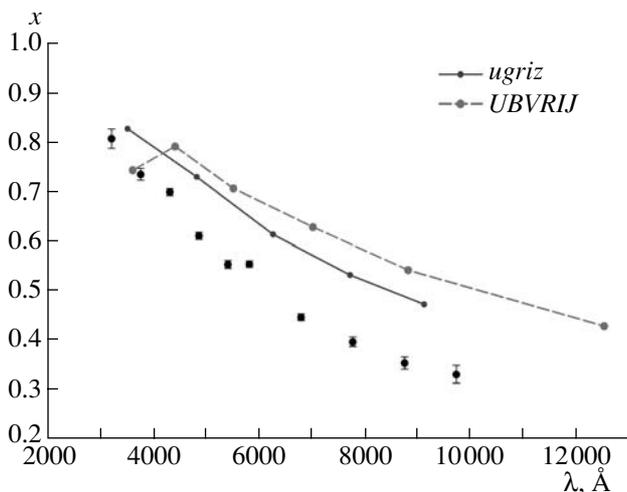


Рис. 6. То же, что на рис. 5, при фиксированных значениях $\bar{r}_p = 0.0139657$, $\bar{r}_s = 0.113937$, $\bar{i} = 86^\circ.555243$, средних для всех длин волн, и использования статистики с законом распределения χ^2_P .

под уровнем значимости α статистического критерия (см., например, [13]) понимается количество ошибок 1-го рода, которое мы совершаем при применении этого критерия. Под ошибкой 1-го рода понимается ситуация, когда модель верна, но она отбрасывается по статистическому критерию. Если, согласно [5], модель может быть отвергнута на уровне значимости более, чем 99.99%, то это означает, что, отбрасывая модель, мы в 9999 случаев из 10 000 совершаем ошибку 1-го рода, то есть отбрасываем верную модель. Лишь в одном случае из 10 000, отбрасывая модель, мы правы (т.е. отбрасываем неверную модель). Поэтому в данном случае у нас нет оснований отбросить модель, и модель может быть принята. Приводя величину 99.99%, автор [5], по-видимому, имел в виду не уровень значимости α , а уровень доверия $\gamma = 1 - \alpha$. С учетом этой путаницы можно сказать, что в работе [5] модель с линейным законом потемнения в применении к высокоточной кривой блеска Брауна и др. [1] отвергается на очень низком уровне значимости $\alpha < 0.01\%$. Отметим, что минимальное значение невязки в рамках приведенного хи-квадрат в случае линейного закона потемнения (и кривой блеска Брауна и др. [1]), согласно [5], составляет $\chi^2_{red} = 1.1457$, что, как следует из работы [12], соответствует уровню значимости, при котором модель может быть отвергнута, $\alpha = 1\%$ (а не $\alpha < 0.01\%$, как это утверждается в работе [5]). Согласно результатам нашей интерпретации, модель с линейным законом потемнения в применении к высокоточной кривой блеска Брауна [1] отвергается на низком уровне значимости ($\alpha \sim$

~ 6%), что согласуется с величиной минимального приведенного хи-квадрат $\chi_{red}^2 = \chi_{M-P}^2 / (M - P) \simeq 1.103$ [12]. Поэтому, как отмечалось выше, модель с линейным законом потемнения является не очень хорошей, но и не безнадежно “плохой”, поскольку в данном случае имеется возможность оценить “консервативные” ошибки параметров на уровне доверия $\gamma = 95\%$.

Мы выполнили интерпретацию наиболее точной кривой блеска Брауна и др. [1] с использованием квадратичного закона потемнения. Минимизация функционала невязки проводилась по пяти параметрам: r_p, r_s, i, x_1, y_1 . Здесь x_1, y_1 — коэффициенты в законе потемнения

$$I(\mu) = I_0 [1 - x_1(1 - \mu) - y_1(1 - \mu)^2],$$

где $\mu = \cos \omega$ (ω — угол между нормалью к поверхности звезды и лучом зрения). Результаты представлены в табл. 9. Здесь даны центральные значения параметров r_p, r_s, i, x_1, y_1 и их ошибки Δ , полученные методом дифференциальных поправок и методом доверительных областей на уровне доверия $\gamma = 95\%$. Там же дано значение приведенного хи-квадрат ($\chi_{red}^2 = 1.01340$), которое оказалось существенно меньше приведенного хи-квадрат для случая линейного потемнения к краю ($\chi_{red}^2 = 1.103$). В рамках квадратичного закона потемнения наша модель отвергается на уровне значимости $\alpha > 46\%$, поэтому имеется возможность оценить “внешние” ошибки параметров на уровне доверия ~95% как в статистике χ_P^2 , так и в статистике χ_M^2 . Таким образом, модель с квадратичным законом потемнения в применении к высокоточной кривой блеска Брауна и др. [1], является “хорошей” (отвергая модель, мы более чем в 46% случаев совершаем ошибку 1-го рода, т.е. отвергаем правильную модель). Это дает нам основания предпочесть нелинейный (квадратичный) закон потемнения по сравнению с линейным (см. выше). Более того, модель с нелинейным (квадратичным) законом потемнения оказалась настолько хороша, что в данном случае можно оценить консервативные “внешние” ошибки параметров x_1, y_1 на уровне доверия $\gamma = 1 - \alpha = 68\%$. Эти ошибки приведены в табл. 10.

Консервативная оценка “внешних” ошибок параметров x_1, y_1 на уровне доверия 95% показывает, что найденные значения x_1, y_1 находятся на пределе обнаружения (табл. 9; см. также далее табл. 13). Если ограничиться лишь “внутренними” ошибками параметров x_1, y_1 (табл. 9) или консервативными “внешними” ошибками на уровне доверия 68% (табл. 10), то значения коэффициентов потемнения к краю x_1, y_1 можно считать реальными.

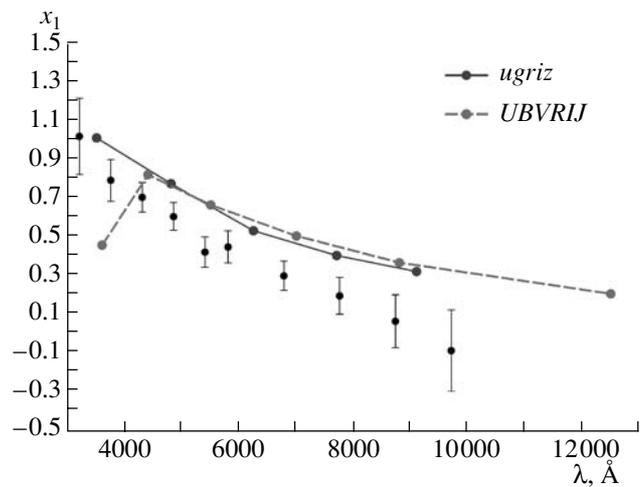


Рис. 7. Зависимость коэффициента потемнения к краю x_1 звезды HD 209458 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициентов потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска из работы [2]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне 2σ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах *ugriz* и *UBVRIJ* приведены из работы [15].

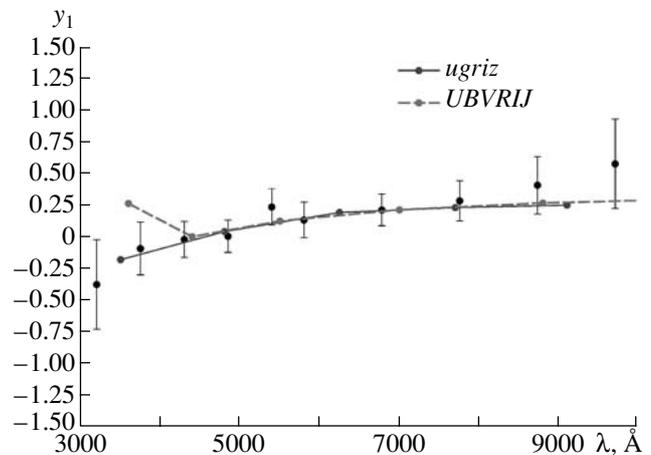


Рис. 8. То же, что на рис. 7, для коэффициента потемнения к краю y_1 .

Мы также применили модель с квадратичным законом потемнения к интерпретации многоцветных кривых блеска Кнутсона и др. [2]. В табл. 11–13 приведены соответствующие результаты интерпретации. Как следует из табл. 11, величина χ_{red}^2 в данном случае в среднем меньше, чем в случае модели с линейным законом потемнения (табл. 3). На рис. 7–10 приведены значения коэффициентов

Таблица 9. Результаты интерпретации наблюдаемой кривой блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [1] в рамках нелинейного (квадратичного) закона потемнения к краю: ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок и метода доверительных областей с использованием статистики, распределенной по закону χ^2_P (где P — число искомых параметров), а также в рамках статистики с законом распределения χ^2_M (где M — число точек на кривой блеска); в нижней строке дано значение приведенного χ^2_{red}

Параметр	Метод дифференциальных поправок (2σ)	Метод доверительных областей, χ^2_P (95%)	Метод доверительных областей, χ^2_M (95%)
r_1	0.113836	0.113845	0.113776
$\Delta(r_1)$	0.000853921	0.00145205	0.00324496
r_2	0.0137654	0.0137679	0.0137456
$\Delta(r_2)$	0.000144763	0.000250444	0.000562880
i^c , град	86.6756	86.6789	86.7196
$\Delta(i)$, град	0.108695	0.189625	0.429125
x_1	0.294517	0.296029	0.297905
$\Delta(x_1)$	0.0546122	0.0927646	0.207913
y_1	0.344130	0.343221	0.352285
$\Delta(y_1)$	0.0955230	0.163519	0.366437
χ^2_{red}	1.01340		

Таблица 10. Результаты интерпретации наблюдаемой кривой блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [1] в рамках нелинейного (квадратичного) закона потемнения к краю: ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок и метода доверительных областей с использованием статистики, распределенной по закону χ^2_P (где P — число искомых параметров), а также в рамках статистики с законом распределения χ^2_M (где M — число точек на кривой блеска); уровень доверия выбран равным $\gamma = 0.68$

Параметр	Метод дифференциальных поправок (σ)	Метод доверительных областей, χ^2_P (68%)	Метод доверительных областей, χ^2_M (68%)
r_1	0.113836	0.113840	0.113844
$\Delta(r_1)$	0.000426960	0.00104013	0.00155419
r_2	0.0137654	0.0137677	0.0137676
$\Delta(r_2)$	0.0000723814	0.000179204	0.000268077
i , град	86.6756	86.6765	86.6799
$\Delta(i)$, град	0.0543473	0.135610	0.203029
x_1	0.294517	0.295082	0.296223
$\Delta(x_1)$	0.0273061	0.0662467	0.0993592
y_1	0.344130	0.343627	0.343281
$\Delta(y_1)$	0.0477615	0.116747	0.175127

x_1 , y_1 как функции длины волны λ . Там же приведены теоретические значения x_1 , y_1 , взятые из работы Кларе [15]. Видно, что нелинейный коэффициент y_1 для HD 209458 согласуется с теоретической

зависимостью в пределах ошибок. Однако наблюдаемые значения линейного коэффициента x_1 для квадратичного закона потемнения к краю значительно расходятся с теоретическими значениями (как и

Таблица 11. Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [2] в рамках квадратичного закона потемнения к краю: ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок; ошибка приведена на уровне 2σ (в двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего уровня значимости α)

$\lambda, \text{\AA}$	r_1^c	$2\sigma_{\text{est}}(r_1^c)$	r_2^c	$2\sigma_{\text{est}}(r_2^c)$	i^c	$2\sigma_{\text{est}}(i^c)$	x_1^c	$2\sigma_{\text{est}}(x_1^c)$	y_1^c	$2\sigma_{\text{est}}(y_1^c)$	χ_{red}^2	α
3201	0.1128	0.003574	0.01407	0.0007801	86.59°	0.46°	1.024	0.1965	-0.3706	0.3530	1.062	0.205
3750	0.1113	0.002223	0.01360	0.0004571	86.88	0.31	0.7978	0.1074	-0.08720	0.2086	1.068	0.181
4300	0.1133	0.001312	0.01388	0.0002658	86.64	0.18	0.7105	0.07557	-0.01514	0.1408	1.123	0.0409
4849	0.1133	0.001122	0.01385	0.0002147	86.65	0.15	0.6119	0.07144	0.01035	0.1274	1.086	0.118
5398	0.1138	0.001222	0.01381	0.0002279	86.67	0.16	0.4286	0.07723	0.2419	0.1426	1.023	0.410
5802	0.1142	0.001034	0.01400	0.0001969	86.55	0.14	0.4551	0.08225	0.1389	0.1418	1.293	8.55×10^{-6}
6779	0.1149	0.0008532	0.01399	0.0001520	86.49	0.11	0.3066	0.07529	0.2183	0.1250	1.042	0.292
7755	0.1134	0.001130	0.01374	0.0001909	86.64	0.15	0.2035	0.09479	0.2899	0.1580	1.048	0.257
8732	0.1144	0.001424	0.01388	0.0002411	86.54	0.19	0.07225	0.1369	0.4119	0.2265	0.9966	0.574
9708	0.1136	0.002296	0.01380	0.0003744	86.64	0.30	-0.07901	0.2096	0.5815	0.3519	1.100	0.0702

Таблица 12. Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [2] в рамках квадратичного закона потемнения к краю: ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения χ_P^2 ; уровень доверия принят равным 95%

$\lambda, \text{\AA}$	r_1	$\Delta_p(r_1)$	r_2	$\Delta_p(r_2)$	i	$\Delta_p(i)$	x_1	$\Delta_p(x_1)$	y_1	$\Delta_p(y_1)$
3201	0.1128	0.0053	0.01439	0.00140	86.53°	0.81°	1.04	0.30	-0.52	0.67
3750	0.1112	0.0034	0.01359	0.00068	86.93	0.49	0.80	0.16	-0.07	0.32
4300	0.1133	0.0023	0.01388	0.00051	86.66	0.34	0.72	0.13	-0.02	0.26
4849	0.1133	0.0018	0.01385	0.00035	86.66	0.25	0.62	0.12	0.01	0.21
5398	0.1138	0.0021	0.01380	0.00039	86.69	0.29	0.43	0.13	0.25	0.24
5802	0.1142	0.0016	0.01402	0.00031	86.55	0.22	0.46	0.13	0.13	0.22
6779	0.1149	0.0014	0.01399	0.00026	86.49	0.19	0.31	0.13	0.22	0.21
7755	0.1134	0.0018	0.01374	0.00030	86.64	0.24	0.21	0.15	0.29	0.25
8732	0.1144	0.0023	0.01388	0.00039	86.56	0.31	0.07	0.22	0.42	0.37
9708	0.1133	0.0038	0.01374	0.00063	86.73	0.53	-0.08	0.34	0.60	0.57

для случая линейного закона потемнения к краю.) На рис. 11, 12 приведены проекции доверительной области D на плоскости параметров x_1, y_1 и r_s, r_p , соответственно. Прямоугольники здесь изображают проекции области, определяемой ошибками параметров (на уровне 2σ), найденными методом дифференциальных поправок.

7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА ОЦЕНКИ “ВНЕШНИХ” ОШИБОК ПАРАМЕТРОВ, ПРЕДЛОЖЕННОГО В РАБОТЕ [12]

Оценки “внешних” ошибок параметров системы HD 209458, приведенные выше, проводились нами путем прямого перебора по параметрам и по-

Таблица 13. Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [2] в рамках квадратичного закона потемнения к краю: ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения χ^2_M ; уровень доверия принят равным 95%

$\lambda, \text{\AA}$	r_1	$\Delta_M(r_1)$	r_2	$\Delta_M(r_2)$	i	$\Delta_M(i)$	x_1	$\Delta_M(x_1)$	y_1	$\Delta_M(y_1)$
3201	0.1174	0.0141	0.01428	0.00249	86.96°	1.61°	0.91	0.43	-0.19	1.40
3750	0.1109	0.0051	0.01356	0.00110	87.01	0.81	0.81	0.26	-0.08	0.50
4300	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4849	0.1133	0.0022	0.01385	0.00043	86.67	0.30	0.62	0.14	0.01	0.25
5398	0.1136	0.0044	0.01373	0.00085	86.79	0.65	0.42	0.26	0.28	0.52
5802	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6779	0.1148	0.0027	0.01399	0.00050	86.51	0.36	0.32	0.24	0.21	0.40
7755	0.1133	0.0033	0.01373	0.00056	86.67	0.44	0.21	0.28	0.29	0.46
8732	0.1136	0.0056	0.01380	0.00105	86.72	0.86	0.09	0.58	0.44	0.95
9708	0.1134	0.0031	0.01376	0.00051	86.70	0.42	-0.08	0.28	0.60	0.47

строения соответствующей поверхности функционала невязки в многомерном пространстве параметров. Процедура перебора по параметрам весьма трудоемкая, хотя в нашей простой модели (две сферические звезды на круговой орбите) она решается сравнительно легко. Однако для других, более сложных моделей процедура перебора по параметрам может оказаться весьма обременительной. Поэтому в нашей работе [12] предложен приближенный метод оценки “внешних” ошибок

параметров модели, который легко реализуется на практике. Нами даны таблицы и приведены соответствующие графики, с помощью которых можно вычислить коэффициент перехода (t_{\max} для одномерной задачи или $k_p t_{p\max}$ для многомерной задачи) от “внутренних” ошибок параметра, найденных методом Монте-Карло или методом дифференциальных поправок, к “внешним” ошибкам, получаемым методом доверительных областей в рамках статистики, распределенной по закону χ^2_M [12]. Поэтому, вычислив “внутренние” ошибки $\delta_1(\gamma)$ параметров задачи и убедившись, что используемая модель адекватна наблюдениям (для чего достаточно вы-

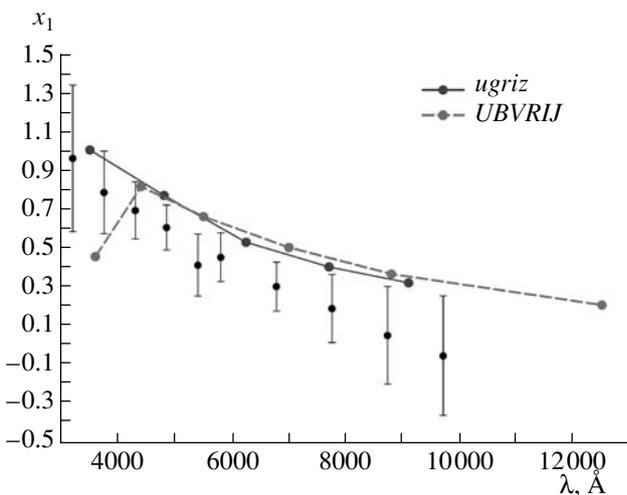


Рис. 9. То же, что на рис. 7, для случая, когда ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения χ^2_P ; уровень доверия составляет $\gamma = 0.95$.

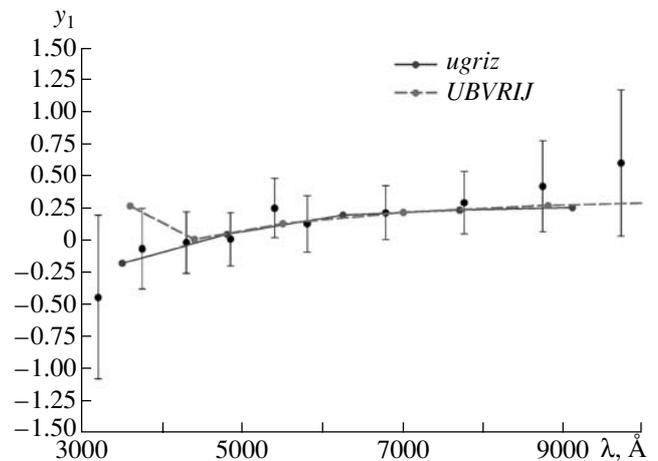


Рис. 10. То же, что на рис. 9, для коэффициента потемнения к краю y_1 .

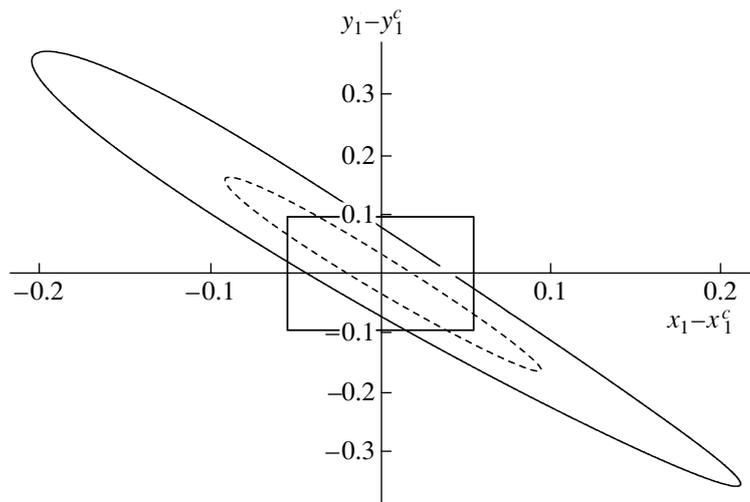


Рис. 11. Проекция доверительной области D (на уровне доверия 95%) на плоскость (x_1, y_1) в модели с квадратичным законом потемнения к краю. Малый “эллипс” (штриховая кривая) соответствует области, полученной с использованием статистики с законом распределения χ^2_P , большой “эллипс” — с использованием статистики с законом распределения χ^2_M . Прямоугольник соответствует проекции доверительной области на уровне $2\sigma_{est}$, полученной методом дифференциальных поправок. Проекция доверительной области D получена на основе наблюдаемой кривой блеска из работы [1].

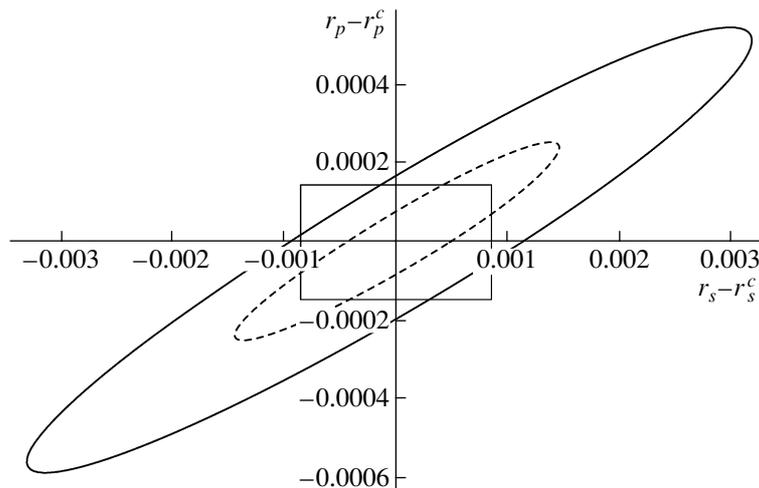


Рис. 12. То же, что на рис. 11, для проекции доверительной области D (на уровне доверия 95%) на плоскость (r_p, r_s) .

числить лишь минимальное значение функционала невязки и рассчитать значение приведенного χ^2_{red} , можно путем домножения “внутренних” ошибок на коэффициент $k_{p_{t_{max}}}$ [12] найти наиболее консервативные оценки “внешних” ошибок параметров в рамках статистики, распределенной по закону χ^2_M .

В табл. 14 приведены значения $\frac{\Delta_M(\gamma, \xi)}{\delta_1(\gamma)}$, вычисленные на основе полученных в данной работе интервалов ошибок (содержащихся в табл. 2 и 4). Здесь $\delta_1 = 2\sigma_{est}$ — ошибка, полученная методом дифференциальных поправок. Отметим, что для разных реализаций кривой блеска истинное отно-

шение $\frac{\Delta_M(\gamma, \xi)}{2\sigma_{est}}$ может значительно меняться (см. функцию плотности распределения в работе [12]). Однако данная теоретическая функция обладает экстремумом, и в предлагаемом методе работы [12] речь идет о наиболее вероятном значении отношения $\frac{\Delta_M(\gamma, \xi)}{2\sigma_{est}}$. Для реализации кривой блеска из работы [2] наблюдаемое отношение $\frac{\Delta_M(\gamma, \xi)}{2\sigma_{est}}$ должно составлять ~ 2.6 . Опираясь на предложенный метод расчета [12], можно заключить, что наиболее вероятное теоретическое значение отно-

Таблица 14. Значение наблюдаемого отношения величины интервала ошибок Δ_M , полученного в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения χ_M^2 ($\gamma = 0.95$) к величине ошибки $2\sigma_{est}$, полученной методом дифференциальных поправок: представлено наблюдаемое отношение $\frac{\Delta_M(\gamma, \xi)}{2\sigma_{est}}$ для параметров $k = r_s/r_p, i, r_p$ и r_s

$\lambda, \text{\AA}$	k	r_s	r_p	i
3201	2.13	2.14	2.12	2.13
3750	2.30	2.31	2.29	2.30
4300	—	—	—	—
4849	2.00	2.00	2.00	2.00
5398	3.10	3.09	3.10	3.10
5802	—	—	—	—
6779	2.75	2.74	2.75	2.75
7755	2.36	2.35	2.37	2.36
8732	3.74	3.73	3.75	3.74
9708	—	—	—	—
Среднее значение	2.63	2.62	2.63	2.63

шения $\frac{\Delta_M(\gamma, \xi)}{2\sigma_{est}}$ составляет ~ 4 . Данное значение в ~ 1.5 раза превышает определенное из наблюдений расхождение между ошибками, полученными в рамках метода дифференциальных поправок и метода доверительных областей (с использованием статистики с законом распределения χ_M^2). Тем не менее использование наиболее вероятного теоретического отношения интервалов $t_{max1} = \frac{\delta_M(\gamma, \xi)}{\delta_1(\gamma)}$ [12] позволит избежать рассогласования значений параметров, полученных по разным наблюдаемым реализациям исследуемого процесса, к которому зачастую приводит метод дифференциальных поправок (или метод Монте-Карло), указать доверительные интервалы искомого параметра, заведомо отвечающие выбранному уровню доверия, а также значительно сэкономить время расчетов самих интервалов ошибок.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе определены параметры системы HD 209458 из анализа высокоточных спутниковых кривых блеска при затмении звезды экзопланетой. Определены радиусы экзопланеты и звезды, наклонение орбиты, а также значения линейных и нелинейных коэффициентов потемнения к краю звезды. При этом выполнен всесторонний анализ

ошибок найденных параметров, рассмотрены как “внутренние”, так и “внешние” ошибки параметров, которые получаются в 2–4 раза больше “внутренних”. С учетом “внешних” ошибок нам удалось согласовать значения геометрических параметров, которые соответствуют наблюдениям, полученным в разных длинах волн.

Относительный радиус экзопланеты в системе HD 209458 (в долях радиуса относительной орбиты системы) равен $r_p = 0.01386$ (приведено среднее значение по данным табл. 12). Оптическая звезда в системе HD 209458 — карлик спектрального класса G0V. Абсолютный радиус этой звезды $R_s = 7.98 \times 10^{10}$ см (согласно работе [2] в предположении значений массы звезды и планеты $M_s = 1.101M_\odot$ и $M_p = 0.64M_{Jup}$, соответственно). Следовательно, абсолютный радиус планеты равен $R_p = 9.70 \times 10^9$ см. Масса планеты равна [17] $M_p = 1.215 \times 10^{30}$ г, средняя плотность планеты равна $\bar{\rho}_p = 0.318$ г/см³. Используя формулу, связывающую ускорение силы тяжести на поверхности планеты g_p с полуамплитудой кривой лучевых скоростей звезды K_s [5],

$$g_p = \frac{2\pi}{P_{orb}} \frac{(1 - e^2)^{1/2} K_s}{r_p^2 \sin i}$$

и подставляя $e = 0$, $K_s = 85.1 \pm 1.0$ м/с [18], $P_{orb} = 3.52474859^d$, $i = 86.65^\circ$ (табл. 12), находим ускорение силы тяжести $g_p = 8.61$ м/с², что близко к ускорению силы тяжести на поверхности Земли.

Отношение масс планеты и звезды $q = m_p/m_s = 0.00055$, относительный радиус планеты $r_p = \frac{R_p}{a} = 0.01386$. Для проверки нашего предположения о сферичности планеты, вычислим средний относительный радиус полости Роша для планеты, используя аппроксимационные формулы [19]

$$R_R = 0.49a \frac{q^{2/3}}{0.62q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})}, \quad (27)$$

$$R_R = 0.46a \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^{1/3}. \quad (28)$$

В табл. 15 приведены значения среднего относительного радиуса полости Роша R_R/a (a — радиус относительной орбиты системы) для различных значений отношений масс планеты и звезды $q = m_p/m_s$ в диапазоне $q = 0.00055 - 2$. Видно, что величины R_R/a , рассчитанные по формулам (27) и (28), хорошо согласуются между собой, что говорит о надежности оценки среднего относительного радиуса полости Роша для планеты. При радиусе планеты $r_p = 0.01386$ и радиусе полости Роша для

Таблица 15. Зависимость среднего относительного радиуса полости Роша от отношения масс компонентов, вычисленного по формулам (27), (28)

Формула	q								
	0.00055	0.001	0.01	0.05	0.1	0.3	0.5	1	2
	R_R/a								
(27)	0.039785	0.048366	0.10201	0.16833	0.20677	0.28103	0.32079	0.37892	0.44000
(28)	0.037727	0.045985	0.098776	0.16673	0.20684	0.28215	0.31895	0.36510	0.40185

нее $R_R/a = 0.039785$ степень заполнения планетой своей полости Роша составляет $\mu = 0.35$, что значительно меньше, чем 0.5. Поэтому наше предположение о сферичности планеты вполне обосновано (если пренебречь некоторой сплюснутостью планеты, обусловленной ее осевым вращением). То же самое можно сказать и об оптической звезде.

Очень ценная информация получается о потемнении к краю диска звезды. Из анализа высокоточных спутниковых многоцветных кривых блеска в данных наблюдений Кнутсона и др. [2] удается получить зависимость от длины волны как линейного коэффициента потемнения $x(\lambda)$, так и нелинейных коэффициентов потемнения $x_1(\lambda)$, $y_1(\lambda)$ в квадратичном законе. Нами подтверждено обнаруженное в работе Соузорва [5] различие между наблюдаемой и теоретической зависимостями линейного коэффициента потемнения x от длины волны. Новым результатом является то, что даже с использованием наиболее консервативных оценок “внешних” ошибок определения коэффициента потемнения x (в рамках статистики с законом распределения χ^2_M), остается значимое расхождение между наблюдаемой и теоретической зависимостями $x(\lambda)$. Наблюдаемые значения $x(\lambda)$ оказываются систематически меньше теоретических, причем это различие увеличивается с увеличением длины волны, так что в области $\lambda \approx 9000 \text{ \AA}$ наблюдаемый линейный коэффициент потемнения примерно в 1.5 раза меньше теоретического. Таким образом, диск звезды в красном диапазоне спектра оказывается значительно более однородным, чем это предсказывает теория тонких звездных атмосфер. Зависимость от λ коэффициента потемнения x_1 в квадратичном законе также значимо отличается от соответствующей теоретической зависимости: наблюдаемые значения x_1 систематически меньше теоретических, причем это различие нарастает по мере увеличения длины волны λ . Важно подчеркнуть, что данное различие сохраняется даже при использовании консервативных “внешних” ошибок определения значений x_1 в рамках статистики с законом распределения χ^2_P . Зависимость от λ коэффициента потемнения y_1 в квадратичном законе

в пределах ошибок определения согласуется с соответствующей теоретической зависимостью.

До последнего времени проверка моделей звездных атмосфер проводилась, в основном, путем сравнения наблюдаемого и теоретического спектров излучения от всего диска звезды. Высокоточные спутниковые многоцветные наблюдения покрытий звезд экзопланетами дают новую и уникальную возможность независимой проверки моделей звездных атмосфер по угловому распределению выходящего из атмосферы звезды излучения на разных λ . Важным преимуществом затмений звезд экзопланетами для определения коэффициентов потемнения к краю звезд является пренебрежимая малость эффектов отражения и эллипсоидальности, а также кольцевой характер затмения при относительно малом радиусе затмеваемой планеты. Поэтому, несмотря на то, что относительная точность кривых затмения в данном случае не экстремально высока (в случае спутниковых наблюдений она составляет $\sim 1\% - 2\%$ по отношению к глубине затмения), перечисленные благоприятные обстоятельства позволяют уверенно находить коэффициенты потемнения как в линейном, так и в нелинейном законе потемнения. В связи с этим данные исследования важны не только для определения фундаментальных характеристик экзопланет, но и для дальнейшего развития теории звездных атмосфер.

Отметим, что впервые на возможность обнаружения затмения звезд экзопланетами указал Тутюков [20, 21].

Авторы выражают особую благодарность Хезеру Кнутсону (Н.А. Knutson) за предоставление наблюдательных данных по HD 209458. Выражаем благодарность за финансовую поддержку работы грантом Российского фонда фундаментальных исследований 08-02-01220, грантом Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-7179.2010.2, грантом Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых-кандидатов наук (МК-206.2009.2) и грантом аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” РНП-2.1.1.2906.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. M. Brown, D. Charbonneau, R. L. Gilliland, *et al.*, *Astrophys. J.* **552**, 699 (2001).
2. H. A. Knutson, D. Charbonneau, R. W. Noyes, *et al.*, *Astrophys. J.* **655**, 564 (2007).
3. I. A. G. Shellen, E. J. W. de Mooij, and S. Albrecht, *Nature* **459**, 543 (2009).
4. *The CoRoT space mission: early results*, eds C. Bertout, T. Forveille, N. Langer, S. Shore, *Astron. and Astrophys.* **506**, 1 (2009).
5. J. Southworth, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **386**, 1644 (2008).
6. A. Gimenez, *Astron. and Astrophys.* **450**, 1231 (2006).
7. D. M. Popper and P. B. Etzel, *Astron. J.* **86**, 102 (1981).
8. J. Southworth, P. F. L. Maxted, and B. Smalley, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **351**, 1277 (2004).
9. D. M. Popper, *Astron. J.* **89**, 132 (1984).
10. А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* **70**, 1157 (1993).
11. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* **85**, 121 (2008).
12. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* **86**, 778 (2009).
13. С. Уилкс, *Математическая статистика* (М.: Наука, 1967).
14. A. Burrows, I. Hubeny, J. Budai, and W. B. Hubbard, *Astrophys. J.* **661**, 502 (2007).
15. A. Claret, *Astron. and Astrophys.* **428**, 1001 (2004).
16. F. Pont, H. Knutson, R. L. Gilliland, *et al.*, **385**, 109 (2008).
17. D. Charbonneau, T. M. Brown, D. W. Latham, and M. Mayor, *Astrophys. J. (Letters)* **529**, L45 (2000).
18. D. Naef, M. Mayor, J. L. Beurit, *et al.*, *Astron. and Astrophys.* **414**, 351 (2004).
19. P. P. Eggleton, *Astrophys. J.* **268**, 368 (1983).
20. А. В. Тутуков, *Астрон. журн.* **69**, 1275 (1992).
21. А. В. Тутуков, *Астрон. журн.* **72**, 400 (1995).

Примечание при корректуре

Когда наша статья была сдана в печать, мы познакомились со статьей А. Claret (*Astron. and Astrophys.* **506**, 1335 (2009)), в которой заново пересчитаны коэффициенты потемнения к краю звездных дисков на базе моделей Куруца. Новые теоретические значения коэффициентов в линейном и нелинейном законах потемнения близки к прежним значениям (А. Claret, *Astron. and Astrophys.* **428**, 1001 (2004)). Тем самым подтверждено расхождение между наблюдениями HD 209458 и теорией. Наша работа дополнительно показывает, что даже если использовать наиболее консервативные оценки “внешних” ошибок параметров, расхождение между наблюдаемыми и теоретическими коэффициентами потемнения к краю звезды HD 209458 остается значимым.