

УДК 524.386-14

ОЦЕНКА ОШИБОК ПАРАМЕТРОВ В ОБРАТНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ. АНАЛИЗ КРИВЫХ БЛЕСКА КЛАССИЧЕСКИХ ЗАТМЕННЫХ СИСТЕМ

© 2008 г. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук

*Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга МГУ им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22.05.2007 г.; принята в печать 22.06.2007 г.

На примере одно-, двух-, трех-, четырехпараметрических функций и наблюдаемой кривой блеска двойной затменной системы $YZ\ Cas$ в ходе численного эксперимента производится оценка неизвестных параметров задачи и их интервалов ошибок. Расчет интервалов ошибок производится методом дифференциальных поправок, методом Монте-Карло и методом доверительных областей. Исследуются величины интервалов ошибок и надежность методов.

PACS: 97.80.Hn, 95.75.Pq

1. ВВЕДЕНИЕ

В астрономии исследователи часто сталкиваются с необходимостью решения обратных параметрических задач, когда по наблюдаемым следствиям некоторого процесса требуется определить параметры соответствующей модели и, что не менее важно, дать надежные оценки ошибок этих параметров. Особенно актуальными являются обратные параметрические задачи, возникающие при интерпретации кривых блеска затменных двойных систем, которые являются важным источником информации о массах, радиусах и светимостях звезд, находящихся на разных стадиях эволюции. Определение фундаментальных параметров и их ошибок для звезд-компонентов затменных двойных систем дает возможность проверки выводов теории внутреннего строения и эволюции звезд, поиска релятивистских объектов в двойных системах, изучения эволюции тесных двойных систем. При этом, поскольку тонкие эволюционные эффекты в тесных двойных системах часто выявляются лишь на пределе точности наблюдений, решающим моментом при тщательном анализе кривых блеска затменных двойных систем является надежная оценка ошибок параметров используемой модели.

В вопросах оценки ошибок параметров затменных двойных звездных систем имеется много путаницы. Как правило, авторами больше внимания уделяется центральному значению параметров двойной системы, а ошибки параметров ищутся в значительной степени формально. В настоящий момент в звездной астрофизике конкурируют

несколько методов оценки интервала ошибки параметров звездных двойных систем и других параметрических задач. Наиболее распространенные из них — это метод Монте-Карло, метод дифференциальных поправок [1] и метод доверительных областей [2–4]. Различные научные школы придерживаются того или иного метода. В данном исследовании путем численного эксперимента проводится сравнительный анализ вышеперечисленных методов оценки интервалов ошибки параметров двойных звездных систем, выявляются преимущества и недостатки каждого из них.

Отметим, что проблемы построения доверительных областей в параметрических задачах хорошо разработаны теоретически (см., например, [5]). В нашей работе, используя высокую эффективность современных компьютеров в ходе численного эксперимента, мы иллюстрируем различные способы построения доверительных областей и на конкретных примерах даем практические рекомендации по применению различных методов оценки параметров.

2. МОДЕЛЬ ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ

Ввиду методического характера нашей работы рассматривается простейшая модель двух сферических звезд с тонкими атмосферами на круговой орбите без эффектов взаимной близости компонентов. Такая модель легко реализуется на современных компьютерах и дает возможность выполнить большое число вариантов решения обратной задачи за сравнительно малое компьютерное время.

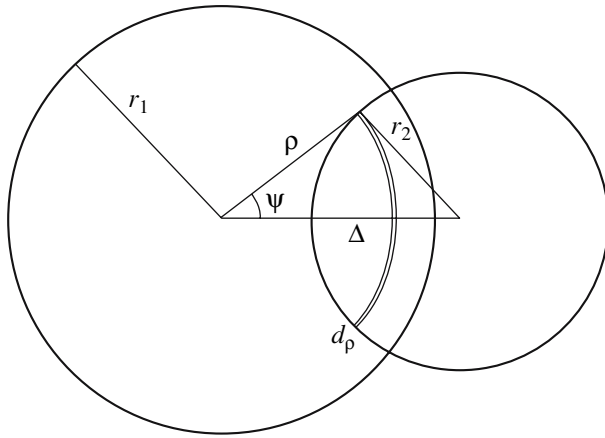


Рис. 1. Модель двух затменных сферических звезд. Проекция на картинную плоскость.

В нашей модели рассматривалось движение дисков звезд в проекции на картинную плоскость, т.е. плоскость, перпендикулярную лучу зрения. На рис. 1 показана геометрия дисков звезд во время затмения. Здесь r_1, r_2 — радиусы первой и второй звезд, Δ — расстояние между центрами дисков звезд, ρ, Ψ — полярные координаты произвольной точки поверхности диска первой звезды (начало координат расположено в геометрическом центре диска). Расстояние между центрами дисков звезд задается выражением (см., например, работу [6])

$$\Delta^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta, \quad (1)$$

в котором i — наклонение орбиты двойной системы, θ — значение текущего орбитального фазового угла.

В качестве функций распределения яркости по дискам звезд использовался линейный закон потемнения к краю диска:

$$I^{(1)}(\rho) = I_0^{(1)} \left(1 - x_1 + x_1 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_1^2}} \right), \quad (2)$$

$$I^{(2)}(\xi) = I_0^{(2)} \left(1 - x_2 + x_2 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_2^2}} \right). \quad (3)$$

Здесь $I_0^{(1)}, I_0^{(2)}$ — яркости в центрах дисков первой и второй звезд, x_1, x_2 — коэффициенты потемнения к краю первой и второй звезд, ρ, ξ — полярное расстояние от центра диска первой и второй звезды, соответственно.

Искомыми параметрами модели являются: $r_1, r_2, i, I_0^{(1)}, I_0^{(2)}, x_1, x_2$. Единицей длины в нашей модели является расстояние между центрами звезд $a = 1$. “Третий свет” в модели отсутствует. Кривая блеска двойной системы в данной модели определяется следующими тремя уравнениями:

1. Суммарная светимость компонентов, описывающая внезатменный блеск:

$$2\pi \int_0^{r_1} I^{(1)}(\rho) \rho d\rho + 2\pi \int_0^{r_2} I^{(2)}(\xi) \xi d\xi = L^{full}. \quad (4)$$

2. Потеря блеска системы в главном минимуме, обусловленная затмением звездой большего радиуса спутника с меньшим радиусом:

$$L^{full} - L^{(1)}(\theta) = \iint_{S(\Delta)} I^{(2)}(\xi) dS, \quad (5)$$

где $S(\Delta)$ — площадь области перекрытия дисков.

3. Потеря блеска во вторичном минимуме кривой блеска, обусловленная затмением звездой меньшего радиуса спутника с большим радиусом:

$$L^{full} - L^{(2)}(\theta) = \iint_{S(\Delta)} I^{(1)}(\rho) dS. \quad (6)$$

Уравнения (1), (4), (5) и (6) полностью описывают наблюдаемую кривую блеска и содержат семь искомых параметров: $r_1, r_2, i, I_0^{(1)}, I_0^{(2)}, x_1, x_2$. Подставляя под знаки интегрирования функции распределения яркости, аппроксимированные линейным законом потемнения к краю (2), (3), и выполняя интегрирование, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно семи параметров.

3. ВЫВОД РАСЧЕТНЫХ ФОРМУЛ

Нами здесь использовался иной в сравнении с принятым (см., например, работу [1]) подход к расчету области перекрытия дисков, позволяющий получить выражение для падения блеска независимо от соотношения между радиусами r_1, r_2 и расстоянием между центрами компонентов двойной системы Δ . Это позволило унифицировать расчетные формулы и не рассматривать каждый случай затмения в отдельности. Новый подход позволил в 7 раз сократить количество уравнений и, соответственно, время расчетов. Подробный вывод изложен ниже.

Пусть яркость в точке диска звезды

$$I(\rho) = I_0 \left(1 - x + x \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right),$$

где ρ — расстояние от точки до центра диска звезды, I_0 — яркость в центре диска, x — коэффициент потемнения к краю, r — радиус звезды.

Введем новые параметры $X_0 = I_0(1 - x)$ и $X_1 = I_0x$, тогда

$$I(\rho) = \left(X_0 + X_1 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right). \quad (7)$$

Компонент 1 в орбитальной фазе $\theta = 0$ затмевает компонент 2. Полный блеск звезды при этом равен

$$L^{(s)} = 2\pi \int_0^r I^{(s)}(\rho) \rho d\rho = X_0^{(s)} \pi r_s^2 + \frac{2}{3} X_1^{(s)} \pi r_s^2, \quad s = 1, 2,$$

а полный блеск двойной системы вне затмения

$$L^{full} = L^{(1)} + L^{(2)} = X_0^{(1)} \pi r_1^2 + \frac{2}{3} X_1^{(1)} \pi r_1^2 + X_0^{(2)} \pi r_2^2 + \frac{2}{3} X_1^{(2)} \pi r_2^2. \quad (8)$$

Для универсализации внешнего вида расчетных формул минимумов кривой блеска и сокращения числа уравнений затмевающему компоненту (ближний компонент по отношению к земному наблюдателю) приписан индекс n , затмеваемому компоненту (дальний компонент по отношению к земному наблюдателю) — индекс f . При непосредственном расчете минимумов кривой блеска в диапазоне значений орбитальной фазы $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ (или $\cos \theta > 0$) переменную r_n следует заменить на r_1 , а переменную r_f на r_2 . В диапазоне значений орбитальной фазы $\cos \theta < 0$ следует выполнить обратную замену — переменную r_f следует заменить на r_1 , а переменную r_n — на r_2 .

В новых обозначениях падение блеска при затмении равно

$$L^{dec}(\Delta, r_f, r_n, X_0^{(f)}, X_1^{(f)}) = \iint_{S(\Delta)} I^{(f)}(\rho) dS, \quad (9)$$

где Δ — расстояние между центрами дисков, $S(\Delta)$ — область перекрытия дисков.

Прежде чем вычислять интеграл (9), введем функции

$$\mathcal{A}x \equiv \begin{cases} \pi, & x < -1, \\ \arccos x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad (10)$$

и

$$\mathcal{Q}x \equiv \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{d\mathcal{A}x}{dx} = \mathcal{Q} \left(\frac{1}{1 - x^2} \right). \quad (11)$$

Введем полярную систему координат с началом в центре диска затмеваемой звезды и полярным углом φ , отсчитываемым в направлении от центра диска затмеваемого компонента “f”, к центру диска затмевающего компонента “n”, (рис. 1). В этих координатах область интегрирования $S(\Delta)$ задается как

$$S(\Delta) = \begin{cases} \rho < r_f, \\ -\pi < \varphi \leq \pi, \\ \left| \frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} \right| \leq \cos \varphi. \end{cases} \quad (12)$$

Проинтегрируем (9) по координате φ при значениях ρ , для которых выполняется неравенство $\left| \frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} \right| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} \leq \cos \varphi &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\varphi| \leq \arccos \left(\frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} \right). \end{aligned}$$

При тех же ρ , для которых $\frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} < -1$, неравенство

$$\frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} < \cos \varphi$$

выполняется при любом φ . В этом случае интегрирование по φ выполняется от $-\pi$ до π . При тех значениях ρ , для которых $\frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} > 1$, последнее из неравенств (12) не выполняется ни при каких значениях φ (т.е. ни одна точка с таким значением ρ не принадлежит области интегрирования). При таких значениях ρ оба предела интегрирования по φ положим равными нулю.

Используя обозначение (10), интеграл в выражении (9) можно переписать как

$$\begin{aligned} L^{dec}(\Delta, r_f, r_n) &= \quad (13) \\ &= \int_0^{r_f} \rho d\rho \int_{-\Psi(\Delta, \rho, r_n)}^{\Psi(\Delta, \rho, r_n)} d\varphi I^{(f)}(\rho) = \\ &= 2 \int_0^{r_f} \rho \Psi(\Delta, \rho, r_n) I^{(f)}(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

где

$$\Psi(\Delta, x, y) \equiv \mathcal{A} \left(\frac{x^2 + \Delta^2 - y^2}{2x\Delta} \right).$$

Подставляя выражение (7) в (13), имеем

$$\begin{aligned} L^{dec}(\Delta, r_f, r_n, X_0^{(f)}, X_1^{(f)}) &= \quad (14) \\ &= X_0^{(f)} L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n) + X_1^{(f)} L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n). \end{aligned}$$

Используя (11), можно получить

$$L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n) = 2 \int_0^{r_f} \rho \Psi(\Delta, \rho, r_n) d\rho = \quad (15)$$

$$= \Psi(\Delta, r_f, r_n) r_f^2 + \Psi(\Delta, r_n, r_f) r_n^2 -$$

$$- \frac{1}{2} Q(\Delta, r_f, r_n),$$

$$Q(\Delta, r_f, r_n) \equiv \mathcal{Q} \left(\left[r_f^2 - (\Delta - r_n)^2 \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[(\Delta + r_n)^2 - r_f^2 \right] \right)$$

и

$$L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n) = 2 \int_0^{r_f} \rho \Psi(\Delta, \rho, r_n) \times \quad (16)$$

$$\times \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_f^2}} d\rho = \int_0^{r_f} \Psi(\Delta, \sqrt{\rho}, r_n) \sqrt{1 - \frac{\rho}{r_f^2}} d\rho$$

(последнее равенство получено заменой $\rho' = \rho^2$, а далее во избежание излишних новых обозначений ρ' заменено на ρ). Интеграл (16) вычисляется численно.

Для круговой орбиты расстояние между центрами дисков звезд Δ зависит от фазы и угла наклона орбиты как

$$\Delta(\theta, i) = \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta}. \quad (17)$$

Блеск двойной системы зависит от фазы следующим образом:

$$L(\theta, i, r_1, r_2, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}) = L^{full} - \quad (18)$$

$$- \begin{cases} L_0^{dec}(\Delta(\theta, i), r_1, r_2, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}), & \cos \theta < 0, \\ L_0^{dec}(\Delta(\theta, i), r_2, r_1, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}), & \cos \theta > 0. \end{cases}$$

Вводя функции

$$L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) = \pi r_1^2 - \quad (19)$$

$$- \begin{cases} L_0^{dec}(\Delta(\theta, i), r_1, r_2), & \cos \theta < 0, \\ 0, & \cos \theta > 0, \end{cases}$$

$$L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) = \frac{2}{3} \pi r_1^2 -$$

$$- \begin{cases} L_1^{dec}(\Delta(\theta, i), r_1, r_2), & \cos \theta < 0, \\ 0, & \cos \theta > 0, \end{cases}$$

$$L_0^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) = \pi r_2^2 -$$

$$- \begin{cases} L_0^{dec}(\Delta(\theta, i), r_2, r_1), & \cos \theta > 0, \\ 0, & \cos \theta < 0, \end{cases}$$

$$L_1^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) = \frac{2}{3} \pi r_2^2 -$$

$$- \begin{cases} L_1^{dec}(\Delta(\theta, i), r_2, r_1), & \cos \theta > 0, \\ 0, & \cos \theta < 0, \end{cases}$$

можно записать полный блеск в виде их линейной комбинации:

$$L(\theta, r_1, r_2, i, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}) = \quad (20)$$

$$= X_0^{(1)} L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_1^{(1)} L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) +$$

$$+ X_0^{(2)} L_0^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_1^{(2)} L_1^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i).$$

Частные производные функции полного блеска выражаются через частные производные функций L_0^{dec} и L_1^{dec} по переменным Δ, r_f, r_n и частные производные функции $\Delta(\theta, i)$ по θ и i . Используя соотношение (11), найдем частные производные (15). После упрощений получаем:

$$\frac{\partial L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial \Delta} = - \frac{Q(\Delta, r_f, r_n)}{\Delta}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_f} = 2\Psi(\Delta, r_f, r_n) r_f, \quad (22)$$

$$\frac{\partial L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_n} = 2\Psi(\Delta, r_f, r_n) r_n. \quad (23)$$

При вычислении производных L_1^{dec} введем функции

$$K_1(\Delta, r_f, r_n) \equiv \quad (24)$$

$$\equiv \int_0^{r_f^2} \mathcal{Q} \left(\frac{r_f^2 - \rho}{\left[\rho - (\Delta - r_n)^2 \right] \left[(\Delta + r_n)^2 - \rho \right]} \right) d\rho,$$

$$K_2(\Delta, r_f, r_n) \equiv \frac{1}{\Delta} \int_0^{r_f^2} (r_n^2 - \rho) \times \quad (25)$$

$$\times \mathcal{Q} \left(\frac{r_f^2 - \rho}{\left[\rho - (\Delta - r_n)^2 \right] \left[(\Delta + r_n)^2 - \rho \right]} \right) d\rho.$$

Получаем

$$\frac{\partial L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial \Delta} = \quad (26)$$

$$= - \frac{\Delta K_1(\Delta, r_f, r_n) + K_2(\Delta, r_f, r_n)}{r_f},$$

$$\frac{\partial L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_n} = \frac{2r_n}{r_f} K_1(\Delta, r_f, r_n), \quad (27) \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_f} = \frac{1}{r_f^2} \int_0^{r_f^2} \rho \frac{\Psi(\Delta, \sqrt{\rho}, r_n)}{\sqrt{r_f^2 - \rho}} d\rho. \quad (28)$$

Интегрируя (28) по частям, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_f} &= \frac{2}{r_f} \int_0^{r_f^2} \Psi(\Delta, \sqrt{\rho}, r_n) \times \\ &\times \sqrt{1 - \frac{\rho}{r_f^2}} d\rho + \int_0^{r_f^2} (\Delta^2 - r_n^2 - \rho) \times \\ &\times \mathcal{Q} \left(\frac{r_f^2 - \rho}{[\rho - (\Delta - r_n)^2][(\Delta + r_n)^2 - \rho]} \right) d\rho = \\ &= \frac{2}{r_f} L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n) + \\ &+ \frac{(\Delta^2 - 2r_n^2) K_1(\Delta, r_f, r_n) + \Delta K_2(\Delta, r_f, r_n)}{r_f^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Численное нахождение интегралов в (24) и (25) затруднено тем, что подынтегральные функции в них имеют особенности. Поэтому преобразуем их к более подходящему для этой цели виду. Подынтегральное выражение в них отлично от нуля на интервале $[(\Delta - r_n)^2, (\Delta + r_n)^2]$. Поэтому

$$K_1(\Delta, r_f, r_n) = K_2(\Delta, r_f, r_n) = 0 \quad (30)$$

при $|\Delta - r_n| \geq r_f$,

а если $|\Delta - r_n| < r_f$, интегрирование достаточно проводить по отрезку $[(\Delta - r_n)^2, \min\{(\Delta + r_n)^2, r_f^2\}]$. На этом отрезке функция $\arccos\left(\frac{\Delta^2 + r_n^2 - \rho}{2\Delta r_n}\right)$ действительна и монотонна по ρ , следовательно, можно сделать замену $x = \arccos\left(\frac{\Delta^2 + r_n^2 - \rho}{2\Delta r_n}\right)$. Интегрирование по x будет проводиться по отрезку

$$\left[0, \arccos\left(\frac{\Delta^2 + r_n^2 - \min\{(\Delta + r_n)^2, r_f^2\}}{2\Delta r_n}\right) \right].$$

Принимая во внимание то, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \arccos\left(\frac{\Delta^2 + r_n^2 - \rho}{2\Delta r_n}\right) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{[\rho - (\Delta - r_n)^2][(\Delta + r_n)^2 - \rho]}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arccos\left(\frac{\Delta^2 + r_n^2 - \min\{(\Delta + r_n)^2, r_f^2\}}{2\Delta r_n}\right) &= \\ &= \mathcal{A}\left(\frac{\Delta^2 + r_n^2 - r_f^2}{2\Delta r_n}\right) = \Psi(\Delta, r_n, r_f), \end{aligned}$$

получаем:

$$\begin{aligned} K_1(\Delta, r_f, r_n) &= \quad (31) \\ &= \int_0^{\Psi(\Delta, r_n, r_f)} \sqrt{r_f^2 - (\Delta - r_n)^2 - 4\Delta r_n \sin^2 \frac{x}{2}} dx, \\ K_2(\Delta, r_f, r_n) &= \int_0^{\Psi(\Delta, r_n, r_f)} (2r_n \cos x - \Delta) \times \\ &\times \sqrt{r_f^2 - (\Delta - r_n)^2 - 4\Delta r_n \sin^2 \frac{x}{2}} dx. \end{aligned} \quad (32)$$

Выражения (31) и (32) получены в предположении $|\Delta - r_n| < r_f$. В случае $|\Delta - r_n| \geq r_f$ функция $\Psi(\Delta, r_n, r_f) = 0$, так что интегралы в указанных выражениях обращаются в ноль, что согласуется с выражением (30). Таким образом, выражения (31) и (32) справедливы при любых положительных значениях Δ, r_n и r_f .

Отметим факт, существенный для численного интегрирования: подынтегральная функция в выражении (16) лишь кусочно-гладкая. Для эффективного же применения методов численного интегрирования, таких как метод квадратур Гаусса, необходимо, чтобы интегрируемая функция была гладкой на всем участке интегрирования. Поэтому отрезок $[0, r_f^2]$ следует разбить при интегрировании на части точками разрыва производных подынтегральной функции и проводить интегрирование по каждой части отдельно. Приведем общее выражение для последовательности этих точек (в зависимости от значений параметров r_n, r_f, Δ часть этих точек совпадает):

$$\{\max(0, (\Delta - r_n)^2), \min(r_f^2, (\Delta - r_n)^2), \min(r_f, \Delta + r_n)^2, r_f^2\}. \quad (33)$$

Приведенное выражение удобно использовать при построении общего численного алгоритма интегрирования.

Для дальнейшего изложения перейдем к новой переменной $z = \cos^2 i$ и новым индексам:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\theta, r_1, r_2, z) &= L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i), \quad (34) \\ \mathcal{L}_2(\theta, r_1, r_2, z) &= L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3(\theta, r_1, r_2, z) &= L_0^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i), \\ \mathcal{L}_4(\theta, r_1, r_2, z) &= L_1^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i), \\ \mathcal{X}_1 &= X_0^{(1)}, \quad \mathcal{X}_2 = X_1^{(1)}, \\ \mathcal{X}_3 &= X_0^{(2)}, \quad \mathcal{X}_4 = X_1^{(2)}.\end{aligned}$$

В новых обозначениях выражение (20) запишется следующим образом:

$$\mathcal{L}(\theta, r_1, r_2, z, \mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_4) = \sum_{k=1}^4 \mathcal{X}_k \mathcal{L}_k(\theta, r_1, r_2, z). \quad (35)$$

3.1. Метод наименьших квадратов для линейной модели

Центральные значения параметров модели двойной системы $X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}$ (по которым задача линейна) и r_1, r_2, i (по которым задача нелинейна) получены на основе “наблюдаемой”, кривой блеска с помощью метода наименьших квадратов. Кратко напомним основы метода наименьших квадратов для линейной и нелинейной модели (см. следующий раздел).

Рассмотрим линейную модель, задаваемую функцией $f(\theta, \alpha_1 \dots \alpha_P)$, линейно зависящей от параметров $\alpha_1 \dots \alpha_P$:

$$f^{lin}(\theta, \alpha_1 \dots \alpha_P) = g_0 + \sum_{p=1}^P g_p(\theta) \alpha_p. \quad (36)$$

Зададимся набором чисел $\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_P$, соответствующих истинным значениям физических величин и набором $\theta_1 \dots \theta_M$, соответствующих точкам, в которых производятся наблюдения (здесь M — полное число точек наблюдения), а также набором случайных статистически независимых наблюдаемых величин $\xi_1 \dots \xi_M$, распределенных по нормальному закону с математическими ожиданиями $M(\xi_k) = f^{lin}(\theta_k, \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_P)$ и с дисперсиями $\sigma^2(\xi_m) = \sigma_m^2$, где $\sigma^2(\dots)$ здесь и далее обозначает операцию вычисления дисперсии. Зададим *функционал невязки* выражением

$$\begin{aligned}R^{lin}(\alpha_1 \dots \alpha_P, \xi_1 \dots \xi_M) &= \\ &= \sum_{m=1}^M \left[\xi_m - f^{lin}(\theta, \alpha_1 \dots \alpha_P) \right]^2 w_m = \\ &= \sum_{m=1}^M \left(\xi_m - g_0 - \sum_{p=1}^P g_p(\theta_m) \alpha_p \right)^2 w_m\end{aligned} \quad (37)$$

с весовыми коэффициентами w_m , обратно пропорциональными дисперсиям: $w_m = \varepsilon_0^2 / \sigma_m^2$, где

$$\varepsilon_0^2 = \frac{\sigma^2(R^{lin}(\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_P, \xi_1 \dots \xi_M))}{M}$$

— дисперсия единицы веса. При моделировании ε_0 задается в качестве исходного параметра, т.е. в модельных расчетах значение ε_0 известно априори.

Найдем значения параметров $\alpha_1^c \dots \alpha_P^c$, доставляющие минимум функционалу невязки при фиксированных $\xi_1 \dots \xi_M$. Условие минимума (37) эквивалентно системе P линейных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial R^{lin}(\alpha_1 \dots \alpha_P)}{\partial \alpha_q} &= \\ &= 2 \sum_{m=1}^M \left[\xi_m - g_0 - \sum_{p=1}^P g_p(\theta_m) w_m \alpha_p \right] \times \\ &\times g_q(\theta_m) w_m = 2B_q - 2 \sum_{p=1}^P A_{qp} \alpha_p = 0, \\ &q = 1 \dots P,\end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned}A_{qp} &= \sum_{m=1}^M g_q(\theta_m) g_p(\theta_m) w_m, \\ B_q &= \sum_{m=1}^M (\xi_m - g_0) g_q(\theta_m) w_m.\end{aligned} \quad (39)$$

Решение системы уравнений (38) следующее:

$$\begin{aligned}\alpha_p^c &= \sum_{q=1}^P A_{qp}^{-1} B_q = \sum_{m=1}^M (\xi_m - g_0) w_m \times \\ &\times \sum_{q=1}^P A_{qp}^{-1} g_q(\theta_m), \quad p = 1 \dots P.\end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом, центральные значения параметров $\alpha_1^c \dots \alpha_P^c$ выражаются через линейную комбинацию $\xi_1 \dots \xi_M$ и, следовательно, являются нормально распределенными. Их математические ожидания равны $\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_P$, а дисперсии выражаются через дисперсии $\xi_1 \dots \xi_M$ по теореме о сложении дисперсии независимых случайных величин:

$$\begin{aligned}\sigma^2(\alpha_p^c) &= \\ &= \sum_{m=1}^M \sigma^2(\xi_m) w_m^2 \left(\sum_{q=1}^P A_{qp}^{-1} g_q(\theta_m) \right)^2 = \\ &= \sum_{m=1}^M \varepsilon_0^2 w_m \left(\sum_{q=1}^P A_{qp}^{-1} g_q(\theta_m) \right)^2.\end{aligned} \quad (41)$$

Зная дисперсию центрального значения параметра, можно построить интервал, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение параметра. Для этого достаточно заметить, что из нормального закона распределения центрального значения параметра следует

$$\mathbf{P} (|\alpha_p^c - \bar{\alpha}_p| \leq \kappa \sigma(\alpha_p^c)), \quad (42)$$

где \mathbf{P} означает вероятность выполнения условия, а κ зависит от выбранной вероятности попадания (уровня доверия) γ и находится как корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\kappa \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \gamma.$$

Например, при $\kappa = 1, 2$ и 3 уровень доверия γ равен соответственно $0.6827, 0.9545$ и 0.9973 (правило одной, двух и трех σ).

Когда неизвестно значение ε_0 (например, в случае реально наблюдаемой кривой блеска), для нахождения ошибок вместо формулы (41) используется формула, получающаяся из (41) заменой ε_0 на величину v_0 , называемую среднеквадратичной оценкой дисперсии единицы веса [7]:

$$v_0^2 = \frac{R^{lin}(\alpha_1^c \dots \alpha_P^c, \xi_1 \dots \xi_M)}{M - P}. \quad (43)$$

Полученные таким образом среднеквадратичные оценки для дисперсий определяются формулой

$$\sigma_{est}^2(\alpha_p^c) = \sum_{m=1}^M v_0^2 w_m \left(\sum_{q=1}^P A_{qp}^{-1} g_q(\theta_m) \right)^2. \quad (44)$$

При этом v_0 является случайной величиной, а величина $(\alpha^c - \bar{\alpha})/\sigma_{est}$ имеет распределение Стьюдента с $M - P$ степенями свободы. Однако при достаточно больших значениях $M - P \gg \gg 10$ оно уже довольно близко к нормальному, и можно считать, что $\mathbf{P} (|\alpha_p^c - \bar{\alpha}_p| \leq \kappa \sigma(\alpha_p^c)) \simeq \mathbf{P} (|\alpha_p^c - \bar{\alpha}_p| \leq \kappa \sigma_{est}(\alpha_p^c))$.

3.2. Метод дифференциальных поправок

Рассмотрим теперь модель, задаваемую произвольной, в общем случае нелинейной функцией $f(\theta, \beta_1 \dots \beta_P)$, дифференцируемой по $\beta_1 \dots \beta_P$. Величины $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P, \theta_1 \dots \theta_M, \xi_1 \dots \xi_M$ и функционал невязки задаются так же, как и для линейной модели: $\xi_1 \dots \xi_M$ имеют нормальное распределение и

$$M(\xi_k) = f(\theta_k, \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P), \quad \sigma^2(\xi_m) = \sigma_m^2, \quad (45)$$

где $M(\xi_k)$ означает математическое ожидание величины ξ_k , а $\sigma^2(\xi_m)$ — дисперсию величины ξ_k . Функционал невязки имеет вид

$$R(\beta_1 \dots \beta_P, \xi_1 \dots \xi_M) = \sum_{m=1}^M (\xi_m - f(\theta, \beta_1 \dots \beta_P))^2 w_m, \quad (46)$$

где $w_m = \varepsilon_0^2/\sigma_m^2$ и для дисперсии единицы веса имеем

$$\varepsilon_0^2 = \frac{\sigma^2(R(\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P, \xi_1 \dots \xi_M))}{M}. \quad (47)$$

При моделировании ε_0 задается в качестве исходного параметра, т.е. в модельных расчетах значение ε_0 известно априори.

Обозначим как $\beta_1^c \dots \beta_P^c$ центральные значения, доставляющие минимум $R(\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P, \xi_1 \dots \xi_M)$ при фиксированных $\xi_1 \dots \xi_M$. Пусть $\beta_{1,0} \dots \beta_{P,0}$ — некоторые значения параметров, близкие к центральным значениям. Разложим в точке $\beta_{1,0} \dots \beta_{P,0}$ функцию f в ряд Тейлора до первого члена:

$$f(\theta, \beta_1 \dots \beta_P) \approx f(\theta, \beta_{1,0} \dots \beta_{P,0}) + \sum_{p=1}^P (\beta_p - \beta_{p,0}) \frac{\partial f}{\partial \beta_p}(\theta, \beta_{1,0} \dots \beta_{P,0});$$

положим в (36), а затем в (39) и в (40)

$$\alpha_p = \beta_p - \beta_{p,0}, \quad g_0 = f(\theta, \beta_{1,0} \dots \beta_{P,0}), \quad (48)$$

$$g_p(\theta) = \frac{\partial f}{\partial \beta_p}(\theta, \beta_{1,0} \dots \beta_{P,0}),$$

где $p = 1 \dots P$. Тогда $\beta_{p,0} + \alpha_p$ будут следующими приближениями для центральных значений $\beta_1^c \dots \beta_P^c$, а дисперсии, вычисленные с помощью (41) и (48) при $\beta_{p,0} = \beta_p^c$,

$$\sigma^2(\beta_p^c) = \sum_{m=1}^M \varepsilon_0^2 w_m \times \left(\sum_{q=1}^P A_{qp}^{-1} \frac{\partial f}{\partial \beta_q}(\theta_m, \beta_{1,0} \dots \beta_{P,0}) \right)^2 \quad (41')$$

берутся в качестве приближенного значения дисперсий $\beta_1^c \dots \beta_P^c$.

В случае реально наблюдаемой кривой блеска, аналогично линейному случаю, вместо значения ε_0 используется среднеквадратичная оценка дисперсии единицы веса

$$v_0^2 = \frac{R(\alpha_1^c \dots \alpha_P^c, \xi_1 \dots \xi_M)}{M - P} \quad (43')$$

и соответствующие среднеквадратичные оценки дисперсий параметров

$$\sigma_{est}^2(\beta_p^c) = \sum_{m=1}^M v_0^2 w_m \times \quad (44')$$

$$\times \left(\sum_{q=1}^P A_{qp}^{-1} \frac{\partial f}{\partial \beta_q}(\theta_m, \beta_{1,0} \dots \beta_{P,0}) \right)^2.$$

Очевидно, что если функция $f(\theta, \beta_1 \dots \beta_P)$ линейна по $\beta_1 \dots \beta_P$, то (41')–(44') совпадает с (41)–(44). Отметим, что в описанном методе делается предположение об адекватности модели наблюдательным данным.

3.3. Метод Монте-Карло

В работе также проведены оценки дисперсии $\sigma(\beta_1^c) \dots \sigma(\beta_P^c)$ методом Монте-Карло. Оценка дисперсии проводилась следующим образом. При заданных $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P$ вычислялись в фазах $\theta_1 \dots \theta_M$ значения кривой $\xi_1 \dots \xi_M$. Далее с заданной величиной ε_0 случайным образом генерировалась \mathcal{N} раз последовательность нормально распределенных $\xi_1^{(n)} \dots \xi_M^{(n)}$ ($n = 1 \dots \mathcal{N}$) с математическими ожиданиями, равными $\xi_1 \dots \xi_M$.

Для каждой последовательности $\xi_1^{(n)} \dots \xi_M^{(n)}$ ($n = 1 \dots \mathcal{N}$) находились центральные значения $\beta_1^{c(n)} \dots \beta_P^{c(n)}$, и их дисперсии оценивались как

$$\sigma_{mc}^2(\beta_p^c) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} (\beta_p^{c(n)} - \bar{\beta}_p)^2. \quad (49)$$

Естественно, такой метод подразумевает, что истинные значения $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P$ известны, что возможно в модельных задачах, целью которых является нахождение ошибок для сравнения с ошибками, найденными другими способами. В случае же обработки реальной кривой блеска данный метод можно применить, используя вместо истинных значений параметров $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P$ их центральные значения, полученные решением кривой блеска методом наименьших квадратов. При этом делается предположение о том, что малое изменение $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P$ вызовет относительно малое изменение ошибки. Также в этом методе, как и в методе дифференциальных поправок, делается предположение об адекватности модели наблюдательным данным.

3.4. Метод доверительных областей

Рассмотрим теперь невязку R для общей модели, задаваемую формулой (46). Тогда по теореме о χ^2 -распределении

$$\frac{R(\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_M^2, \quad (50)$$

где “ \sim ”, означает “распределено как”. Интегральная функция распределения χ_M^2 определяется выражением:

$$\chi_m^2(t) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}, 0, \frac{t}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})}, \quad (51)$$

где $\Gamma(\frac{m}{2}, 0, \frac{t}{2})$ — неполная обобщенная гамма-функция. Следовательно, если $\chi_M^2(\Delta_0) = \gamma$, т.е. Δ_0 — квантиль χ_M^2 -распределения для некоторого уровня доверия $\gamma < 1$, то соответствующая вероятность

$$\mathbf{P} \left(\frac{R(\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2} \leq \Delta_0 \right) = \gamma. \quad (52)$$

Пусть D_P — P -мерное множество значений вектора $\beta_1 \dots \beta_P$, удовлетворяющих условию

$$\frac{R(\beta_1 \dots \beta_P, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2} \leq \Delta_0. \quad (52')$$

Тогда (52) эквивалентно утверждению: с вероятностью γ множество D_P не пусто и истинные значения $(\beta_1 \dots \beta_P) \in D$. Множество D является доверительной областью для $(\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P)$. Отметим, что в данном случае нельзя использовать вместо ε_0 его среднеквадратичную оценку v_0 , задаваемую (43'), поскольку такая замена существенно нарушила бы закон распределения (50). В частности, пустой доверительной области не получалось бы при квантиле $\Delta_0 > M - P$ (при $M = 101$ это соответствует тому, что $\gamma > 0.35$), т.е. модель всегда была бы адекватна наблюдениям. Поэтому следует брать либо точное значение ε_0 , известное в модельных задачах, либо его значение, полученное с большой точностью из независимых соображений в случае реальных наблюдений.

Поскольку на практике не всегда известно ε_0^2 , часто используется критерий, основанный на распределении Фишера. Пусть M — число “нормальных” точек, объединяющих измерения в группе для последующего усреднения. Пусть значение ξ_m в точке θ_m измеряется N_m раз ($m = 1 \dots M$), т.е. в m -ой группе содержится N_m точек. Обозначим через N полное число измерений: $N = \sum_{m=1}^M N_m$. Пусть ξ_m^j — значение

j -го измерения кривой ($j = 1, 2 \dots N_m$) в точке θ_m , т.е. ξ_m^j — случайная величина с нормальным законом распределения, и $M(\xi_m^j) = f(\theta_k, \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P)$. Пусть $\xi_m = \frac{1}{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} \xi_m^j$, тогда их истинные дисперсии $\sigma^2(\xi_m) = \sigma^2(\xi_m^j)/N_m$, а через $(\sigma_m^{obs})^2 = \frac{1}{N_m(N_m - 1)} \sum_{j=1}^{N_m} (\xi_m - \xi_m^j)^2$ обозначим оценки дисперсий наблюдений в этих точках. Тогда

$$\frac{R(\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P, \xi_1 \dots \xi_M)}{\sum_{m=1}^M (N_m - 1)w_m(\sigma_m^{obs})^2} \frac{N - M}{M} \sim \mathbf{F}_{M, N-M}, \quad (53)$$

где $\mathbf{F}_{M, N-M}$ — распределение Фишера [5]. Его интегральная функция распределения выглядит сле-

дующим образом:

$$\mathbf{F}_{n,m}(t) = \frac{B_{\frac{nt}{m+nt}}(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})}{B(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})}, \quad (54)$$

где $B_z(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$ — неполная бета-функция. Процедура построения доверительной области для $(\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P)$ аналогична предыдущей.

Рассмотрим теперь случай, когда зависимость функции f от $K(K \leq P)$ параметров $\beta_1 \dots \beta_P$, скажем, от $\beta_1 \dots \beta_K$, линейная. Пусть $\tilde{\beta}_1(\beta_{K+1} \dots \beta_P) \dots \tilde{\beta}_K(\beta_{K+1} \dots \beta_P)$ — значения, доставляющие минимум при фиксированных $\beta_{K+1} \dots \beta_P$ невязке $R(\beta_1 \dots \beta_P, \xi_1 \dots \xi_M)$, которая является в данном случае квадратичной формой по $\beta_1 \dots \beta_K$. Тогда, согласно работе [5],

$$\frac{R(\tilde{\beta}_1(\bar{\beta}_{K+1} \dots \bar{\beta}_P) \dots \tilde{\beta}_K(\bar{\beta}_{K+1} \dots \bar{\beta}_P), \bar{\beta}_{K+1} \dots \bar{\beta}_P, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_{M-K}^2 \quad (55)$$

и

$$\frac{R(\tilde{\beta}_1(\bar{\beta}_{K+1} \dots \bar{\beta}_P) \dots \tilde{\beta}_K(\bar{\beta}_{K+1} \dots \bar{\beta}_P), \bar{\beta}_{K+1} \dots \bar{\beta}_P, \xi_1 \dots \xi_M)}{\sum_{m=1}^M (N_m - 1)w_m \sigma_{om}^2} \frac{N - M}{M - K} \sim \mathbf{F}_{M-K, N-M}. \quad (56)$$

Эти статистики могут использоваться для построения доверительных областей для $\bar{\beta}_{K+1} \dots \bar{\beta}_P$.

В частности, при некотором $k(1 \leq k \leq P)$ имеем

$$\frac{R(\tilde{\beta}_1(\bar{\beta}_k) \dots \tilde{\beta}_k \dots \tilde{\beta}_P(\bar{\beta}_k), \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_{M-P+1}^2 \quad (57)$$

и

$$\frac{R(\tilde{\beta}_1(\bar{\beta}_k) \dots \tilde{\beta}_k \dots \tilde{\beta}_P(\bar{\beta}_k), \xi_1 \dots \xi_M)}{\sum_{m=1}^M (N_m - 1)w_m \sigma_{om}^2} \times \frac{N - M}{M - P + 1} \sim \mathbf{F}_{M-P+1, N-M}, \quad (58)$$

где $\tilde{\beta}_p(\beta_k)$ и $1 \leq p \leq P, p \neq k$, минимизируют невязку при фиксированном β_k . Соотношения (57) и (58) позволяют построить одномерные доверительные области (интервалы) для параметра β_k с заданным уровнем доверия.

Найдем теперь закон распределения разности между невязкой в статистике χ_M^2 , полученной при

истинных значениях параметров, и этой же невязкой, полученной при центральных значениях параметров. Рассмотрим сначала случай, когда зависимость от всех параметров линейная, так что, положив в (55) $K = P$, будем иметь закон распределения невязки, полученной при центральных значениях параметров¹:

$$\frac{R(\beta_1^c \dots \beta_P^c, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_{M-P}^2. \quad (59)$$

Обозначим $R_{\min} \equiv R(\beta_1^c \dots \beta_P^c, \xi_1 \dots \xi_M)$. С помощью известного утверждения ($\xi_a \sim \chi_a^2$ и $\xi_b \sim \chi_b^2$) $\Rightarrow \xi_a + \xi_b \sim \chi_{a+b}^2$ получим

$$\frac{R(\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P, \xi_1 \dots \xi_M) - R_{\min}}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_P^2. \quad (60)$$

Использование статистики (60) предполагает априорную адекватность модели, и доверительное множество, полученное с помощью статистики (60) никогда не пусто. При $K = P - 1$ из (55) и (59)

¹ Конечно, вектора β^c и $\tilde{\beta}$ зависят также и от наблюдаемых ξ . Данная зависимость опущена для краткости.

Таблица 1. Значения γ' при $\gamma = 0.6827$ для двух-, трех- и четырехпараметрических задач

Статистика	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$
χ_P^2	0.8703	0.9396	0.9702
$\chi_M^2, M = 101$	0.7072	0.7309	0.7536
$\mathbf{F}_{M,N-M}, M = 101, N = 1212$	0.7046	0.7258	0.7464

получается

$$\frac{R(\tilde{\beta}_1(\bar{\beta}_k) \dots \tilde{\beta}_k \dots \tilde{\beta}_P(\bar{\beta}_k), \xi_1 \dots \xi_M) - R_{\min}}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_1^2. \quad (61)$$

Статистика (61) также предполагает априорную адекватность модели, и получаемые с помощью нее одномерные доверительные множества (интервалы) никогда не пусты.

Если же зависимость от $\beta_1 \dots \beta_K$ не является линейной, то сделанные утверждения о распределении (55), (56) и следующие из них формулы (57)–(61) выполняются в асимптотическом смысле — когда число измерений стремится к бесконечности, и одной из задач данной работы является численная проверка допустимости таких асимптотических приближений.

Заметим, что если доверительное множество не пусто (используемая модель адекватна наблюдаемой кривой), то оно содержит точку $\beta_1^c \dots \beta_P^c$.

Также приведем интерпретацию невязок, минимальных в отношении параметров, в геометрических терминах. Если взять P -мерное множество

$$D_P = \{(\beta_1 \dots \beta_P) : R(\beta_1 \dots \beta_P) \leq C\},$$

то $(P - K)$ -мерное множество

$$D_{P-K} = \{(\beta_{K+1} \dots \beta_P) : R(\tilde{\beta}_1(\beta_{K+1} \dots \beta_P) \dots \dots \tilde{\beta}_K(\beta_{K+1} \dots \beta_P), \beta_{K+1} \dots \beta_P, \xi_1 \dots \xi_M) \leq C\}$$

является проекцией D_P на $(P - K)$ -мерную плоскость $\beta_{K+1} \dots \beta_P$.

Так как проекции доверительного множества вычисляются с помощью соответствующих невязок, минимизированных по всем параметрам, кроме одного, мы можем, зная закон распределения этих минимальных невязок, найти вероятности попадания истинных значений в соответствующие проекции доверительной области, построенной по заданному уровню доверия γ .

Если $\chi_M^2(\Delta_0) = \gamma$ и $D_P - P$ -мерное доверительное множество с уровнем доверия γ , полученное с помощью квантиля Δ_0 для статистики (50), то

его проекции $D_1^{(p)}$ на оси $\beta_p, p = 1 \dots P$ — одномерные доверительные множества для статистики (57) с уровнем доверия

$$\gamma' = \chi_{M-P+1}^2(\Delta_0). \quad (62)$$

(Напомним, что $\chi_M^2(t)$ задается формулой (51).) Также, если $\chi_P^2(\Delta_0) = \gamma$ и $D_P - P$ -мерное доверительное множество с уровнем доверия γ , полученное с помощью квантиля Δ_0 для статистики (60), то его проекции $D_1^{(p)}$ на оси $\beta_p, p = 1 \dots P$ — одномерные доверительные множества для статистики (61) с уровнем доверия

$$\gamma' = \chi_1^2(\Delta_0). \quad (63)$$

Наконец, если $\mathbf{F}_{M,N-M}(\Delta_0) = \gamma$ и $D_P - P$ -мерное доверительное множество с уровнем доверия γ , полученное с помощью квантиля Δ_0 для статистики (53), то его проекции $D_1^{(p)}$ на оси $\beta_p, p = 1 \dots P$ — одномерные доверительные множества для статистики (56) с уровнем доверия

$$\gamma' = \mathbf{F}_{M-P+1, N-M} \left(\frac{M}{M-P+1} \Delta_0 \right), \quad (64)$$

где функция $\mathbf{F}_{n,m}(t)$ задается формулой (54).

Как показывают численные расчеты, даже в нелинейном случае формулы (62)–(64) дают удовлетворительные результаты.

В табл. 1 приведены значения вероятности γ' попадания в проекцию области при вероятности попадания в саму область $\gamma = 0.6827$ для одно-, двух-, трех- и четырехпараметрических задач, рассчитанные с помощью формул (62)–(64). Забегая вперед, отметим, что, как показал численный эксперимент, число попаданий истинных значений в проекцию области на ось параметра очень хорошо согласуется с приведенными в табл. 1 теоретическими значениями γ' как в линейном, так и в нелинейном случае.

Приведем коэффициенты κ , на которые нужно домножить стандартное отклонение σ (см. формулу (42)), чтобы получить величину проекции доверительной области на ось параметра, найденной в статистике χ_P^2 при условии, что доверительная область содержит истинное значение параметров с вероятностью $\gamma = 0.6827$. Коэффициенты равны 1.515173, 1.87796 и 2.17244 в случае двух-, трех- и четырехпараметрических областей, соответственно. Забегая вперед, отметим, что полученные в численном эксперименте дисперсии и проекции доверительной области, в статистике χ_P^2 хорошо удовлетворяют этому правилу. Также отметим, что в случае многопараметрических задач увеличение вероятности накрытия при проектировании строго одинаково для всех параметров (табл. 2 и табл. 3).

Таблица 2. Значения полуширины проекций доверительной области параметров линейных функций (74)–(77) в рамках статистики χ^2_P и число попаданий в проекции доверительных интервалов теоретических значений параметров

Функция	$\Delta_{\beta_1}/2; (N_{\Delta\beta_1})$	$\Delta_{\beta_2}/2; (N_{\Delta\beta_2})$	$\Delta_{\beta_3}/2; (N_{\Delta\beta_3})$	$\Delta_{\beta_4}/2; (N_{\Delta\beta_4})$	N_0
Формула (74)	0.00119; (681)	–	–	–	–
Формула (75)	0.00282; (878)	0.00225; (868)	–	–	686
Формула (76)	0.00353; (939)	0.00768; (944)	0.00149; (940)	–	685
Формула (77)	0.0910; (977)	0.0343; (969)	0.0119; (972)	0.0796; (976)	681

Таблица 3. Значения полуширины проекций доверительной области параметров нелинейных функций (78)–(81) в рамках статистики χ^2_P и число попаданий в проекции доверительных интервалов теоретических значений параметров

Функция	$\Delta_{\beta_1}/2; (N_{\Delta\beta_1})$	$\Delta_{\beta_2}/2; (N_{\Delta\beta_2})$	$\Delta_{\beta_3}/2; (N_{\Delta\beta_3})$	$\Delta_{\beta_4}/2; (N_{\Delta\beta_4})$	N_0
Формула (78)	0.00113; (682)	–	–	–	–
Формула (79)	0.0418; (870)	0.00169; (866)	–	–	668
Формула (80)	0.0155; (943)	0.00603; (937)	0.00132; (942)	–	697
Формула (81)	0.00921; (962)	0.0126; (976)	0.00322; (969)	0.0132; (973)	702

Приведем для уровня доверия $\gamma = 0.6827$ значение квантиля Δ_0 распределения χ^2_P для одно-, двух-, трех- и четырехпараметрических задач (табл. 4).

Таким образом, например, в одномерных задачах, чтобы доверительная область покрывала точное решение с вероятностью $\gamma = 0.6827$, необходимо отсекал значения $R(\beta_1, \xi_1 \dots \xi_M)/\varepsilon_0^2$ числом, на 1 большим, чем минимальное значение этой величины.

3.5. Применение методов нахождения ошибок к кривой блеска

Рассмотрим теперь модель кривой блеска двойной системы. Для расчета блеска по известным r_1, r_2, z и $\mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_4$ использовалась формула (35). Значение блеска вне затмения L^{full} полагалось известным точно. Полный блеск двойной принят равным $L^{full} = 1$. Используя данное условие, выразим параметр \mathcal{X}_4 через остальные с помощью формулы (8) (с учетом переобозначений (34)):

$$\mathcal{X}_4 = \frac{3}{2\pi r_2^2} - \frac{3\mathcal{X}_1 r_1^2}{2r_2^2} - \frac{\mathcal{X}_2 r_1^2}{r_2^2} - \frac{3}{2}\mathcal{X}_3. \quad (65)$$

Положив в (46)

$$P = 6 \quad \text{и} \quad \beta_1 = r_1, \beta_2 = r_2, \beta_3 = z, \quad (66)$$

$$\beta_4 = \mathcal{X}_1, \beta_5 = \mathcal{X}_2, \beta_6 = \mathcal{X}_3,$$

$$f(\theta, \beta_1 \dots \beta_6) = \mathcal{L}(\theta_m, r_1, r_2, z, \mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_4),$$

выпишем получившийся функционал невязки:

$$R(r_1, r_2, z, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \xi_1 \dots \xi_M) = \quad (67)$$

$$= \sum_{m=1}^M [\xi_m - \mathcal{L}(\theta_m, r_1, r_2, z, \mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_4)]^2 w_m,$$

где \mathcal{X}_4 задается выражением (65).

Центральными значениями параметров будут значения, доставляющие ему абсолютный минимум. Обозначим их как r_1^c, r_2^c, z^c и $\mathcal{X}_1^c, \mathcal{X}_2^c, \mathcal{X}_3^c$. Дисперсии центральных значений и их среднеквадратичные оценки можно найти, подставив (66) в (41') и в (44').

Значения $\tilde{\mathcal{X}}_p(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M)$, доставляющие минимум невязке при фиксированных r_1, r_2, z ,

Таблица 4. Значение квантиля Δ_0 распределения χ^2_P для одно-, двух-, трех- и четырехпараметрических задач для уровня доверия $\gamma = 0.6827$

Количество параметров P	Δ_0
1	1.0000
2	2.2957
3	3.5267
4	4.7195

можно найти, положив в (36), (39) и (40) $P = 3$ и (68), получаем

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{3}{2\pi r_2^2} \mathcal{L}_4(\theta_m, r_1, r_2, z), \\ g_1(\theta_k) &= \mathcal{L}_1(r_1, r_2, z) - \frac{3r_1^2}{2r_2^2} \mathcal{L}_4(\theta_m, r_1, r_2, z), \\ g_2(\theta_k) &= \mathcal{L}_2(r_1, r_2, z) - \frac{r_1^2}{r_2^2} \mathcal{L}_4(\theta_m, r_1, r_2, z), \\ g_3(\theta_k) &= \mathcal{L}_3(r_1, r_2, z) - \frac{3}{2} \mathcal{L}_4(\theta_m, r_1, r_2, z). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M) &= \\ &= A^{-1}(r_1, r_2, z)B(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M). \end{aligned} \quad (68)$$

Обозначим невязки, минимальные по $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$, как

$$\begin{aligned} \tilde{R}(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M) &= R(r_1, r_2, z, \tilde{\mathcal{X}}(r_1, r_2, z)), \\ \tilde{\mathcal{X}}_2(r_1, r_2, z), \tilde{\mathcal{X}}_3(r_1, r_2, z), \xi_1 \dots \xi_M \end{aligned}$$

(зависимость $\tilde{\mathcal{X}}(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M)$ от $\xi_1 \dots \xi_M$ опущена для краткости). Согласно (55) и (56)

$$\frac{\tilde{R}(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0} \sim \chi_{M-3}^2 \quad (69)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{R}(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M)}{\sum_{m=1}^M (N_m - 1)w_m(\sigma_m^{obs})^2} \frac{N - M}{M - 3} &\sim \\ &\sim \mathbf{F}_{M-3, N-M}. \end{aligned} \quad (70)$$

Также аналогично (60) получается, что (в асимптотическом смысле)

$$\frac{\tilde{R}(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M) - R_{\min}}{\varepsilon_0} \sim \chi_3^2. \quad (71)$$

Минимизация по r_1, r_2, z проводится с помощью методов минимизации нелинейных функций — например с помощью метода градиентного спуска. Для этого удобно иметь выражение для производных от $\tilde{\mathcal{X}}(r_1, r_2, z)$ по r_1, r_2, z . Обозначим их как $\partial_1, \partial_2, \partial_3$, соответственно. Они равны

$$\partial_k \tilde{\mathcal{X}} = (\partial_k A^{-1})B + A^{-1} \partial_k B, \quad k = 1, 2, 3.$$

Используя соотношение²

$$\partial_k A^{-1} = -A^{-1}(\partial_k A)A^{-1}$$

² Соотношение получается дифференцированием тождества $AA^{-1} = \mathbb{I}$, где \mathbb{I} — единичная матрица.

$$\begin{aligned} \partial_k \tilde{\mathcal{X}} &= A^{-1} [-(\partial_k A) \tilde{\mathcal{X}} + \partial_k B], \\ &k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (72)$$

Используя последнее выражение, нетрудно продифференцировать уже и сам функционал невязки.

Приведем геометрическую интерпретацию невязок, минимальных по части параметров. Если множество

$$\begin{aligned} D &= \{(r_1, r_2, z, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) : \\ &: R(r_1, r_2, z, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) \leq \Delta_0\} \end{aligned}$$

(где знак “:” означает “такие, что”), то множество

$$D_{r_1 r_2 z} = \{(r_1, r_2, z) : \tilde{R}(r_1, r_2, z) \leq \Delta_0\}$$

— проекция D на трехмерную гиперплоскость $r_1 r_2 z$, а

$$D_{r_1} = \{r_1 : \tilde{R}(r_1, \tilde{r}_2(r_1), \tilde{z}(r_1)) \leq \Delta_0\} \quad (73)$$

(где $\tilde{r}_2(r_1), \tilde{z}(r_1)$ — те значения r_2 и z , в которых достигает минимума функция $\tilde{R}(r_1, r_2, z)$ при фиксированном r_1) — это проекция $D_{r_1 r_2 z}$ (и D) на ось r_1 .

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОПРАВOK И МЕТОДА ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Прежде чем приступить к решению наблюдаемой кривой блеска, методы расчета ошибок для большей наглядности апробированы на ряде простых функций. Использовались одно-, двух-, трех- и четырехпараметрические функции как с линейной (74)–(77), так и нелинейной (78)–(81) зависимостью от параметров.

В численном эксперименте использовались следующие линейные относительно параметров функции:

$$f(\theta, \beta_1) = \cos \theta + \beta_1 \sin \theta, \quad (74)$$

где истинное значение параметра $\bar{\beta}_1 = 2$,

$$f(\theta, \beta_1, \beta_2) = \frac{\beta_1}{1 + \theta^2} + \beta_2 \sin \theta, \quad (75)$$

где истинные значения параметров $\bar{\beta}_1 = 2, \bar{\beta}_2 = 3$,

$$f(\theta, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\beta_1}{1 + \theta^2} + \beta_2 \sin \theta + \beta_3 e^\theta, \quad (76)$$

где истинные значения параметров $\bar{\beta}_1 = 2, \bar{\beta}_2 = 3, \bar{\beta}_3 = 1$,

$$f(\theta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \quad (77)$$

$$= \frac{\beta_1}{1 + \theta^2} + \beta_2 \sin \theta + \beta_3 e^\theta + \beta_4 \cos \theta,$$

где истинные значения параметров $\bar{\beta}_1 = 1$, $\bar{\beta}_2 = 1$, $\bar{\beta}_3 = 1$, $\bar{\beta}_4 = 1$.

Использовались следующие нелинейные относительно параметров и дифференцируемые по параметрам функции:

$$f(\theta, \beta_1) = \cos(\theta + \beta_1) + \sin \beta_1 \theta, \quad (78)$$

где истинное значение параметра $\bar{\beta}_1 = 2$,

$$f(\theta, \beta_1, \beta_2) = \frac{1}{\beta_1 \theta^2 + \beta_2} + \sin \beta_2 \theta, \quad (79)$$

где истинные значения параметров $\bar{\beta}_1 = 2$, $\bar{\beta}_2 = 3$,

$$f(\theta, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{1}{\beta_1 \theta^2 + \beta_2} + \sin(\beta_2 \theta + \beta_3) + e^{\beta_3 \theta}, \quad (80)$$

где истинные значения параметров $\bar{\beta}_1 = 2$, $\bar{\beta}_2 = 3$, $\bar{\beta}_3 = 1$,

$$f(\theta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \frac{1}{\beta_1 \theta^2 + \beta_2} + \sin(\beta_2 \theta + \beta_1 - 1) + e^{\beta_3 \theta} + \cos(\beta_4 \theta + \beta_3 - 1), \quad (81)$$

где истинные значения параметров $\bar{\beta}_1 = 1$, $\bar{\beta}_2 = 1$, $\bar{\beta}_3 = 1$, $\bar{\beta}_4 = 1$.

В ходе численного эксперимента в точках $\theta_1 \dots \theta_{101}$, равномерно расположенных на числовом отрезке абсциссы $[0, 2]$ при заданных истинных значениях параметров $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3, \bar{\beta}_4$ получены истинные значения функции $\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_{101}$. Генерировалась выборка нормально распределенных случайных величин ξ_m ($m = 1 \dots 101$), таких что $\sigma(\xi_m) = \sigma_m = 0.03/\sqrt{12} = 0.008660$ и $M(\xi_m) = \bar{\xi}_m$. Генерация $\xi_1 \dots \xi_{101}$ производилась следующим образом. Сначала при $j = 1 \dots 12$ генерировалась выборка нормально распределенных случайных величин $\xi_1^j \dots \xi_{101}^j$, таких что $M(\xi_m^j) = \bar{\xi}_m$ и $\sigma(\xi_m^j) = 0.03$, $m = 1 \dots 101$. Далее вычислялись величины $\xi_m = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} \xi_m^j$. Кроме того, вычислялись величины $(\sigma_m^{obs})^2 = \frac{1}{12(12-1)} \sum_{j=1}^{12} (\xi_m - \xi_m^j)^2$ для использования в методе со статистикой Фишера. В соответствии с этим в выражениях (45), (46) и (53) полагалось $M = 101$, $w_m = N_m = 12$ и $\varepsilon_0 = 0.03$ (в этом случае значение стандартного отклонения $\sigma(\xi_m) = \sigma_m = 0.03/\sqrt{12} = 0.008660$). В дальнейшем в работе данная процедура названа “возмущением”, функции, а выборка $\xi_1^j \dots \xi_{101}^j$, с помощью которой получают ξ_m и σ_m^{obs2} , называется “возмущенной” кривой.

Данный метод генерации “возмущенной” функции эквивалентен тому, что мы имеем $M = 101$ возмущенную точку со стандартным отклонением $\sigma_m = 0.008660$, где $m = 1 \dots 101$. Описанный выше метод получения возмущенной кривой блеска используется в связи с применением статистики Фишера, где требуется разбиение точек по группам. Вышеописанный метод генерации “возмущенной” кривой позволяет произвести поиск параметров задачи в рамках статистики Фишера и статистики χ -квадрат по одной и той же реализации “возмущенной” кривой, что важно для чистоты численного эксперимента. При данном способе генерации размерность статистики χ -квадрат составляла $M = 101$, размерность статистики Фишера такова — $\mathbf{F}_{101,1212-101}$.

Далее вычислялись центральные значения параметров и размер интервала ошибок. Дополнительно, в качестве оценки надежности метода расчета интервала ошибки вычислялось число попаданий в него истинных значений параметров.

Поскольку центральные значения параметров функций (74)–(77) практически совпадают с истинными, то для того чтобы не загромождать основные результаты расчетов (интервалы ошибок), центральные значения мы не приводим. В дальнейшем в работе интервалы ошибок приведены на уровне доверия $\gamma = 68.2\%$, если это не оговорено специально.

4.1. Метод дифференциальных поправок

Получены центральные значения параметров $\beta_1^c, \beta_2^c, \beta_3^c, \beta_4^c$ и на основе выражения (41') — оценки значения стандартных отклонений (среднеквадратичных ошибок) $\sigma(\beta_1^c), \sigma(\beta_2^c), \sigma(\beta_3^c), \sigma(\beta_4^c)$, как для линейных относительно параметров функций (74)–(77), так и для нелинейных функций (78)–(81). Результаты представлены в табл. 5 и 6, соответственно.

Помимо этого в работе проверена надежность интервалов ошибок параметров $\beta_1^c \pm \sigma(\beta_1^c), \beta_2^c \pm \sigma(\beta_2^c), \beta_3^c \pm \sigma(\beta_3^c)$ и $\beta_4^c \pm \sigma(\beta_4^c)$. В данном случае оценка надежности интервалов ошибок выполнена следующим образом. Тысячу раз произведено описанное выше “возмущение”, каждой функции с $\varepsilon_0 = 0.03$. Для каждой “возмущенной” функции получено решение — центральные значения параметров $\beta_1^c, \beta_2^c, \beta_3^c, \beta_4^c$. После подсчитывалось число попаданий $(N_1), (N_2), (N_3)$ и (N_4) истинных значений параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и β_4 в интервал ошибок $\beta_1^c \pm \sigma(\beta_1^c), \beta_2^c \pm \sigma(\beta_2^c), \beta_3^c \pm \sigma(\beta_3^c)$ и $\beta_4^c \pm \sigma(\beta_4^c)$. Также подсчитано число одновременных попаданий значений параметров в свои интервалы ошибок N_{all} .

Таблица 5. Значения стандартных отклонений (среднеквадратичных ошибок) параметров линейных функций (74)–(77) и число попаданий в них, полученные в рамках метода дифференциальных поправок

Функция	$\sigma(\beta_1^c); (N_1)$	$\sigma(\beta_2^c); (N_2)$	$\sigma(\beta_3^c); (N_3)$	$\sigma(\beta_4^c); (N_4)$	N_{all}
Формула (74)	0.00111; (696)	–	–	–	–
Формула (75)	0.00186; (686)	0.00148; (675)	–	–	527
Формула (76)	0.00188; (666)	0.00409; (691)	0.000793; (684)	–	485
Формула (77)	0.0418; (669)	0.0158; (659)	0.00548; (665)	0.0366; (670)	606

Таблица 6. Значения стандартных отклонений (среднеквадратичных ошибок) параметров нелинейных функций (78)–(81) и число попаданий в них, полученные в рамках метода дифференциальных поправок

Функция	$\sigma(\beta_1^c); (N_1)$	$\sigma(\beta_2^c); (N_2)$	$\sigma(\beta_3^c); (N_3)$	$\sigma(\beta_4^c); (N_4)$	N_{all}
Формула (78)	0.00115; (697)	–	–	–	–
Формула (79)	0.0276; (683)	0.00112; (676)	–	–	469
Формула (80)	0.0837; (695)	0.00313; (673)	0.00068; (677)	–	587
Формула (81)	0.00412; (676)	0.00555; (679)	0.00143; (679)	0.00596; (687)	534

Таблица 7. Значения стандартных отклонений (среднеквадратичных ошибок) параметров линейных функций (74)–(77) и число попаданий в них, полученные в рамках метода Монте-Карло

Функция	$\sigma_{mc}(\beta_1^c); (N_1)$	$\sigma_{mc}(\beta_2^c); (N_2)$	$\sigma_{mc}(\beta_3^c); (N_3)$	$\sigma_{mc}(\beta_4^c); (N_4)$
Формула (74)	0.00114; (691)	–	–	–
Формула (75)	0.00154; (689)	0.00128; (683)	–	–
Формула (76)	0.00182; (674)	0.00394; (675)	0.000769; (672)	–
Формула (77)	0.0430; (684)	0.0161; (692)	0.00563; (692)	0.0376; (682)

Таблица 8. Значения стандартных отклонений (среднеквадратичных ошибок) параметров нелинейных функций (78)–(81) и число попаданий в них, полученные в рамках метода Монте-Карло

Функция	$\sigma_{mc}(\beta_1^c); (N_1)$	$\sigma_{mc}(\beta_2^c); (N_2)$	$\sigma_{mc}(\beta_3^c); (N_3)$	$\sigma_{mc}(\beta_4^c); (N_4)$
Формула (78)	0.00113; (670)	–	–	–
Формула (79)	0.0277; (684)	0.00108; (700)	–	–
Формула (80)	0.0818; (680)	0.00317; (689)	0.000689; (673)	–
Формула (81)	0.00415; (681)	0.00563; (677)	0.00146; (691)	0.00605; (687)

4.2. Метод Монте-Карло

Аналогичный численный эксперимент для функций (74)–(81) выполнен в рамках метода Монте-Карло. Произведено $\mathcal{N} = 1000$ раз “возмущение” функции. Для каждой “возмущенной” функции находились центральные значения параметров $\beta_1^{c(n)}$, $\beta_2^{c(n)}$, $\beta_3^{c(n)}$, $\beta_4^{c(n)}$ ($n = 1 \dots \mathcal{N}$) и по формуле (49) оценивались их дисперсии.

Как и в предыдущем случае, подсчитано число попадания случайных реализаций центральных значений параметров β_1^c , β_2^c , β_3^c , β_4^c в интервалы ошибок $\bar{\beta}_1^c \pm \sigma_{mc}(\beta_1^c)$, $\bar{\beta}_2^c \pm \sigma_{mc}(\beta_2^c)$, $\bar{\beta}_3^c \pm \sigma_{mc}(\beta_3^c)$, $\bar{\beta}_4^c \pm \sigma_{mc}(\beta_4^c)$.

Дополнительно проверено, насколько закон распределения центральных значений β_1^c , β_2^c , β_3^c , β_4^c совпадает с нормальным для случая с нелинейной

зависимостью от параметров (74)–(77) (в случае линейной зависимости он является в точности нормальным). Для этого, помимо числа попаданий в интервал полуширины σ_{mc} , также подсчитано число попаданий истинных значений в интервалы полуширины $1.5\sigma_{mc}$, $2\sigma_{mc}$ и $3\sigma_{mc}$, для которых вероятности попадания в случае нормального закона распределения составляют 0.8664, 0.9545 и 0.9973, соответственно. Для того чтобы не загромождать работу излишним количеством таблиц, числа попаданий мы не приводим, а только отметим, что оно столь же близко к теоретической вероятности, как и в случае σ_{mc} (см. ниже табл. 8). Это говорит о том, что распределение центральных значений параметров и в нелинейном случае близко к нормальному (ввиду малости “ошибок наблюдений”).

Результаты численного эксперимента по оценке надежности интервалов ошибок для аналитических функций с линейной и нелинейной зависимостью от параметров представлены в табл. 7 и табл. 8, соответственно.

4.3. Метод доверительных областей

Аналогичный анализ проведен в рамках метода доверительных областей. Построение доверительной области проведено в рамках статистики χ^2_P (где P — число неизвестных параметров задачи), χ^2_M (где M — полное число точек кривой) и статистике Фишера $F_{M,N-M}$. В отличие от метода дифференциальных поправок, метод доверительных областей позволяет не только вычислить доверительные интервалы параметров, но в ряде случаев и проверить гипотезу об адекватности модели наблюдаемым данным.

На отрезке абсциссы $[0, 2]$ получены возмущенные кривые $\xi_1^j \dots \xi_{101}^j$ для функций (74)–(81). Далее методом доверительных областей производился поиск интервалов ошибок $[\beta_p^{\min}, \beta_p^{\max}]$ ($p = 1 \dots 4$). Интервалы вычислены как проекции доверительной области, полученной с помощью статистики χ^2_P , χ^2_M , $F_{M,N-M}$ решением соответствующего неравенства относительно $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, на оси координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

Для большей наглядности результатов в работе приводятся не значения границ интервала β_p^{\min} и β_p^{\max} , а величина полуширины проекции доверительной области $\Delta_{\beta_p}/2 = (\beta_p^{\max} - \beta_p^{\min})/2$.

Для оценки надежности полуширины проекции доверительной области $\Delta_{\beta_1}/2, \Delta_{\beta_2}/2, \Delta_{\beta_3}/2, \Delta_{\beta_4}/2$, как и в предыдущих случаях, проведен подсчет $N_{\Delta_{\beta_1}}, N_{\Delta_{\beta_2}}, N_{\Delta_{\beta_3}}, N_{\Delta_{\beta_4}}$ — числа попадания истинного значения β_p в полученные интервалы $[\beta_p^{\min}, \beta_p^{\max}]$ ($p = 1 \dots 4$). Всего проведена тысяча

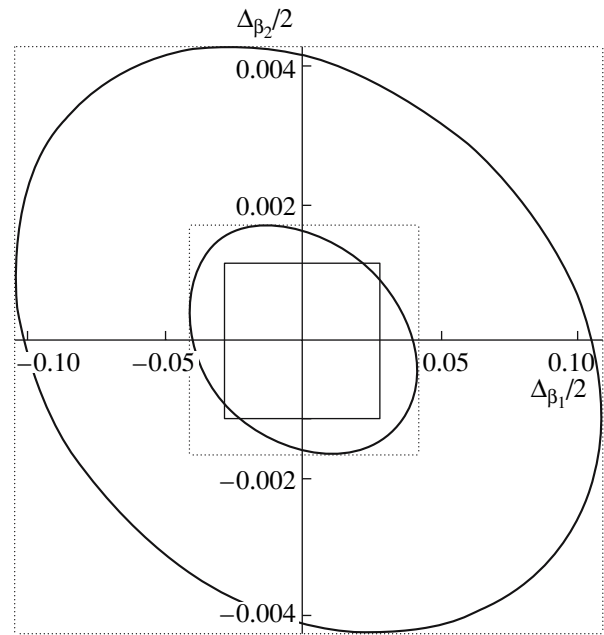


Рис. 2. Доверительная область параметров β_1 и β_2 функции $f(\theta, \beta_1, \beta_2) = \frac{1}{\beta_1 \theta^2 + \beta_2} + \sin \beta_2 \theta$, построенная в рамках статистики χ^2_P (меньший эллипс) и статистики χ^2_M (большой эллипс). Пунктирные квадраты соответствуют объемлющим доверительные области параллелепипедам, габариты которых определяются проекциями доверительной области на оси параметров β_1 и β_2 .

испытаний. Помимо подсчета попадания в проекции области, проведен подсчет числа попаданий N_0 в саму доверительную область. Результаты представлены ниже.

4.4. Статистика χ^2_P

Интервалы ошибок вычислены как проекции доверительной области, полученной с помощью статистики (60) решением соответствующего неравенства относительно $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, на оси координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

Так, например, для двухпараметрической функции доверительная область имеет форму эллипса (рис. 2). Под проекцией доверительной области имеется в виду проекция эллипса на соответствующие оси параметров — в данном случае β_1 и β_2 .

Отметим, что при расчете доверительной области на основе статистики χ^2_P не осуществляется проверка гипотезы об адекватности модели наблюдаемым данным, модель изначально полагается адекватной. В связи с тем, что квантиль Δ_0 откладывается от минимального значения невязки R_{\min} (см. выражение (60)), значение полуширины проекции доверительного интервала устойчиво

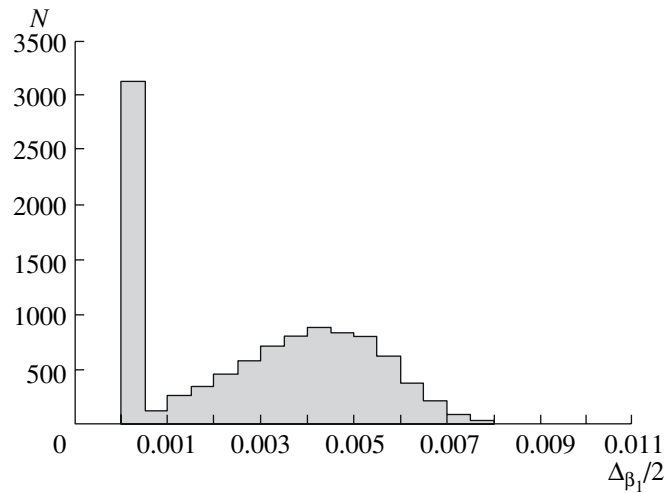


Рис. 3. Экспериментально полученная гистограмма плотности распределения полуширины доверительного интервала $\Delta_{\beta_1}/2$ функции $f(\theta, \beta_1) = \cos(\theta + \beta_1) + \sin \beta_1 \theta$. Интервалы получены в статистике χ_M^2 в результате 10^4 испытаний. N — количество значений полуширины доверительного интервала $\Delta_{\beta_1}/2$, попадающих в соответствующий шаг гистограммы.

(в отличие от статистики χ_M^2 , где M — полное число точек кривой).

Размеры проекций доверительной области параметров β_p функций (74)–(77) и функций (78)–(81), полученных в рамках статистики χ_P^2 , и число попаданий в них представлены в табл. 2 и 3. Заметим, что если потребовать, чтобы вероятность попаданий точного решения в проекции доверительной области на оси параметров составляла $\gamma' = 68.2\%$, то вероятность накрытия точного решения всей доверительной области одновременно будет $\gamma < 68.2\%$ ($\gamma \sim 50\%$). В то же время величины проекций доверительных интервалов, указанные в табл. 2 и 3, гарантируют попадание точного решения в доверительную область с заданной вероятностью $\gamma = 68.2\%$. Данная ситуация аналогична методу дифференциальных поправок.

Часто на практике вычисляют сечение по одному из неизвестных параметров задачи, а не проекцию доверительной области на ось параметра. Для того чтобы оценить надежность подобного метода оценки параметра, был проведен дополнительный расчет размера сечения и числа попадания истинных значений в интервал сечения в статистике χ_P^2 для линейной функции (75) и более скоррелированной функции по параметрам β_1, β_2

$$f(x, \beta_1, \beta_2) = \beta_1 x + \beta_2 x^2. \quad (82)$$

Для функции (75) полуширина сечения параметров β_1 и β_2 составила $S_{\beta_1}/2 = 0.003289$ (739) и $S_{\beta_2}/2 = 0.002627$ (750) (в скобках содержится число попаданий в интервал сечения). Для функции (82) полуширина сечения параметров β_1 и

β_2 составила $S_{\beta_1}/2 = 0.001747$ (307) и $S_{\beta_2}/2 = 0.001122$ (311). Для функции (82) размеры проекции и число попаданий истинных значений составили $\Delta_{\beta_1}/2 = 0.006989$ (874) и $\Delta_{\beta_2}/2 = 0.0044896$ (879). Видно, что размер сечения и соответственно число попаданий истинных значений зависят от степени скоррелированности между параметрами функции, тогда как величина проекции доверительной области на ось параметра и число попаданий истинных значений в нее не зависят от степени корреляции параметров задачи.

При этом смысл проекций доверительной области, приведенных в табл. 2 и 3 (а также и в других рассматриваемых ниже таблицах), следующий: если мы указываем величины проекций доверительной области, то мы гарантируем одновременное попадание всех параметров задачи в доверительную область с заданной вероятностью $\gamma = 68.2\%$, а в объемлющий доверительную область параллелепипед — с вероятностью $\gamma > 68.2\%$.

4.5. Статистика χ_M^2

Подобный численный эксперимент был также проведен в рамках статистики χ_M^2 . Интервалы вычислены как проекции доверительной области, полученной с помощью статистики (50), т.е. являющейся решением неравенства (52') относительно $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, на оси координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

В табл. 9 и 10 приведены значения полуширины проекции доверительной области $\Delta_{\beta_1}/2, \Delta_{\beta_2}/2, \Delta_{\beta_3}/2, \Delta_{\beta_4}/2$. Напомним, что уровень доверия выбран $\gamma = 68.2\%$.

В отличие от распределения χ_P^2 и метода дифференциальных поправок, размер области меняется

Таблица 9. Значения полуширины проекций доверительной области параметров линейных функций (74)–(77) в рамках статистики χ_M^2 и число попаданий в них теоретических значений параметров

Функция	$\Delta_{\beta_1}/2; (N_{\Delta\beta_1})$	$\Delta_{\beta_2}/2; (N_{\Delta\beta_2})$	$\Delta_{\beta_3}/2; (N_{\Delta\beta_3})$	$\Delta_{\beta_4}/2; (N_{\Delta\beta_4})$	N_0
Формула (74)	0.00344; (674)	–	–	–	–
Формула (75)	0.00915; (688)	0.00702; (694)	–	–	673
Формула (76)	0.00508; (740)	0.0110; (738)	0.00215; (739)	–	684
Формула (77)	0.2174; (726)	0.0820; (728)	0.0284; (727)	0.1900; (725)	674

Таблица 10. Значения полуширины проекций доверительной области параметров нелинейных функций (78)–(81) в рамках статистики χ_M^2 и число попаданий в них теоретических значений параметров

Функция	$\Delta_{\beta_1}/2; (N_{\Delta\beta_1})$	$\Delta_{\beta_2}/2; (N_{\Delta\beta_2})$	$\Delta_{\beta_3}/2; (N_{\Delta\beta_3})$	$\Delta_{\beta_4}/2; (N_{\Delta\beta_4})$	N_0
Формула (78)	0.00354; (663)	–	–	–	–
Формула (79)	0.116; (707)	0.00436; (700)	–	–	680
Формула (80)	0.437; (718)	0.00159; (729)	0.00343; (723)	–	676
Формула (81)	0.0160; (746)	0.0220; (745)	0.00560; (746)	0.0229; (747)	680

Таблица 11. Значения полуширины проекций доверительной области параметров линейных функций (74)–(77), полученные в рамках распределения Фишера $\mathbf{F}_{M,N-M}$, и число попаданий в них теоретических значений параметров

Функция	$\Delta_{\beta_1}/2; (N_{\Delta\beta_1})$	$\Delta_{\beta_2}/2; (N_{\Delta\beta_2})$	$\Delta_{\beta_3}/2; (N_{\Delta\beta_3})$	$\Delta_{\beta_4}/2; (N_{\Delta\beta_4})$	N_0
Формула (74)	0.00294; (692)	–	–	–	–
Формула (75)	0.00746; (705)	0.00578; (706)	–	–	685
Формула (76)	0.00420; (728)	0.0093; (729)	0.00189; (730)	–	687
Формула (77)	0.1733; (753)	0.0677; (752)	0.0200; (752)	0.134; (753)	688

Таблица 12. Значения полуширины проекций доверительной области параметров нелинейных функций (78)–(81), полученные в рамках распределения Фишера $\mathbf{F}_{M,N-M}$, и число попаданий в них теоретических значений параметров

Функция	$\Delta_{\beta_1}/2; (N_{\Delta\beta_1})$	$\Delta_{\beta_2}/2; (N_{\Delta\beta_2})$	$\Delta_{\beta_3}/2; (N_{\Delta\beta_3})$	$\Delta_{\beta_4}/2; (N_{\Delta\beta_4})$	N_0
Формула (78)	0.00315; (693)	–	–	–	–
Формула (79)	0.099; (700)	0.00432; (700)	–	–	678
Формула (80)	0.391; (723)	0.00140; (725)	0.00301; (723)	–	679
Формула (81)	0.0114; (749)	0.0192; (750)	0.00485; (749)	0.0193; (750)	680

в зависимости от конкретной реализации “возмущенной” кривой $\xi_1^j \dots \xi_{101}^j$. На рис. 3 приведена экспериментально полученная гистограмма плотности распределения величины полуширины доверительного интервала $\Delta_{\beta_1}/2$ для однопараметрической функции, полученных в результате 10^4 испытаний для функции (74).

Гистограмма имеет два четко выраженных максимума. Первый максимум связан с ошибкой первого рода — верное решение отвергается с вероятностью $\alpha = 1 - \gamma$, т.е. интервал ошибки не существует. Второй максимум гистограммы демонстрирует плотность распределения интервалов ошибок. Видно, что размер доверительного интервала уменьшается в 7–8 раз. Поэтому в результатах нашей

работы приводится значение полуширины интервала в окрестностях второго максимума ее плотности распределения.

Размеры проекций доверительной области параметров β_p функций (74)–(77) и функций (78)–(81), полученных в рамках статистики χ_M^2 , и число попаданий в них представлены в табл. 9 и 10. Эти размеры примерно в 2 раза больше, чем в случае статистики χ_P^2 .

4.6. Статистика Фишера $\mathbf{F}_{M,N-M}$

Аналогичный численный эксперимент проведен в рамках статистики Фишера $\mathbf{F}_{M,N-M}$. Интервалы вычислены как проекции доверительной области, полученной с помощью статистики (53), т.е. являющейся решением соответствующего неравенства относительно $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, на оси координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

Размеры проекций доверительной области параметров β_p функций (74)–(77) и функций (78)–(81), полученных в рамках статистики $\mathbf{F}_{M,N-M}$, и число попаданий в них представлены в табл. 11 и 12.

4.7. Анализ результатов

Прежде всего следует отметить, что даже в случае однопараметрической задачи, как линейной (74), так и нелинейной (78), значения полуширины интервала ошибки, полученного в рамках метода дифференциальных поправок и доверительных областей в статистике χ_M^2 и $\mathbf{F}_{M,N-M}$, не совпадают. Значения полуширины интервала ошибки Δ_{β_1} , полученного в рамках статистики χ_M^2 и $\mathbf{F}_{M,N-M}$, могут превосходить значения полуширины интервала ошибки $\sigma(\beta_1^c)$ параметра β_1 , полученного в рамках метода дифференциальных поправок, до ~ 7 – 10 раз. Необходимо отметить, что в случае однопараметрической задачи (74) и (78) значения полуширины интервалов ошибки β_p , полученной методом доверительных областей в статистике χ_P^2 , очень близки к полуширине интервала ошибки, полученного в рамках метода дифференциальных поправок и метода Монте-Карло. Однако в случае двухпараметрической задачи и задачах с большим числом параметров проекции доверительных областей на оси параметров β_p отличаются в ~ 1.5 – 2 раза. При этом вероятность накрытия истинного значения превышает 68%.

Как показал численный эксперимент, полуширина интервала ошибки неизвестных параметров задачи зависит от выбранной статистики и априорной информации о модели. При этом надежность

методов близка, в том смысле, что число попаданий точного решения в найденную доверительную область соответствует заданной вероятности γ .

Значения полуширины интервалов ошибки в методе дифференциальных поправок ($\sigma(\beta_p^c)$) и методе Монте-Карло ($\sigma_{mc}(\beta_p^c)$) очень близки. В методе доверительных областей значение полуширины интервала увеличивается с ростом неопределенности данных. Так, например, при использовании статистики χ_P^2 (где P — число параметров задачи) модель изначально полагается адекватной наблюдательным данным, а дисперсия наблюдательных данных предполагается известной априори.

Обычно адекватность модели обосновывается тем, что значение приведенной величины χ_M^2 в минимуме невязки — $\chi_M^2/(M-P)$ (где M — число наблюдательных точек, а P — число искомых параметров) — близко к единице (см., например, [2–4]). Если же значение приведенного χ_M^2 существенно превышает единицу, это значит, что минимальная остаточная невязка слишком велика. Между наблюдаемой и оптимальной теоретической кривыми блеска имеются значительные систематические отклонения, что не дает оснований считать модель адекватной. В этом случае оценка доверительных интервалов параметров с помощью статистики χ_P^2 (так же, как и методами дифференциальных поправок и Монте-Карло) неправомерна.

Предположение об априорной верности модели ставит метод расчета ошибки параметров β_p с помощью статистики χ_P^2 в один ряд с методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло. В случае однопараметрической задачи полуширина интервала ошибки $\Delta_{\beta_1}/2$, полученная в рамках статистики χ_P^2 , очень близка к значению ошибки параметра в рамках метода дифференциальных поправок и метода Монте-Карло (табл. 3–5). В случае же многопараметрической задачи значение проекции доверительной области на соответствующие оси параметров β_p отличается от полуширины интервала ошибки, вычисленной в рамках метода дифференциальных поправок и Монте-Карло ~ 1.5 – 2 раза. При этом вероятность накрытия точного решения возрастает по сравнению с заданной γ . При этом, как уже упоминалось, если потребовать, чтобы вероятность накрытия точного решения проекциями составляла $\gamma' = 68.2\%$, то размеры таких проекций доверительной области примерно совпадают с величинами стандартных среднеквадратичных отклонений, но при этом уже нет гарантии, что точное решение попадает в доверительную область с заданной вероятностью $\gamma = 68.2\%$ (реальная вероятность накрытия $\gamma < 68.2\%$).

При использовании статистического критерия χ_M^2 (где M — число значений “возмущенной” функции) и статистики Фишера $\mathbf{F}_{M,N-M}$ осуществляется не только расчет доверительной области параметров, но и проверка адекватности модели. Отличительной особенностью такого метода расчета интервала ошибки (доверительной области) является то, что размеры доверительной области зависят от конкретной индивидуальной реализации возмущенной кривой $\xi_1^j \dots \xi_{101}^j$. Размер доверительной области (в отличие от методов дифференциальных поправок, Монте-Карло и доверительных областей в статистике χ_P^2), полученной в рамках статистики χ_M^2 и $\mathbf{F}_{M,N-M}$, меняется. Например, распределение размеров области в одномерном случае показано на рис. 3. Размер области, соответствующей максимуму гистограммы, превышает значение интервала ошибок методов дифференциальных поправок и Монте-Карло в среднем в ~ 5 раз, а доверительных интервалов, полученных в статистике χ_P^2 , в среднем в ~ 3 раза (рис. 2).

На рис. 4 представлены графики двухпараметрической линейной функции (75), построенные при значении параметров $\bar{\beta}_1^c - \sigma(\beta_1^c)$ и $\bar{\beta}_2^c - \sigma(\beta_2^c)$, $\bar{\beta}_1^c$ и $\bar{\beta}_2^c$, $\bar{\beta}_1^c + \sigma(\beta_1^c)$ и $\bar{\beta}_2^c + \sigma(\beta_2^c)$ и образующие так называемый “коридор ошибок”. Видно, что при использовании метода дифференциальных поправок около половины точек $\xi_1^j \dots \xi_{101}^j$ “возмущенной” функции выпадают из “коридора ошибок”. В то же время в аналогичном “коридоре ошибок”, образуемом функцией (75) в методе доверительных областей с использованием статистики χ_M^2 со значениями параметров $\bar{\beta}_1^c - \Delta(\beta_1^c)/2$ и $\bar{\beta}_2^c - \Delta(\beta_2^c)/2$, $\bar{\beta}_1^c$ и $\bar{\beta}_2^c$, $\bar{\beta}_1^c + \Delta(\beta_1^c)/2$ и $\bar{\beta}_2^c + \Delta(\beta_2^c)/2$ (где $\bar{\beta}_p^c$ — значение середины интервала $[\beta_p^{\min}; \beta_p^{\max}]$), подавляющее большинство точек заключено внутри “коридора ошибок” (рис. 5). Этим и объясняется то, что часто результаты интерпретации с оцененными методом дифференциальных поправок ошибками, выполненные разными авторами, не согласуются между собой. Метод доверительных областей дает более надежные оценки ошибок параметров.

Возвращаясь к надежности значений полуширины интервалов ошибок параметров, хочется отметить, что в методе дифференциальных поправок число одновременных попаданий значений параметров во все свои интервалы ошибок N_{all} заметно ниже (на $\sim 20\%$) заявленной вероятности γ (табл. 5 и 6). Тогда как число попаданий в индивидуальный интервал ошибки $\bar{\beta}_p^c \pm \sigma(\beta_p^c)$ в методе дифференциальных поправок соответствует заданной вероятности γ . В методе доверительных областей число попаданий в указанные проекции превышает

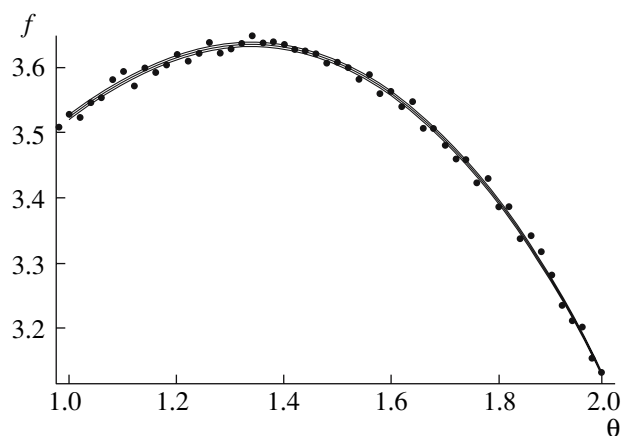


Рис. 4. Использование метода дифференциальных поправок. Приведена линейная функция $f(\theta, \beta_1, \beta_2) = \frac{\beta_1}{1+\theta^2} + \beta_2 \sin \theta$, построенная при значениях параметров $\beta_1 - \sigma$ и $\beta_2 - \sigma$, β_1 и β_2 , $\beta_1 + \sigma$ и $\beta_2 + \sigma$. Случайный разброс точек подчиняется гауссовой статистике с $\sigma_{teor} = 0.03$. Приняты следующие численные значения параметров: $\beta_1 = 2.0000 \pm 0.001600$, $\beta_2 = 2.9991 \pm 0.001278$. Показан “коридор” кривых, соответствующих границам доверительных интервалов для параметров (кривые почти сливаются).

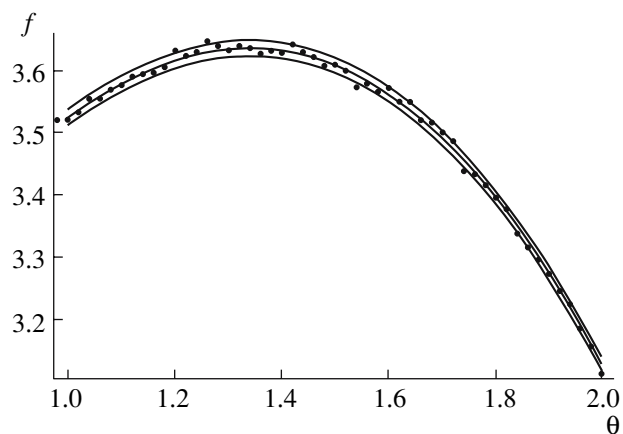


Рис. 5. Использование метода доверительных областей в статистике χ_M^2 . Приведена линейная функция $f(\theta, \beta_1, \beta_2) = \frac{\beta_1}{1+\theta^2} + \beta_2 \sin \theta$, построенная при значениях параметров $\beta_1 - \sigma$ и $\beta_2 - \sigma$, β_1 и β_2 , $\beta_1 + \sigma$ и $\beta_2 + \sigma$. Случайный разброс точек подчиняется гауссовой статистике с $\sigma_{teor} = 0.03$. Приняты следующие численные значения параметров: $\beta_1 = 2.0000 \pm 0.01083$, $\beta_2 = 2.9991 \pm 0.008798$. Показан “коридор” кривых, соответствующих границам доверительных интервалов для параметров.

заявленную вероятность γ , однако при этом гарантируется, что все параметры задачи одновременно попадают в доверительную область с заявленной вероятностью γ , а в объемлющий ее параллелепипед — с вероятностью больше γ .

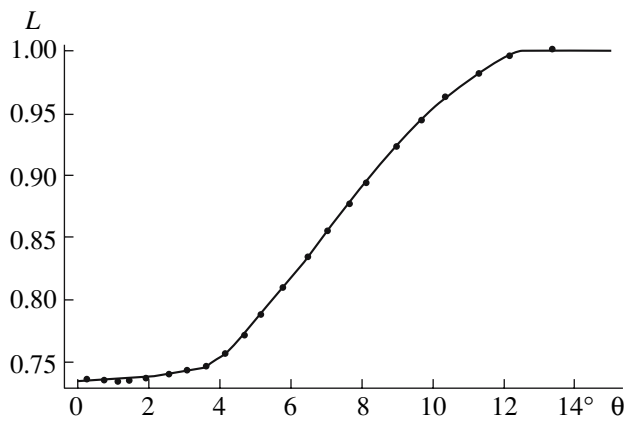


Рис. 6. Главный минимум нормированной кривой блеска разделенной двойной системы YZ Cas. Точки — наблюдаемые значения блеска из работы [8]. Сплошная линия — оптимальная теоретическая кривая блеска, полученная с помощью нашего алгоритма. Параметры представлены в табл. 13.

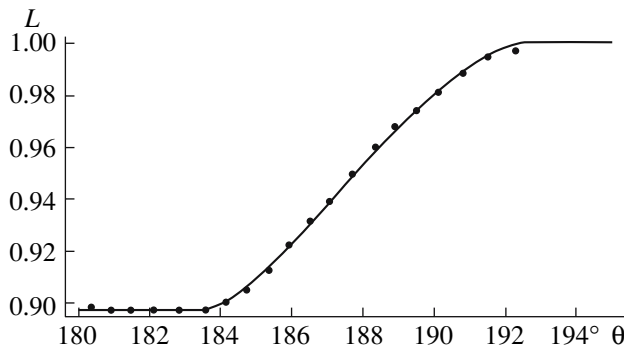


Рис. 7. То же, что на рис. 6, для вторичного минимума.

Таким образом, в методе доверительных областей число попаданий N_0 истинного значения параметров в доверительную область всегда соответствует заявленной вероятности (табл. 2–12). Тогда как в проекции доверительной области число попаданий заметно превышает заданную вероятность γ . Опираясь на результаты численного эксперимента, можно видеть, что значение полуширины интервала, полученное методом доверительных областей, надежнее в сравнении с полученными методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло.

Отметим, что нелинейность задачи относительно параметров приводит к тому, что доверительная область не симметрична относительно центрального значения, тогда как в линейном случае область строго симметрична относительно осей параметров β_p .

5. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НАБЛЮДАЕМОЙ КРИВОЙ БЛЕСКА ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ YZ Cas

5.1. Шестипараметрическая задача

В работе проведен анализ нормированной кривой блеска затменной двойной системы YZ Cas, полученной в красном фильтре ($\lambda = 6700 \text{ \AA}$), из работы Крона [8]. Наблюдаемая кривая блеска $\xi_1 \dots \xi_{42}$ включала в себя $M = 42$ точки. За оценку дисперсии каждого измерения наблюдаемой кривой блеска было принято значение в шкале звездных величин $(\sigma_m^{obs})^2 = 1.77 \times 10^{-6}$ [3] или соответственно в нашей шкале (шкале интенсивностей) с учетом того, что $L^{full} = 1$, $(\sigma_m^{obs})^2 = 1.5015 \times 10^{-6}$. Центральное значение каждой точки кривой блеска также получено усреднением $N_m = 12$ точек для $m = 1 \dots 42$ [6, 8].

Методом наименьших квадратов на основе анализа полной кривой блеска по всем шести параметрам получены центральные значения неизвестных параметров задачи: $r_1 = 0.14408$, $r_2 = 0.07556$, $i = 88.27^\circ$, $X_1 = 3.927$, $X_2 = 2.696$, $X_3 = 10.703$. Методом дифференциальных поправок получены среднеквадратичные оценки дисперсий с помощью формулы (44'). Найденная при этом по формуле (43') среднеквадратичная оценка дисперсии единицы веса $v_0 = 0.003422904$. Методом доверительных областей с помощью статистики Фишера, минимизированной по линейным параметрам (70), получены одномерные проекции доверительной области на уровне доверия $\gamma = 0.6827$. Например, для r_1 такая проекция задается с помощью (73), т.е. является решением неравенства. Соответственно, эти проекции вычислялись следующим образом: невязка (70) минимизировалась по двум нелинейным параметрам и получившаяся величина, зависящая от одного оставшегося (искомого) нелинейного параметра (которым поочередно выступали r_1 , r_2 , i) приравнивалась к квантилю (т.е. находились два корня соответствующего уравнения). Эти результаты содержатся в табл. 13.

Поскольку для исследования в рамках статистик χ_P^2 и χ_M^2 требуется знание дисперсии единицы веса ε_0 , которая заранее точно неизвестна, то была исследована модельная двойная система, в которой значения фаз $\theta_1 \dots \theta_{42}$ совпадали с фазами наблюдаемой кривой блеска YZ Cas. Истинные значения параметров двойной системы полагались равными центральным значениям, полученным при интерпретации наблюдаемой кривой блеска, т.е. $\bar{r}_1 = 0.14408$, $\bar{r}_2 = 0.07556$, $\bar{i} = 88.27^\circ$. Дисперсия единицы веса полагалась равной ее среднеквадратичной оценке v_0 , полученной при интерпретации наблюдаемой кривой блеска, т.е. $\varepsilon_0 = 0.003422904$.

Таблица 13. Фотометрические элементы двойной YZ Cas, полученные по анализу кривой блеска на длине волны $\lambda = 6700 \text{ \AA}$ в данной работе

Метод	r_1	r_2	i
Дифференциальных поправок (σ_{est})	0.14408 ± 0.00023	0.07556 ± 0.00038	$88.27^\circ \pm 0.090^\circ$
Доверительных интервалов, статистика $F_{M-3, N-M} (\gamma = 68.2\%)$	0.1441 ± 0.0021	0.07547 ± 0.0012	88.36 ± 0.5225

Таблица 14. Фотометрические элементы модельной двойной системы YZ Cas

Метод	r_1	r_2	i
Дифференциальных поправок (σ)	0.14422 ± 0.00023	0.07557 ± 0.00038	$88.28^\circ \pm 0.091^\circ$
Монте-Карло (σ)	0.14422 ± 0.00023	0.07557 ± 0.00038	88.28 ± 0.085
Доверительных интервалов, статистика $\chi_3^2 (\gamma = 68.27\%)$	0.14450 ± 0.00043	0.07579 ± 0.00073	88.17 ± 0.17
Доверительных интервалов, статистика $\chi_{M-3}^2 (\gamma = 68.27\%)$	0.14448 ± 0.0012	0.07564 ± 0.0019	88.19 ± 0.46

Таблица 15. Фотометрические элементы двойной YZ Cas, полученные по анализу кривой блеска на длине волны $\lambda = 6700 \text{ \AA}$ другими авторами

Ссылка	r_1	r_2	i
[8]	0.1443 ± 0.00046	0.0756 ± 0.00015	$88.18^\circ \pm 0.057^\circ$
[10]	0.1428	0.0763	88.11
[11]	0.14478 ± 0.00021	0.07580 ± 0.00042	88.617 ± 0.038
[12]	0.1454 ± 0.0009	0.0753 ± 0.0003	88.47 ± 0.01
[13]	0.151 ± 0.002	0.0779 ± 0.006	87.1 ± 0.3
[14]	0.144	0.0780	89.22
[15]	0.1466	0.080	88.4
[16]	0.145 ± 0.005	0.076 ± 0.001	88.25 ± 0.1
[17]	$0.1442 \pm 1\%$	$0.0767 \pm 1\%$	88.3 ± 0.2

Весовые коэффициенты w_m и количество измерений в каждой фазе $N_1 \dots N_{42}$ были положены равными 12. Для данной модельной системы методом дифференциальных поправок получены дисперсии σ с помощью формулы (41'). Далее методом доверительных областей с помощью статистики χ_M^2 , минимизированной по линейным параметрам (69), и с помощью статистики χ_3^2 (71) получены одномерные проекции доверительной области на уровне

доверия $\gamma = 0.6827$. Полученные результаты по модельной кривой блеска YZ Cas содержатся в табл. 14. В ходе численного эксперимента выполнена одна тысяча реализаций модельной кривой блеска YZ Cas $\xi_1 \dots \xi_{42}$. Проведен анализ каждой реализации модельной кривой блеска YZ Cas $\xi_1 \dots \xi_{42}$ и подсчитано число попаданий истинных значений r_1, r_2, i в интервалы ошибок, полученные в рамках каждого исследуемого метода.

В табл. 15 представлены результаты интерпре-

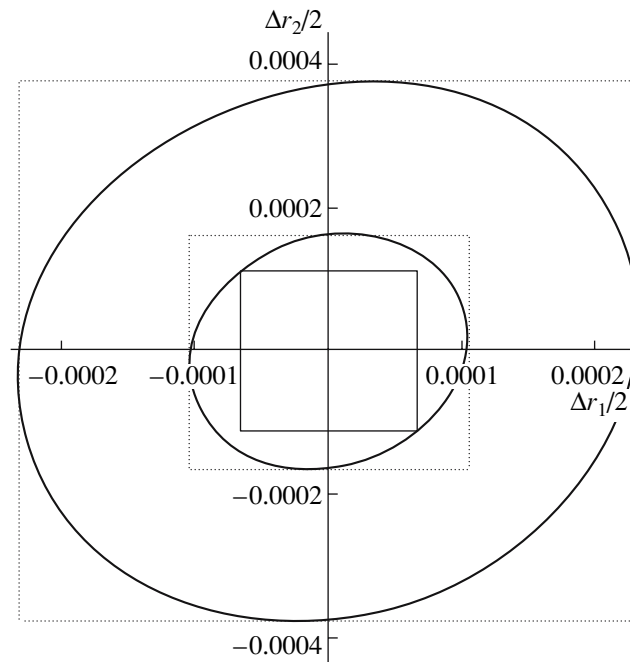


Рис. 8. Доверительная область параметров r_1 и r_2 , полученная при интерпретации наблюдаемой кривой блеска YZ Cas из работы [8] в рамках статистики χ^2_P (малый эллипс) и статистики χ^2_M (большой эллипс). Пунктирные квадраты соответствуют объемлющим доверительные области параллелепипедам, габариты которых определяются проекциями доверительной области на оси параметров r_1 и r_2 .

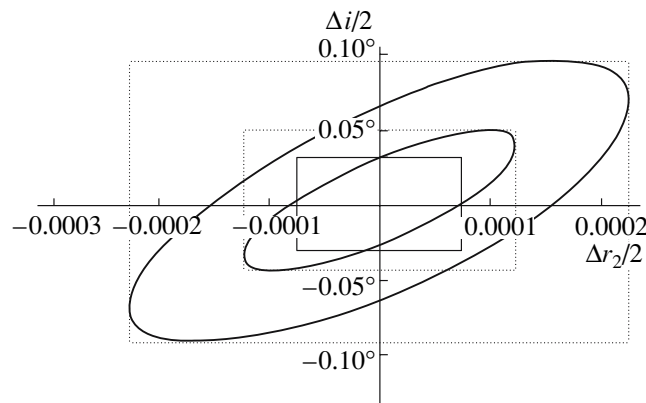


Рис. 9. Доверительная область параметров r_2 и i , полученная при интерпретации наблюдаемой кривой блеска YZ Cas из работы [8] в рамках статистики χ^2_P (малый эллипс) и статистики χ^2_M (большой эллипс). Пунктирные прямоугольники соответствуют объемлющим доверительные области параллелепипедам, габариты которых определяются проекциями доверительной области на оси параметров r_2 и i .

тации кривой блеска двойной системы YZ Cas, выполненные другими авторами. Видно, что центральные значения радиусов компонентов r_1 , r_2 и наклонение орбиты i , полученные в нашей работе, находятся в хорошем согласии с прежними результатами (табл. 13, 15). Разработанный алгоритм интерпретации кривой блеска двух сферических звезд можно полагать надежным. Кривая блеска,

полученная в ходе интерпретации наблюдательных данных работы [8], представлена на рис. 6 и 7.

5.2. Двухпараметрическая задача

На основе разработанного алгоритма выполнен анализ наблюдаемой кривой блеска YZ Cas методом дифференциальных поправок, методом Монте-

Карло, методом доверительных областей в статистике χ_P^2 , χ_M^2 и $\mathbf{F}_{M,N-M}$. Помимо этого, проверена надежность интервалов ошибок, вычисленных в рамках каждого метода. Для этого выполнена одна тысяча возмущений кривой блеска с “истинными” значениями параметров $\bar{r}_1 = 0.14408$, $\bar{r}_2 = 0.07556$, $\bar{i} = 88.27^\circ$ и дисперсией единицы веса $\varepsilon_0 = 0.003422904$. Проведен подсчет числа попаданий истинных значений в соответствующие доверительные области и их проекции.

Для наглядности и простоты сравнения результатов каждого из методов анализа кривой блеска задача интерпретации наблюдаемой кривой $YZ\ Cas$ сведена к двухпараметрической. В первом случае полагались неизвестными радиусы компонентов двойной r_1 и r_2 . Во втором случае полагались неизвестными радиус второй звезды r_2 и наклонение орбиты двойной системы i . Значения остальных параметров полагались известными — использовались представленные выше центральные значения параметров двойной системы.

Результаты анализа кривой блеска в рамках двухпараметрической задачи представлены в табл. 16 и 17. На рис. 8 представлена доверительная область параметров r_1 и r_2 , полученная при интерпретации наблюдаемой кривой блеска $YZ\ Cas$ в рамках статистики χ_P^2 и статистики χ_M^2 . На рис. 9 представлена доверительная область параметров r_2 и i , полученная при интерпретации наблюдаемой кривой блеска $YZ\ Cas$ также в рамках статистики χ_P^2 и статистики χ_M^2 . Видно, что размеры доверительной области в статистике χ_M^2 в среднем в 2 раза больше, чем в статистике χ_P^2 . Как показали численные расчеты, число попаданий в доверительные области, полученные в статистиках χ_P^2 и χ_M^2 , соответствует заданной вероятности $\gamma = 68.2\%$.

6. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ КРИВОЙ БЛЕСКА $YZ\ Cas$

Результаты численного эксперимента на основе наблюдаемой кривой блеска $YZ\ Cas$ количественно и качественно повторяют выводы предыдущего численного эксперимента с использованием функций (74)–(77).

Ошибки параметров, вычисленные в рамках метода дифференциальных поправок и метода Монте-Карло, близки (табл. 16 и 17). Величина доверительных интервалов, вычисленных в рамках статистики χ_P^2 для многомерных задач, в ~ 1.5 – 2 раза превышает значение ошибок параметров, вычисленных методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло. Для одномерных же задач величина доверительного интервала,

полученного в рамках статистики χ_P^2 , близка к ошибкам, рассчитанным на основе методов дифференциальных поправок и Монте-Карло.

Проекции доверительной области параметров r_1 , r_2 , i , вычисленной в рамках статистик χ_M^2 и $\mathbf{F}_{M,N-M}$, превосходят в ~ 3 – 5 раз интервалы ошибок этих же параметров, полученных методами дифференциальных поправок и Монте-Карло. Напомним, что размеры доверительной области, вычисленной в рамках статистик χ_M^2 и $\mathbf{F}_{M,N-M}$, меняются. Поэтому мы приводим размеры доверительной области в окрестностях максимума распределения ее размеров.

Результаты численного эксперимента по оценке надежности методов расчета ошибки аналогичны результатам для функций (74)–(81). Из табл. 16 и 17 видно, что число одновременного попадания в интервалы ошибок, полученные методами дифференциальных поправок и Монте-Карло, значительно отличается от заданной вероятности (меньше на ~ 15 – 20%), хотя число попаданий в индивидуальный интервал соответствует заданной вероятности $\gamma = 68.2\%$.

В методе доверительных областей число попаданий истинных значений в проекцию доверительной области параметров r_1 , r_2 , i с избытком превышает заданную вероятность $\gamma = 68.2\%$, а число попаданий истинных значений в саму доверительную область отвечает заданной вероятности γ (табл. 16 и 17). Нелинейность задачи влияет на отклонение числа попаданий незначительно, и следовательно, приближение, в котором применяется формула (41') в методе дифференциальных поправок, можно считать допустимым. Как отмечалось выше, нелинейность задачи относительно параметров проявляется в асимметричности доверительной области относительно центрального значения (рис. 8 и 9).

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Резюмируем основные выводы нашей работы, касающиеся сравнения различных методов оценок ошибок параметров обратных параметрических задач.

Методы оценок ошибок параметров классифицируются в зависимости от выбранной статистики, априорной информации о дисперсии наблюдательных данных и априорной информации о достоверности используемой модели

7.1. Метод дифференциальных поправок

Этот метод основан на использовании статистики нормального распределения измерений для одной наблюдаемой точки. Дисперсии и, соответственно, среднеквадратичные ошибки параметров

Таблица 16. Результаты интерпретации кривой блеска YZ Cas из работы [8] по двум параметрам — радиусам компонентов

Метод	$\Delta r_1/2; (N_{\Delta r_1})$	$\Delta r_2/2; (N_{\Delta r_2})$	N
Дифференциальных поправок	$0.6687 \times 10^{-4}; (687)$	$0.1089 \times 10^{-3}; (693)$	543
Монте-Карло	$0.6639 \times 10^{-4}; (683)$	$0.1082 \times 10^{-3}; (687)$	535
Доверительных интервалов, статистика χ^2_P	$1.013 \times 10^{-4}; (868)$	$0.1649 \times 10^{-3}; (870)$	687
Доверительных интервалов, статистика χ^2_M	$2.284 \times 10^{-4}; (714)$	$0.3720 \times 10^{-3}; (719)$	681
Доверительных интервалов, статистика $F_{M,N-M}$	$2.294 \times 10^{-4}; (717)$	$0.3737 \times 10^{-3}; (714)$	685

Таблица 17. Результаты интерпретации кривой блеска YZ Cas из работы [8] по двум параметрам — радиусу второй звезды r_2 и наклонению орбиты i

Метод	$\Delta r_2/2; (N_{\Delta r_2})$	$i; (N_i)$	N
Дифференциальных поправок	$0.7920 \times 10^{-4}; (675)$	$88.2836^\circ \pm 0.0305^\circ; (696)$	472
Монте-Карло	$0.8021 \times 10^{-4}; (686)$	$88.2700 \pm 0.02851; (682)$	491
Доверительных интервалов, статистика χ^2_P	$1.203 \times 10^{-4}; (868)$	$88.2821 \pm 0.04663; (874)$	676
Доверительных интервалов, статистика χ^2_M	$2.226 \times 10^{-4}; (711)$	$88.2915 \pm 0.0862; (717)$	683
Доверительных интервалов, статистика $F_{M,N-M}$	$2.063 \times 10^{-4}; (720)$	$88.2911 \pm 0.07988; (716)$	687

выражаются через дисперсию наблюдений с помощью формулы для сложения дисперсий наблюдательных данных. Метод априори предполагает, что используемая модель абсолютно верна и адекватна наблюдениям. В методе необходимо знать дисперсию наблюдательных данных из независимых соображений.

Ошибки параметров, полученные в методе дифференциальных поправок, обычно весьма малы. Вероятность одновременного попадания точного решения во все интервалы параметров заметно ниже (на $\sim 15-20\%$) заданной вероятности 68.2% (см., например, табл. 16 и 17). Коридор теоретических кривых блеска, соответствующих концам соответствующих доверительных интервалов для параметров, является весьма узким — порядка среднеквадратичной ошибки одного измерения. Значительная часть наблюдаемых точек выходит за пределы коридора теоретических “кривых блеска”. Поэтому велика вероятность того, что результаты интерпретации наблюдательных данных, выполненных разными исследователями, будут значительно различаться. “Внешние” ошибки найденных параметров могут значительно превосходить “внутренние” ошибки (как следует из работы Поппера [9], “внешние” ошибки могут в 3–5 раз превосходить “внутренние” ошибки параметров).

Отметим, что, как показали наши численные эксперименты, использование процедуры линейаризации в нелинейных задачах при малых ошибках наблюдений лишь незначительно искажает доверительные интервалы, получаемые методом дифференциальных поправок.

7.2. Метод Монте-Карло

Этот метод аналогичен методу дифференциальных поправок и дает аналогичные результаты. Он использует статистику нормального распределения измерений одной точки “кривой блеска”. В методе предполагается, что модель идеально верна и что из независимых соображений известна дисперсия наблюдательных данных. Ошибки параметров, получаемые в методе Монте-Карло, так же, как и в методе дифференциальных поправок, весьма малы (как уже упоминалось, согласно работе Поппера [9], “внешние” ошибки могут в 3–5 раз превосходить “внутренние” ошибки параметров).

Таким образом, и метод дифференциальных поправок, и метод Монте-Карло используют жесткие априорные предположения о правильности модели и применяют простейшую статистику нормального распределения измерений наблюдательных данных с заранее известной дисперсией.

Именно в силу использования таких идеализированных модельных предположений в этих методах получаются весьма малые ошибки параметров.

В действительности заранее неизвестно, верна ли используемая модель. Кроме того, параметры модели в реальности ищутся с использованием не статистики нормального распределения, а статистики, порожденной нормальным распределением (статистики χ^2_M , Фишера и т.п.). Дисперсия наблюдательных данных часто заранее неизвестна. Поэтому естественно оценивать ошибки параметров не с использованием статистики нормального распределения или статистики χ^2_P , а с применением той статистики, в рамках которой ищутся сами параметры модели (статистики χ^2_M , Фишера и т.п.).

Рассмотрим такие методы оценки ошибки параметров.

7.3. Метод, основанный на использовании статистики χ^2_P

Поскольку в этом методе используются не абсолютные, а относительные изменения функционала невязки, метод предполагает, что модель идеально верна. Кроме того, считается, что дисперсия наблюдательных данных известна априори. Доверительная область в данном методе никогда не вырождается в пустое множество. Кроме того, в случае нелинейной задачи эта доверительная область понимается в асимптотическом смысле: вероятность накрытия точного решения не равна заданной вероятности γ , а лишь стремится к γ при $M \rightarrow \infty$, где M — число наблюдательных точек. Впрочем, как показывают численные эксперименты, вероятность накрытия точного решения асимптотической доверительной областью в нелинейных задачах при достаточно большом M весьма близка к заданной вероятности γ .

В случае однопараметрической задачи метод доверительных областей, основанный на использовании статистики χ^2_P , дает результаты, близкие к результатам, полученным с использованием метода дифференциальных поправок и метода Монте-Карло. Это естественно, поскольку все три рассмотренных метода используют одинаковые жесткие идеализированные априорные предположения. В случае как однопараметрических, так и многопараметрических задач метод χ^2_P позволяет получить доверительную область, которая всегда накрывает точное решение с заданной вероятностью γ . В этом состоит значительное преимущество метода χ^2_P по сравнению с методами дифференциальных поправок и Монте-Карло, при использовании которых вероятность совместного попадания точного решения в доверительные интервалы всех параметров,

как показывают численные расчеты, меньше заданной вероятности γ .

В случае многопараметрических задач в методе χ^2_P при оценке доверительных интервалов параметров возникает необходимость проектирования доверительной области на оси параметров. При этом доверительная область, накрывающая точное решение с заданной вероятностью γ , заменяется объемлющим ее параллелепипедом, и вероятность накрытия точного решения возрастает.

Если положить вероятность попадания в проекцию на ось параметра $\gamma = 68.2\%$, то, как показали дополнительные расчеты на примере функций (75) и (82), величина проекции доверительной области на оси параметров Δ_{β_1} и Δ_{β_2} , полученной в статистике χ^2_P , совпадает с размером доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок σ_{β_1} и σ_{β_2} для того же значения вероятности $\gamma = 68.2\%$.

Однако при этом вероятность совместного попадания всех параметров задачи в доверительную область значительно ниже заявленной вероятности $\gamma = 68.2\%$ (она составляет $\sim 50\%$ и менее).

7.4. Метод, основанный на использовании статистики χ^2_M

В этом методе также предполагается известным априорное знание дисперсии наблюдательных данных. Однако при этом не используется гипотеза о том, что применяемая модель идеально верна. Для нахождения доверительной области используются абсолютные значения функционала невязки. Поэтому размеры доверительной области различны для разных реализаций случайного процесса (наблюдаемой “кривой блеска”). В ряде случаев, когда используемая модель отвергается по статистическому критерию, доверительная область вырождается в пустое множество. Тем не менее строго доказано, и это подтверждается численными экспериментами, что найденная в методе χ^2_M доверительная область накрывает точное решение с заданной вероятностью γ , как и в случае метода χ^2_P .

В силу меньшего по сравнению с методом χ^2_P количества модельных предположений (отсутствия предположения о том, что модель верна), получаемая методом χ^2_M доверительная область имеет большие размеры, чем в методе χ^2_P . Как показывают численные эксперименты, размеры доверительной области в статистике χ^2_M в ~ 2 раза больше, чем в статистике χ^2_P (см., например, рис. 8 и 9). Для оценки доверительных интервалов параметров необходимо спроецировать доверительную область на оси параметров и учесть тот факт, что

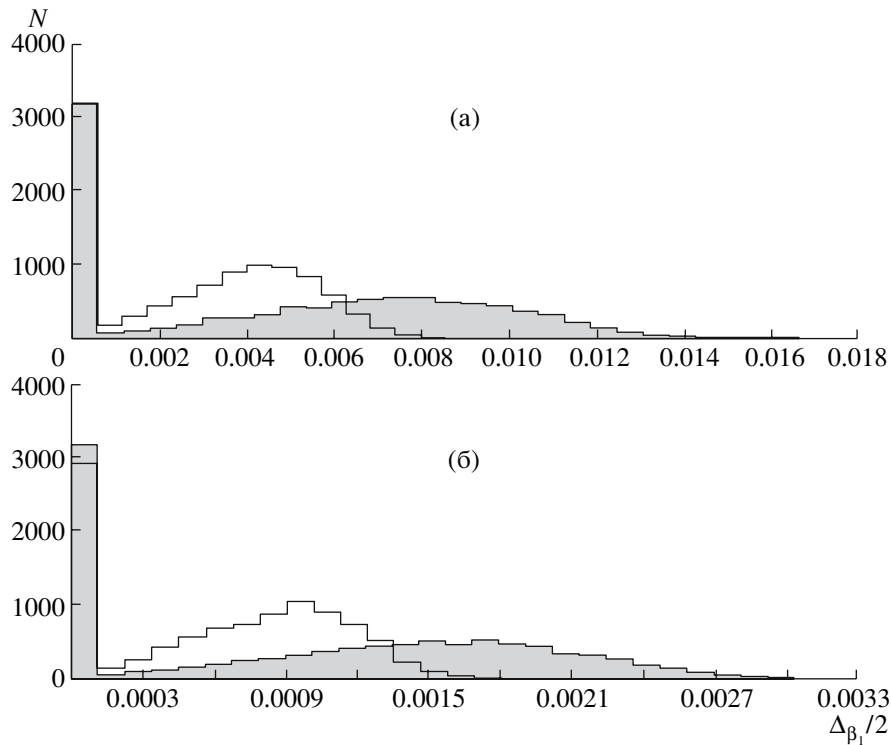


Рис. 10. Экспериментально полученная гистограмма плотности распределения полуширины доверительного интервала функции $f(\theta, \beta_1) = \cos \theta + \beta_1 \sin \theta$ (а) и функции $f(\theta, \beta_1) = \cos \theta + \beta_1 e^\theta$ (б). Интервалы получены в статистике χ_M^2 (серая гистограмма) и статистике $\mathbf{F}_{M, N-M}$ (светлая гистограмма) в результате 10^4 испытаний. N — количество значений полуширины доверительного интервала $\Delta_{\beta_1}/2$, попадающих в соответствующий шаг гистограммы.

вероятность накрытия точного решения при этом возрастает.

Тот факт, что доверительная область в статистике χ_M^2 больше, чем в статистике χ_P^2 , отнюдь не означает, что метод χ_M^2 хуже. Просто помимо всего прочего, метод χ_M^2 учитывает также неопределенность результатов интерпретации, связанную с возможной неточностью модели. Поэтому, если исследование необходимо делать особо ответственные суждения о результатах интерпретации, для оценки ошибок искомых параметров исследуемой модели следует рекомендовать именно метод χ_M^2 .

7.5. Метод, основанный на использовании статистики Фишера $\mathbf{F}_{M, N-M}$

В этом методе, как и в методе χ_M^2 , не используется предположение о том, что модель идеально верна, и кроме того, в отличие от метода χ_M^2 , в этом методе не требуется априорное знание дисперсии наблюдений. Информация о дисперсии наблюдений получается из наблюдаемого рассеяния точек на самой исследуемой “кривой блеска”. На этом основании метод $\mathbf{F}_{M, N-M}$ принято считать наиболее общим, использующим минимум модельных

предположений. Единственным предположением считается предположение о нормальном законе распределения наблюдательных данных в окрестностях выбранных участков “кривой блеска”.

Методы доверительных областей, опирающиеся на статистику χ_M^2 и статистику Фишера $\mathbf{F}_{M, N-M}$, схожи. В обоих случаях размеры доверительной области варьируются в несколько раз для разных реализаций наблюдательных данных; количество случаев, когда область вырождается в пустое множество, составляет $\alpha = 1 - \gamma$. Тем не менее, однако, величины доверительной области, полученные в данных статистиках, различны. Для более детального исследования различия величины доверительной области, полученной в рамках статистики $\mathbf{F}_{M, N-M}$ и статистики χ_M^2 , нами проведены дополнительные расчеты. А именно, выполнен поиск неизвестного параметра β_1 методом доверительных областей в сравниваемых статистиках для функции (74) и функции

$$f(\theta, \beta_1) = \cos \theta + \beta_1 e^\theta. \quad (83)$$

В точках $\theta_1 \dots \theta_{101}$, равномерно расположенных на числовом отрезке абсциссы $[0, 2]$ при заданном истинном значении параметра $\beta_1 = 2$, получены

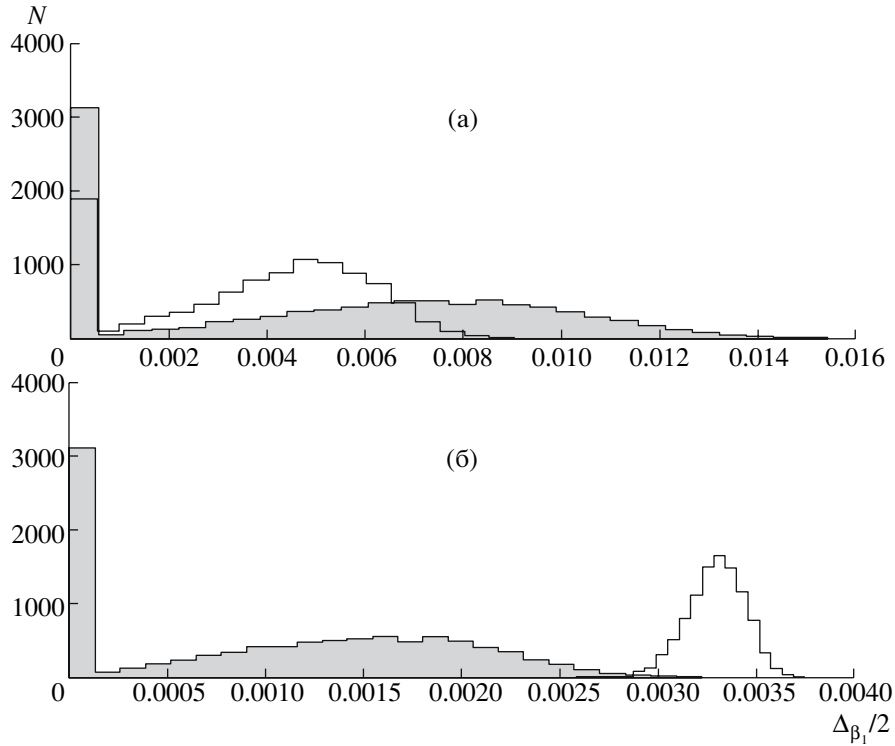


Рис. 11. Экспериментально полученная гистограмма плотности распределения полуширины доверительного интервала функции $f(\theta, \beta_1) = \cos \theta + \beta_1 \sin \theta$ (а) и функции $f(\theta, \beta_1) = \cos \theta + \beta_1 e^\theta$ (б). Интервалы получены в статистике χ^2_M (серая гистограмма) и условной статистике Фишера $\mathbf{F}_{M,N-M}$ (светлая гистограмма) в результате 10^4 испытаний. Условная статистика $\mathbf{F}_{M,N-M}$ является приближенной, так как она построена путем усреднения равномерно распределенных по оси абсцисс индивидуальных измерений внутри выбранных интервалов. N — количество значений полуширины доверительного интервала $\Delta_{\beta_1}/2$, попадающих в соответствующий шаг гистограммы.

истинные значения функции $\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_{101}$. Далее для $j = 1 \dots 12$ генерировалась выборка нормально распределенных случайных величин $\xi_1^j \dots \xi_{101}^j$, таких что $M(\xi_m^j) = \bar{\xi}_m$ и $\sigma(\xi_m^j) = 0.03$ ($m = 1 \dots 101$).

Для статистики Фишера, как и прежде, вычислялись $\xi_m = \frac{1}{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} \xi_m^j$, $N_m = 12$. В соответствии с этим в выражениях (45) и (46) полагалось $M = 101$, $w_m = 12$ и $\varepsilon_0 = 0.03$ (в этом случае значение стандартного отклонения $\sigma(\xi_m) = \sigma_m = 0.03/\sqrt{12} = 0.008660$).

Для статистики же χ^2_M полагалось $M = 101 \times 12 = 1212$, вводились новые $\theta'_{12(m'-1)+j} = \theta_{m'}$ и ξ_m вычислялись так, что $\xi_{12m'+j} = \xi_{m'}^j$ ($m' = 1 \dots 101, j = 1 \dots 12$); это в наблюдательном аспекте равносильно утверждению, что каждая из групп по 12 значений $\xi_{1\dots 12}, \xi_{13\dots 24}, \dots, \xi_{1200\dots 1212}$ получены в одной фазе. В соответствии с этим в выражениях (45) и (46) $w_m = 1$ и $\varepsilon_0 = 0.03$ (в этом случае значение стандартного отклонения $\sigma(\xi_m) = \sigma_m = 0.03$).

Далее посредством каждой из сравниваемых статистик вычислялся размер интервала ошибок

$\Delta(\beta_1)$. Расчет доверительного интервала $\Delta(\beta_1)$ выполнен по тем $\xi_1 \dots \xi_{1212}$ (в статистике χ^2_{1212}), и $\xi_1 \dots \xi_{101}$ (в статистике Фишера), которые получались каждый раз из одной выборки $\xi_1^j \dots \xi_{101}^j$ описанными выше способами.

Гистограммы плотности распределения величины полуширины доверительного интервала $\Delta_{\beta_1}/2$ соответственно для функции (74) и функции (83) в статистике $\mathbf{F}_{101,1212-101}$ и χ^2_{1212} представлены на рис. 10а и 10б. Из рис. 10 видно, что максимальная величина доверительного интервала, полученного в статистике χ -квадрат χ^2_{1212} , превосходит размер максимального интервала, рассчитанного в статистике Фишера, в ~ 2 раза. Также видно, что в каждой из используемых статистик значение ошибки первого рода (вероятность отвергнуть верную модель) находится в хорошем согласии с априорно заданным значением $\alpha = 100\% - 68.2\% = 31.8\%$.

Реальная “наблюдаемая”, кривая неидеальна, т.е. в ней не содержатся значения ξ , полученные при одном и том же значении θ (в одной и той же фазе). В связи с этим нами выполнен численный эксперимент по анализу реализаций $\xi_1 \dots \xi_{1212}$, в

которых значения $\theta_1 \dots \theta_{1212}$ полагались равномерно распределенными по абсциссе. В этом случае статистика Фишера априорно не применима (будем называть ее условной статистикой Фишера), но тем не менее на практике она используется. Правомочность использования статистики Фишера для подобной выборки ξ_m исследована на примерах функций (74) и (83).

При расчете невязки в рамках условной статистики Фишера “возмущенная” кривая функции $\xi_1 \dots \xi_{1212}$ разбивалась на 101 интервал равной величины по аргументу θ . В каждом интервале оказывалось 12 точек. По данным 12 точкам, лежащим внутри интервала, вычислялось среднее значение абсциссы θ_k и ординаты ξ_k (где $k = 1..101$) внутри интервала, а также оценка дисперсии σ^{obs} . Размерность распределения Фишера, как и в предыдущем численном эксперименте, составляла $\mathbf{F}_{101,1212-101}$. При этом учитывалась неопределенность лишь в значениях ξ , а неопределенность в значениях аргумента θ не учитывалась (именно так чаще всего поступают разные авторы). Если учесть неопределенность по аргументу θ , то распределение доверительной области может несильно отклоняться от точного распределения Фишера.

На рис. 11а и 11б приведены гистограммы плотности распределения величины полуширины интервала $\Delta_{\beta_1}/2$, полученного при решении функции в результате 10^4 испытаний в статистике χ_{1212}^2 и статистики Фишера $\mathbf{F}_{101,1212-101}$ для функций (74) и (83), соответственно. Видно, что в то время как результат решения в статистике χ_{1212}^2 согласуется с заявленной вероятностью ошибки первого рода $\alpha = 31.8\%$, результаты решения, полученного в рамках статистики Фишера, заметно отклоняются от теоретического значения α . Так, для функций (74) и (83) значение параметра α составляет (по тысяче экспериментов) соответственно $\sim 20\%$ и 0% . Таким образом, усреднение точек внутри интервалов сказывается не только на величине доверительного интервала, но сильно влияет на выводы об адекватности модели. Напомним, что в случае интерпретации возмущенной кривой $\xi_1 \dots \xi_{1212}$, когда усредняемые значения ξ_j обладают одним значением θ_j , результаты интерпретации в рамках статистики Фишера полностью согласуются с априорно заданным значением α . Таким образом, при использовании статистики Фишера $\mathbf{F}_{M,N-M}$ требуется минимальный разброс наблюдательных данных ξ_j по оси абсцисс внутри одного интервала. Следует иметь в виду, что в этом случае вероятность адекватности модели наблюдательным данным и размер интервала (в среднем) неправомерно повышаются. Необходимо отметить, что данное неправомерное повышение вероятности принятия

гипотезы о правильности модели сильно зависит от вида функции $\xi(\theta)$. Для функции с более резкой зависимостью это неправомерное повышение среднего размера интервала и вероятности принятия модели больше (рис. 11).

Так же, как и методы χ_P^2 и χ_M^2 , метод $\mathbf{F}_{M,N-M}$ предполагает проектирование доверительной области (которая покрывает точные решения с заданной вероятностью γ) на оси параметров, что приводит к тому, что вероятность накрытия точного решения возрастает.

Резюмируя, можно констатировать, что методы дифференциальных поправок и Монте-Карло дают нижние границы ошибок параметров модели, соответствующие весьма идеализированным априорным предположениям о модели. Метод χ_P^2 дает промежуточные значения ошибок параметров модели и тоже основан на идеализированном предположении о том, что используемая модель абсолютно верна. Методы χ_M^2 и $\mathbf{F}_{M,N-M}$ дают верхние границы ошибок параметров модели. Эти методы свободны от искусственных идеализированных предположений о модели и потому дают наиболее гарантированные результаты интерпретации. Методы χ_M^2 и $\mathbf{F}_{M,N-M}$ можно рекомендовать к использованию в тех случаях, когда исследователь сталкивается с необходимостью делать наиболее ответственные суждения о результатах интерпретации наблюдательных данных.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В численных экспериментах, изложенных в работе, продемонстрирована эффективность различных подходов вычисления ошибки искомых параметров.

Показано, что величина интервала ошибки сильно зависит от выбранной статистики и априорной информации о модели. Еще раз подчеркнем, что даже в случае однопараметрической задачи ошибка параметра, полученная методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло, и ошибка, полученная с использованием статистик χ_M^2 и $\mathbf{F}_{M,N-M}$, отличается в несколько раз.

Проведенный численный эксперимент показал, что величины ошибки параметров, рассчитанных с помощью метода дифференциальных поправок и метода Монте-Карло, близки. В зависимости от задачи можно отдать предпочтение либо методу дифференциальных поправок, либо методу Монте-Карло.

Подчеркнем, что при использовании метода дифференциальных поправок и метода Монте-Карло в многомерных задачах речь идет о вероятности числа попадания в каждый интервал отдельно. Как показал эксперимент, данная вероятность соответствует заявленной вероятности. При

этом вероятность числа совместного попадания в интервалы ошибок будет ниже заявленной на $\sim 15\text{--}20\%$ (для использованных нами модельных функций (74)–(81)). Следовательно, при решении задачи, в которой представляет интерес совместное попадание в интервалы, данные методы не могут считаться надежными.

Вместе с этим, численные эксперименты продемонстрировали надежность метода доверительных областей для указанных задач. Число попаданий “истинных” значений параметров в доверительную область полностью отвечает заданной вероятности γ , и следовательно, число одновременных попаданий в ее проекции будет не меньшим (так как это — число попаданий в параллелепипед, в который вписана доверительная область).

Как показано в работе, размер доверительной области зависит от применяемой статистики (в случае статистик χ_M^2 и $\mathbf{F}_{M,N-M}$ размер области зависит от конкретной наблюдаемой реализации решаемой функции). Напомним, что под полушириной проекции доверительной области подразумевается одно из ее наиболее вероятных значений. В одномерном случае можно сказать, что за полуширину доверительного интервала принято одно из значений $\Delta_{\beta_1}/2$ вблизи максимума гистограммы плотности распределения $\Delta_{\beta_1}/2$ (рис. 3). Другими словами, за размер доверительной области принято некоторое наиболее вероятное ее значение. Попадание или непопадание в доверительную область в методах со статистиками χ_M^2 и $\mathbf{F}_{M,N-M}$ связано не только с расположением ее центра относительно истинных значений, но и с ее размерами и собственно ее существованием (т.е. область может оказаться пустой). Это можно интерпретировать следующим образом: в методе дифференциальных поправок и в методе доверительной области со статистикой χ_P^2 модель полагается адекватной наблюдательным данным и поэтому величина доверительных интервалов для них меньше в сравнении с величиной доверительной области, полученной в статистике χ_M^2 и в статистике Фишера $F_{M,N-M}$ (имеется в виду величина области вблизи максимума распределения ее размеров). Опираясь в расчете ошибок неизвестных параметров на статистику χ_P^2 , необходимо помнить, что мы заранее полагаем модель верной.

Величина доверительной области, полученной в статистике χ_M^2 , $\mathbf{F}_{M,N-M}$, превышает в 2–3 раза размеры области, полученной в статистике χ_P^2 (рис. 8 и 9). Как уже отмечалось, больший размер доверительной области, получаемый в рамках статистики χ_M^2 и статистики $F_{M,N-M}$, связан с тем, что, помимо расчета самой доверительной области, выполняется проверка адекватности модели

наблюдательным данным. При использовании для интерпретации наблюдательных данных статистики Фишера $F_{M,N-M}$ необходимо иметь в виду, что разброс данных по аргументу внутри выбранного интервала усреднения увеличивает средний размер интервала ошибок параметров и повышает вероятность адекватности модели (рис. 11а).

Принимая во внимание проведенные расчеты и представленные рассуждения, авторы отдают предпочтение методу доверительных областей в статистике χ_M^2 .

Выражаем благодарность за финансовую поддержку работы грантом 05-02-17489 Российского фонда фундаментальных исследований, грантом НШ-5218.2006.2 программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ, грантом МК-2059.2007.2 Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук и их научных руководителей и грантом РНП.2.1.1.5940 целевой программы Минобрнауки РФ “Развитие научного потенциала высшей школы”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. V. Wyse, Lick Observ. Bull. **19**, 17 (1939).
2. M. Lampton, B. Margon, and S. Bower, *Astrophys. J.* **208**, 177 (1976).
3. А. В. Гончарский, С. Ю. Романов, А. М. Черепашук, *Конечнопараметрические обратные задачи астрофизики* (М.: МГУ, 1991).
4. А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* **70**, 1157 (1993).
5. С. Уилкс, *Математическая статистика* (М.: Наука, 1967).
6. А. В. Гончарский, А. М. Черепашук, А. Г. Ягола, *Некорректные задачи астрофизики* (М.: Наука, 1985), с. 53.
7. Б. М. ЩигOLEV, *Математическая обработка наблюдений* (М.: Физматгиз, 1962).
8. G. E. Kron, *Astrophys. J.* **96**, 173 (1942).
9. D. M. Popper, *Astron. J.* **89**, 132 (1984).
10. M. Kitamura, *Adv. Astron. and Astrophys.* **3**, 27 (1964).
11. E. Budding, *Astrophys. and Space Sci.* **22**, 87 (1973).
12. V. Kurutac, *Astrophys. and Space Sci.* **57**, 71 (1978).
13. M. Mezzetti, F. Predolin, G. Giuricin, and F. Mardirossian *Astron. and Astrophys. Suppl. Ser.* **42**, 15 (1980).
14. A. M. Shulberg and V. P. Murnikova, *Variables Stars* **19**, 421 (1974).
15. O. Demircan, *Astrophys. and Space Sci.* **56**, 389 (1978).
16. А. М. Черепашук, А. В. Гончарский, А. Г. Ягола, *Астрон. журн.* **44**, 1239 (1967).
17. C. H. Lacy, *Astrophys. J.* **251**, 591 (1981).

**ESTIMATED ERRORS OF PARAMETERS
IN INVERSE PARAMETRICAL PROBLEMS.
LIGHT-CURVE ANALYSIS FOR CLASSICAL ECLIPSING BINARIES**

M. K. AbubekeroV, N. Yu. Gostev, and A. M. Cherepashchuk

The observed light curve of the binary eclipsing system YZ Cas is described using one-, two-, three-, and four-parameter functions, and the associated parameters and their error intervals numerically estimated. The error intervals are calculated using differential corrections, Monte-Carlo simulations, and confidence areas. We study the error intervals and the reliability of the techniques used.