

ОЦЕНКА ОШИБОК ПАРАМЕТРОВ В ОБРАТНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ. ПОИСК ПОТЕМНЕНИЯ К КРАЮ ЗВЕЗД В КЛАССИЧЕСКИХ ЗАТМЕННЫХ СИСТЕМАХ

© 2009 г. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук

*Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга,
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15.12.2008 г.; принята в печать 20.12.2008 г.

На примере наблюдаемой кривой блеска затменной двойной системы YZ Cas проводится оценка неизвестных параметров задачи и их интервалов ошибок. Расчет интервалов ошибок осуществляется методом дифференциальных поправок и методом доверительных областей. Исследуются величины интервалов ошибок и надежность методов. Анализируется надежность определения коэффициентов потемнения к краю по наблюдаемым кривым блеска. Предложен новый метод расчета ошибок параметров.

PACS: 97.80.Hn, 95.75.Pq

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] путем численного эксперимента проведен сравнительный анализ различных методов оценки интервалов ошибок параметров на примере одно, двух, трех, четырех-параметрических функций и наблюдаемой кривой блеска затменной двойной системы YZ Cas. В ходе численного эксперимента произведена оценка неизвестных параметров задачи и их интервалов ошибок. Расчет интервалов ошибок производился методом дифференциальных поправок, методом Монте-Карло и методом доверительных областей. Исследовались величины интервалов ошибок и надежность методов.

Данная работа является продолжением исследования, начатого в работе [1]. В отличие от настоящей работы, в работе [1] надежность методов оценки интервалов ошибок неизвестных параметров апробирована на неполном наборе параметров задачи. Анализ наблюдаемой кривой блеска двойной системы YZ Cas выполнен по трем параметрам: радиусу первой и второй компоненты r_1 , r_2 и наклонению орбиты двойной i . При этом использовалась невязка, зависящая от этих трех параметров и минимизированная по остальным, линейным параметрам, которые являлись комбинациями коэффициентов потемнения к краю первой и второй звезды x_1 , x_2 и отношения яркостей в центре дисков звезд $I_0^{(1)}/I_0^{(2)}$. Важно то, что минимизация по линейным параметрам не меняет соот-

ветствующей статистики, а лишь уменьшает число степеней свободы. Это позволило нам выполнить анализ ошибок нелинейных параметров r_1 , r_2 , i на математическом уровне строгости. Интервалы ошибок находились как проекции на оси параметров r_1 , r_2 , i трехмерной доверительной области, содержащей те значения r_1 , r_2 и i , при которых невязка была меньше квантиля, соответствующего заданному уровню доверия.

В данной работе, помимо перечисленных параметров задачи, неизвестными являются коэффициенты потемнения к краю первой и второй звезды. При этом интерпретация наблюдаемой кривой блеска YZ Cas выполнена в рамках линейного и квадратичного законов потемнения к краю.

Особое внимание уделяется надежности определения коэффициентов потемнения к краю и интервалов их ошибок. Данная задача особенно актуальна в связи с появлением высокоточных фотометрических наблюдений со спутников типа COROT и KEPLER, вследствие работы которых высокоточные фотометрические данные вскоре будут иметь массовый характер. В связи с этим необходимо знать надежность оценки фотометрических элементов как классической затменной двойной системы, так и затменной системы с экзопланетой на данном уровне точности.

Как подчеркивается в работе [1] в классическом методе наименьших квадратов (или в методе

дифференциальных поправок для нелинейных задач), а также методе Монте-Карло оценка ошибок искомых параметров производится в рамках статистики нормального распределения, которой подчиняются центральные значения параметров, а поиск истинных значений параметров осуществляется с использованием статистики, порожденной нормальным распределением (например, в статистике, распределенной по закону χ_M^2 , где M — число точек на наблюдаемой кривой блеска). Между тем, представляется разумным вычислять ошибки искомых параметров в рамках той же статистики, в которой осуществляется поиск центральных значений параметров (например, статистики, которой является невязка, распределенная по закону χ_M^2). Хотя получаемые при этом величины ошибок параметров в несколько раз больше, чем ошибки, найденные методом наименьших квадратов или методом Монте-Карло, такой подход, основанный на использовании доверительных областей, позволяет получить наиболее надежные результаты интерпретации наблюдений; он позволяет также избежать необходимости отдельного рассмотрения “внутренних” и “внешних” ошибок искомых параметров.

2. МОДЕЛЬ КЛАССИЧЕСКОЙ ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ И ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ С ЭКЗОПЛАНЕТОЙ

Ввиду методического характера нашей работы рассматривается простейшая модель двух сферических звезд с тонкими атмосферами на круговой орбите без эффектов взаимной близости компонент. Такая модель легко реализуется на современных компьютерах и дает возможность выполнить большое число вариантов решения обратной задачи за сравнительно малое компьютерное время. Модель сферических звезд для двойной системы физически обоснована в том случае, если степень заполнения полости Роша (μ) мала: $\mu < 0.5$. Такая ситуация имеет место в системе YZ Cas, а также в большинстве случаев наблюдаемых затменных звезд с экзопланетами.

В нашей модели рассматривалось движение дисков звезд в проекции на картинную плоскость, т.е. плоскость, перпендикулярную лучу зрения. На рис. 1 показана геометрия дисков звезд во время затмения. Здесь r_1, r_2 — радиусы первой и второй звезды (или радиус звезды и радиус планеты), Δ — расстояние между центрами дисков звезд, ρ , Ψ — полярные координаты произвольной точки поверхности диска первой звезды (начало координат расположено в геометрическом центре диска). Расстояние между центрами дисков звезд задается выражением

$$\Delta^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta, \quad (1)$$

в котором i — наклонение орбиты двойной системы, θ — значение текущего орбитального фазового угла (орбита системы круговая, радиус орбиты $a = 1$).

В качестве функций распределения яркости по диску каждой звезды использовался линейный закон потемнения к краю диска

$$I(\rho) = I_0 \left(1 - x + x \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right) \quad (2)$$

и квадратичный закон потемнения к краю диска, отличающийся от линейного дополнительным слагаемым, содержащим квадратичный коэффициент потемнения к краю y :

$$I(\rho) = I_0 \left[1 - x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right) - y \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Здесь ρ — полярное расстояние от центра диска звезды, r — радиус диска звезды. Яркость предполагалась равной нулю в любой точке диска планеты.

Обозначим $I_0^{(1)}, I_0^{(2)}$ — яркости в центрах дисков первой и второй звезды, x_1, x_2 — коэффициенты потемнения к краю первой и второй звезды, y_1, y_2 — квадратичные коэффициенты потемнения к краю первой и второй звезды.

Искомые параметрами модели двух звезд являются $r_1, r_2, i, I_0^{(1)}, I_0^{(2)}, x_1, x_2$, а в случае нелинейного закона потемнения к краю — также y_1, y_2 .

Единицей длины в наших моделях является расстояние между центрами звезд (или звезды и планеты) $a = 1$. “Третий свет” в модели отсутствует. Кривая блеска двойной системы в данной модели определяется следующими тремя уравнениями.

1. Суммарная светимость компонент, описывающая внезатменный блеск:

$$2\pi \int_0^{r_1} I^{(1)}(\rho) \rho d\rho + 2\pi \int_0^{r_2} I^{(2)}(\xi) \xi d\xi = L^{full}. \quad (4)$$

2. Потеря блеска системы в первом минимуме, обусловленная затмением звездой большего радиуса спутника с меньшим радиусом:

$$L^{full} - L^{(1)}(\theta) = \iint_{S(\Delta)} I^{(2)}(\xi) dS, \quad (5)$$

где $S(\Delta)$ — площадь области перекрытия дисков.

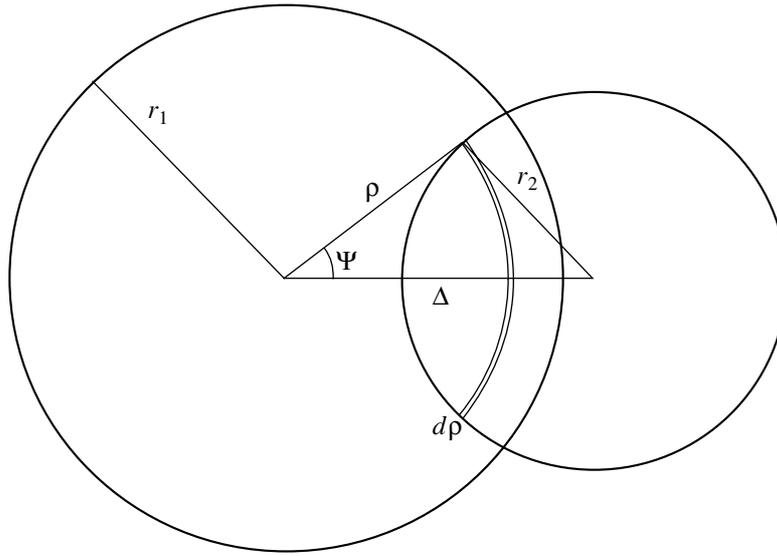


Рис. 1. Модель двух затменных сферических звезд. Проекция на картинную плоскость.

3. Потеря блеска во втором минимуме кривой блеска, обусловленная затмением звездой меньшего радиуса спутника с большим радиусом:

$$L^{full} - L^{(2)}(\theta) = \iint_{S(\Delta)} I^{(1)}(\rho) dS. \quad (6)$$

Уравнения (1), (4), (5) и (6) полностью описывают наблюдаемую кривую блеска и содержат, в зависимости от рассматриваемой модели, набор параметров из числа следующих: $r_1, r_2, i, I_0^{(1)}, I_0^{(2)}, x_1, x_2, y_1, y_2$. Подставляя под знаки интегрирования функции распределения яркости, аппроксимированные соответствующим законом потемнения к краю (2) или (6) и выполняя интегрирование, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно соответствующих параметров.

3. ВЫВОД РАСЧЕТНЫХ ФОРМУЛ

В случае линейного закона потемнения яркость в точке диска звезды

$$I(\rho) = I_0 \left(1 - x + x \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right),$$

где ρ — расстояние от точки до центра диска звезды, I_0 — яркость в центре диска, x — коэффициент потемнения к краю, r — радиус звезды.

Введем новые параметры

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= I_0(1 - x) \\ X_1 &= I_0 x \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

тогда

$$I(\rho) = \left(X_0 + X_1 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right). \quad (8)$$

В случае нелинейного закона потемнения яркость в точке диска звезды

$$I(\rho) = I_0 \left[1 - x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right) - y \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right)^2 \right],$$

где ρ — расстояние от точки до центра диска звезды, I_0 — яркость в центре диска, x, y — коэффициенты потемнения к краю, r — радиус звезды. Введем новые параметры

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= I_0(1 - x - 2y) \\ X_1 &= I_0(x + 2y) \\ X_2 &= I_0 y \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

тогда

$$I(\rho) = \left(X_0 + X_1 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} + X_2 \frac{\rho^2}{r^2} \right).$$

В таких переменных яркость в точке диска звезды для нелинейного закона потемнения отличается от соответствующей яркости для линейного закона потемнения дополнительным слагаемым, содержащим X_2 . Это позволяет нам получать линейную модель, фиксируя параметр $X_2 = 0$ в нелинейной модели. Компонента 1 в орбитальной фазе $\theta = 0$

затмевает компоненту 2. Полный блеск звезды в нелинейной модели

$$L^{(s)} = 2\pi \int_0^r I^{(s)}(\rho) \rho d\rho = X_0^{(s)} \pi r_s^2 + \frac{2}{3} X_1^{(s)} \pi r_s^2 + \frac{1}{2} X_2^{(s)} \pi r_s^2, \quad s = 1, 2.$$

Полный блеск системы двух звезд в нелинейной модели вне затмения

$$L^{full} = L^{(1)} + L^{(2)} = X_0^{(1)} \pi r_1^2 + \frac{2}{3} X_1^{(1)} \pi r_1^2 + \frac{1}{2} X_2^{(1)} \pi r_1^2 + X_0^{(2)} \pi r_2^2 + \frac{2}{3} X_1^{(2)} \pi r_2^2 + \frac{1}{2} X_2^{(2)} \pi r_2^2. \quad (10)$$

Чтобы получить модель системы звезды и планеты, достаточно положить параметр $L^{(2)} = 0$ (планета не излучает).

Для универсализации внешнего вида расчетных формул, минимумов кривой блеска и сокращения числа уравнений затмеваемому компоненту (ближний компонент по отношению к земному наблюдателю) приписан индекс n , затмеваемому компоненту (дальний компонент по отношению к земному наблюдателю) — индекс f . При непосредственном расчете минимумов кривой блеска в диапазоне значений орбитальной фазы $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ (или $\cos \theta > 0$) переменную r_n следует заменить на r_1 , а переменную r_f на r_2 . В диапазоне значений орбитальной фазы $\cos \theta < 0$, следует выполнить обратную замену — переменную r_f следует заменить на r_1 , а переменную r_n на r_2 .

В новых обозначениях падение блеска при затмении

$$L^{dec}(\Delta, r_f, r_n, X_0^{(f)}, X_1^{(f)}, X_2^{(f)}) = \iint_{S(\Delta)} I^{(f)}(\rho) dS, \quad (11)$$

где Δ — расстояние между центрами дисков, $S(\Delta)$ — область перекрытия дисков.

Для вычисления интеграла (11), также как это было сделано в [1], введем функции

$$Ax \equiv \begin{cases} \pi, & x < -1, \\ \arccos x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad (12)$$

и

$$Qx \equiv \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(\Delta, x, y) \equiv \mathcal{A} \left(\frac{x^2 + \Delta^2 - y^2}{2x\Delta} \right),$$

$$Q(\Delta, r_f, r_n) \equiv \mathcal{Q} \left\{ \left[r_f^2 - (\Delta - r_n)^2 \right] \left[(\Delta + r_n)^2 - r_f^2 \right] \right\},$$

а также полярную систему координат с началом в центре диска затмеваемой звезды и полярным углом φ , отсчитываемым в направлении от центра диска затмеваемого компонента “f” к центру диска затмеваемого компонента “n” (рис. 1). Тогда имеем

$$L^{dec}(\Delta, r_f, r_n, X_0^{(f)}, X_1^{(f)}, X_2^{(f)}) = X_0^{(f)} L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n) + X_1^{(f)} L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n) + X_2^{(f)} L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n), \quad (13)$$

а выражения для L_0^{dec} и L_1^{dec} получены в [1]:

$$L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n) = \Psi(\Delta, r_f, r_n) r_f^2 + \Psi(\Delta, r_n, r_f) r_n^2 - \frac{1}{2} Q(\Delta, r_f, r_n), \quad (14)$$

$$L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n) = \int_0^{r_f} \Psi(\Delta, \sqrt{\rho}, r_n) \sqrt{1 - \frac{\rho}{r_f^2}} d\rho. \quad (15)$$

Для L_2^{dec} аналогично тому, как в [1] были получены L_0^{dec} и L_1^{dec} , получим

$$L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n) = 2 \int_0^{r_f} \rho^3 \Psi(\Delta, \rho, r_n) d\rho = \Psi(\Delta, r_f, r_n) \frac{r_f^4}{2} + \frac{r_n^2}{2} (2\Delta^2 + r_n^2) \Psi(\Delta, r_n, r_f) - \frac{1}{8} (\Delta^2 + 5r_n^2 + r_f^2) Q(\Delta, r_f, r_n). \quad (16)$$

Частные производные L_2^{dec} имеют следующий вид:

$$\frac{\partial L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial \Delta} = 2\Delta r_n^2 \Psi(\Delta, r_n, r_f) - \frac{\Delta^2 + r_n^2 + r_f^2}{2\Delta} Q(\Delta, r_f, r_n), \quad (17)$$

$$\frac{\partial L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_f} = 2r_f^3 \Psi(\Delta, r_f, r_n) r_f, \quad (18)$$

$$\frac{\partial L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_n} = 2r_n (\Delta^2 + r_n^2) \times \Psi(\Delta, r_n, r_f) - 2r_n Q(\Delta, r_f, r_n). \quad (19)$$

Для круговой орбиты расстояние между центрами дисков звезд Δ зависит от фазы θ и угла наклона орбиты i как

$$\Delta(\theta, i) = \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta}. \quad (20)$$

Блеск двойной системы зависит от фазы θ следующим образом:

$$L(\theta, i, r_1, r_2, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}) = \quad (21)$$

$$= L^{full} - \begin{cases} L^{dec}(\Delta(\theta, i), r_1, r_2, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}), \\ \cos \theta < 0, \\ L^{dec}(\Delta(\theta, i), r_2, r_1, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}), \\ \cos \theta > 0. \end{cases}$$

Вводя функции

$$L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) = \quad (22)$$

$$= \pi r_1^2 - \begin{cases} L_0^{dec}(\Delta(\theta, i), r_1, r_2), & \cos \theta < 0, \\ 0, & \cos \theta > 0, \end{cases}$$

$$L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) =$$

$$= \frac{2}{3} \pi r_1^2 - \begin{cases} L_1^{dec}(\Delta(\theta, i), r_1, r_2), & \cos \theta < 0, \\ 0, & \cos \theta > 0, \end{cases}$$

$$L_2^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) =$$

$$= \frac{1}{2} \pi r_1^2 - \begin{cases} L_2^{dec}(\Delta(\theta, i), r_1, r_2), & \cos \theta < 0, \\ 0, & \cos \theta > 0, \end{cases}$$

$$L_0^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) =$$

$$= \pi r_2^2 - \begin{cases} L_0^{dec}(\Delta(\theta, i), r_2, r_1), & \cos \theta > 0, \\ 0, & \cos \theta < 0, \end{cases}$$

$$L_1^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) =$$

$$= \frac{2}{3} \pi r_2^2 - \begin{cases} L_1^{dec}(\Delta(\theta, i), r_2, r_1), & \cos \theta > 0, \\ 0, & \cos \theta < 0, \end{cases}$$

$$L_2^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) =$$

$$= \frac{1}{2} \pi r_2^2 - \begin{cases} L_2^{dec}(\Delta(\theta, i), r_2, r_1), & \cos \theta > 0, \\ 0, & \cos \theta < 0, \end{cases}$$

можно записать полный блеск в виде их линейной комбинации:

$$L(\theta, r_1, r_2, i, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}) = \quad (23)$$

$$= X_0^{(1)} L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_1^{(1)} L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) +$$

$$+ X_2^{(1)} L_2^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_0^{(2)} L_0^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) +$$

$$+ X_1^{(2)} L_1^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_2^{(2)} L_2^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i).$$

Частные производные функции полного блеска выражаются через частные производные функций

L_0^{dec} , L_1^{dec} и L_2^{dec} по переменным Δ , r_f , r_n и частные производные функции $\Delta(\theta, i)$ по θ и i .

Укажем, как можно выразить функцию L_1^{dec} через эллиптические функции Π , E , F и Θ -функцию, для вычисления которых существуют эффективные алгоритмы [2]:

$$L_1^{dec}(\Delta, r_1, r_2) = \frac{2\pi}{3} \Theta(r_n - \Delta) r_f^2 + \quad (24)$$

$$+ \mathcal{Q} \left[\frac{1}{r_f^2 - (r_n - \Delta)^2} \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{2r_f^3(\Delta + r_n)}{3(\Delta - r_n)} \Pi \left(-\frac{4\Delta r_n}{(r_n - \Delta)^2}; \right. \right.$$

$$\left. \frac{\Psi(\Delta, r_n, r_f)}{2} \left| \frac{4\Delta r_n}{r_f^2 - (r_n - \Delta)^2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{9} \left[3r_f(\Delta^2 - r_n^2) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{[r_f^2 - (r_n - \Delta)^2][(r_n + \Delta)^2 - r_f^2]}{r_f} \right] \right\} \times$$

$$\times F \left(\frac{\Psi(\Delta, r_n, r_f)}{2} \left| \frac{4\Delta r_n}{r_f^2 - (r_n - \Delta)^2} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{2}{9r_f} \mathcal{Q} [r_f^2 - (r_n - \Delta)^2] (7r_n^2 + \Delta^2 - 4r_f^2) \times$$

$$\times E \left(\frac{\Psi(\Delta, r_n, r_f)}{2} \left| \frac{4\Delta r_n}{r_f^2 - (r_n - \Delta)^2} \right) \right).$$

4. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Поскольку цель нашей работы состоит в том, чтобы выяснить соотношения между разными методами оценки ошибок параметров, напомним некоторые соотношения из математической статистики применительно к проводимым нами вычислениям.

Рассмотрим линейную модель, заданную последовательным набором функций $g_0(\theta) \dots g_P(\theta)$ и линейно выражающейся через них функцией¹ $f^{lin}(\theta, \alpha_1 \dots \alpha_P)$, определенными для действительных $\alpha_1 \dots \alpha_P$ и θ из множества $\{\theta_1 \dots \theta_M\}$:

$$f^{lin}(\theta, \alpha_1 \dots \alpha_P) = g_0(\theta) + \sum_{p=1}^P g_p(\theta) \alpha_p. \quad (25)$$

¹ Такая форма f^{lin} (формула (25)), в которой первое слагаемое не зависит от линейного параметра, выбрана для удобства последующего практического использования.

При этом множество $\{\theta_1 \dots \theta_M\}$ соответствует множеству из M точек, в которых производятся наблюдения. Зададимся вектором $(\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_P)^T$, соответствующим набору истинных значений физических величин (здесь M — полное число точек наблюдения), и вектором $(w_1 \dots w_M)^T$ весовых коэффициентов, предполагая при этом, что матрица $A_{qp} = \sum_{m=1}^M g_q(\theta_m) g_p(\theta_m) w_m$ является невырожденной. Также зададимся вектором случайных наблюдаемых величин $\xi = (\xi_1 \dots \xi_M)^T$, в отношении которых предполагается, что они статистически независимы, т.е. $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$ и распределены по нормальному закону с математическими ожиданиями $M(\xi_k) = f^{lin}(\theta_k, \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_P)$. Кроме того, предполагается, что измерения случайных величин $\xi_1 w_1 \dots \xi_M w_M$ являются равноточными, т.е. $\sigma^2(\xi_1 w_1) = \sigma^2(\xi_2 w_2) = \dots = \sigma^2(\xi_M w_M) = \varepsilon_0^2$, где через $\sigma^2(\cdot)$ здесь и далее обозначается операция вычисления дисперсии, а ε_0^2 — заданная величина, называемая дисперсией единицы веса. Обозначая $\sigma^2(\xi_m) = \sigma_m^2$ получим, что $w_m = \varepsilon_0^2 / \sigma_m^2$. Зададим для данной модели функционал невязки выражением

$$\begin{aligned} R^{lin}(\alpha_1 \dots \alpha_P, \xi_1 \dots \xi_M) &= \quad (26) \\ &= \sum_{m=1}^M \left[\xi_m - f^{lin}(\theta_m, \alpha_1 \dots \alpha_P) \right]^2 w_m = \\ &= \sum_{m=1}^M \left(\xi_m - g_0(\theta_m) - \sum_{p=1}^P g_p(\theta_m) \alpha_p \right)^2 w_m. \end{aligned}$$

Значения параметров $\alpha_1^c(\xi) \dots \alpha_P^c(\xi)$ (которые мы будем называть центральными), доставляющие минимум функционалу невязки (26) при фиксированных $\xi_1 \dots \xi_M$, находятся как решения системы P линейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{lin}(\alpha_1 \dots \alpha_P)}{\partial \alpha_q} &= 2B_q - \quad (27) \\ - 2 \sum_{p=1}^P A_{qp} \alpha_p &= 0, \quad q = 1 \dots P, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{qp} &= \sum_{m=1}^M g_q(\theta_m) g_p(\theta_m) w_m, \quad (28) \\ B_q &= \sum_{m=1}^M [\xi_m - g_0(\theta_m)] g_q(\theta_m) w_m. \end{aligned}$$

Они равны

$$\alpha_p^c(\xi) = \sum_{q=1}^P A_{qp}^{inv} B_q = \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^M [\xi_m - g_0(\theta_m)] w_m \sum_{q=1}^P A_{qp}^{inv} g_q(\theta_m), \\ & \quad p = 1 \dots P, \end{aligned}$$

где A_{qp}^{inv} обозначают элементы матрицы, обратной к A : $A_{qp}^{inv} \equiv (A^{-1})_{qp}$.

Таким образом, центральные значения параметров $\alpha_1^c(\xi) \dots \alpha_P^c(\xi)$ выражаются через линейную комбинацию $\xi_1 \dots \xi_M$ и, следовательно, являются нормально распределенными. Их математические ожидания равны $\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_P$ (что получается, если взять математическое ожидание от обеих частей (29) и подставить в него (25)). Используя линейность операции ковариации $\text{cov}(\cdot, \cdot)$, статистическую независимость $\xi_1 \dots \xi_M$ и то, что $\text{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sigma^2(\xi_i) = \varepsilon_0^2 / w_i$, найдем матрицу ковариаций параметров $\alpha_1^c \dots \alpha_P^c$:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\alpha_p^c(\xi), \alpha_q^c(\xi)) &= \quad (30) \\ &= \sum_{m=1}^M \left(\sigma^2(\xi_m) w_m^2 \sum_{i,j=1}^P A_{ip}^{inv} A_{jq}^{inv} g_i(\theta_m) g_j(\theta_m) \right) = \\ &= \varepsilon_0^2 \sum_{i,j=1}^P \left(A_{ip}^{inv} A_{jq}^{inv} \sum_{m=1}^M w_m g_i(\theta_m) g_j(\theta_m) = \varepsilon_0^2 A_{pq}^{inv} \right). \end{aligned}$$

Дисперсии центральных значений параметров $\alpha_1^c(\xi) \dots \alpha_P^c(\xi)$ находятся как диагональные элементы матрицы ковариаций:

$$\sigma^2(\alpha_p^c(\xi)) = \varepsilon_0^2 A_{pp}^{inv}. \quad (31)$$

В модели, получающейся с помощью линейной замены параметров с невырожденной матрицей C_p^i

$$\alpha'_p = C_0 + \sum_{i=1}^P C_p^i \alpha_i,$$

дисперсии новых параметров $\alpha'_1 \dots \alpha'_P$ находятся по формуле

$$\sigma^2(\alpha'_p) = \sum_{i,j=1}^P C_p^i C_p^j \text{cov}(\alpha_i^c, \alpha_j^c). \quad (32)$$

Зная дисперсию центрального значения параметра, можно построить интервал, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение параметра. Для этого достаточно заметить, что исходя из нормального закона распределения центрального значения параметра следует, что

$$\mathbf{P} \left(|\alpha_p^c(\xi) - \bar{\alpha}_p| \leq \kappa(\gamma) \sigma(\alpha_p^c(\xi)) \right) = \gamma, \quad (33)$$

где символ \mathbf{P} означает вероятность выполнения условия, а κ зависит от выбранной вероятности

попадания (уровня доверия) γ и находится как корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\kappa} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \gamma.$$

Например, при $\kappa = 1, 2$ и 3 уровень доверия $\gamma = 0.6827, 0.9545$ и 0.9973 , соответственно (правило одной, двух и трех σ).

Когда неизвестно значение ε_0 (например, в случае реально наблюдаемой кривой блеска), для нахождения ошибок вместо формулы (31) используются формулы, получающиеся из (31) и (30) заменой ε_0 на величину v_0 [4]:

$$v_0^2(\xi) = \frac{R^{lin}(\alpha_1^c(\xi) \dots \alpha_P^c(\xi), \xi_1 \dots \xi_M)}{M - P}, \quad (34)$$

называемую среднеквадратичной оценкой дисперсии единицы веса. Полученные таким образом среднеквадратичные оценки для дисперсий (являющиеся случайными величинами)

$$\sigma_{est}^2(\alpha_p^c(\xi)) \equiv v_0^2(\xi) A_{pp}^{inv}. \quad (35)$$

При этом v_0 является случайной величиной, и величина $(\alpha_p^c(\xi) - \bar{\alpha}_p) / \sigma_{est}(\alpha_p^c(\xi))$ имеет распределение Стьюдента с $M - P$ степенями свободы. Однако при достаточно больших $M - P \gg 10$ оно уже достаточно близко к нормальному, и можно считать, что вероятность $\mathbf{P}(|\alpha_p^c(\xi) - \bar{\alpha}_p| \leq \kappa \sigma(\alpha_p^c(\xi))) \simeq \mathbf{P}(|\alpha_p^c(\xi) - \bar{\alpha}_p| \leq \kappa \sigma_{est}(\alpha_p^c(\xi)))$, т.е. вероятность попадания истинного значения в интервал, построенный с помощью умножения среднеквадратичной оценки дисперсии² на соответствующий коэффициент $\kappa(\gamma)$, будет достаточно близка к γ .

Рассмотрим теперь модель, задаваемую произвольной, в общем случае нелинейной функцией $f(\theta, \beta_1 \dots \beta_P)$, определенной для $\theta \in \{\theta_1 \dots \theta_M\}$ и для векторов $(\beta_1 \dots \beta_P)^T \in \mathcal{B}$, где \mathcal{B} — некоторая область действительного евклидова пространства. При этом мы предполагаем $f(\theta, \beta_1 \dots \beta_P)$ дифференцируемой по $\beta_1 \dots \beta_P$ во всей области определения.

При этом, также как и для линейной модели, задаются $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P$, $w_1 \dots w_M$, нормально распределенные случайные величины $\xi_1 \dots \xi_M$, дисперсия единицы веса ε_0 и функционал невязки. Случайные

величины $\xi_1 \dots \xi_M$ имеют нормальное распределение, и

$$\begin{aligned} M(\xi_k) &= f(\theta_k, \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P), \\ \sigma^2(\xi_1 w_1) &= \sigma^2(\xi_2 w_2) = \dots = \sigma^2(\xi_M w_M) = \varepsilon_0^2, \end{aligned} \quad (36)$$

где $M(\xi_k)$ означает математическое ожидание величины ξ_k , а $\sigma^2(\cdot)$ — операцию нахождения дисперсии.

Также предположим, что матрица

$$\begin{aligned} A_{qp}(\beta_1 \dots \beta_P) &= \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial f}{\partial \beta_q}(\theta_m, \beta_1 \dots \beta_P) \frac{\partial f}{\partial \beta_p}(\theta_m, \beta_1 \dots \beta_P) w_m \end{aligned} \quad (37)$$

является невырожденной при $(\beta_1 \dots \beta_P)^T \in \mathcal{B}$. При этом мы будем обозначать элементы матрицы, обратной матрице (37), как $A_{qp}^{inv}(\beta_1 \dots \beta_P)$.

Функционал невязки задается выражением:

$$\begin{aligned} R(\beta_1 \dots \beta_P, \xi_1 \dots \xi_M) &= \\ &= \sum_{m=1}^M [\xi_m - f(\theta, \beta_1 \dots \beta_P)]^2 w_m, \end{aligned} \quad (38)$$

и предполагается, что при фиксированных $\xi_1 \dots \xi_M$ он является выпуклым по переменным $\beta_1 \dots \beta_P$ и достигает по ним минимума в области \mathcal{B} .

Метод дифференциальных поправок заключается в том, что функция f заменяется ее разложением в ряд Тейлора до линейного члена в точке минимума функционала невязки, и в качестве оценки дисперсий оптимальных значений $\beta_1 \dots \beta_P$ берутся дисперсии, найденные в рамках метода наименьших квадратов для соответствующей линейной модели.

Обозначим как $\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)$ значения параметров (которые назовем центральными), доставляющие минимум функционалу невязки $R(\beta_1 \dots \beta_P, \xi_1 \dots \xi_M)$ при фиксированных $\xi_1 \dots \xi_M$ и положим в (25), а затем в (28) и в (29),

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \beta_p - \beta_p^c(\xi), \\ g_0(\theta) &= f(\theta, \beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)), \\ g_p(\theta) &= \frac{\partial f}{\partial \beta_p^c}(\theta, \beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)), \end{aligned} \quad (39)$$

где $p = 1 \dots P$. Тогда величины

$$\text{cov}_o(\beta_q^c(\xi), \beta_p^c(\xi)) \equiv \varepsilon_0^2 A_{qp}^{inv}(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)) \quad (30')$$

и

$$\sigma_o^2(\beta_p^c(\xi)) \equiv \varepsilon_0^2 A_{pp}^{inv}(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)), \quad (31')$$

² Отметим, что изменения среднеквадратичных оценок дисперсий (являющихся случайными величинами) от выборки к выборке, т.е. их разброс для разных измерений одной и той же кривой, может быть значительно больше, чем различие между функциями распределения Стьюдента и Гаусса. Указанный разброс обратно пропорционален квадратному корню из числа точек кривой блеска.

полученные подстановкой (39) в формулы (30) и (31) для ковариаций и дисперсий центральных значений в линейной модели, берутся в качестве приближенной оценки ковариаций и дисперсий $\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)$. В случае реально наблюдаемой кривой блеска, когда неизвестно значение дисперсии единицы веса, аналогично линейному случаю вместо значения ε_0 используется среднеквадратичная оценка дисперсии единицы веса

$$v_0^2(\xi) = \frac{R(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi), \xi_1 \dots \xi_M)}{M - P} \quad (34')$$

и соответствующие приближенные среднеквадратичные оценки дисперсий параметров

$$\sigma_{est}^2(\beta_p^c(\xi)) \equiv v_0^2(\xi) A_{pp}^{inv}(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)). \quad (35')$$

Использование в расчетах такого приближения предполагает, что можно пренебречь изменением производных функции f в (37), вычисленных с центральными значениями параметров, при изменении ξ в окрестности их математических ожиданий.

Очевидно, что если функция $f(\theta, \beta_1 \dots \beta_P)$ линейна по $\beta_1 \dots \beta_P$, то (31') – (35') совпадает с (31)–(35), т.е. в случае линейной функции метод дифференциальных поправок тождествен методу наименьших квадратов. Отметим, что в описанных методах делается предположение о том, что используемая модель идеально верна, а для оценки ошибок параметров используются статистика нормального распределения.

В модели, получающейся с помощью обратимой замены параметров

$$\beta'_p = \phi_p(\beta_1 \dots \beta_P), \quad (40)$$

где ϕ – гладкие функции, а матрицы $\frac{\partial \phi_p(\beta_1 \dots \beta_P)}{\partial \beta_i}$ – невырожденные, выражение для приближенных оценок дисперсий центральных значений новых параметров $\beta'^c_1(\xi) \dots \beta'^c_P(\xi)$ можно получить путем замены правой части (40) ее разложением в ряд Тейлора до линейного члена в точке $(\beta^c_1(\xi) \dots \beta^c_P(\xi))^T$, полагая в формуле (32) $C_p^i = \frac{\partial \phi_p(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi))}{\partial \beta_i^c}$ и заменяя в ней ковариации $\alpha^c_1(\xi) \dots \alpha^c_P(\xi)$ на соответствующие приближенные оценки ковариаций $(\beta^c_1(\xi) \dots \beta^c_P(\xi))$:

$$\begin{aligned} \sigma_o^2(\beta'^c_p(\xi)) &= \quad (41) \\ &= \sum_{i,j=1}^P \frac{\partial \phi_p(\beta^c_1(\xi) \dots \beta^c_P(\xi))}{\partial \beta_i^c} \frac{\partial \phi_p(\beta^c_1(\xi) \dots \beta^c_P(\xi))}{\partial \beta_j^c} \times \\ &\quad \times \text{cov}_o(\beta^c_i(\xi), \beta^c_j(\xi)). \end{aligned}$$

По поводу описанного метода наименьших квадратов (и в случае нелинейной модели, метода

дифференциальных поправок) следует сделать важное замечание. В этих методах обычно не проводится проверка статистической гипотезы H об адекватности модели наблюдательным данным, а сразу подразумевается, что используемая модель идеально верна. Другими словами, при принятии гипотезы H в данном случае исключается возможность того, что исследователь может совершить ошибку 2-го рода (модель неверна, но принимается по статистическому критерию). Именно поэтому, а также благодаря использованию простейшей статистики нормального распределения при оценке ошибок искомых параметров (см. формулы (31), (35), (31'), (35')), в методах наименьших квадратов и дифференциальных поправок (а также в методе Монте-Карло) удается получить относительно небольшие значения ошибок параметров обратной задачи.

В действительности, заранее неизвестно, насколько применимо предположение об идеальности модели, поскольку число наблюдаемых точек на кривой блеска, как правило, много больше числа искомых параметров, и задача поиска параметров обратной параметрической задачи является сильно переопределенной. Поэтому поиск значений параметров и их ошибок должен проводиться совместно со статистической проверкой гипотезы H об адекватности модели. При этом, как отмечено в [5, 8, 12], принятие или отбрасывание гипотезы H согласно статистическому критерию не дает ее окончательного логического обоснования или опровержения (в силу статистической природы критерия). Возможны четыре случая.

1. Гипотеза H верна и принимается по критерию.
2. Гипотеза H неверна и отвергается по критерию.
3. Гипотеза H верна, но отвергается по критерию (ошибка 1-го рода).
4. Гипотеза H неверна, но принимается по критерию (ошибка 2-го рода).

Для выбранного статистического критерия существует неотрицательная вероятность совершить ошибку 1-го рода, которая обозначается $\alpha_0 \geq 0$. Величина α_0 называется уровнем значимости критерия. Очевидно, в случае адекватности модели вероятность события 1 равна $\gamma = 1 - \alpha_0$.

Можно использовать, например, следующий критерий проверки гипотезы H (подробнее см. в [8, 12]). Выберем некоторую случайную величину (статистику) $\Delta(\tilde{u})$, зависящую от экспериментальных данных \tilde{u} , причем распределение $\Delta(\tilde{u})$ известно (например, это распределение χ^2_M , где M – число наблюдаемых точек на кривой блеска). Зададимся заранее некоторым уровнем значимости α_0 и вычислим число Δ_M (квантиль) такое, что в случае правильности гипотезы H вероятность

$P\{\Delta(\tilde{u}) > \Delta_0\} = \alpha_0$ для всех значений параметров модели. Если для конкретной реализации экспериментальных данных (кривой блеска) \tilde{u} получаем, что $\Delta(\tilde{u}) > \Delta_M$ для любых значений параметров, то гипотеза Н отвергается. В противном случае ($\Delta(\tilde{u}) \leq \Delta_M$) гипотеза Н принимается. При этом необходимо помнить, что модель принимается не потому, что она идеально верна, а потому, что нет оснований ее отвергнуть.

В лучших случаях, при применении методов наименьших квадратов, дифференциальных поправок и Монте-Карло для нахождения значений параметров и их ошибок, исследователи в качестве основания для принятия модели используют критерий близости к единице величины минимального приведенного хи-квадрат: $\frac{\chi_{M-P}^2}{M-P} \simeq 1$, где P — число искомых параметров. Однако при этом не рассматривается количественная мера адекватности модели наблюдательным данным, а именно, уровень значимости α_0 , на котором модель может быть отвергнута. В данной работе мы исследовали и этот вопрос (см. ниже).

5. АНАЛИТИЧЕСКОЕ СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ИНТЕРВАЛАМИ ОШИБОК, ПОЛУЧЕННЫМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАТИСТИК, РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО ЗАКОНАМ χ_M^2 , χ_P^2 , И МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОПРАВОК

В нашей предыдущей работе [1] в ходе численного эксперимента установлено, что в среднем величина интервала ошибки, полученного в методе доверительных областей на основе статистики, распределенной по закону χ_M^2 , где M — число точек измерения (далее по тексту — метод χ_M^2), превышает интервал ошибки метода дифференциальных поправок в 3–5 раз. Также величина интервала ошибки, полученного в методе доверительных областей на основе статистики, распределенной по закону χ_M^2 , в среднем превышает величину интервала ошибок, полученного в методе доверительных областей на основе статистики, распределенной по закону χ_P^2 , где P — число искомых параметров (далее по тексту — метод χ_P^2). При этом размеры доверительных интервалов, полученные в рамках метода наименьших квадратов с использованием точных значений дисперсии, и на основе статистики с законом распределением χ_P^2 , не зависят от выборки случайных величин, в отличие от доверительных интервалов, которые получены в рамках метода на основе статистики с законом распределения χ_M^2 и которые сами являются случайными величинами. В данной работе ниже приводится

строгое аналитическое соотношение между интервалами ошибок в рамках вышеупомянутых методов для линейной модели. А именно, выводится функция $a_p(t)$ распределения отношения случайной величины доверительного интервала в методе χ_M^2 к величине доверительного интервала в методе χ_P^2 . Величина доверительного интервала в методе χ_P^2 для одномерной задачи ($P = 1$) совпадает с доверительным интервалом в рамках метода наименьших квадратов, а в случае произвольного P эти интервалы связаны определенной зависимостью (которая будет приведена ниже). Также исследуется поведение функции $a_p(t)$ в зависимости от числа точек наблюдения M и выбранного уровня доверия γ .

Рассмотрим вначале одномерный случай. Рассмотрим невязку в однопараметрической линейной модели, квадратично зависящую от одного параметра α . Также положим для удобства в модели $\varepsilon_0 = 1$ (при этом нижесказанное остается справедливым при любом значении ε_0). Указанную невязку можно записать в виде (что следует из (26), где квадратичные по α члены не содержат случайных величин ξ)

$$R^{lin}(\alpha, \xi) = C[\alpha - \alpha^c(\xi)]^2 + R_{min}^{lin}(\xi), \quad (42)$$

где R_{min}^{lin} — ее минимальное значение по α , достигаемое в $\alpha^c(\xi)$, а коэффициент C выражается определенным образом через заданные параметры модели (w и g) и не зависит от выборки случайных величин ξ .

Определим квантиль $\Delta_n(\gamma)$ для $\gamma \in (0, 1)$ соотношением

$$\chi_n^2(\Delta_n(\gamma)) = \gamma,$$

т.е. как функцию, обратную χ_n^2 .

Коротко напомним распределение невязок. В предыдущей работе [1] показано, что невязки распределены по следующим законам:

$$R^{lin}(\bar{\alpha}, \xi) - R_{min}^{lin}(\xi) \sim \chi_1^2, \quad (43)$$

$$R^{lin}(\bar{\alpha}, \xi) \sim \chi_M^2, \quad (44)$$

$$R_{min}^{lin}(\xi) \sim \chi_{M-1}^2, \quad (45)$$

где $\bar{\alpha}$ — истинное значение параметра α , а знак \sim означает “распределено по закону”. Для наглядности на рис. 2 изображена зависимость невязки $R(\alpha, \xi)$ от искомого параметра задачи α при фиксированной выборке случайных величин ξ и ее взаимосвязь с основными статистическими параметрами. Парабола, являющаяся графиком такой зависимости в случае линейной модели, при различных ξ может перемещаться в верхней полуплоскости, сохраняя при этом свою форму, так

как коэффициент при квадратичном по α члене не зависит от ξ .

Величина интервала ошибки, полученного методом χ^2_1 при заданном уровне доверия γ , определяется как расстояние между корнями квадратного уравнения относительно α :

$$C[\alpha - \alpha^c(\xi)]^2 + R_{\min}^{lin}(\xi) = \Delta_M(\gamma) \quad (46)$$

$$= R_{\min}^{lin}(\xi) + \Delta_1(\gamma).$$

Обозначим половину величины указанного интервала через $\delta_1(\gamma)$. Очевидно, что $\delta_1(\gamma)$ удовлетворяет соотношению

$$C\delta_1^2(\gamma) = \Delta_1(\gamma) \quad (47)$$

и не зависит от выборки случайных величин ξ . Отсюда имеем

$$C = \frac{\Delta_1(\gamma)}{\delta_1^2(\gamma)}. \quad (48)$$

Величина интервала ошибки, полученного методом χ^2_M при заданном уровне доверия γ , является расстоянием между корнями квадратного уравнения относительно α :

$$C[\alpha - \alpha^c(\xi)]^2 + R_{\min}^{lin}(\xi) = \Delta_M(\gamma). \quad (49)$$

Положим $\delta_M(\gamma, \xi)$ равным половине величины указанного интервала в том случае, когда последнее уравнение имеет положительные корни (т.е. соответствующее доверительное множество непустое) и нулю в противном случае. При этом для положительных значений $\delta_M(\gamma, \xi)$ справедливо соотношение

$$C\delta_M^2(\gamma, \xi) + R_{\min}^{lin}(\xi) = \Delta_M(\gamma). \quad (50)$$

Величина $\delta_M(\gamma, \xi)$ зависит от случайных величин ξ и сама является случайной величиной. С учетом (45) получим

$$\Delta_M(\gamma) - C\delta_M^2(\gamma, \xi) \sim \chi_{M-1}^2. \quad (51)$$

Последнее выражение означает, что вероятность

$$\mathbf{P}((\Delta_M(\gamma) - C\delta_M^2(\gamma, \xi)) < t) = \chi_{M-1}^2(t). \quad (52)$$

Путем несложных линейных и сдвиговых преобразований относительно t , а также используя (48), из последнего выражения получим

$$\mathbf{P}\left(\frac{\delta_M^2(\gamma, \xi)}{\delta_1^2(\gamma)} > t\right) = \chi_{M-1}^2(\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)t). \quad (53)$$

При этом из (45) следует, что вероятность того, что $\delta_M(\gamma, \xi) > 0$ (т.е. того, что доверительный интервал окажется непустым для заданного уровня доверия γ), равна $\chi_{M-1}^2(\Delta_M(\gamma))$.

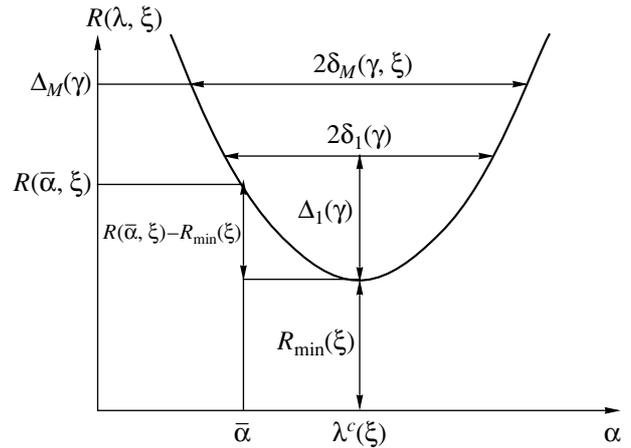


Рис. 2. Однопараметрическая задача. Зависимость невязки $R(\alpha, \xi)$ от параметра задачи α при фиксированном значении вектора случайных величин ξ и основные статистические величины. $R_{\min}(\xi)$ – минимальное по параметру α значение невязки $R(\alpha, \xi)$. $\Delta_P(\gamma)$ ($P = 1$) – квантиль распределения χ_P^2 ($P = 1$). $\Delta_M(\gamma)$ – квантиль распределения χ_M^2 . $2\delta_1(\gamma)$, $2\delta_M(\gamma, \xi)$ – ширина доверительных интервалов, полученных методами, использующими статистику $R(\bar{\alpha}, \xi) - R_{\min}(\xi)$, $R(\bar{\alpha}, \xi)$ с законами распределения χ_P^2 ($P = 1$) и χ_M^2 , соответственно (подробнее см. текст).

Соответствующая условная вероятность

$$\mathbf{P}\left(\delta_M(\gamma, \xi) > 0 \mid \frac{\delta_M(\gamma, \xi)}{\delta_1(\gamma)} > t\right) = \frac{\chi_{M-1}^2(\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)t^2)}{\chi_{M-1}^2(\Delta_M(\gamma))} \quad (54)$$

или

$$\mathbf{P}\left(\delta_M(\gamma, \xi) > 0 \mid \frac{\delta_M(\gamma, \xi)}{\delta_1(\gamma)} \leq t\right) = 1 - \frac{\chi_{M-1}^2(\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)t^2)}{\chi_{M-1}^2(\Delta_M(\gamma))}. \quad (55)$$

Правая часть последнего выражения представляет собой функцию распределения положительных значений величины $\frac{\delta_M(\gamma, \xi)}{\delta_1(\gamma)}$, являющейся отношением доверительного интервала, полученного на основе статистики, распределенной по закону χ_M^2 , к соответствующему интервалу, полученному на основе статистики, распределенной по закону χ_1^2 для заданного уровня доверия γ . Соответствующая плотность распределения $a_1(t)$, полученная дифференцированием функции распределения (с точностью до нормировочного коэффициента A_1) равна

$$a_1(t) = A_1 \times \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(\Delta_1(\gamma)t^2 - \Delta_M(\gamma))} t (\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)t^2)^{\frac{M-3}{2}}, & 0 < t < \sqrt{\frac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_1(\gamma)}}, \\ 0, & t \leq 0 \text{ или } t \geq \sqrt{\frac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_1(\gamma)}}, \end{cases}$$

Эта функция достигает максимума при

$$t_{\max 1} = \sqrt{\frac{2 - M + \Delta_M(\gamma) + \sqrt{(2 - M)^2 + \Delta_M(\gamma)(-2M + \Delta_M(\gamma) + 8)}}{2\Delta_1(\gamma)}}. \quad (56)$$

При этом, поскольку задача одномерная, доверительный интервал $\delta_1(\gamma)$ совпадает с интервалом, полученным методом наименьших квадратов для соответствующего уровня доверия.

Вышесказанное можно обобщить для случая модели с P параметрами, получив распределение отношения проекции доверительной области, определенной методом χ_M^2 , к соответствующей проекции области, определенной методом χ_P^2 . Распределение соответствующих невязок

$$R(\overline{\alpha}_1 \dots \overline{\alpha}_P, \xi) - R_{\min}(\xi) \sim \chi_P^2, \quad (57)$$

$$R(\overline{\alpha}_1 \dots \overline{\alpha}_P, \xi) \sim \chi_M^2, \quad (58)$$

$$R_{\min}(\xi) \sim \chi_{M-P}^2. \quad (59)$$

Напомним, что под доверительным интервалом в методах χ_P^2 и χ_M^2 подразумевается проекция доверительной области, полученной на основе соответствующей статистики, на ось соответствующего параметра. Такая проекция находится как

расстояние между корнями уравнения, полученного приравниванием невязки, минимизированной по всем параметрам, кроме одного, к квантилю для выбранного уровня доверия.

Заменив во всем предыдущем выводе, кроме формул (43) и (44), $R(\alpha, \xi)$ на P -параметрическую невязку, минимизированную по всем параметрам α , кроме одного, а χ_1^2 , χ_{M-1}^2 , $\Delta_1(\gamma)$ и $\delta_1(\gamma)$ — на χ_P^2 , χ_{M-P}^2 , $\Delta_P(\gamma)$ и $\delta_P(\gamma)$, соответственно, получим, что функция распределения равна

$$\mathbf{P} \left(\delta_M(\gamma) > 0 \mid \frac{\delta_M(\gamma, \xi)}{\delta_P(\gamma)} \leq t \right) = \quad (60)$$

$$= 1 - \frac{\chi_{M-P}^2 (\Delta_M(\gamma) - \Delta_P(\gamma)t^2)}{\chi_{M-P}^2 (\Delta_M(\gamma))},$$

а плотность распределения положительных значений $\frac{\delta_M(\gamma, \xi)}{\delta_P(\gamma)}$ (с точностью до нормировочного коэффициента A_p) —

$$a_P(t) = A_p \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(\Delta_P(\gamma)t^2 - \Delta_M(\gamma))} t (\Delta_M(\gamma) - \Delta_P(\gamma)t^2)^{\frac{M-P-2}{2}}, & 0 < t < \sqrt{\frac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_P(\gamma)}}, \\ 0, & t \leq 0 \text{ или } t \geq \sqrt{\frac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_P(\gamma)}}. \end{cases}$$

Максимум данной функция достигает при

$$t_{\max P} = \sqrt{\frac{1 + P - M + \Delta_M(\gamma) + \sqrt{(1 + P - M)^2 + \Delta_M(\gamma)(2P - 2M - 2 + \Delta_M(\gamma) + 8)}}{2\Delta_P(\gamma)}}. \quad (61)$$

На рис. 3 показано поведение функции плотности $a_1(t)$ в зависимости от уровня доверия γ для метода χ_M^2 . Напомним, что в случае однопараметрической задачи проекция доверительной области, полученной на основе статистики с законом распределения χ_P^2 , совпадает с доверительным интервалом, полученным методом наименьших квадратов. Из рис. 3 видно, что наиболее вероятное значение отношения величины доверительного интервала, полученного на основе статистики, распределенной по закону χ_M^2 , к величине доверительного интервала, полученного методом наименьших квадратов, зависит от выбранного уровня доверия. Так, при уровне доверия $\gamma = 0.68$ наиболее вероятная величина доверительного интервала, полученного на основе статистики, распределенной по закону χ_M^2 , превосходит величину доверительного интервала, полученного методом наименьших квадратов, в ~ 4 раза, а при уровне доверия $\gamma = 0.99$ — в ~ 2.1 раза. Расчет выполнен для значения $M = 101$.

Далее исследовалось поведение максимума функции $a_P(t)$ в зависимости от уровня доверия γ и размерности распределения χ_M^2 . На рис. 4 представлен набор соответствующих зависимостей для значений $M = 50, 100, 500$ и 1000 . Отметим, что для линейной модели зависимость имеет универсальный характер, т.е. она не зависит от коэффициентов исследуемой линейной функции. Из рис. 4 видно, что превышение величины наиболее вероятного доверительного интервала, полученного на основе статистики, распределенной по закону χ_M^2 , по отношению к величине доверительного интервала, полученного методом наименьших квадратов, растет (сравнительно слабо) с увеличением размерности M распределения χ_M^2 (т.е. числа наблюдаемых точек M). Из рис. 4 также следует, что с ростом уровня доверия γ значение отношения величины наиболее вероятного доверительного интервала, полученного на основе статистики, распределенной по закону χ_M^2 , к величине доверительного интервала, полученного методом наименьших квадратов, уменьшается. Данная зависимость показана на рис. 5.

Возникает вопрос: почему доверительные интервалы в методах дифференциальных поправок (который в случае линейной модели тождествен методу наименьших квадратов) и Монте-Карло в несколько раз меньше доверительных интервалов, полученных на основе статистики с законом распределения χ_M^2 ? В случае одномерной модели ($P = 1$) проблема проектирования доверительной области на ось параметра не возникает, и различие доверительных интервалов, очевидно, связано с тремя обстоятельствами.

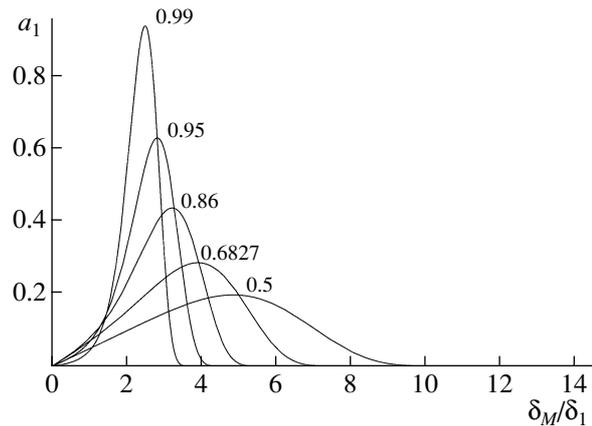


Рис. 3. Дифференциальная функция $a_1(t)$ плотности распределения отношения величины доверительного интервала $\Delta(\chi_M^2)$, полученного на основе статистики с законом распределения χ_M^2 , при условии адекватности модели при использовании такой статистики, к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок. Случай одномерной функции, $M = 101$, $\gamma = 0.5, 0.6827, 0.86, 0.95, 0.99$.

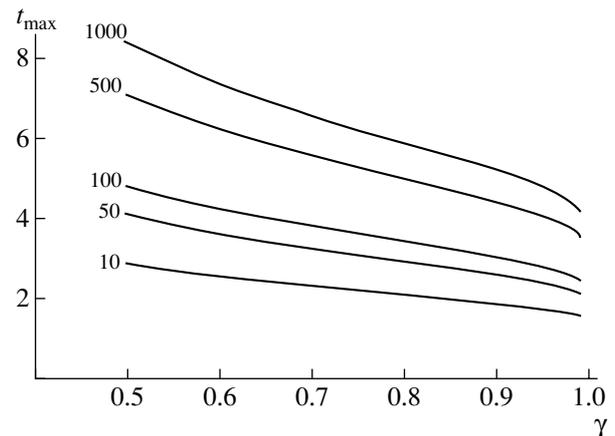


Рис. 4. Случай однопараметрической задачи. Зависимость максимума дифференциальной функции распределения отношения величины доверительного интервала, полученного на основе статистики с законом распределения χ_M^2 , к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок, от уровня доверия γ для числа наблюдательных точек $M = 10, 50, 100, 500, 1000$. Получено на основе одномерной линейной модельной функции (вид функции не важен; зависимость — универсальная).

1. При использовании статистики, распределенной по закону χ_M^2 (т.е. невязки), не делается изначального предположения о том, что используемая модель идеально верна. На практике это означает, что поверхность функционала невязки (рис. 2) в случае статистики с законом распределения χ_M^2 для разных реализаций наблюдательных данных

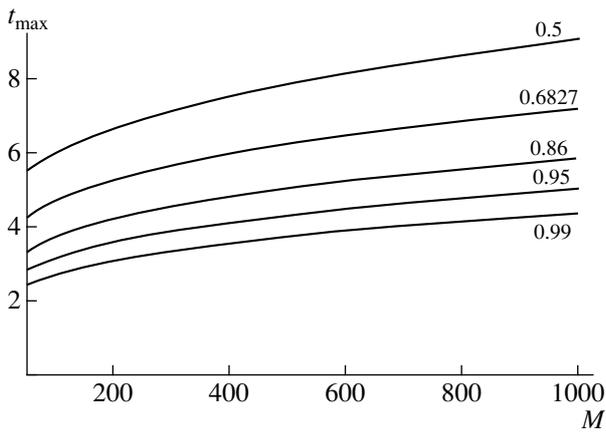


Рис. 5. Случай однопараметрической задачи. Зависимость максимума дифференциальной функции распределения отношения величины доверительного интервала, полученного на основе статистики с законом распределения χ_M^2 , к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок, от числа точек M при фиксированном уровне доверия для $\gamma = 0.5, 0.6827, 0.86, 0.95, 0.99$.

может смещаться как вдоль оси параметров (“в горизонтальном направлении”), так и вдоль оси значений функционала невязки (“в вертикальном направлении”). Для некоторых реализаций наблюдательных данных при этом доверительная область может даже вырождаться в пустое множество (число таких случаев должно быть близко к значению принятого уровня значимости $\alpha = 1 - \gamma$). В случае статистики, распределенной по закону χ_P^2 (в котором предполагается, что модель идеально верна), поверхность функционала невязки (рис. 2), для разных реализаций наблюдательных данных может смещаться лишь вдоль оси параметров (в “горизонтальном” направлении). Соответствующая доверительная область никогда не вырождается в пустое множество.

2. Распределение интервалов, построенных на основе распределенной по закону χ_M^2 статистики, полученное в условном предположении об адекватности модели в методе с использованием статистики с законом распределения χ_M^2 и при прочих равных условиях, шире (рис. 3), чем нормальное распределение найденных центральных значений параметров, используемое в методе дифференциальных поправок (в котором модель по определению предполагается адекватной). При этом характерными параметрами этих распределений являются в первом случае наиболее вероятное значение интервала ошибок, полученного на основе статистики, распределенной по закону χ_M^2 , а во втором — среднеквадратичная оценка стандартного отношения σ , умноженная на коэффициент, соответствующий выбранному уровню доверия (что

в случае одномерной модели совпадает с интервалом, полученным на основе статистики с законом распределения χ_P^2). Параметр t_{\max} является отношением первого из этих параметров ко второму.

В случае многопараметрической задачи ($P > 1$) к указанным причинам добавляется эффект, связанный с необходимостью проектирования многомерной (в пространстве параметров) доверительной области на оси параметров. Это необходимо делать для того, чтобы перейти от “точной” доверительной области к значениям доверительных интервалов. Поскольку при таком проектировании доверительная область заменяется объемлющим ее параллелепипедом, объем которого больше, соответствующая вероятность накрытия точного решения дополнительно возрастает.

Таким образом, выбирая уровень доверия γ для доверительных интервалов, мы должны помнить, что вероятность P накрытия точного решения соответствующей доверительной областью в методах дифференциальных поправок и Монте-Карло $P < \gamma$, а в методе χ_M^2 вероятность накрытия точного решения соответствующим параллелепипедом, объемлющим “точную” доверительную область, $P > \gamma$. При этом в методе χ_M^2 вероятность накрытия точного решения соответствующей доверительной областью $P = \gamma$.

В случае нелинейной модели еще одной причиной занижения интервалов ошибок, полученных методом дифференциальных поправок, может быть применение процедуры линеаризации. Однако в случае используемой нами модели указанный фактор не оказывает существенного влияния на полученные результаты — об этом говорит то, что оценки дисперсий, полученные методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло, существенно не различаются. Различие же в несколько раз величин интервалов, полученных разными методами, обусловлено именно использованием различных статистик, а также различием предположений о верности моделей.

5.1. Новый метод оценки ошибок параметров

Таким образом, в случае, если зависимость функции, описывающей модель, от искомых параметров линейная, то формулы (56) и (61) позволяют на основе метода Монте-Карло или дифференциальных поправок путем домножения на коэффициент t_{\max} (или $k_P t_{\max}$ — см. ниже) получить тот размер интервала ошибки искомого параметра в рамках метода доверительных областей, построенных на основе статистики, распределенной по закону χ_M^2 , который является наиболее вероятным среди случаев, в которых модель не может быть отвергнута. Получив размер интервала ошибки методом Монте-Карло или дифференциальных

Таблица 1. Параметр t_{max} для однопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и выбранного уровня доверия γ при $P = 1$. (В этом случае доверительный интервал, полученный на основе статистики с законом распределения χ^2_P , совпадает с доверительным интервалом, полученным методом дифференциальных поправок)

M	γ										
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
10	8.49	5.20	3.98	3.32	2.89	2.58	2.33	2.11	1.89	1.76	1.58
20	10.4	6.21	4.68	3.87	3.35	2.98	2.68	2.42	2.16	2.01	1.79
30	11.7	6.89	5.16	4.25	3.67	3.25	2.92	2.64	2.35	2.18	1.94
40	12.7	7.41	5.53	4.54	3.92	3.47	3.11	2.81	2.50	2.31	2.05
50	13.5	7.84	5.84	4.79	4.12	3.64	3.27	2.95	2.62	2.42	2.15
60	14.1	8.22	6.10	5.00	4.30	3.80	3.41	3.07	2.73	2.52	2.23
70	14.7	8.54	6.34	5.18	4.45	3.93	3.53	3.17	2.82	2.60	2.31
80	15.3	8.84	6.55	5.35	4.59	4.06	3.63	3.27	2.90	2.68	2.37
90	15.8	9.11	6.74	5.50	4.72	4.17	3.73	3.36	2.98	2.75	2.43
100	16.2	9.35	6.92	5.64	4.84	4.27	3.82	3.44	3.05	2.81	2.49
200	19.5	11.1	8.20	6.67	5.70	5.02	4.49	4.03	3.57	3.29	2.90
300	21.7	12.3	9.06	7.36	6.29	5.53	4.94	4.44	3.93	3.61	3.18
400	23.3	13.3	9.73	7.89	6.74	5.93	5.29	4.75	4.20	3.87	3.40
500	24.7	14.0	10.3	8.33	7.11	6.25	5.58	5.01	4.43	4.08	3.58
600	25.9	14.7	10.8	8.71	7.44	6.54	5.83	5.23	4.63	4.26	3.74
700	26.9	15.3	11.2	9.05	7.72	6.78	6.06	5.43	4.80	4.41	3.88
800	27.9	15.8	11.6	9.35	7.98	7.01	6.25	5.61	4.96	4.56	4.00
900	28.7	16.3	11.9	9.63	8.21	7.21	6.43	5.77	5.10	4.69	4.12
1000	29.5	16.7	12.2	9.88	8.42	7.40	6.60	5.92	5.23	4.81	4.22
1500	32.7	18.5	13.5	10.9	9.31	8.17	7.29	6.53	5.77	5.30	4.65
2000	35.2	19.9	14.5	11.7	9.99	8.77	7.82	7.00	6.19	5.68	4.99
2500	37.2	21.0	15.3	12.4	10.6	9.26	8.26	7.39	6.53	6.00	5.27
3000	39.0	22.0	16.1	13.0	11.0	9.68	8.63	7.73	6.83	6.27	5.50
3500	40.5	22.9	16.7	13.5	11.5	10.1	8.97	8.03	7.09	6.52	5.71
4000	41.9	23.6	17.2	13.9	11.9	10.4	9.27	8.30	7.33	6.73	5.90
4500	43.2	24.4	17.8	14.3	12.2	10.7	9.54	8.54	7.54	6.93	6.08
5000	44.4	25.0	18.2	14.7	12.5	11.0	9.79	8.77	7.74	7.11	6.23
5500	45.4	25.6	18.7	15.1	12.8	11.2	10.0	8.98	7.93	7.28	6.38
6000	46.4	26.2	19.1	15.4	13.1	11.5	10.2	9.17	8.10	7.44	6.52
6500	47.4	26.7	19.5	15.7	13.4	11.7	10.4	9.35	8.26	7.58	6.65
7000	48.3	27.2	19.8	16.0	13.6	11.9	10.6	9.53	8.41	7.72	6.77
7500	49.1	27.7	20.2	16.3	13.9	12.1	10.8	9.69	8.56	7.86	6.89
8000	49.9	28.1	20.5	16.5	14.1	12.3	11.0	9.84	8.69	7.98	7.00
8500	50.7	28.6	20.8	16.8	14.3	12.5	11.2	9.99	8.82	8.10	7.10
9000	51.4	29.0	21.1	17.0	14.5	12.7	11.3	10.1	8.95	8.22	7.20
9500	52.1	29.4	21.4	17.3	14.7	12.9	11.5	10.3	9.07	8.33	7.30
10 000	52.8	29.7	21.7	17.5	14.9	13.0	11.6	10.4	9.19	8.43	7.39

Таблица 2. Параметр t_{max} для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и выбранного уровня доверия γ при $P = 3$. (Для перехода к доверительному интервалу, полученному методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло, необходимо использовать величину $k_P t_{max}$, взяв значения k_P из табл. 6)

M	γ										
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
10	1.71	1.60	1.55	1.51	1.48	1.45	1.42	1.39	1.35	1.32	1.28
20	1.93	1.78	1.71	1.67	1.64	1.61	1.59	1.56	1.52	1.48	1.43
30	2.10	1.92	1.84	1.79	1.76	1.73	1.71	1.68	1.63	1.60	1.54
40	2.24	2.03	1.94	1.89	1.86	1.83	1.80	1.77	1.72	1.69	1.62
50	2.36	2.13	2.03	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.80	1.76	1.69
60	2.46	2.21	2.11	2.05	2.01	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.75
70	2.56	2.29	2.18	2.11	2.07	2.04	2.01	1.98	1.93	1.89	1.81
80	2.64	2.36	2.24	2.17	2.13	2.10	2.07	2.03	1.98	1.94	1.86
90	2.71	2.42	2.30	2.23	2.18	2.15	2.12	2.08	2.03	1.99	1.90
100	2.78	2.48	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.13	2.07	2.03	1.95
200	3.30	2.91	2.74	2.65	2.59	2.55	2.51	2.47	2.41	2.36	2.26
300	3.64	3.20	3.01	2.90	2.84	2.79	2.75	2.70	2.64	2.58	2.47
400	3.91	3.43	3.22	3.10	3.03	2.98	2.93	2.88	2.81	2.75	2.63
500	4.13	3.62	3.39	3.27	3.19	3.13	3.09	3.03	2.96	2.90	2.77
600	4.32	3.78	3.54	3.41	3.33	3.27	3.22	3.16	3.09	3.02	2.89
700	4.49	3.93	3.68	3.54	3.45	3.39	3.34	3.28	3.20	3.13	2.99
800	4.64	4.05	3.80	3.65	3.56	3.50	3.44	3.38	3.30	3.23	3.09
900	4.78	4.17	3.90	3.75	3.66	3.59	3.54	3.48	3.39	3.32	3.18
1000	4.91	4.28	4.00	3.85	3.75	3.68	3.63	3.57	3.48	3.40	3.25
1500	5.43	4.73	4.42	4.24	4.13	4.06	3.99	3.93	3.83	3.75	3.58
2000	5.83	5.07	4.74	4.55	4.43	4.35	4.28	4.20	4.10	4.01	3.84
2500	6.17	5.36	5.00	4.80	4.67	4.58	4.51	4.44	4.33	4.23	4.05
3000	6.45	5.60	5.23	5.02	4.88	4.79	4.71	4.64	4.52	4.42	4.23
3500	6.71	5.82	5.43	5.21	5.07	4.97	4.89	4.81	4.70	4.59	4.39
4000	6.93	6.02	5.61	5.38	5.24	5.14	5.05	4.97	4.85	4.74	4.53
4500	7.14	6.19	5.78	5.54	5.39	5.29	5.20	5.11	4.99	4.88	4.66
5000	7.33	6.36	5.93	5.68	5.53	5.42	5.34	5.25	5.12	5.01	4.78
5500	7.51	6.51	6.07	5.82	5.66	5.55	5.46	5.37	5.24	5.13	4.90
6000	7.67	6.65	6.20	5.94	5.78	5.67	5.58	5.48	5.35	5.24	5.00
6500	7.83	6.78	6.32	6.06	5.90	5.78	5.69	5.59	5.46	5.34	5.10
7000	7.97	6.91	6.44	6.17	6.01	5.89	5.79	5.69	5.56	5.44	5.19
7500	8.11	7.03	6.55	6.28	6.11	5.99	5.89	5.79	5.65	5.53	5.28
8000	8.24	7.14	6.65	6.38	6.21	6.08	5.99	5.88	5.74	5.62	5.37
8500	8.37	7.25	6.75	6.48	6.30	6.18	6.07	5.97	5.83	5.70	5.45
9000	8.49	7.35	6.85	6.57	6.39	6.26	6.16	6.06	5.91	5.78	5.52
9500	8.60	7.45	6.94	6.66	6.47	6.35	6.24	6.14	5.99	5.86	5.60
10 000	8.72	7.55	7.03	6.74	6.56	6.43	6.32	6.21	6.06	5.93	5.67

Таблица 3. Параметр t_{max} для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и выбранного уровня доверия γ при $P = 6$. (Для перехода к доверительному интервалу, полученному методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло, необходимо использовать величину $k_P t_{max}$, взяв значения k_P из табл. 6)

M	γ										
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
10	1.23	1.22	1.21	1.20	1.19	1.18	1.17	1.16	1.15	1.14	1.13
20	1.22	1.24	1.25	1.26	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.26	1.24
30	1.26	1.28	1.30	1.32	1.33	1.34	1.35	1.35	1.35	1.34	1.33
40	1.31	1.32	1.34	1.36	1.38	1.39	1.40	1.41	1.41	1.41	1.39
50	1.35	1.36	1.39	1.41	1.43	1.44	1.45	1.46	1.47	1.46	1.45
60	1.40	1.40	1.42	1.45	1.47	1.48	1.50	1.51	1.52	1.51	1.50
70	1.43	1.44	1.46	1.48	1.50	1.52	1.54	1.55	1.56	1.56	1.54
80	1.47	1.47	1.49	1.51	1.54	1.56	1.57	1.59	1.60	1.60	1.58
90	1.50	1.50	1.52	1.54	1.57	1.59	1.61	1.62	1.63	1.63	1.62
100	1.54	1.53	1.55	1.57	1.60	1.62	1.64	1.65	1.67	1.66	1.65
200	1.78	1.75	1.76	1.79	1.82	1.84	1.87	1.89	1.91	1.91	1.90
300	1.94	1.91	1.92	1.94	1.97	2.00	2.03	2.06	2.08	2.08	2.07
400	2.08	2.03	2.04	2.06	2.09	2.12	2.16	2.19	2.21	2.22	2.20
500	2.19	2.14	2.14	2.16	2.19	2.23	2.26	2.30	2.32	2.33	2.31
600	2.28	2.23	2.23	2.25	2.28	2.32	2.35	2.39	2.42	2.42	2.41
700	2.37	2.30	2.31	2.33	2.36	2.40	2.44	2.47	2.50	2.51	2.49
800	2.44	2.38	2.38	2.40	2.43	2.47	2.51	2.55	2.58	2.59	2.57
900	2.51	2.44	2.44	2.46	2.50	2.54	2.58	2.61	2.65	2.66	2.64
1000	2.58	2.50	2.50	2.52	2.56	2.60	2.64	2.68	2.71	2.72	2.70
1500	2.84	2.75	2.74	2.77	2.80	2.85	2.89	2.94	2.98	2.99	2.97
2000	3.04	2.95	2.94	2.96	3.00	3.04	3.09	3.14	3.18	3.19	3.18
2500	3.21	3.11	3.09	3.12	3.16	3.20	3.26	3.31	3.35	3.37	3.35
3000	3.36	3.25	3.23	3.25	3.29	3.34	3.40	3.45	3.50	3.52	3.50
3500	3.49	3.37	3.35	3.37	3.42	3.47	3.52	3.58	3.63	3.65	3.63
4000	3.60	3.48	3.46	3.48	3.53	3.58	3.64	3.70	3.75	3.77	3.75
4500	3.71	3.58	3.56	3.58	3.63	3.68	3.74	3.80	3.86	3.87	3.85
5000	3.81	3.67	3.65	3.67	3.72	3.77	3.84	3.90	3.95	3.97	3.95
5500	3.90	3.76	3.74	3.76	3.80	3.86	3.92	3.99	4.05	4.06	4.04
6000	3.98	3.84	3.82	3.84	3.88	3.94	4.01	4.07	4.13	4.15	4.13
6500	4.06	3.91	3.89	3.91	3.96	4.02	4.08	4.15	4.21	4.23	4.21
7000	4.13	3.99	3.96	3.98	4.03	4.09	4.16	4.23	4.29	4.31	4.29
7500	4.20	4.05	4.03	4.05	4.10	4.16	4.23	4.30	4.36	4.38	4.36
8000	4.27	4.12	4.09	4.11	4.16	4.22	4.29	4.36	4.43	4.45	4.43
8500	4.34	4.18	4.15	4.17	4.22	4.29	4.36	4.43	4.49	4.51	4.49
9000	4.40	4.24	4.21	4.23	4.28	4.35	4.42	4.49	4.56	4.58	4.55
9500	4.46	4.29	4.27	4.29	4.34	4.40	4.48	4.55	4.62	4.64	4.61
10 000	4.51	4.35	4.32	4.34	4.39	4.46	4.53	4.61	4.67	4.70	4.67

Таблица 4. Параметр t_{max} для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и выбранного уровня доверия γ при $P = 10$. (Для перехода к доверительному интервалу, полученному методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло, необходимо использовать величину $k_P t_{max}$, взяв значения k_P из табл. 6)

M	γ										
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
10	1.16	1.13	1.12	1.10	1.09	1.08	1.08	1.07	1.06	1.05	1.04
20	1.08	1.10	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14	1.13
30	1.05	1.10	1.13	1.15	1.16	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20	1.20
40	1.06	1.11	1.15	1.17	1.19	1.21	1.22	1.24	1.25	1.25	1.25
50	1.07	1.12	1.16	1.19	1.22	1.24	1.26	1.27	1.29	1.30	1.30
60	1.08	1.14	1.18	1.21	1.24	1.27	1.29	1.31	1.32	1.33	1.34
70	1.09	1.15	1.20	1.23	1.27	1.29	1.32	1.34	1.36	1.37	1.37
80	1.11	1.17	1.21	1.25	1.29	1.32	1.34	1.36	1.39	1.40	1.40
90	1.13	1.18	1.23	1.27	1.31	1.34	1.36	1.39	1.41	1.43	1.43
100	1.14	1.20	1.25	1.29	1.32	1.36	1.39	1.41	1.44	1.45	1.46
200	1.28	1.33	1.38	1.43	1.47	1.51	1.55	1.59	1.63	1.65	1.66
300	1.38	1.42	1.48	1.53	1.58	1.62	1.67	1.71	1.76	1.78	1.81
400	1.46	1.50	1.56	1.61	1.66	1.71	1.76	1.81	1.86	1.89	1.92
500	1.53	1.57	1.62	1.68	1.73	1.79	1.84	1.90	1.95	1.98	2.01
600	1.59	1.63	1.68	1.74	1.80	1.85	1.91	1.97	2.03	2.06	2.09
700	1.64	1.68	1.74	1.79	1.85	1.91	1.97	2.03	2.09	2.13	2.16
800	1.69	1.73	1.79	1.84	1.91	1.97	2.03	2.09	2.15	2.19	2.22
900	1.74	1.78	1.83	1.89	1.95	2.01	2.08	2.14	2.21	2.25	2.28
1000	1.78	1.82	1.87	1.93	2.00	2.06	2.12	2.19	2.26	2.30	2.34
1500	1.95	1.99	2.04	2.11	2.18	2.25	2.32	2.39	2.47	2.52	2.56
2000	2.08	2.12	2.18	2.24	2.32	2.39	2.47	2.55	2.64	2.69	2.73
2500	2.20	2.23	2.29	2.36	2.44	2.52	2.60	2.68	2.77	2.83	2.88
3000	2.29	2.33	2.39	2.46	2.54	2.62	2.71	2.80	2.89	2.95	3.00
3500	2.38	2.41	2.47	2.55	2.63	2.71	2.80	2.90	3.00	3.06	3.11
4000	2.46	2.49	2.55	2.63	2.71	2.80	2.89	2.99	3.09	3.15	3.21
4500	2.53	2.56	2.62	2.70	2.78	2.88	2.97	3.07	3.18	3.24	3.30
5000	2.59	2.62	2.69	2.77	2.85	2.95	3.04	3.15	3.26	3.32	3.39
5500	2.65	2.68	2.75	2.83	2.92	3.01	3.11	3.22	3.33	3.40	3.46
6000	2.71	2.74	2.80	2.89	2.98	3.07	3.18	3.28	3.40	3.47	3.54
6500	2.76	2.79	2.86	2.94	3.03	3.13	3.24	3.35	3.47	3.54	3.60
7000	2.81	2.84	2.91	2.99	3.09	3.19	3.29	3.41	3.53	3.60	3.67
7500	2.85	2.89	2.96	3.04	3.14	3.24	3.35	3.46	3.59	3.66	3.73
8000	2.90	2.93	3.00	3.09	3.18	3.29	3.40	3.51	3.64	3.72	3.79
8500	2.94	2.97	3.04	3.13	3.23	3.34	3.45	3.57	3.69	3.77	3.84
9000	2.98	3.01	3.09	3.17	3.27	3.38	3.49	3.61	3.75	3.82	3.90
9500	3.02	3.05	3.13	3.22	3.32	3.43	3.54	3.66	3.79	3.87	3.95
10000	3.06	3.09	3.16	3.26	3.36	3.47	3.58	3.71	3.84	3.92	4.00

Таблица 5. Параметр t_{max} для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и выбранного уровня доверия γ при $P = 50$. (Для перехода к доверительному интервалу, полученному методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло необходимо использовать величину $k_P t_{max}$, взяв значения k_P из табл. 6)

M	γ										
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
50	1.03	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.01	1.01
60	1.01	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03
70	1.00	1.01	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04
80	0.991	1.00	1.01	1.02	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.05	1.05
90	0.982	1.00	1.01	1.02	1.03	1.03	1.04	1.05	1.05	1.06	1.07
100	0.973	0.996	1.01	1.02	1.03	1.04	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08
200	0.913	0.967	1.00	1.03	1.05	1.07	1.08	1.10	1.12	1.14	1.16
300	0.881	0.953	0.998	1.03	1.06	1.09	1.11	1.14	1.17	1.19	1.22
400	0.864	0.947	1.00	1.04	1.08	1.11	1.14	1.17	1.21	1.24	1.27
500	0.856	0.945	1.00	1.05	1.09	1.13	1.16	1.20	1.24	1.27	1.32
600	0.852	0.946	1.01	1.06	1.11	1.15	1.18	1.22	1.27	1.30	1.35
700	0.852	0.948	1.02	1.07	1.12	1.16	1.20	1.25	1.30	1.33	1.39
800	0.854	0.952	1.02	1.08	1.13	1.18	1.22	1.27	1.32	1.36	1.42
900	0.857	0.956	1.03	1.09	1.14	1.19	1.24	1.29	1.34	1.38	1.44
1000	0.861	0.961	1.04	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.37	1.41	1.47
1500	0.886	0.989	1.07	1.14	1.20	1.26	1.32	1.38	1.45	1.50	1.58
2000	0.913	1.02	1.10	1.18	1.25	1.31	1.37	1.44	1.52	1.58	1.67
2500	0.939	1.04	1.13	1.21	1.28	1.35	1.42	1.49	1.58	1.65	1.74
3000	0.964	1.07	1.16	1.24	1.32	1.39	1.46	1.54	1.64	1.70	1.80
3500	0.987	1.09	1.18	1.27	1.35	1.42	1.50	1.58	1.68	1.75	1.86
4000	1.01	1.12	1.21	1.29	1.37	1.45	1.53	1.62	1.72	1.80	1.91
4500	1.03	1.14	1.23	1.32	1.40	1.48	1.57	1.66	1.76	1.84	1.95
5000	1.05	1.16	1.25	1.34	1.43	1.51	1.60	1.69	1.80	1.88	2.00
5500	1.06	1.17	1.27	1.36	1.45	1.53	1.62	1.72	1.83	1.92	2.04
6000	1.08	1.19	1.29	1.38	1.47	1.56	1.65	1.75	1.87	1.95	2.07
6500	1.10	1.21	1.31	1.40	1.49	1.58	1.67	1.77	1.90	1.98	2.11
7000	1.11	1.22	1.32	1.42	1.51	1.60	1.70	1.80	1.92	2.01	2.14
7500	1.13	1.24	1.34	1.44	1.53	1.62	1.72	1.82	1.95	2.04	2.18
8000	1.14	1.25	1.36	1.45	1.55	1.64	1.74	1.85	1.98	2.07	2.21
8500	1.15	1.27	1.37	1.47	1.56	1.66	1.76	1.87	2.00	2.09	2.24
9000	1.17	1.28	1.39	1.48	1.58	1.68	1.78	1.89	2.02	2.12	2.26
9500	1.18	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.91	2.05	2.14	2.29
10000	1.19	1.31	1.41	1.51	1.61	1.71	1.82	1.93	2.07	2.17	2.32

Таблица 6. Коэффициент пересчета $k_P(\gamma)$ для параметра t_{max} из табл. 2–5 в отношении проекции доверительной области, полученной методом χ_M^2 , к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло

P	γ											
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
3	6.08	3.96	3.10	2.61	2.28	2.04	1.85	1.68	1.52	1.43	1.31	1.31
6	11.8	6.92	5.08	4.08	3.43	2.96	2.59	2.28	1.98	1.81	1.59	1.59
10	17.6	9.81	7.00	5.49	4.53	3.85	3.31	2.86	2.43	2.18	1.87	1.87
50	48.9	25.4	17.3	13.1	10.4	8.56	7.14	5.95	4.83	4.19	3.39	3.39

поправок и убедившись, что модель адекватна в рамках метода, основанного на использовании статистики с законом распределения χ_M^2 (для чего достаточно вычислить минимальное значение соответствующей невязки), мы можем сделать предварительные выводы вероятностного характера о размере доверительного интервала, полученного на основе статистики с законом распределения χ_M^2 , не прибегая непосредственно к более трудоемкому определению размеров проекции доверительной области на ось параметра.

Подчеркнем еще раз, что параметр t_{max} является наиболее вероятным значением отношения проекции доверительной области, полученной методом χ_M^2 , к соответствующей проекции области, полученной методом χ_P^2 . Как уже отмечалось, в случае одномерной задачи величина проекции доверительной области, полученной методом χ_P^2 , равна величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок [1]. Поэтому можно сказать, что значение параметра t_{max} для одномерной задачи — это наиболее вероятное значение отношения проекции доверительной области, полученной методом χ_M^2 , к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок. Значения параметра t_{max} для одномерной задачи приведены в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что t_{max} значительно отличается от единицы, что говорит о занижении ошибки параметра, полученной в рамках метода дифференциальных поправок (в статистике нормального распределения).

В табл. 2–5 приведено значение t_{max} для многопараметрической задачи с $P = 3, 6, 10$ и 50 . В случае многомерной задачи величина проекции доверительной области, которая построена на основе статистики, распределенной по закону χ_P^2 , не равна величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло [1]. Поэтому для удобства сравнения

отношения проекции доверительной области, полученной методом χ_M^2 , к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок, в табл. 6 мы приводим соответствующие значения коэффициента $k_P(\gamma) = \sqrt{\frac{\Delta_P(\gamma)}{\Delta_1(\gamma)}}$

(такое выражение следует из (47) и аналогичного выражения для $\delta_P(\gamma)$), на который необходимо домножить значение t_{max} из табл. 2–5. Величина $k_P t_{max}$, как и в описанном выше одномерном случае, в случае многомерной задачи есть отношение проекции доверительной области, полученной на основе распределенной по закону χ_M^2 статистики, к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло.

В табл. 7 и на рис. 6 приведено значение произведения $k_P t_{max}$ для случая $P = 10$. Отметим, что характер числовых значений параметра $k_P t_{max}$ из табл. 7 очень близок к значениям t_{max} из табл. 1, в которой показано отношение интервала ошибок полученного методом доверительных областей в статистике χ_M^2 к интервалу ошибок, полученному в рамках метода дифференциальных поправок. Сравнение рис. 5 и рис. 6 хорошо иллюстрирует сказанное. Таким образом, и для случая многопараметрической задачи характер численного отношения интервала ошибок, полученного методом доверительных областей в статистике χ_M^2 , к интервалу ошибок, полученному в рамках метода дифференциальных поправок, остается прежним (точные же значения получаются по формулам (56) и (61), см. также табл. 2–6).

Следует помнить, что в случае одномерной задачи вероятность попадания истинного значения параметра в проекцию доверительной области, полученной на основе распределенной по закону χ_P^2 статистики, и вероятность попадания в доверительный интервал, полученный методом дифференци-

Таблица 7. Параметр $k_{Pt_{max}}$ для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и выбранного уровня доверия γ при $P = 10$ (см. также рис. 6)

M	γ										
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
10	20.4	11.1	7.82	6.07	4.96	4.17	3.56	3.05	2.57	2.29	1.95
20	18.9	10.8	7.81	6.18	5.13	4.37	3.77	3.26	2.77	2.49	2.12
30	18.5	10.8	7.90	6.31	5.27	4.52	3.93	3.41	2.92	2.62	2.24
40	18.5	10.9	8.01	6.44	5.41	4.65	4.06	3.54	3.03	2.73	2.34
50	18.7	11.0	8.13	6.56	5.53	4.77	4.17	3.65	3.13	2.83	2.43
60	18.9	11.2	8.26	6.67	5.63	4.87	4.27	3.74	3.22	2.91	2.50
70	19.2	11.3	8.38	6.78	5.74	4.97	4.36	3.83	3.30	2.98	2.57
80	19.5	11.5	8.50	6.88	5.83	5.06	4.44	3.90	3.37	3.05	2.63
90	19.8	11.6	8.61	6.98	5.92	5.14	4.52	3.97	3.44	3.11	2.68
100	20.0	11.8	8.72	7.08	6.00	5.22	4.59	4.04	3.50	3.17	2.73
200	22.4	13.0	9.63	7.83	6.66	5.82	5.14	4.55	3.96	3.60	3.11
300	24.2	14.0	10.3	8.39	7.14	6.25	5.53	4.90	4.28	3.89	3.38
400	25.6	14.7	10.9	8.84	7.53	6.59	5.84	5.19	4.53	4.13	3.58
500	26.8	15.4	11.4	9.22	7.86	6.88	6.10	5.42	4.74	4.32	3.76
600	27.9	16.0	11.8	9.56	8.15	7.13	6.33	5.63	4.93	4.49	3.91
700	28.9	16.5	12.2	9.86	8.40	7.36	6.53	5.81	5.09	4.64	4.04
800	29.7	17.0	12.5	10.1	8.63	7.56	6.71	5.98	5.24	4.78	4.16
900	30.5	17.4	12.8	10.4	8.85	7.75	6.88	6.13	5.37	4.90	4.27
1000	31.2	17.8	13.1	10.6	9.04	7.92	7.04	6.27	5.49	5.02	4.37
1500	34.2	19.5	14.3	11.6	9.86	8.64	7.68	6.85	6.01	5.49	4.79
2000	36.6	20.8	15.2	12.3	10.5	9.20	8.18	7.30	6.41	5.86	5.11
2500	38.6	21.9	16.0	13.0	11.0	9.67	8.60	7.68	6.74	6.17	5.38
3000	40.2	22.8	16.7	13.5	11.5	10.1	8.97	8.00	7.03	6.44	5.62
3500	41.7	23.7	17.3	14.0	11.9	10.4	9.29	8.29	7.29	6.67	5.82
4000	43.1	24.4	17.8	14.4	12.3	10.8	9.58	8.55	7.52	6.88	6.01
4500	44.3	25.1	18.3	14.8	12.6	11.1	9.84	8.79	7.73	7.08	6.18
5000	45.5	25.7	18.8	15.2	12.9	11.3	10.1	9.00	7.92	7.25	6.33
5500	46.5	26.3	19.2	15.5	13.2	11.6	10.3	9.21	8.10	7.42	6.48
6000	47.5	26.9	19.6	15.8	13.5	11.8	10.5	9.40	8.27	7.57	6.61
6500	48.4	27.4	20.0	16.1	13.7	12.0	10.7	9.57	8.43	7.72	6.74
7000	49.3	27.9	20.3	16.4	14.0	12.3	10.9	9.74	8.58	7.86	6.86
7500	50.1	28.3	20.7	16.7	14.2	12.5	11.1	9.90	8.72	7.99	6.98
8000	50.9	28.8	21.0	17.0	14.4	12.6	11.3	10.1	8.85	8.11	7.09
8500	51.7	29.2	21.3	17.2	14.6	12.8	11.4	10.2	8.98	8.23	7.19
9000	52.4	29.6	21.6	17.4	14.8	13.0	11.6	10.3	9.10	8.34	7.29
9500	53.1	30.0	21.9	17.7	15.0	13.2	11.7	10.5	9.22	8.45	7.38
10 000	53.7	30.3	22.1	17.9	15.2	13.3	11.9	10.6	9.34	8.55	7.48

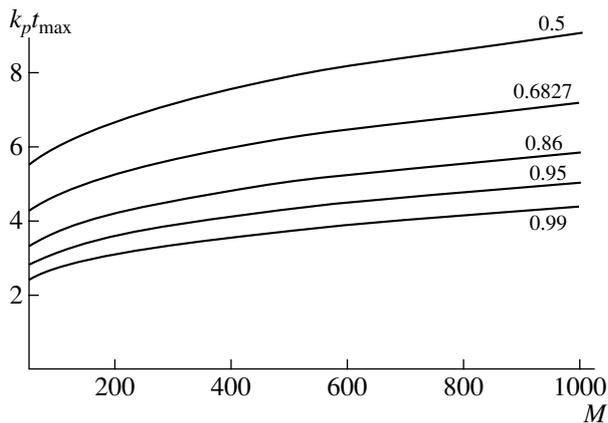


Рис. 6. Случай многопараметрической задачи. Параметр $k_P t_{\max}$ для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и уровня доверия γ при $P = 10$. Уровень доверия указан рядом с соответствующей кривой. Обращает на себя внимание то, что вероятность попадания истинного значения параметра в проекцию доверительной области, полученной в рамках метода χ^2_M , выше заданного уровня доверия $\gamma = 0.6827$: она составляет ~ 0.80 . В то же время вероятность попадания истинного решения в интервал ошибки, полученный в рамках метода дифференциальных поправок, равна заданному уровню доверия $\gamma = 0.6827$. Подробнее см. текст.

альных поправок, одинакова. Для случая же многомерной задачи вероятность попадания истинного значения параметра в проекцию доверительной области χ^2_P выше в сравнении с доверительным интервалом, полученным методом дифференциальных поправок.

Отметим, что вышеприведенные результаты получены для линейной модели. При этом использование для построения доверительных интервалов статистики с законом распределения χ^2_P основано на том, что минимальное значение невязки распределено по закону χ^2_{M-P} . Однако такое утверждение справедливо лишь для модели с линейной зависимостью от параметров. В случае, когда эта зависимость нелинейная, такое утверждение может быть справедливо лишь в асимптотическом смысле, когда число точек $M \rightarrow \infty$ [5, 8]. Поэтому для нелинейной модели полученные результаты также могут применяться, но лишь приближенно, в указанном асимптотическом смысле.

5.2. Уровень значимости, соответствующий статистике приведенного хи-квадрат

Часто об адекватности модели наблюдательным данным судят по близости к единице минимального значения невязки $\hat{R} \equiv R/(M - P)$, распределенной по закону приведенного $\hat{\chi}^2_{M-P}$ (по которому

распределена случайная величина $\frac{\xi}{M - P}$, если $\xi \sim \chi^2_{M-P}$), где P — число параметров, по которым проводится минимизация (или по близости значения невязки R_{\min} , распределенной по закону χ^2_{M-P} , к значению $M - P$). При этом упускается количественная характеристика адекватности модели, а именно, уровень значимости $\alpha_0 = 1 - \gamma$, на котором модель может быть отвергнута (напомним, что уровень значимости α_0 — это количество ошибок 1-го рода, которое мы совершаем, отвергая модель). На рис. 7 представлено графическое изображение результатов решения уравнения

$$\frac{\Delta_{M-P}(1 - \alpha_0)}{M - P} = q$$

относительно уровня значимости α_0 в зависимости от разности $M - P$ (где M — число наблюдаемых точек, P — число искоемых параметров задачи, а $\Delta_{M-P}(\gamma)$ — функция зависимости квантиля от уровня доверия $\gamma = 1 - \alpha_0$) при заданном квантиле q для закона распределения $\hat{\chi}^2_{M-P}$. Значение квантиля q было принято равным 0.5, 0.6, 0.7, 1.0, 1.1, 1.5 и 2.0. Такую зависимость можно записать в явном виде:

$$\alpha_0(M - P) = 1 - \chi^2_{M-P}(q(M - P)).$$

Из рис. 7 видно, что уровень значимости α_0 достаточно быстро (для $M \gtrsim 50$) начинает стремиться к своему асимптотическому пределу. Так, в случае значения квантиля $q = 1$, асимптотический предел уровня значимости α_0 равен $\sim 50\%$, т.е. в данном случае, отвергая модель, мы в $\sim 50\%$ случаев совершаем ошибку 1-го рода (отвергаем правильную модель). Следовательно, в этом случае, отвергая модель, мы в каждом втором случае неправы, поэтому у нас нет серьезных оснований отвергнуть модель, и таким образом модель может быть принята.

В то же время, для значения квантиля $q = 1.5$ асимптотический предел уровня значимости α_0 уже близок к $\sim 0\%$. В данном случае, отвергая модель, мы в $\sim 0\%$ случаев совершаем ошибку 1-го рода (отвергаем правильную модель). Следовательно, в этом случае, отвергая модель, мы почти всегда правы, поэтому у нас нет оснований для принятия модели, так что модель должна быть отвергнута.

Таким образом, можно заключить, что если при решении обратной параметрической задачи минимальное приведенное значение хи-квадрат $\gtrsim 1.5$, то используемая модель заведомо неадекватна наблюдательным данным. Получаемые в этом случае значения искоемых параметров и их доверительных интервалов (ошибок) являются “плохими”. Исследователю необходимо позаботиться о построении более совершенной модели.

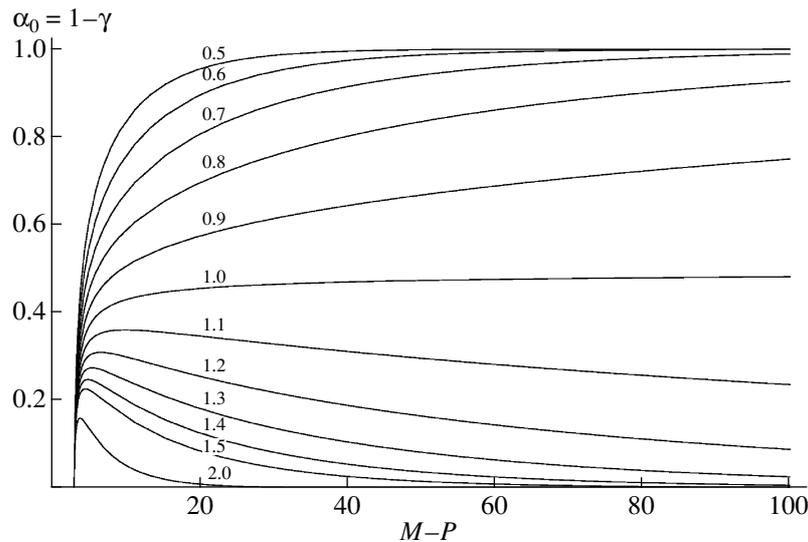


Рис. 7. Результат решения уравнения $\frac{\Delta_{M-P}(1 - \alpha_0)}{M - P} = q$ относительно уровня значимости α_0 при $P = 3$ в зависимости от числа наблюдаемых точек M при заданном квантиле q статистики приведенного $\hat{\chi}_{M-P}^2$. Значение квантиля q указано рядом с соответствующей кривой. Видно, что когда минимальное значение приведенного хи-квадрат равно единице, соответствующий уровень значимости α_0 стремится к 0.5.

6. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НАБЛЮДАЕМОЙ КРИВОЙ БЛЕСКА ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ YZ Cas

В данной работе проведен анализ нормированной кривой блеска затменной двойной системы YZ Cas, полученной в красном фильтре ($\lambda = 6700 \text{ \AA}$), из работы Крона [6]. Наблюдаемая кривая блеска $\xi_1 \dots \xi_{42}$ включала в себя $M = 42$ точки. За оценки дисперсий каждого измерения наблюдаемой кривой блеска было принято значение в шкале звездных величин $(\sigma_m^{obs})^2 = 1.77 \times 10^{-6}$ [8], или соответственно в нашей шкале (шкале интенсивностей) с учетом того, что $L^{full} = 1$, $(\sigma_m^{obs})^2 = 1.5015 \times 10^{-6}$. Центральное значение каждой точки кривой блеска также получено усреднением $N_m = 12$ точек для $m = 1 \dots 42$ работ [3, 6].

В дополнение к результатам интерпретации наблюдаемой кривой блеска YZ Cas, проведенной в работе [1], были получены коэффициенты потемнения к краю в линейном законе потемнения к краю. Таким образом, интерпретация наблюдаемой кривой блеска проведена по шести параметрам $r_1, r_2, i, x_1, x_2, I_0^{(1)}/I_0^{(2)}$. Минимизация невязки R между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска проводилась методом градиентного спуска. Центральные значения искомых параметров, а также их доверительные интервалы представлены в табл. 8.

Метод расчета центральных значений r_1, r_2, i , а также их интервалов ошибок в методе дифференциальных поправок и методе доверительных областей подробно изложен в работе [1], и здесь он не приводится. Отметим, что в данной работе сделан акцент именно на вычислении центральных значений и доверительных интервалов коэффициентов потемнения к краю, а также проверки надежности полученных доверительных интервалов. Ошибки коэффициентов потемнения в рамках метода дифференциальных поправок получены согласно выражению (41).

Поскольку для исследования с помощью статистик, распределенных по законам χ_P^2 и χ_M^2 , требуется знание дисперсии единицы веса ε_0 , которая в случае реальной наблюдаемой кривой блеска точно неизвестна, то была исследована модельная двойная система, в которой значения фаз $\theta_1 \dots \theta_{42}$ совпадали с фазами наблюдаемой кривой блеска YZ Cas. Истинные значения параметров двойной системы полагались равными центральным значениям, полученным при интерпретации наблюдаемой кривой блеска в модели с линейным законом потемнения к краю [1], т.е. $\bar{r}_1 = 0.14408$, $\bar{r}_2 = 0.07556$, $\bar{i} = 88.27^\circ$, $x_1 = 0.2998$, $x_2 = 0.4071$. Дисперсия единицы веса ε_0^2 полагалась равной ее среднеквадратичной оценке v_0^2 , полученной при такой интерпретации наблюдаемой кривой блеска, т.е. $\varepsilon_0 = 0.003422904$. Весовые коэффициенты w_m и количества измерений в каждой фазе $N_1 \dots N_{42}$ мы положили равными 12. Далее в работе данная модельная система именуется как “наблюдаемая”.

Таблица 8. Результаты интерпретации наблюдаемой кривой блеска двойной системы YZ Cas в рамках линейного закона потемнения к краю

Метод	r_1	r_2	i , град.	x_1	x_2
Дифференциальных поправок (σ_{est})	0.14408 ± 0.00023	0.07556 ± 0.00038	88.27 ± 0.090	0.2998 ± 0.02115	0.4071 ± 0.1172
Доверительных областей, $F_{M,N-M}(\gamma = 68.2\%)$	0.1442 ± 0.00217	0.07554 ± 0.00114	88.37 ± 0.57	0.2917 ± 0.1199	0.1959 ± 0.7666

Таблица 9. Результаты интерпретации модельной “наблюдаемой” кривой блеска двойной системы YZ Cas в рамках линейного закона потемнения к краю. (Значение среднеквадратичной ошибки единицы веса принято равным $\varepsilon_0 = 0.003422904$)

Параметр	Метод дифференциальных поправок	Метод доверительных областей, χ^2_P	Метод доверительных областей, χ^2_M	Метод доверительных областей, распределение Фишера F
r_1	0.14422 ± 0.00023	0.1439 ± 0.000641	0.1439 ± 0.0007767	0.1445 ± 0.00070
r_2	0.07557 ± 0.00038	0.07538 ± 0.00103	0.07539 ± 0.001247	0.07564 ± 0.0011
i , град	88.28 ± 0.091	88.42 ± 0.27	88.43 ± 0.33	88.19 ± 0.30
x_1	0.3052 ± 0.01942	0.3013 ± 0.05321	0.3002 ± 0.06488	0.3007 ± 0.0589
x_2	0.3759 ± 0.1184	0.3403 ± 0.3280	0.3213 ± 0.4015	0.3316 ± 0.3637

Для модельной “наблюдаемой” системы методом дифференциальных поправок (с помощью формулы (31')), методом доверительных областей на основе статистик, распределенных по законам χ^2_M , χ^2_P и Фишера ($F_{M,N-M}$ в случае с x_1, x_2 и $F_{M-3,N-M}$ в случае с r_1, r_2, i), получены интервалы ошибок параметров как одномерные проекции доверительной области на уровне доверия $\gamma = 0.6827$. Отметим, что интервалы ошибок параметров, полученные на основе модельной “наблюдаемой” кривой блеска отличаются от параметров, полученных по наблюдаемой кривой блеска из работы [6] вследствие разной реализации самой кривой блеска (несмотря на то, что в модельной кривой дисперсия единицы веса ε_0 была положена равной ее среднеквадратичной оценке для наблюдаемой $\varepsilon_0 = 0.003422904$).

Результаты интерпретации модельной “наблюдаемой” кривой блеска YZ Cas содержатся в табл. 9. Отметим, что интервалы ошибок, полученные в рамках метода доверительных областей, зависят от реализации модельной “наблюдаемой” кривой блеска. Результаты, приведенные в табл. 9, получены по одной и той же реализации модельной “наблюдаемой” кривой блеска YZ Cas.

На рис. 8 и 9 представлены невязки, полученные в рамках метода χ^2_M при вычислении коэффициентов потемнения к краю x_1 и x_2 (невязки минимальны по всем остальным параметрам r_1, r_2, i ,

$I_0^{(1)}/I_0^{(2)}$) на основе данной модельной “наблюдаемой” кривой блеска. Из рисунков видно, что модель может быть отвергнута при весьма большом уровне значимости $\alpha_0 = 0.3173$ (соответствующее минимальное значение приведенного хи-квадрат равно ~ 1.1 ; рис. 7). Поэтому модель с большим основанием можно считать адекватной наблюдениям, а также можно определить доверительную область для параметров на уровне доверия $\gamma = 0.6827$, которая является непустой. Однако область удовлетворяющих модели значений коэффициента потемнения к краю меньшей звезды x_2 простирается до отрицательных значений (значение x_2 заключено в интервале от -0.0802 до 0.7228), что противоречит физической области значений $x_2 > 0$. Таким образом, данная точность наблюдаемой кривой блеска ($\nu_0 = 0.003423$) не позволяет надежно вычислить значение коэффициента линейного потемнения к краю для звезды меньшего радиуса из анализа вторичного минимума кривой блеска (полное затмение) двойной системы YZ Cas. Коэффициент потемнения к краю большей звезды (кольцевое затмение) определяется надежно: $x_1 = 0.3002 \pm 0.06488$.

Как следует из табл. 9, ошибки величин x_1 и x_2 , найденные методом дифференциальных поправок (в рамках статистики нормального распределения), значительно меньше, чем ошибки, найденные на основе статистики с законом распределения χ^2_M

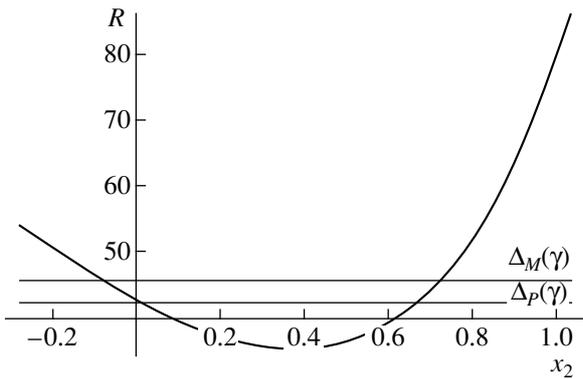


Рис. 8. Двойная система YZ Cas. Модельная “наблюдаемая” кривая блеска. Невязка R в рамках статистики с законом распределения χ^2_M ($M = 42$) для коэффициента потемнения к краю x_2 второго компонента (звезда с меньшим радиусом), минимизированная по всем остальным параметрам задачи ($r_1, r_2, i, x_1, I_0^1/I_0^2$). Среднеквадратичная оценка дисперсии единицы веса кривой блеска соответствует $v_0 = 0.003423$. Прямые линии — квантили для законов распределения χ^2_M и χ^2_P для уровня доверия $\gamma = 0.6827$ (при использовании статистики с законом распределения χ^2_P величина $\Delta_P(\gamma)$ отсчитывается от минимума невязки).

методом доверительных областей (в данном случае указаны проекции доверительной области на оси параметров x_1, x_2). Выбирая значения ошибок, найденных методом дифференциальных поправок, мы должны иметь в виду, что это всего лишь “внутренние” ошибки, которые могут быть значительно меньше “внешних” ошибок параметров, найденных из анализа другой реализации кривой блеска (например, полученной в другую эпоху).

Как показало дальнейшее численное моделирование, для надежного определения коэффициента потемнения к краю звезды меньшего радиуса в

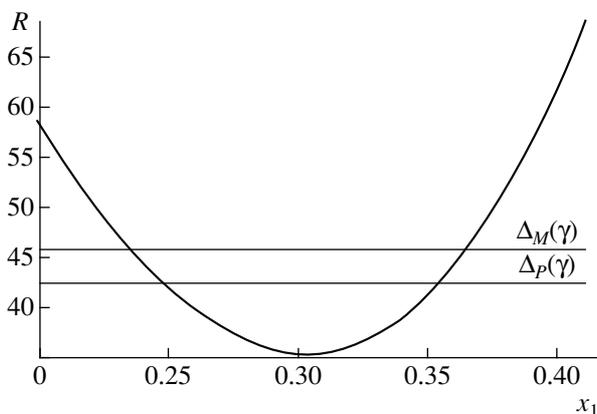


Рис. 9. То же, что на рис. 8, для первого компонента (звезда с большим радиусом) и соответственно минимизацией по параметрам $r_1, r_2, i, x_2, I_0^1/I_0^2$.

двойной системе YZ Cas требуется повысить точность наблюдаемой кривой блеска примерно в десять раз. Для этого выполнено возмущение кривой блеска с “истинными” значениями параметров, за которые приняты центральные значения из табл. 8: $\bar{r}_1 = 0.14408, \bar{r}_2 = 0.07556, \bar{i} = 88.27^\circ, x_1 = 0.2998, x_2 = 0.4071$. При возмущении корень квадратичный из дисперсии единицы веса полагался равным $\varepsilon_0 = \sigma_m^{obs} / \sqrt{w_m} = 0.0003422904$ (где значение веса каждой точки $w_m = N_m = 12$). Далее проведена интерпретация полученной возмущенной кривой блеска.

На рис. 10 представлено поведение невязки, полученной в рамках метода χ^2_M при вычислении коэффициента потемнения к краю x_2 . Из рисунка видно, что на выбранном уровне доверия $\gamma = 0.6827$ модель адекватна наблюдательным данным, а значение $x_2 = 0.4205 \pm 0.0399$. Таким образом, для надежного определения коэффициентов потемнения к краю в классических двойных системах с радиусами меньших компонент, близкими к параметрам двойной системы YZ Cas, значение корня квадратичного из дисперсии единицы веса должна быть близко к $\varepsilon_0 \simeq 10^{-4}$. Такие высокоточные кривые блеска могут быть получены с бортов орбитальных фотометрических станций COROT и KEPLER.

Из анализа главного минимума (кольцевое затмение) значение коэффициента потемнения к краю большей звезды x_1 при $\varepsilon_0 = 0.0034$ находится надежно: в рамках статистики с законом распределения χ^2_M значение $x_1 = 0.3002 \pm 0.06488$, где указана проекция шестимерной доверительной области на ось параметра x_1 .

6.1. Использование квадратичного закона потемнения диска звезды к краю

Дополнительно проведена интерпретация наблюдаемой кривой блеска в предположении квад-

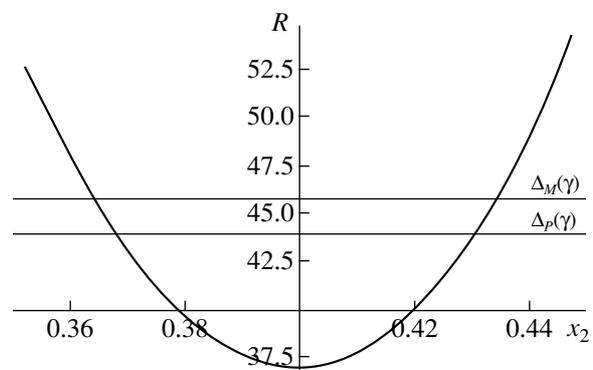


Рис. 10. То же, что на рис. 8, для возмущенной кривой блеска. Подробнее см. текст.

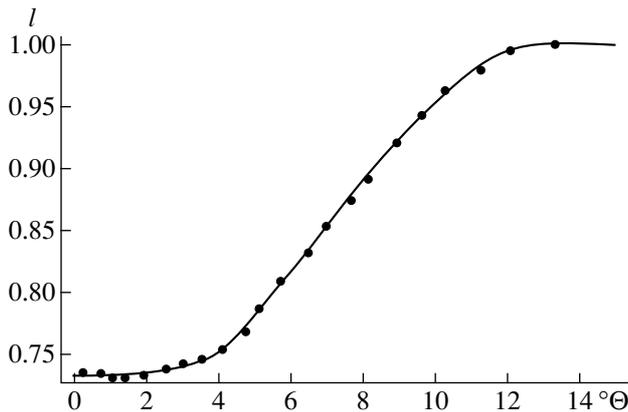


Рис. 11. Наблюдаемая кривая блеска YZ Cas (кольцевое затмение) и оптимальные теоретические кривые блеска, полученные в предположении линейного и квадратичного законов потемнения к краю (кривые совпадают с точностью до третьего знака после запятой). Точки — наблюдательные данные из работы [6].

ратичного закона потемнения диска звезды от центра к краю (см. формулу (3)). Интерпретация проведена в двух вариантах.

В первом случае неизвестными параметрами полагались r_1 , r_2 , i , x_1 , x_2 , y_1 , y_2 . Во втором случае коэффициенты x_1 , x_2 фиксировались. В качестве значений x_1 , x_2 использовались значения из работы ван-Хамме [10], а закон потемнения меньшего компонента к краю полагался линейным. Интерпретация сводилась к поиску параметров r_1 , r_2 , i , y_1 .

Результаты интерпретации представлены в табл. 10. Ошибки получены методом дифференциальных поправок (при уровне доверия 0.6827). При интерпретации наблюдаемой кривой блеска по полной совокупности параметров значения x_1 , x_2 , y_1 , y_2 выходят за пределы физически обоснованной области значений и являются артефактом, хотя оптимальная кривая блеска при данных значениях хорошо вписывается в наблюдаемую кривую блеска и предельно близка к кривой блеска, полученной при линейном законе потемнения к краю.

Во втором случае значение $y_1 = -0.0134 \pm \pm 0.0100$. При этом оптимальная кривая блеска почти идентична (с точностью до третьего знака после запятой) оптимальной кривой блеска, полученной в рамках линейного закона потемнения к краю (рис. 11).

Таким образом, при точности наблюдений $\varepsilon_0 = 0.0034$ для интерпретации наблюдаемой кривой блеска вполне достаточно ограничиться линейным законом потемнения диска звезды к краю. Поправки за нелинейность данного закона пренебрежимо малы. Нижеприведенный тест надежности интервалов ошибок коэффициентов потемнения к краю выполнен для линейного закона.

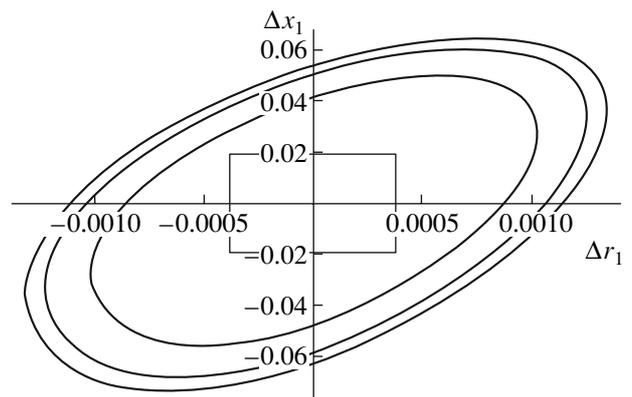


Рис. 12. Проекция шестимерной доверительной области параметров r_1 , r_2 , i , x_1 , x_2 , $I_0^{(1)}/I_0^{(2)}$ на плоскость параметров r_1 , x_1 , полученная при интерпретации модельной “наблюдаемой” кривой блеска YZ Cas в рамках статистики, распределенной по закону χ^2_P (малый “эллипс”), статистики с законом распределения Фишера $F_{M,N-M}$ (средний “эллипс”) и χ^2_M (большой “эллипс”). Прямоугольник в центре — доверительная область, полученная в рамках метода дифференциальных поправок или метода Монте-Карло. Показаны отклонения параметров от центральных значений. Принят корень квадратичный из дисперсии единицы веса кривой блеска $\varepsilon_0 = 0.003423$. Доверительные интервалы, полученные методами дифференциальных поправок и Монте-Карло (использующими статистику нормального распределения) накрывают точные значения параметров с заданной вероятностью $\gamma = 0.68$, в то время как соответствующая доверительная область (прямоугольник в центре) накрывает точное решение с вероятностью меньше γ , составляющей 0.49. Доверительные области D , полученные на основе статистик с законами распределения χ^2_P , $F_{M,N-M}$, χ^2_M , накрывают точное решение с заданной вероятностью $\gamma = 0.68$, в то время как соответствующие доверительные интервалы (проекция доверительной области на оси параметров r_1 и x_1) накрывают точные значения параметров с вероятностью, большей γ , а именно: соответственно 0.9904 и 0.9722 — для статистики, распределенной по закону χ^2_P , 0.8456 и 0.8234 — для статистики, распределенной по закону χ^2_M , 0.8368, 0.8112 — для статистики с законом распределения $F_{M,N-M}$.

6.2. Проверка надежности определения значений коэффициентов потемнения к краю и их ошибок

Проверена надежность интервалов ошибок параметров x_1 , x_2 , вычисленных в рамках каждого метода. Для этого выполнено 10 000 возмущений модельной “наблюдаемой” кривой блеска (при $\varepsilon_0 = 0.003422904$), вычисленной с “истинными” значениями параметров, за которые приняты центральные значения из табл. 8: $\bar{r}_1 = 0.14408$, $\bar{r}_2 = 0.07556$, $\bar{i} = 88.27^\circ$, $x_1 = 0.2998$, $x_2 = 0.4071$. Проведен подсчет числа попаданий “истинных” значений в соответствующие доверительные области и их проекции (табл. 11).

Таблица 10. Результаты интерпретации наблюдаемой кривой блеска двойной системы YZ Cas в рамках квадратичного закона потемнения к краю ($\varepsilon_0 = 0.003422904$)

r_1	r_2	i , град.	x_1	x_2	y_1
0.144324 ± 0.000308	0.753775 ± 0.000220	88.22 ± 0.099	0.331	0.383	-0.0134 ± 0.0100

Таблица 11. Значения полуинтервалов ошибок коэффициентов потемнения к краю компонентов двойной YZ Cas, полученные при интерпретации модельной “наблюдаемой” кривой блеска в рамках линейного закона потемнения к краю и количество попаданий $N_{\Delta x_1}$ и $N_{\Delta x_2}$ в данные интервалы “истинных” значений. (N — число совместных попаданий точного решения во все интервалы ошибок. Принято $\varepsilon_0 = 0.003422904$. В скобках указано число попаданий точного решения в доверительную область D)

Метод	$N_{\Delta x_1}$	$x_1 \pm \Delta x_1$	$N_{\Delta x_2}$	$x_2 \pm \Delta x_2$	N
Дифференциальных поправок	6892	0.3052 ± 0.01942	6957	0.3759 ± 0.1184	4916
Монте-Карло	6899	0.3009 ± 0.02011	6884	0.4934 ± 0.1056	4871
Доверительных областей, χ^2_P	9722	0.3013 ± 0.05321	9842	0.3403 ± 0.3280	9634 (6898)
Доверительных областей, χ^2_M	8234	0.3002 ± 0.06488	8413	0.3213 ± 0.4015	8166 (6858)
Доверительных областей, $F_{M,N-M}$	8112	0.3007 ± 0.0589	8306	0.3316 ± 0.3637	8060 (6827)

Доверительные интервалы для параметров x_1 , x_2 вычислены как проекции на оси координат x_1 , x_2 шестимерных доверительных областей, полученных на основе статистик с законами распределения χ^2_P , χ^2_M и Фишера ($F_{M,N-M}$ в случае с x_1 , x_2 и $F_{M-3,N-M}$ в случае с r_1 , r_2 , i) путем решения соответствующих неравенств относительно r_1 , r_2 , i , x_1 , x_2 , $I_0^{(1)}/I_0^{(2)}$.

Из табл. 11 видно, что число попаданий точного решения в индивидуальные интервалы ошибок в случае методов дифференциальных поправок и Монте-Карло соответствует заявленной вероятности $\gamma = 68.2\%$, однако число совместных попаданий меньше заявленной вероятности γ ($N \simeq 4900$, что на $\sim 30\%$ меньше значения $N \simeq 6800$, соответствующего заявленной вероятности $\gamma = 0.6827$). Доверительные интервалы параметров x_1 и x_2 в данном случае являются проекцией шестимерной доверительной области параметров r_1 , r_2 , i , x_1 , x_2 , $I_0^{(1)}/I_0^{(2)}$ на оси параметров x_1 и x_2 . Попадание в доверительную область D полностью отвечает заданному уровню доверия $\gamma = 68.2\%$. Поскольку двумерной проекцией на плоскости параметров x_1 и x_2 является вытянутый эллипс, то число попаданий в проекцию эллипса на оси параметров x_1 и x_2 заметно превышает заданный уровень доверия $\gamma = 68.2\%$. Аналогично обстоит дело и в случае использования статистики с законом распределения χ^2_P . Поэтому ошибки параметров, полученные методом доверительных областей, соответствуют уровню доверия $>\gamma$ и с точки зрения надежности являются наиболее предпочтительными. На рис. 12

приведено сравнение проекций доверительных областей для параметров r_1 и x_1 , полученных разными методами. Отметим, что в нашей предыдущей статье [1] малыми прямоугольниками, как и на рис. 12 данной статьи, изображены доверительные области, полученные методом дифференциальных поправок.

Несмотря на то, что наиболее вероятная величина доверительного интервала, полученного на основе статистики с законом распределения χ^2_M , превосходит величину доверительного интервала, полученного на основе статистики с законом распределения χ^2_P , доверительный интервал, полученный на основе статистики с законом распределения χ^2_P , в $\sim 99\%$ случаев (для одномерной проекции области) содержит истинное значение параметра, а доверительный интервал, полученный на основе статистики с законом распределения χ^2_M , в $\sim 85\%$ случаев (для одномерной проекции области) содержит истинное значение параметра. Это соответствует тому, что вероятность попадания в доверительные интервалы, полученные на основе статистики с законом распределения χ^2_M , определяется в большей мере не наиболее вероятным значением, а именно характером распределения этих интервалов, которые сами являются случайной величиной.

6.3. “Внутренние” и “внешние” ошибки

Наши результаты наглядно демонстрируют и объясняют качественную разницу величин ошибок

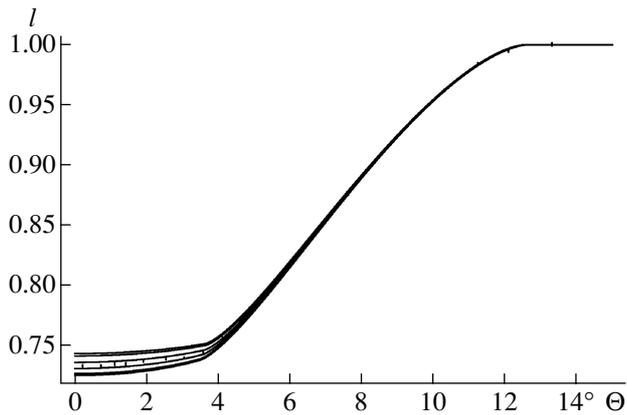


Рис. 13. Главный минимум (кольцевое затмение) модельной “наблюдаемой” кривой блеска YZ Cas, а также теоретические кривые блеска, полученные при максимальных и минимальных значениях параметров r_1 , r_2 , x_1 , x_2 , которые определены в рамках метода доверительных областей на основе статистики, распределенной по закону χ_M^2 (внешние кривые), χ_P^2 (средние кривые) и метода дифференциальных поправок (внутренние кривые). Принято, что корень квадратичный из дисперсии единицы веса кривой блеска $v_0 = 0.003423$.

параметров, полученных в рамках метода дифференциальных поправок и метода доверительных областей.

Используя верхние и нижние значения параметров r_1 , r_2 , x_1 , x_2 из табл. 9 при фиксированном значении наклонении орбиты двойной $i = 88.28^\circ$ (см. также рис. 12), мы построили соответствующие теоретические кривые блеска (рис. 13). Данные теоретические кривые блеска образовали “коридоры ошибок”, в которых находятся наблюдаемые значения данной реализации кривой блеска. Из рисунка видно, что в случае метода дифференциальных поправок “коридор ошибок” достаточно узок, и некоторые “наблюдаемые” точки кривой блеска данной реализации плотно прилегают к стенкам коридора ошибок. При следующей реализации “наблюдаемой” кривой блеска некоторые значения кривой блеска могут выйти за пределы указанного “коридора ошибок”.

Аналогичный “коридор ошибок” для параметров r_1 , r_2 , x_1 , x_2 , полученный в рамках метода доверительных областей на основе статистики с законом распределения χ_M^2 (рис. 13), значительно шире и заведомо позволяет учесть статистическую непредсказуемость реализации кривой блеска.

Подчеркнем еще раз, что выбирая значения ошибок, найденных методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло, мы должны иметь в виду, что это всего лишь “внутренние” ошибки, которые могут не перекрываться с “внутренними” же ошибками параметров, найденными

из анализа другой реализации кривой блеска (полученной в другую эпоху). Вероятность совместного попадания истинных параметров во все интервалы ошибок в методе дифференциальных поправок существенно (в ~ 1.3 – 1.4 раза) меньше, чем в каждый интервал ошибок в отдельности.

Основанием называть “внутренними” ошибки параметров, найденные методами дифференциальных поправок и Монте-Карло, является то, что при вычислении этих ошибок используется “внутреннее” статистическое распределение найденных центральных значений параметров. При использовании метода доверительных областей для вычисления ошибок параметров используется “внешнее” статистическое распределение наблюдаемых значений кривой блеска, что позволяет считать ошибки, найденные методом доверительных областей, “внешними” ошибками.

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенные в работе вычисления показали, что надежное определение обоих коэффициентов потемнения к краю на основе кривой блеска для двойных затменных систем типа YZ Cas возможно лишь при точности индивидуального измерения $\varepsilon_0 \simeq 10^{-4}$ (в шкале интенсивности с учетом $L_{full} = 1$). При точности $\varepsilon_0 \simeq 10^{-3}$ надежно определить коэффициент потемнения к краю меньшей звезды не удастся. Отметим, что важна не только абсолютная точность индивидуального измерения блеска двойной системы, но и глубина затмения. Так, в двойной системе YZ Cas глубина вторичного минимума (полное затмение) составляет $\sim 10\%$ от полного блеска системы, что оказывается вполне достаточным для определения коэффициента потемнения к краю при точности кривой блеска $\varepsilon_0 \simeq 10^{-4}$. В случае если глубина затмения меньше, то точность индивидуального измерения требуется выше. При интерпретации главного минимума кривой блеска YZ Cas (кольцевое затмение) удастся надежно определить линейный коэффициент потемнения к краю $x_1 = 0.2917 \pm 0.1199$ при наблюдаемой точности кривой блеска $\varepsilon_0 \simeq 0.0034$.

Отметим, что кривые блеска, полученные в рамках линейного и квадратичного законов потемнения, к краю идентичны, что говорит о малости нелинейных эффектов потемнения диска звезды к краю и позволяет в случае точности кривой блеска $\sim 10^{-3}$ при интерпретации кривой блеска ограничиться линейным законом потемнения.

Из табл. 11 видно, что индивидуальные интервалы ошибок параметров x_1 и x_2 , полученные методом Монте-Карло и методом дифференциальных поправок, содержат истинное значение в

~68% случаев, тогда как одновременное попадание в каждый из интервалов ошибок происходит лишь в ~49% случаев. Это говорит о ненадежности методов дифференциальных поправок и Монте-Карло для определения одновременного попадания искомых значений в интервалы ошибки.

Напомним, что доверительные интервалы параметров x_1 и x_2 в рамках статистики с законом распределения χ_M^2 являются проекцией шестимерной области параметров $r_1, r_2, i, x_1, x_2, I_0^{(1)}/I_0^{(2)}$ на оси параметров x_1 и x_2 . Попадание в доверительную область D полностью отвечает заданному уровню доверия $\gamma = 68.2\%$ (табл. 11). Поскольку двумерной проекцией на плоскости параметров x_1 и x_2 является вытянутый “эллипс”, то число попаданий в проекции “эллипса” на оси параметров x_1 и x_2 заметно превышает заданный уровень доверия $\gamma = 68.2\%$. Аналогично обстоит дело и в случае использования статистики с законом распределения χ_P^2 . Поэтому ошибки параметров, полученные методом доверительных областей, соответствуют уровню доверия $>\gamma$ и с точки зрения надежности являются наиболее предпочтительными.

Например, из табл. 1 видно, что в случае однопараметрической модели при выбранном уровне доверия $\gamma = 0.90$ в диапазоне числа наблюдаемых точек $M = 10 - 10000$ параметр t_{\max} меняется от 1.89 до 9.19, т.е. именно в данное число раз происходит занижение ошибки искомого параметра в рамках методов Монте-Карло и дифференциальных поправок.

Одним из важных результатов данной работы является аналитическое соотношение между наиболее вероятным значением величины доверительного интервала, полученного на основе статистики с законом распределения χ_M^2 , и ошибкой, полученной в рамках метода дифференциальных поправок для однопараметрической и многопараметрической задачи (см. формулы (56) и (61)). Показано, что с ростом уровня доверия γ параметр t_{\max} (и $k_P t_{\max}$) уменьшается, а с ростом числа M наблюдаемых точек этот параметр сравнительно слабо растет (рис. 3–6).

Еще раз отметим, что формулы (56) и (61) (при линейной зависимости функции, описывающей модель, от искомых параметров) позволяют на основе метода Монте-Карло или дифференциальных поправок путем домножения на коэффициент t_{\max} или коэффициент $k_P t_{\max}$ (см. также табл. 1–7), получить тот размер интервала ошибки искомого параметра в рамках метода доверительных областей, полученных на основе статистики с законом распределения χ_M^2 , который является наиболее вероятным среди случаев, в которых модель адекватна. Получив размер интервала ошибки методом

Монте-Карло или дифференциальных поправок и убедившись, что модель адекватна в методе, основанном на использовании статистики с законом распределения χ_M^2 (для чего достаточно вычислить минимальное значение соответствующей невязки), мы можем сделать предварительные выводы вероятностного характера о размере доверительного интервала, который будет получен на основе статистики с законом распределения χ_M^2 , не прибегая непосредственно к более трудоемкому определению размеров проекции области на ось параметра.

Коротко подытоживая результаты, можно сказать, что методы дифференциальных поправок и Монте-Карло позволяют оценить лишь “внутренние” ошибки параметров. В то же время метод доверительных областей позволяет оценить “внешние” ошибки искомых параметров (см. в этой связи работу Поппера [11]).

Сделаем еще одно важное замечание. Величины ошибок параметров, полученные в рамках методов дифференциальных поправок, Монте-Карло и метода χ_P^2 , не зависят от объема выборки (числа точек M на кривой блеска) и являются устойчивыми в том смысле, что для разных реализаций случайного процесса (кривой блеска) величины ошибок параметров при прочих равных условиях различаются сравнительно слабо (соответствующее различие значительно меньше 100%). Такие “хорошие” особенности методов дифференциальных поправок, Монте-Карло и метода χ_P^2 связаны с тем, что в этих методах априори предполагается, что используемая модель идеально верна (полностью пренебрегается возможностью наличия ошибок 2-го рода).

В случае методов χ_M^2 и Фишера $F_{M,N-M}$ не делается априорного предположения о том, что модель идеально верна, и в процессе построения доверительной области также осуществляется проверка адекватности модели используемым наблюдательным данным. Поэтому в методах χ_M^2 и $F_{M,N-M}$ значения полученных ошибок параметров зависят от объема выборки M и сильно меняются от одной реализации случайного процесса к другой (для некоторых реализаций величины ошибок даже вырождаются в пустые множества). Впрочем, зависимость значений ошибок параметров в методах χ_M^2 и $F_{M,N-M}$ от объема выборки M весьма слаба. Например, как следует из табл. 1, при изменении числа точек M на кривой блеска в 2 раза от 100 до 200 наиболее вероятная величина относительной ошибки, полученной в рамках метода χ_M^2 , меняется для $\gamma = 0.7$ на ~17%, а при изменении объема выборки на три порядка (от $M = 10$ до $M = 10000$) наиболее вероятная величина соответствующей относительной ошибки, при прочих равных условиях,

меняется всего лишь в ~ 5 раз. С другой стороны, в случае, когда модель отвергается на достаточно высоком уровне значимости (соответствующее приведенное значение хи-квадрат близко к единице), в методах χ^2_M и $F_{M,N-M}$, как и в методе χ^2_P , удается получать надежные оценки ошибок параметров.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что определение ошибок параметров методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло приводит к весьма заниженным значениям ошибок. Указанные методы позволяют получить лишь “внутренние” ошибки значений параметров для данной реализации наблюдаемой кривой блеска. При этом значения параметров для разных реализаций кривой блеска могут даже не иметь общих значений в интервалах ошибок, полученных методами дифференциальных поправок и Монте-Карло.

Сравнительно малые значения ошибок параметров, полученных методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло, связаны с использованием жесткого априорного предположения о том, что модель идеально верна, а также с применением простейшей статистики нормального распределения; при этом решение обратной задачи ищется с использованием другой статистики — χ^2_M , которая лишь порождена нормальным распределением. Гораздо более естественным представляется поиск ошибок параметров в рамках той же статистики, которая применяется для нахождения центральных значений параметров — например, статистики с законом распределения χ^2_M . При этом желательно не использовать искусственное предположение о том, что рассматриваемая модель идеально верна, т.е. не исключать наличия ошибок 2-го рода. Этому требованию удовлетворяет статистика с законом распределения χ^2_M [12]. Поэтому корректный расчет ошибок параметров требует использования метода доверительных областей с использованием статистики, распределенной по закону χ^2_M , который позволяет судить как о “внешних” ошибках значений параметров модели, так и об адекватности самой модели.

Поскольку расчет размеров проекции доверительной области на ось параметра — достаточно трудоемкая задача, то мы заостряем внимание на предложенном в данной работе новом методе оценки ошибок параметров (табл. 1–7, рис. 4–6). А именно, в случае линейной зависимости функции, описывающей модель, от искоемых параметров, формулы (56) и (61) (см. также табл. 1–7) позволяют на основе метода Монте-Карло или диффе-

ренциальных поправок путем домножения на коэффициент t_{\max} или $k_P t_{\max}$ сделать предварительные выводы вероятностного характера о размере доверительного интервала, который будет получен на основе статистики с законом распределения χ^2_M , не прибегая непосредственно к более трудоемкому определению размеров проекции доверительной области на ось параметра. Если доверительную область понимать в асимптотическом смысле, то предложенный нами новый метод оценки ошибок параметров может применяться и для нелинейных параметрических задач.

Авторы благодарят профессора А.Г. Яголу за ценные замечания и дискуссии.

Выражаем благодарность за финансовую поддержку работы грантом Российского фонда фундаментальных исследований 08-02-01220, грантом Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-1685.2008.2, грантом Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых-кандидатов наук и их научных руководителей (МК-2059.2007.2) и грантом аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” РНП-2.1.1.5940.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* **85**, 121 (2008).
2. В. С. Carlson, e-Print arXiv:math/9409227v1 [math.CA] (1994).
3. А. В. Гончарский, А. М. Черепашук, А. Г. Ягола, *Некорректные задачи астрофизики* (М.: Наука, 1985), с. 53.
4. Б. М. ЩигOLEV, *Математическая обработка наблюдений* (М.: Физматгиз, 1962).
5. С. Уилкс, *Математическая статистика* (М.: Наука, 1967).
6. G. E. Kron, *Astrophys. J.* **96**, 173 (1942).
7. T. M. Brown, D. Charbonneau, R. L. Gilliland, *et al.*, *Astrophys. J.* **552**, 699 (2001).
8. А. В. Гончарский, С. Ю. Романов, А. М. Черепашук, *Конечнопараметрические обратные задачи астрофизики* (М.: МГУ, 1991).
9. J. Southworth, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **386**, 1644 (2008).
10. W. Van Hamme, *Astron. J.* **106**, 2096 (1993).
11. D. M. Popper, *Astron. J.* **89**, 132 (1984).
12. А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* **70**, 1157 (1993).