

МГУ имени М.В. Ломоносова

Государственный астрономический институт имени П.К.Штернберга

№ госрегистрации  
АААА-А20-120012990074-1

УТВЕРЖДАЮ  
Директор/декан

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
«\_\_» \_\_\_\_\_ Г.

УДК

521.182 Численное интегрирование орбит

521.3 Определение и улучшение орбит

521.16 Теория приливного взаимодействия и других диссипативных сил

521.835 Взаимные явления покрытий и затмений спутников

521 Теоретическая астрономия. Небесная механика. Фундаментальная астрономия. Теория динамической и позиционной астрономии

521.14 Теория фигур, поля тяготения и вращение протяженных тел

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Небесная механика и динамика космических объектов  
по теме:

Небесная механика и динамика небесных тел из наблюдений  
(промежуточный)

Зам. директора/декана  
по научной работе

\_\_\_\_\_  
«\_\_» \_\_\_\_\_ Г.

Руководитель темы  
Емельянов Н.В.

\_\_\_\_\_  
«\_\_» \_\_\_\_\_ Г.

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы:

заведующий отделом, кандидат физико-математических наук, доктор физико-математических наук, профессор по специальности, доцент/с.н.с. по специальности

\_\_\_\_\_ (Емельянов Н.В.)

Исполнители темы:

ведущий специалист  
старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук

\_\_\_\_\_ (Варфоломеев М.И.)

\_\_\_\_\_ (Гасанов С.А.)

научный сотрудник, кандидат физико-математических наук

\_\_\_\_\_ (Ершков С.В.)

ведущий специалист

\_\_\_\_\_ (Киреева Е.Н.)

ведущий научный сотрудник, доктор физико-математических наук, профессор по кафедре

\_\_\_\_\_ (Кондратьев Б.П.)

ведущий специалист

\_\_\_\_\_ (Корноухов В.С.)

ведущий научный сотрудник, доктор физико-математических наук, кандидат технических наук, доцент/с.н.с. по специальности  
ведущий специалист, кандидат физико-математических наук

\_\_\_\_\_ (Кудрявцев С.М.)

\_\_\_\_\_ (Чепурова В.М.)

доцент, кандидат физико-математических наук, доцент/с.н.с. по специальности, доцент по кафедре

\_\_\_\_\_ (Ширмин Г.И.)

## РЕФЕРАТ

Ключевые слова:

задача трех тел, устойчивость движения, орбиты, звездная динамика, теория движения, небесная механика, наблюдения, звездные скопления, эфемериды

Ключевые слова по-английски:

movement theory, planets, orbit, celestial mechanics, observations, three-body problem, stellar dynamics, satellites, ephemeris, star clusters

Работа велась по нескольким задачам, тема которых, небесная механика, объединяет исследования любых небесных тел, от галактик до спутников планет. Широта тематики обусловлена местом коллектива исследователей в Московском университете и связью с образовательным процессом.

Задача: Динамика спутников планет и астероидов.

Изучение динамики спутников астероидов необходимо для решения двух важных задач. Первая - определение происхождения и эволюции Солнечной системы. Вторая - подготовка всех необходимых данных для космических миссий и освоения Солнечной системы. По теме в 2020 году решены две задачи. Определены орбиты всех 62 спутников астероидов, для которых имеется достаточное для этого количество астрометрических наблюдений. До этого другими авторами определялись орбиты только 38 спутников. Поскольку среднее движение и большая полуось определялись независимо, были найдены массы систем со спутниками. Впервые в мире создан сервер эфемерид спутников астероидов, доступный через интернет любому пользователю. Сервер предоставляет множество различных позиционных данных о спутниках, включая предвычисление обстоятельств взаимных покрытий и затмений спутника и главной компоненты. В настоящее время в сервер включены 62 спутника, для которых определены орбиты. Имеется простая возможность включения других спутников по мере появления новых астрометрических наблюдений и открытия новых спутников. В рамках темы производилось обновление орбитальных данных далеких спутников планет. В службу эфемерид добавлялись новые варианты теорий движения планет и спутников.

Задача: Теория потенциала и ее практические применения в небесной механике.

Развит вириальный метод изучения динамики слоисто-неоднородных эллиптических галактик. В отличие от принятого на Западе метода уравнений звездной гидродинамики и численного моделирования, наш подход основан на тензорной теореме вириала второго порядка. Достоинства метода в том, что а) теорема вириала записывается у нас не только для всей галактики в целом, но и для каждой слоисто-неоднородной подсистемы внутри галактики; б) позволяет строить модели трехосных гигантских эллиптических галактик. Модели позволяют максимально точно учитывать сложное внутреннее строение каждой галактики и используют большой пласт новой наблюдательной информации о внутренней структуре и вращении эллиптических галактик. Для каждой из 22 E-галактик был вычислен показатель анизотропии дисперсии скоростей  $\beta$ . Найдено, что этот параметр ограничен интервалом  $0,0 \leq \beta \leq 0,224$ . Впервые была обнаружена корреляция между

величиной анизотропии скоростей  $\beta$  и сплюснутостью внешних областей E-галактик. Заметное влияние на динамику звездной системы оказывает учет фактора изменения по телу галактики отношения масса-светимость. Результаты сравниваются с результатами других исследователей. Для небольших галактик (быстрых ротаторов) наши значения анизотропии  $\beta$  хорошо согласуются с полученными в проекте 3D ATLAS. Однако для гигантских E-галактик наши вириальные модели обеспечивают лучшее согласие с наблюдениями, чем осесимметричные JAM модели. Для изучения динамики колец у малых небесных тел разработан принципиально новый подход, опирающийся на функцию взаимной потенциальной энергии двух эллиптических гравитирующих колец Гаусса. Кольца имеют один общий фокус, их плоскости в общем случае они не компланарны, а линии апсид также имеют наклон друг к другу. Выражение для взаимной энергии колец получено в конечном виде с точностью до членов второго порядка малости. На базе функции взаимной энергии развит новый аналитический метод изучения долгопериодических и вековых возмущений эллиптических колец Гаусса. Подход имеет определенные преимущества в сравнении с обычным методом функции Лагранжа. Для проверки метода рассмотрена двупланетная задача Солнце-Юпитер-Сатурн, где наши результаты дополняют и уточняют исследования других авторов. Решена задача о нахождении коэффициентов зональных гармоник внешних потенциалов быстро вращающихся тел иррегулярной формы. Разработан оригинальный подход для нахождения азимутально усредненного потенциала вращающегося слоисто-неоднородного трехосного эллипсоида. Рассмотрены два класса моделей: i) эллипсоид из дискретных слоев конечной толщины, включая двухкомпонентную модель «ядро-оболочка»; ii) слоисто-неоднородный эллипсоид, состоящий из множества бесконечно тонких эквиденситных слоев с произвольными профилями эллиптичности от центра до периферии. Получены уравнения, позволяющие по единой схеме находить коэффициенты зональных гармоник любого порядка. Рассмотрены специальные случаи расслоения эллипсоидов на гомеоиды и фокалоиды. Доказано, что при софокусном расслоении коэффициенты зональных гармоник однородных и конгруэнтных неоднородных эллипсоидов совпадают. Новый метод применяется для построения квазиравновесной модели карликовой планеты Хаумеа.

Задача: Устойчивость орбитальной спутниковой динамики в рамках эллиптической ограниченной задачи 4-тел.

Применен новый подход к исследованию устойчивости движения малой массы или спутника в Солнечной системе в окрестности фиксированной плоскости  $\{x, y, 0\}$  вблизи планеты M3 в рамках задачи BiER4BP, для иерархической конфигурации основных тел M3  $\ll$  M2  $\ll$  M1. Речь идёт о поиске приближенных решений при моделировании орбит спутников планет в Солнечной системе: рассматриваются квази-эллиптические орбиты при длительном обращении. Для координаты z показан квази-периодический характер осцилляций в окрестности фиксированной плоскости  $\{x, y, 0\}$ . Сделан вывод что орбита спутника малой массы в поле тяготения трёх массивных тел неустойчива.

Задача: Три новые модели слоисто-неоднородных эллиптических галактик. Для решения некоторых задач небесной механики и астрофизики необходимо создать новые модели эллиптической галактики (ЭГ), хорошо согласующиеся с современными представлениями о строении ЭГ. Согласно этим

моделям ЭГ представляет собой неоднородное трехосное эллипсоидальное тело (либо неоднородный сфероид), состоящее из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ). При этом ЭГ как эллипсоидальное тело обладает гомотетическим (эллипсоидальным) распределением плотности, а как сфероид - со сферическим распределением плотности. В качестве закона распределения (профиля) БМ берется так называемый «астрофизический закон», а для ТМ - аналоги известных профилей. Такие галактики назовем слоисто-неоднородной. На основе этих моделей определяются ключевые динамические параметры галактики и рассматривается задача о пространственном движении пассивно-гравитирующего тела (ПГТ) в гравитационном поле слоисто-неоднородной ЭГ. В качестве ПГТ берется звезда или центр масс шарового скопления.

Задача: Разложение гелиоцентрических элементов орбиты Земли в компактные гармонические ряды.

Выполнено разложение в гармонические ряды гелиоцентрической дальности, модуля скорости Земли и некоторых элементов орбиты геоцентра на интервале времени 30000 лет: 13000 г. до н.э. - 17000 г. н.э. В качестве исходных данных использовалась численная эфемерида планет DE-431. Аргументами членов рядов являются различные линейные комбинации вековой части средних долгот больших планет и аргументов Делонэ. Минимальная амплитуда членов разложения выбрана равной 1 км для дальности и большой полуоси орбиты Земли, 0.2 мм/с для модуля скорости геоцентра и примерно  $1.5 \times 10^{-8}$  рад для угловых элементов орбиты планеты. Ряды являются компактными, число членов каждого ряда составляет около 200. Целью работы является составление каталога основных периодических возмущений в параметрах орбиты геоцентра и возможная идентификация источников наблюдаемых периодических явлений в изменении климата Земли. (Известно, что многие из этих явлений являются следствием изменения освещенности нашей планеты в результате периодических вариаций расстояния от Земли до Солнца и ряда других параметров ее орбиты.) Для элементов орбиты Земли аналитические разложения в гармонические ряды получены впервые.

## ВВЕДЕНИЕ

Работа велась по нескольким задачам, тема которых, небесная механика, объединяет исследования любых небесных тел, от галактик до спутников планет. Широта тематики обусловлена местом коллектива исследователей в Московском университете и связью с образовательным процессом.

Задача: Динамика спутников планет и астероидов. Изучение динамики спутников больших планет и астероидов крайне необходимо для подготовки миссий к другим небесным телам с целью расширения среды обитания человека. Это нужно также для определения происхождения и эволюции Солнечной системы. Важным этапом в этом деле является определение и уточнение орбит спутников на основе наблюдений. Только для 62 спутников астероидов имеется достаточное количество астрометрических наблюдений. Постоянно появляются новые наблюдения далеких спутников больших планет. Постоянно стоит задача уточнения их орбит. Для исследователей спутников астероидов крайне не хватало сервера эфемерид. Необходимо средство, свободно доступное через интернет. По всем этим задачам велась работа в рамках темы. Все, что нужно, разрабатывалось и развивалось. В итоге новым результатов оказались орбитальные параметры 62 спутников астероидов и сервер эфемерид. Результаты решения этих задач описаны в двух статьях, опубликованных в ведущих международных журналах. Книга по динамике естественных спутников планет, изданная в прошлом году на русском языке, переведена на английский язык и опубликована издательством Elsevier.

Задача: Теория потенциала и ее практические применения в небесной механике. За последние 10-15 лет появились новые методы наблюдений эллиптических галактик (большие наземные телескопы и спектрометры интегрального поля) и было открыто много новой и ценной информации об этих звездных системах. В частности, были измерены профили сжатия изофот на столь далекой периферии гигантских E-галактик, что размеры изучаемых областей в галактиках увеличились в десять раз. Обилие новой информации о строении и кинематике E- галактик вновь привлекло внимание к построению динамических моделей этих звездных систем. До недавнего времени кольца в Солнечной системе были известны только у четырех планет - газовых гигантов (Сатурн, Юпитер, Уран и Нептун). Однако недавно, в 2014 году, при наблюдении покрытия звезды астероидом (это событие отслеживали 7 крупных телескопов) неожиданно были открыты кольца у астероида Chariklo. Огромный интерес астрономов вызвало и открытие в 2017 году массивного кольца вокруг уникального объекта пояса Койпера - карликовой планеты Haumea. Актуальность изучения колец вокруг малых небесных тел привлекла внимание исследователей к сложным проблемам динамики и устойчивости колец. В связи с этим подчеркнем, что до сих пор не решена важная для многих Приложений задача о взаимной потенциальной энергии колец. Для изучения происхождения и вековой эволюции кольца Хаумеа и астероида Chariklo необходимо получить систему дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию оскулирующих колец в гравитационном поле центральных тел. Важной особенностью данной задачи является то, что уравнения эволюции оскулирующих орбит лучше всего находить с помощью функции потенциальной энергии двух колец, а также взаимной энергии колец и центрального тела. Для этого необходимо развивать

новый метод, опирающийся на взаимную потенциальную энергию эллиптических колец Гаусса. Родственной является задача нахождения внешних азимутально усредненных потенциалов неоднородных небесных тел, обладающих быстрым осевым вращением. С практической точки зрения, удобно находить эти усредненные потенциалы в виде рядов по зональным гармоникам. Для нахождения в этих рядах соответствующих коэффициентов зональных гармоник для эллипсоидов с различной концентрацией вещества требуется развить новый подход. Решение данной задачи представляет большой интерес для развития небесной механики и астрофизики.

Задача: Устойчивость орбитальной спутниковой динамики в рамках эллиптической ограниченной задачи 4-тел. По данной задаче разработан новый алгоритм для решения задачи движения точечного спутника (малой массы) в рамках би-эллиптической ограниченной задачи 4-тел: две вторичных планеты  $M_3$ ,  $M_2$  вращаются вокруг общего центра масс по эллиптическим траекториям, близким к круговым, при этом их центр масс вращается на значительном удалении от центрального светила  $M_1$  также по эллиптической орбите (рассматривается иерархическая конфигурация  $M_3 \ll M_2 \ll M_1$ ); точечный спутник малой массы вращается по эллиптической "захваченной" орбите вокруг (и на незначительном удалении от) общего центра масс с планетой наименьшей массы,  $M_3$ . Ключевыми особенностями подхода является этапы предложенного полу-аналитического алгоритма решения: 1) координата  $x$  определяется как аппроксимированное численное решение нелинейного ОДУ 4-ого порядка при определенных упрощающих предположениях (включая  $M_3 \ll M_2 \ll M_1$ ); 2) координата  $y$  выражена аналитически через координату  $x$  и истинную аномалию  $f$ ; 3) координата  $z$  определяется как решение соответствующего уравнения Риккати, при вычисленных значениях координат  $\{x, y\}$ . Идет речь о поиске решений при моделировании орбит движения малой массы в рамках би-эллиптической ограниченной задачи 4-тел, BiER4BP: рассматриваются квази-эллиптические орбиты на временной шкале длительного периода обращения (с шагом истинной аномалии до  $f = 100$ , или 16 полных оборотов) барицентра планет  $\{M_3, M_2\}$  вокруг светила  $M_1$ . Данная задача относится к разделу небесной механики, изучающему устойчивость орбитальной спутниковой динамики в рамках эллиптической ограниченной задачи 4-тел (BiER4BP, BiElliptic Restricted 4 Bodies Problem). Необычным приемом является именно авторский метод решения уравнений (для координаты  $z$  показан квази-периодический характер осцилляций в окрестности фиксированной плоскости  $\{x, y, 0\}$ ).

Задача: Три новые модели слоисто-неоднородных эллиптических галактик. Для решения некоторых задач небесной механики и астрофизики необходимо создать новые модели эллиптической галактики (ЭГ), хорошо согласующиеся с современными представлениями о строении ЭГ. Согласно этим моделям ЭГ представляет собой неоднородное трехосное эллипсоидальное тело (либо неоднородный сфероид), состоящее из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ). При этом ЭГ как эллипсоидальное тело обладает гомотетическим (эллипсоидальным) распределением плотности, а как сфероид - со сферическим распределением плотности. В качестве закона распределения (профиля) БМ берется так называемый «астрофизический закон», а для ТМ - аналоги известных профилей. Такие галактики назовем слоисто-неоднородной. На основе этих моделей определяются ключевые динами-

ческие параметры галактики и рассматривается задача о пространственном движении пассивно-гравитирующего тела (ПГТ) в гравитационном поле слоисто-неоднородной ЭГ. В качестве ПГТ берется звезда или центр масс шарового скопления.

Задача: Разложение гелиоцентрических элементов орбиты Земли в компактные гармонические ряды. Периодические изменения в климате Земли уже давно связывают с имеющимися вариациями расстояния планеты от Солнца и, как следствие, с изменениями в ее освещенности. Вариации дальности, в свою очередь, есть результат периодических изменений гелиоцентрических элементов орбиты геоцентра. Для понимания природы наблюдаемых периодических вариаций климата Земли и возможности его прогнозирования важно определить возможные источники этих вариаций. Для этого можно выделить главные частоты (или периоды) в изменении гелиоцентрической дальности Земли и элементах ее орбиты и соотнести их с основными вариациями тех или иных климатических явлений. Данные частоты будут представлять собой комбинации частот средних долгот больших планет, Луны и аргументов Делонэ, которые достаточно точно известны. Разложения гелиоцентрического расстояния Земли в ряды Пуассона имеются в аналитической теории движения планет VSOP87-B, -D. Однако, нам неизвестны сколь-либо точные разложения кеплеровых элементов гелиоцентрической орбиты геоцентра и/или несингулярных комбинаций этих элементов. Все современные аналитические теории и разложения элементов орбит больших планет (таких как VSOP87, VSOP2000, VSOP2013, DEA431) содержат соответствующие ряды для барицентра системы Земля-Луна. Этих данных недостаточно для решения поставленной в нашем исследовании задачи, т.к. возмущения от Луны вносят существенный вклад в вариации гелиоцентрических элементов орбиты Земли. Поэтому настоящая работа посвящена получению аналитических разложений элементов орбиты и ряда других параметров, относящихся к геоцентру.



## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Задача: Динамика спутников планет и астероидов.

Методы и подходы, использованные для определения орбит спутников астероидов, основаны на опыте и предыдущих работах руководителя проекта. Ранее Емельяновым Н.В. был разработан сервер эфемерид всех спутников больших планет MULTI-SAT. Созданный в процессе выполнения проекта сервер эфемерид спутников астероидов построен по аналогии в сервером MULTI-SAT. Опишем здесь несколько подробнее использованные методы и подходы. Определение орбит спутников астероидов делалось на основе наблюдений, взятых из базы данных всех астрометрических наблюдений спутников астероидов <http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/obspos/babine.htm> \ \ <http://nsdb.imcce.fr/obspos/babine.htm>. \ \ Здесь собраны только опубликованные наблюдения. Ссылки на публикации можно найти в базе данных.

Определение параметров делалось методом дифференциального уточнения, основанного на методе наименьших квадратов. Для большинства наблюдений даны оценки ошибок измерений. Эти данные использовались для назначения весов условным уравнениям. Для каждой орбиты уточнялись семь параметров: независимо определялись среднее движение и большая полуось, поскольку масса систем астероидов со спутниками были неизвестны. Таким образом, для каждой системы из наблюдения нами получались не только параметры орбиты, но также масса. В качестве модели движения спутника бралась неподвижная кеплерова орбита. Для рассмотренных систем астероидов со спутниками такая модель соответствует точности используемых наблюдений. Системы с двумя и более спутниками были исключены из рассмотрения. Процесс дифференциального уточнения параметров обычно сходился за 5-10 итераций. Начальное приближение параметров бралось приближенно. Сначала определялась орбита со случайно выбранными несколькими параметрами. Затем в процесс уточнения поочередно добавлялись другие параметры. Для некоторых спутников начальное приближение для периода обращения и большой полуоси были взяты из других работ.

Выполнено сравнение параметров орбит 38 орбит спутников астероидов с результатами других авторов. Это в основном орбиты спутников транснептуновых объектов и две орбиты спутников астероидов из главного пояса. Для всех таких орбит наши результаты отличались от результатов других авторов на величины, не превышающие оценок ошибок параметров. Найденные параметры всех орбит опубликованы в статье в журнале MNRAS. При определении параметров образовывалась ковариационная матрица параметров. Эта матрица использовалась в дальнейшем для оценки точности эфемерид. Ковариационные матрицы для всех орбит также опубликованы в приложении к статье в журнале MNRAS.

Сразу после определения параметров орбиты вычислительная программа делала оценку точности эфемерид. Делалось это путем вариации ошибок параметров с использованием ковариационной матрицы параметров. Случайные ошибки параметров образовывались датчиком случайных чисел компилятора, с применением матрицы Холецкого, вычисленной по ковариационной матрице. Ошибки эфемерид для каждого момента находились как среднеквадратичная величина отклонений вариаций эфемерид от опорной эфемериды, определенной по наблюдениям. Моменты эфемерид выбира-

лись от момента первого наблюдения до конца 2024 года. Число вариаций (испытаний) было всегда 1000. Ошибка эфемериды находилась по отклонениям от опорной эфемериды отдельно вдоль и поперек видимого относительного движения спутника. Единицей измерений взята величина видимого размера большой полуоси орбиты спутника. После вычислений оценок точности эфемерид составлялась таблица, в которой для каждого момента эфемерид даны найденные значения точности. Далее строился график зависимости от времени ошибки эфемериды вдоль видимого движения, выраженной в долях видимой большой полуоси орбиты. И таблица и график доступны пользователю в сервере эфемерид для выбранного там спутника. Кроме того, была составлена таблица максимальных значений ошибки эфемериды в течение заданного года для каждого из 62 спутников. Такая таблица для годов 2022, 2023, 2024 прилагается к нашей статье, опубликованной в журнале Icarus.

Теперь рассмотрим, как был разработан сервер эфемерид. Входными данными являются параметры орбит спутников и таблицы оценок точности. Доступ к эфемеридам организован на странице интернета. Была разработана специальная вычислительная программа, которая запускается пользователем после заполнения всех полей страницы и выбора из нескольких меню. Сначала из списка выбирается нужный спутник. Предоставляются следующие варианты эфемерид. 1. Вычисление координат спутника и самого астероида на ряд моментов времени с заданным постоянным шагом. 2. Вычисление координат спутника и самого астероида на ряд моментов времени с шагом в одни сутки только в периоды, когда орбита почти перпендикулярна к картинной плоскости, то есть в периоды, когда возможны взаимные покрытия и затмения. 3. Вычисление координат спутника и самого астероида на ряд моментов в периоды времени, когда предсказаны взаимные покрытия и затмения. В этом режиме можно указать, что выдавать все нужно только для моментов начала, максимума и конца явления. Таким способом определяются моменты, когда нужно наблюдать явления. Вычисленные моменты снабжаются оценками точности. 4. Вычисление моментов максимальной элонгации спутника для заданного интервала годов.

В нескольких меню на странице заказа эфемерид уточняются некоторые детали выдачи эфемерид. В частности, можно выделить периоды видимости астероида на выбранной обсерватории. Обсерватория идентифицируется ее номером в нумерации Международного Астрономического Союза. Выдача данных снабжается параметрами орбит и условиями, при которых параметры были определены (интервал времени наблюдений, количество наблюдений и др.). На страницах сервера имеются ссылки на страницы объяснений и инструкций, необходимых для работы пользователя с сервером. Выдача эфемерид делается на отдельной странице, содержимое которой может быть скопировано в любой текстовый файл.

Что касается методов и подходов изготовления такого сервера, то использовался опыт создания аналогичного сервера эфемерид спутников больших планет MULTI-SAT. Сервер доступен через интернет на сайте ГАИШ МГУ по адресу `\\ http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/multisat/nssAsthe.htm \\` и на сайте французского института небесной механики (IMCCE) по адресу `\\ http://nsdb.imcce.fr/multisat/nssAsthe.htm`.

Методика создания сервера эфемерид спутников астероидов и краткое перечисление возможностей работы с ним даются в статье, опубликованной

в журнале *Icarus*.

Задача: Теория потенциала и ее практические применения в небесной механике.

Для исследования E-галактик был развит новый метод изучения динамики слоисто-неоднородных гравитирующих эллипсоидов. Этот новый метод позволяет реализовать и применить огромный массив новых наблюдательных данных, полученных для эллипсоидальных звездных систем. В отличие от принятого на Западе метода применения уравнения звездной гидродинамики Джинса и численного моделирования (проект *Sauron*), наш подход основан на тензорной теореме вириала. Достоинствами данного метода являются: а) тензорная теорема вириала записывается у нас не только для всей галактики в целом, но и для каждой слоисто-неоднородной подсистемы внутри галактики; б) при данном подходе учитывается то важное обстоятельство, что гигантские эллиптические галактики не имеют осевую симметрию, а их пространственная форма, а также эквиденситные поверхности могут быть представлены трехосными эллипсоидами. Это позволяет нашим моделям максимально точно отражать сложное внутреннее строение каждой галактики и максимально полезно использовать большой пласт новой наблюдательной информации о внутренней структуре и вращении эллиптических галактик. Для каждой из 22 E-галактик было найдено отношение энергии вращения к их потенциальной энергии. Сравнивая это вычисленное отношение с наблюдаемым вращением эллиптических галактик, был сделан вывод, что у этих звездных систем существует общая (глобальная) анизотропия дисперсии скоростей. Найден параметр анизотропии  $\beta$ , который ограничен интервалом  $0,0 \leq \beta \leq 0,224$ . Впервые в наших работах была обнаружена корреляция между величиной анизотропии скоростей  $\beta$  и сплюснутостью внешних областей E-галактик. Установлено, что заметное влияние на динамику звездной системы оказывает учет фактора изменения по телу галактики отношения масса-светимость. Результаты наших исследований сравниваются с результатами других исследователей. Оказалось, что для небольших галактик наши значения анизотропии  $\beta$  хорошо согласуются с полученными в проекте 3D ATLAS. Однако для гигантских E-галактик только наши вириальные модели обеспечивают лучшее согласие с наблюдениями, чем осесимметричные JAM модели.

Для изучения динамики тонких колец, обнаруженных недавно у малых небесных тел, в отделе небесной механики был разработан новый подход. Для этого методами теории потенциала была решена сложная математическая задача о взаимной потенциальной энергии двух эллиптических гравитирующих (или заряженных статическим электрическим зарядом) колец Гаусса. Кольца Гаусса имеют один общий фокус и могут быть как компланарными, так и иметь наклон друг к другу. Важно, что их линии апсид могут не совпадать. Выражение для взаимной энергии колец было получено нами в конечном аналитическом виде с точностью до членов четвертого порядка малости. На основе функции взаимной потенциальной энергии колец впервые был развит аналитический метод изучения долгопериодических и вековых возмущений для двух гравитирующих слабо эллиптических колец Гаусса с малым углом взаимного наклона. Практика показала преимущество нового подхода: вместо традиционного усреднения полученной очень сложным образом возмущающей функции Лагранжа, эффективней сразу вычислять взаимную энергию колец Гаусса. Решения уравнений эволюции

колец были получены также в виде сумм по степеням малых параметров. Для проверки метода рассмотрена двухпланетная задача Солнце-Юпитер-Сатурн, где наши результаты дополняют и заметно уточняют исследования прежних исследований. Впервые установлено, что разность углов наклона колец испытывает биения, найдены две частоты этих биений. Важно, что полученные выражения возмущающих функций могут применяться не только к планетной задаче, но и к задаче с кольцами вокруг небесных тел с любыми углами наклонов в выбранной системе отсчёта.

Для решения представленной выше задачи о нахождении коэффициентов зональных гармоник внешних потенциалов быстро вращающихся тел иррегулярной формы нами был развит специальный аналитический метод. Решение задачи состоит из нескольких этапов. Прежде всего, был разработан удобный метод нахождения азимутально усредненного внешнего потенциала вращающегося слоисто-неоднородного трехосного эллипсоида. В согласии с наблюдениями реальных небесных тел были изучены два класса моделей: i) эллипсоид из дискретных слоев конечной толщины, включая двухкомпонентную модель «ядро-оболочка»; ii) слоисто-неоднородный эллипсоид, состоящий из множества бесконечно тонких эквиденситных слоев с произвольными профилями эллиптичности от центра до периферии. Для этих моделей получены уравнения, позволяющие по единой схеме находить коэффициенты зональных гармоник любого порядка. Рассмотрены специальные случаи расслоения эллипсоидов на гомеоиды и фокалоиды. Доказано, что при софокусном расслоении коэффициенты зональных гармоник однородных и конгруэнтных неоднородных эллипсоидов совпадают. Новый метод был применен для уточнения параметров квазиравновесной модели карликовой планеты Хаумеа.

Задача: Устойчивость орбитальной спутниковой динамики в рамках эллиптической ограниченной задачи 4-тел.

За основу постановки задачи взяты базовые уравнения би-эллиптической ограниченной задачи 4-тел, определяющие движение малой массы (спутника) в поле тяготения трёх массивных тел иерархической конфигурации  $M_3, M_2, M_1$ , обращающихся по законам Кеплера вокруг общего барицентра по эллиптическим орбитам. Рассмотрены 2 системы координат, одна синодическая (связана с барицентром тел  $\{M_3, M_2, M_1\}$ ), другая пульсирующая с новым масштабированием координат (включая единицы массы и времени) относительно того же барицентра. Уравнения представлены в масштабированном виде, который автоматически позволяет применить новый подход к их решению (в правой части уравнений представлен градиент новой силовой функции, покомпонентно, с коэффициентом пропорциональности, зависящим от истинной аномалии  $f$ ).

В уравнениях переменными (зависящими от истинной аномалии  $f$ ) являются величины: три координаты малой массы (спутника) в новой системе координат, новая силовая функция; а также, (в общем случае) переменным является параметр, зависящий от истинной аномалии  $f_2$  при обращении тел  $\{M_3, M_2\}$  вокруг их общего барицентра по эллиптическим орбитам. Динамика движения малой массы рассматривается только в окрестности тела  $M_3$  (приближение "захваченной" орбиты). Постоянными (константами задачи) являются: масса спутника, масса планет, гравитационная постоянная; эксцентриситет, большая полуось  $\{e_1, a_1\}$  эллиптической орбиты при обращении барицентра тел  $\{M_3, M_2\}$  вокруг их общего барицентра с мас-

сой  $M_1$ ; эксцентриситет, большая полуось  $\{e, a\}$  квази-эллиптической орбиты при обращении тел  $\{M_3, M_2\}$  вокруг их собственного общего барицентра.

Исходя из указанных допущений и ограничений, указан алгоритм расчета и были получены аналитические и полу-аналитические формулы, определяющие координаты малой массы (спутника) в новой системе координат для выбранных значений начальных данных. Произведены численные расчеты координат спутника ничтожной массы, для определенных начальных данных и соотношения масс основных тел (в тройной системе "Солнце-Земля-Луна"), с шагом 0.001 по истинной аномалии методом Рунге-Кутты 4-ого порядка.

Сделано предположение, что спутник может быть выброшен за пределы зоны близкого расположения (к планете  $M_3$ ) за счет резонансных особенностей определяющих его движение уравнений. Кроме того, для координаты  $z$  показан квази-периодический характер осцилляций в окрестности фиксированной плоскости  $\{x, y, 0\}$ . Установление подобного факта для спутниковой навигации можно назвать основным результатом работы - что и планировалось.

Задача: Три новые модели слоисто-неоднородных эллиптических галактик.

Для решения некоторых задач небесной механики и астрофизики созданы три новые модели эллиптической галактики (ЭГ), хорошо согласующиеся с современными представлениями о строении таких галактик. Согласно этим моделям ЭГ вместе с гало считается двухслойным неоднородным трехосным эллипсоидальным телом. При этом внешний и внутренний слои считаются концентрическими, центры которых совпадают с центром ЭГ. Светящаяся часть эллиптической галактики (СЧ ЭГ) считается внутренним слоем и представляет собой неоднородное трехосное эллипсоидальное тело с гомотетическим (эллипсоидальным) распределением плотности, или слоисто-неоднородный эллипсоид. В СЧ ЭГ преобладает барионная масса (БМ) с "астрофизическим законом" распределения плотности. Внешняя часть представляет собой неоднородный сферический слой со сферическим законом распределения плотности (Модель 1) или эллипсоидальный слой (гомеоид) с гомотетическим распределением плотности (Модель 2).

Согласно Модели 1 внешний слой и гало галактики ограничены сферой радиуса, равного радиус-шкале ЭГ, а согласно Модели 2 - они ограничены эллипсоидальной поверхностью с большой полуосью, равной радиус-шкале галактики. Считается, что сферический слой и гомеоид в основном состоит из темной материи (ТМ) и в зависимости от ее наличия во внутренних (центральных) областях ЭГ, в моделях 1 и 2 рассматриваются два варианта. Вариант а) - основная часть ТМ находится вне СЧ ЭГ и вариант б) - содержание темной материи во внутренних областях ЭГ сравнимо с содержанием БМ. В качестве закона распределения (профиля) ТМ берутся аналоги известных профилей. При этом в моделях 3 и 4 определяются условия сшивки потенциалов на границе раздела СЧ ЭГ и гомеоида (сферического слоя).

Согласно Модели 3, ЭГ вместе с гало (вариант 1) или без него (вариант 2) представляет собой слоисто-неоднородный трехосный эллипсоид, состоящий из БМ и ТМ. В Модели 3 не существует границы раздела между СЧ ЭГ и гомеоида поэтому выполнение условий сшивки потенциалов не рассматривается.

На основе созданных новых трех моделей слоисто-неоднородной ЭГ определены некоторые ключевые динамические параметры для шестидесяти эллиптических галактик. К таковым относятся: полная гравитационная (потенциальная) энергия эллиптической галактики вместе с гало и ее дисперсия скоростей, средние значения радиуса-шкалы эллиптической галактики, плотность в ее центре и значение третьей полуоси. Предложен новый способ для определения последних трех параметров эллиптической галактики. Такие параметры, которые отсутствуют в базе данных (HyperLeda, Ned, Vizier), вычислены для шестидесяти ЭГ. Сравнение полученных значений данных параметров почти согласуется со значениями, полученными другими авторами.

Созданные модели служат для решения некоторых задач небесной механики: вычисление потенциала галактики, как трехосного неоднородного эллипсоидального тела, получение уравнения движения пассивно-гравитирующего тела (ПГТ), определение точек либрации и установление их устойчивости в смысле Ляпунова, нахождение возможных первых интегралов - аналога интеграла Якоби, определение области возможности движения ПГТ, построение поверхностей нулевой скорости.

Для получения точных результатов с помощью метода численного интегрирования дифференциальных уравнений, потенциалы в этих моделях не разлагаются в ряд по степеням малых параметров, а берутся целиком. Полученные результаты применены к реально существующим эллиптическим галактикам. Сравнение полученных значений данных параметров почти согласуется со значениями, полученными другими авторами.

В рамках работы по теме создавались несколько новых моделей для неоднородной эллиптической галактики. Созданные модели служат для решения некоторых задач небесной механики и астрофизики. ЭГ рассматривается как трехосный неоднородный эллипсоид, или неоднородный сфероид, состоящий из БМ и ТМ с определенными законами распределения плотности. В качестве профиля БМ берется "астрофизический закон", а для темной материи - аналоги известных профилей, которые применимы только к сферическим галактикам. К таким профилям относятся: модели Дэнена, NFW, Хернквиста и Джаффа. Эти модели могут быть объединены в один универсальный профиль, приведенный в книге Бинни, Тремайна, опубликованной в 2008 г. Для применения вышеперечисленных моделей к ЭГ, они нами усовершенствованы и названы аналогами соответствующих профилей.

Для решения задач небесной механики вычисляются согласно этим моделям потенциалы притяжения ЭГ без разложения в ряд. Затем выводятся уравнения движения пассивно-гравитирующего тела (ПГТ), под которым подразумевается отдельная звезда или центр тяжести шарового скопления. Определяются точки либрации, устанавливается их устойчивость в смысле Ляпунова, находятся возможные первые интегралы - аналоги интеграла Якоби, определяются области возможности движения ПГТ и строятся поверхности нулевой скорости.

В рамках астрофизической задачи, на основе этих моделей определены ключевые параметры: полная гравитационная (потенциальная) энергия и кинетическая энергия вращения ЭГ, дисперсия скоростей на расстоянии эффективного радиуса и т.д. Если ЭГ как динамическая система имеет форму неоднородного сфероида, то с помощью этих параметров удастся исследовать ее устойчивость согласно критерию Пиблса-Острайкера. При этом

условные границы ЭГ определяются согласно известным формулам, из каталога Вокулера. Полученные результаты применяются к реально существующим ЭГ.

Задача: Разложение гелиоцентрических элементов орбиты Земли в компактные гармонические ряды.

Для разложения гелиоцентрических элементов орбиты Земли и других параметров ее движения в компактные гармонические ряды использовалась модификация метода спектрального анализа, предложенная и использованная нами в ряде предыдущих работ. Особенностью данной модификации является возможность представления как аргументов, так и амплитуд искомым аналитических рядов в виде полиномов высокой степени от времени. Это позволяет существенно повысить компактность итоговых разложений и использовать в качестве исходных данных для спектрального анализа долгосрочные численные эфемериды планет и Луны. В данном исследовании использовалась численная эфемерида DE-431, действительная на интервале времени 30000 лет: 13000 г. до н.э. – 17000 г. н.э. С помощью этой эфемериды на всем ее интервале нами вычислялись значения всех исследуемых параметров движения Земли с некоторым малым шагом, обычно равным 1 сут. Далее рассчитанная таблица значений для каждой величины обрабатывалась указанной выше модификацией метода спектрального анализа. Основное внимание при этом уделялось как определению точных периодов основных возмущений исследуемых параметров, так и идентификации источников этих вариаций. (Источники вариаций математически описываются наборами целочисленных индексов при средних долготах больших планет, Луны и аргументов Делонэ в комбинациях этих элементов, определяющих аргументы членов ряда.)

В 2020 г. нами получены разложения ряда параметров движения Земли, которые в частности, имеют существенное значение при вычислении освещенности планеты Солнцем.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача: Динамика спутников планет и астероидов.

Основным результатом явились параметры орбит спутников астероидов, для которых имеется достаточное количество наблюдений. Наблюдения были взяты из созданной ранее базы данных всех имеющихся в мире опубликованных астрометрических наблюдений спутников астероидов. В результате работы получились орбиты 62 спутников. Для остальных спутников либо имелось недостаточное число наблюдений, либо вообще было известно только, что спутник существует. Для каждого спутника определялись параметры неподвижной кеплеровой орбиты. Модель кеплеровой орбиты оказалась достаточно точной в условиях ограниченной точности наблюдений и малых интервалов времени наблюдений. Для каждой орбиты получались также оценки точности наблюдений и ковариационная матрица определяемых параметров. Найденные параметры орбит опубликованы в журнале *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.

Основной результат работы по теме в 2020 году – сервер эфемерид спутников астероидов. Это средство востребовано специалистами мира, занимающимися динамикой систем астероидов со спутниками. Сервер эфемерид спутников астероидов доступен через интернет. Разработан удобный интерфейс со страниц интернета. Предоставляется широкий набор функций: вычисление топоцентрических угловых координат спутника относительно главной компоненты, вычисление гелиоцентрического углового расстояния спутника от главной компоненты. Кроме того, выдаются необходимые для проведения наблюдений экваториальные координаты астероида и угловое расстояние от Солнца.

Для обеспечения работы сервера эфемерид используются найденные параметры орбит спутников астероидов. В сервере эфемерид устроена специальная функция – определение моментов максимальной элонгации спутника, когда условия его наблюдений наилучшие. Это крайне необходимо для организации и проведения будущих астрометрических наблюдений. Особенностью сервера эфемерид является вычисление обстоятельств взаимных покрытий и затмений спутника и главной компоненты. Фотометрические наблюдения систем астероидов со спутниками в такие периоды позволяют получить много полезных и интересных данных. Явления редкие. Поэтому необходимо заранее знать, когда они происходят. С помощью сервера вычисляются: момент начала явления, момент возможного максимума спада яркости системы и момент конца явления.

Выяснилось, что до конца 2025 года взаимные явления будут видны с Земли только для 21 астероида со спутником.

Главная особенность созданного сервера эфемерид – это получение оценок точности эфемерид. Оказалось, что для многих спутников точность относительного положения имеет величину, примерно равную размеру орбиты. Для таких спутников можно заключить, что они потеряны, поскольку неизвестно на любой данный момент времени, с какой стороны от астероида он находится. Причиной такой низкой точности эфемерид является очень короткий интервал времени наблюдений, по которым определена орбита, либо малое число наблюдений. Орбиты некоторых спутников определены из 8 наблюдений, выполненных на интервале времени меньше 0.1 от периода обращения. Определение обстоятельств покры-



тий и затмений для некоторых спутников также имеет низкую точность по тем же причинам. Описание созданного сервера эфемерид и его основных возможностей опубликовано исполнителями проекта в 2020 году в журнале Icarus. Сервер доступен через интернет на сайте ГАИШ МГУ по адресу <http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/multisat/nssAsthe.htm> и на сайте французского института небесной механики (IMCCE) по адресу <http://nsdb.imcce.fr/multisat/nssAsthe.htm>.

Задача: Теория потенциала и ее практические применения в небесной механике.

На базе тензорной теоремы вириала второго порядка построены модели для 22 эллиптических галактик. При построении моделей впервые учитывалась трехосная пространственная форма и структура внутренних слоев плотности в галактиках. Важно, что метод учитывает новые наблюдательные данные по глубокой фотометрии поверхностной яркости E-галактик и структуре их изофот. Получена система уравнений, из которой находятся компоненты тензора гравитационной энергии и параметры эллипсоида скоростей. Сравнивая модельные результаты с данными наблюдений, для каждой галактики, были вычислены показатели анизотропии дисперсии скоростей. По всей выборке галактик найдено. Показано, что учет изменения отношения масса-светимость (по звездному составу) может на уменьшить значение. Результаты сравниваются с выводами других исследователей. Установлено, что для E- галактик (быстрых ротаторов) наши значения согласуются с найденными показателями анизотропии дисперсии скоростей в проекте на основе Джинсовских анизотропных моделей. Однако для гигантских E-галактик (медленных ротаторов) наши модели, учитывающие 3-осную форму и реальную структуру изоденситных слоев, дают лучшее согласие с наблюдениями, чем упрощенные осесимметричные модели в проекте SAURON. Опубликовано две статьи в журналах *Astronomy Reports* и *Astrophysics and Space Science*.

Для изучения динамики колец у малых небесных тел был разработан принципиально новый подход, опирающийся на функцию взаимной потенциальной энергии двух эллиптических гравитирующих колец Гаусса. Кольца имеют один фокус и в общем случае они не компланарны, причем их линии апсид также имеют наклон друг к другу. Выражение для взаимной энергии колец было получено в конечном виде с точностью до членов второго порядка малости. На базе взаимной энергии развит новый аналитический метод изучения долгопериодических и вековых возмущений эллиптических колец Гаусса с малым углом взаимного наклона. Наш подход имеет определенные преимущества в сравнении с обычным методом разложения функции Лагранжа. Для проверки метода рассмотрена двупланетная задача Солнце-Юпитер-Сатурн, где наши результаты дополняют и уточняют исследования других авторов. Доказано, что полученные выражения возмущающих функций могут применяться не только к планетной задаче, но и к задаче с кольцами вокруг небесных тел с любыми углами наклонов в выбранной системе отсчета. Одна публикация по теме (в журнале *Astronomy Reports*).

Решена задача о нахождении коэффициентов зональных гармоник внешних потенциалов быстро вращающихся тел иррегулярной формы. Разработан оригинальный подход для нахождения азимутально усредненного потенциала вращающегося слоисто-неоднородного трехосного эллипсоида. Рас-

смотрены два класса моделей: i) эллипсоид из дискретных слоев конечной толщины, включая двухкомпонентную модель «ядро-оболочка»; ii) слоисто-неоднородный эллипсоид, состоящий из множества бесконечно тонких эквиденситных слоев с произвольными профилями эллиптичности от центра до периферии. Получены уравнения, позволяющие по единой схеме находить коэффициенты зональных гармоник любого порядка. Рассмотрены специальные случаи расслоения эллипсоидов на гомеоиды и фокалоиды. Доказано, что при софокусном расслоении коэффициенты зональных гармоник однородных и конгруэнтных неоднородных эллипсоидов совпадают. Новый метод применяется для построения квазиравновесной модели карликовой планеты Хаумеа. Одна публикация по теме (в журналет Astronomy Reports).

Задача: Устойчивость орбитальной спутниковой динамики в рамках эллиптической ограниченной задачи 4-тел.

Динамика движения малой массы в окрестности фиксированной плоскости  $\{x, y, 0\}$  (вблизи планеты M3 в рамках подхода BiER4BP, M3  $\parallel$  M2  $\parallel$  M1) не является безусловно устойчивой (и сугубо предопределенной начальными условиями задачи) и может корректироваться в рамках биэллиптической ограниченной задачи 4-тел: спутник может быть внезапно выброшен за пределы ближайшей окрестности "захваченной" орбиты вблизи малой планеты M3 (и продолжить движение в рамках BiER4BP за пределами этой зоны). Нерешенной остается аналогичная задача, если рассматривать непостоянным или пренебрежимо малым расстояние от тел  $\{M3, M2\}$  до их собственного общего барицентра (в квази-круговом приближении).

Задача: Три новые модели слоисто-неоднородных эллиптических галактик.

Для решения некоторых задач небесной механики и астрофизики созданы три новые модели слоисто-неоднородной эллиптической галактики (ЭГ). Согласно этим моделям ЭГ представляет собой неоднородное трехосное эллипсоидальное тело, либо неоднородный сфероид, состоящий из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ). В качестве закона распределения (профиля) БМ берется так называемый "астрофизический закон", а для ТМ – аналоги известных профилей. На основе этих моделей определены полная гравитационная (потенциальная) энергия и кинетическая энергия вращения таких галактик, дисперсия скоростей на расстоянии их эффективного радиуса. Предложен новый способ определения средних значений радиус-шкалы ЭГ, плотности в ее центре, третьей полуоси, а также средние значения некоторых параметров, соответствующие эффективному радиусу галактики.

В рамках этих моделей также рассмотрена задача о пространственном движении пассивно-гравитирующего тела (ПГТ) внутри неоднородной ЭГ. В качестве ПГТ берется звезда или центр масс шарового скопления. В движении ПГТ учитываются: притяжение светящейся части ЭГ и возмущения, вызываемые притяжением неоднородного сферического слоя (или эллипсоидального слоя - гомеоида). Законом распределения плотности светящейся части ЭГ является так называемый "астрофизический закон". Для получения точных результатов, потенциалы светящейся части ЭГ и гомеоида не разлагаются в ряд, а берутся их точные выражения.

Найден аналог интеграла Якоби, определена область возможности движения ПГТ и построены поверхности нулевой скорости. Установлена устой-

чивость в смысле Ляпунова найденных стационарных решений - точек либрации. Полученные результаты применены к шестидесяти ЭГ и приведены в виде рисунков и таблиц для десяти.

Задача: Разложение гелиоцентрических элементов орбиты Земли в компактные гармонические ряды.

Впервые получены компактные разложения основных параметров гелиоцентрической орбиты Земли в гармонические ряды на интервале времени 30000 лет, 13000 г. до н.э. - 17000 г. н.э. Определены периоды, амплитуды и фазы основных возмущений рассмотренных параметров. Выполнена идентификация источников всех возмущений, т.е. определены наборы целочисленных индексов в комбинациях средних долгот больших планет, Луны и аргументов Делонэ, определяющих аргументы членов рядов. При этом результаты работы могут быть использованы, в частности, для вычисления теоретических значений и основных периодов изменения освещенности поверхности Земли Солнцем на длительных интервалах времени. Это может помочь в объяснении причин ряда наблюдаемых долгопериодических феноменов изменения погоды на Земле и повысить точность прогнозирования глобального климата.

ПРИЛОЖЕНИЕ А  
Объем финансирования темы в 2020 году  
Таблица А.1

Источник финанси- рования	Объем (руб.)	
	Получено	Освоено собственными силами
Денежные сред- ства в виде субси- дии на выполнение фундаментальных научных исследо- ваний в соответ- ствии с госзадани- ем МГУ, часть 2 (р. 01 10)	7 776 000,0	7 776 000,0