Объяснение чандлеровского колебания полюсов Земли

Д.М. Сонечкин

Институт океанологии
им. П.П. Ширшова, РАН

Цель данной работы удостоверить, что чандлеровское колебание является нелинейным откликом вращающейся Земли на вынуждающие квазипериодические солнечно-лунные воздействия:

1). Показана недопустимость общепринятой линеаризации уравнений Эйлера,
2). построено равномерно пригодное асимптотическое разложение общего решения исходных нелинейных уравнений.
3). Учет в этом решении лунно-солнечных приливов и магнитной активности Солнца (цикла Хейла) позволяет воспроизвести

периоды чандлеровского колебания.

Недопустимость общепринятой линеаризации уравнений Эйлера

$$A\dot{\omega}_1 = -(C-B)\omega_2\omega_3 \ ,$$

$$B\dot{\omega}_2 = (C-A)\omega_1\omega_3 \ ,$$

$$C\dot{\omega}_3 = -(B-A)\omega_1\omega_2 \ .$$

$$\varepsilon = (B-A)/C)$$

$$\ddot{\omega}_i = -\mathrm{N}_e^2\omega_i \ , \ i = 1,2$$

$$\boxed{\mathrm{N}_e = \frac{C-A}{A}\omega_3(0)}$$

Пусть $\boxed{B = A + \varepsilon C}$

Тогда

$$\dot{\omega}_1 = -\left(\frac{(C-A)}{A} - \varepsilon\frac{C}{A}\right)\omega_2\omega_3\ ,$$

$$(A + \varepsilon C)\dot{\omega}_2 = (C - A)\omega_1\omega_3\ ,$$

$$\dot{\omega}_3 = -\varepsilon\omega_1\omega_2\ ,$$

Общее решение будем искать в виде асимптотического ряда по малому параметру :

$$\omega_i = \omega_{io} + \varepsilon\omega_{i1} + \ldots; \quad i = 1, 2, 3$$

Сохраняя только члены нулевого порядка по малому параметру, получаем систему:

$$\dot{\omega}_{1o} = -\left(\frac{(C - A)}{A}\right)\omega_{2o}\omega_{3o} \ ,$$

$$\dot{\omega}_{2o} = \frac{(C - A)}{A}\omega_{1o}\omega_{3o} \ ,$$

$$\dot{\omega}_{3o} = 0 \ , \qquad\qquad \omega_{30} = \Omega$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{1o}(t) &= a\cos\left(\frac{(C-A)}{A}\Omega t\right); \\ \omega_{2o}(t) &= a\sin\left(\frac{(C-A)}{A}\Omega t\right). \end{aligned}}$$

в приближении первого порядка по малому параметру получаем систему

$$\dot{\omega}_{11} = -\frac{(C-A)}{A}\left(\omega_{30}\omega_{21} + \omega_{20}\omega_{31}\right) + \frac{C}{A}\omega_{20}\omega_{30} \ ,$$

$$\dot{\omega}_{21} = \frac{(C-A)}{A}\left(\omega_{30}\omega_{11} + \omega_{10}\omega_{31}\right) - \frac{C}{A}\dot{\omega}_{2o} \ ,$$

$$\dot{\omega}_{31} = -\omega_{1o}\omega_{2o} = -a^2 \cos\left(\frac{C-A}{A}\Omega t\right)\sin\left(\frac{C-A}{A}\Omega t\right).$$

Ее решение для 3-ей компоненты легко получить в виде:

$$\boxed{\omega_{31} = -\frac{a^2 A}{2(C-A)\Omega}\sin^2\left(\frac{C-A}{A}\Omega t\right)}$$

Нахождение решений для 1-ой и 2-ой компонент требует преобразования первых двух уравнений системы 1-го приближения к виду уравнений линейных осцилляторов:

$$\ddot{\omega}_{11} = -\left(\frac{C-A}{A}\right)\left\{\omega_{30}\left[\frac{(C-A)}{A}(\omega_{30}\omega_{11}+\omega_{10}\omega_{31})-\frac{C}{A}\dot{\omega}_{20}\right]+\dot{\omega}_{20}\omega_{31}+\omega_{20}\dot{\omega}_{31}\right\}+\frac{C}{A}\omega_{30}\dot{\omega}_{20}\,,$$

$$\ddot{\omega}_{21} = -\left(\frac{C-A}{A}\right)\left\{\omega_{30}\left[-\frac{(C-A)}{A}(\omega_{30}\omega_{21}+\omega_{20}\omega_{31})+\frac{C}{A}\omega_{20}\omega_{30}\right]+\dot{\omega}_{10}\omega_{31}+\omega_{10}\dot{\omega}_{31}\right\}-\frac{C}{A}\ddot{\omega}_{20}\,.$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\ddot{\omega}_{11} &= -\left(\frac{C-A}{A}\right)^2\Omega^2\omega_{11}+\\
&+\left\{2\frac{(C-A)}{A}a^3+\frac{(C-A)C^2}{A^3}\Omega^2 a\right\}\cos\left(\frac{C-A}{a\Omega t}\right)-2\frac{(C-A)}{A}a^3\cos\left(3\frac{C-A}{a\Omega t}\right),\\
\ddot{\omega}_{21} &= -\left(\frac{C-A}{A}\right)^2\Omega^2\omega_{21}+\\
&+\left\{2\frac{(C-A)}{A}a^3+\frac{(C-A)C^2}{A^3}\Omega^2 a\right\}\sin\left(\frac{C-A}{a\Omega t}\right)-2\frac{(C-A)}{A}a^3\sin\left(3\frac{C-A}{a\Omega t}\right).
\end{aligned}}$$

С учетом

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_{1o}(t) &= a\cos\left(\frac{(C-A)}{A}\Omega t\right);\\ \omega_{2o}(t) &= a\sin\left(\frac{(C-A)}{A}\Omega t\right).\end{aligned}}$$

и

$$\boxed{\omega_{31} = -\frac{a^2 A}{2(C-A)\Omega}\sin^2\left(\frac{C-A}{A}\Omega t\right)}$$

после элементарных, но громоздких, преобразований, получаем:

$$\ddot{\omega}_{11} = -\left(\frac{C-A}{A}\right)^2 \Omega^2 \omega_{11} +$$

$$+\left\{2\frac{(C-A)}{A}a^3 + \frac{(C-A)C^2}{A^3}\Omega^2 a\right\}\cos\left(\frac{C-A}{a\Omega t}\right)$$

$$-2\frac{(C-A)}{A}a^3\cos\left(3\frac{C-A}{a\Omega t}\right),$$

$$\ddot{\omega}_{21} = -\left(\frac{C-A}{A}\right)^2 \Omega^2 \omega_{21} +$$

$$+\left\{2\frac{(C-A)}{A}a^3 + \frac{(C-A)C^2}{A^3}\Omega^2 a\right\}\sin\left(\frac{C-A}{a\Omega t}\right)$$

$$-2\frac{(C-A)}{A}a^3\sin\left(3\frac{C-A}{a\Omega t}\right).$$

Оба осциллятора являются линейными.
Их общие решения

$$\boxed{\omega(t) = \alpha_1 \cos(\mathrm{N}_e t) + \alpha_2 \cos(3\mathrm{N}_e t) + t\,\alpha_3 \cos(\mathrm{N}_e t).}$$

содержат сингулярность, т.е. колебание с амплитудой, которая неограниченно растет со временем.

Такие решения физически невозможны.

Таким образом, пренебрежение малым параметром приводит к сингулярности общего решения уравнений Эйлера.

Асимптотическое равномерно пригодное разложение решений уравнений Эйлера

Чтобы избавиться от сингулярного члена в решении уравнений Эйлера, надо явно учесть зависимость частоты колебания полюсов от амплитуды:

$$\boxed{N = N_e + \varepsilon N_1 + \ldots ,}$$

Введем «медленное время»

$$\tau = Nt$$

Учтем, что

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau} = N\frac{d}{d\tau},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = N^2\frac{d^2}{d\tau^2}$$

Исходные нелинейные уравнения
в «медленном времени» (производные
обозначены штрихом)
легко переписать в виде:

$$N\omega_1' = -\left(\frac{(C-A)}{A} - \varepsilon\frac{C}{A}\right)\omega_2\omega_3 \ ,$$

$$(A+\varepsilon C)N\omega_2' = (C-A)\omega_1\omega_3 \ ,$$

$$N\omega_3' = -\varepsilon\omega_1\omega_2 \ ,$$

Ясно, что решения 0-го приближения для них полностью идентичны таковым у линеаризованных уравнений. В решениях же для 1-го приближения появляются **дополнительные члены**, в которых фигурируют 2-е производные от решений 0-го приближения:

$$N_1\omega_{10}'' + N_e^2\omega_{11}'' =$$

$$-2\frac{(C-A)}{A}\Omega N_1 a^2 \cos\left(\frac{(C-A)}{A}\tau\right) + \left(\frac{(C-A)}{A}\right)\Omega^2\omega_{11}'' ,$$

$$2N_e N_1\omega_{20}'' + N_e^2\omega_{21}'' =$$

$$-2\frac{(C-A)}{A}\Omega N_1 a^2 \sin\left(\frac{(C-A)}{A}\tau\right) + \left(\frac{(C-A)}{A}\right)\Omega^2\omega_{21}'' .$$

Наличие этих новых членов позволяет исключить сингулярные члены из общего решения простым приравниванием коэффициентов сингулярных членов коэффициентам этих новых членов. В результате получается нелинейная поправка, немного уменьшающая частоту эйлеровского осциллятора.

$$N_1 = -\left\{ 2\frac{(C-A)}{A} a^3 + \frac{(C-A)C^2}{A^3} \Omega^2 a \right\} \Big/ 2\frac{(C-A)}{A} \Omega N_1 a^2 \ .$$

Однако это уменьшение незначительно по величине (порядка величины малого параметра).

Учет отклика на лунно-солнечные приливные силы

Учтем внешние силы в правых частях исходных нелинейных уравнений Эйлера, представив их в виде суммы периодических колебаний, модулированных по амплитуде

$$\boxed{G_i = g_{ij}\cos(g_{ij}\nu_{ij}\tau)(1 + g_{ik}\cos(\nu_{ik}\tau)) \times \ldots}$$

Вклад этих сил в решение уравнений 1-го приближения с учетом нелинейной поправки к частоте, имеет вид

$$k_{i1} G_i \cos\left(\frac{C - A}{A}\tau\right),$$

$$i = 1,\ 2,\ldots \qquad j = 1,\ 2,\ldots \qquad k = 1,\ 2,\ldots$$

Среди форсирующих частот выделим ту, которая соответствует наиболее мощному ***полугодовому солнечному приливу***. Расчет (по частотам, указанным в обратных днях) амплитудной модуляции эйлеровского колебания, вызываемой ***этим приливом***, приводит к существенно более низкой, чем эйлеровская, частоте

$$\boxed{\frac{1}{182.7} - \frac{1}{304} = \frac{1}{458}.}$$

Период в 458 дней относится к одной из известных групп периодов чандлеровского колебания.
Модуляция этой новой частоты частотой, связанной с 8.85-летним (3232-дневным) ***движением к востоку перигея лунной орбиты***, приводит к известной из оценок спектра чандлеровского колебания, еще более низкой частоте

$$\boxed{\frac{1}{458} + \frac{1}{3232} = \frac{1}{401}}$$

Учитывая частоту 18.66-годовой (6816-дневной) ***модуляции лунных приливов***, получим

$$\boxed{\frac{1}{458}+\frac{1}{6816}=\frac{1}{429}.}$$

Период 429 дней очень близок к периоду 427 дней, указывавшемуся самим Чандлером.

Необъясненным однако остается самый главный известный период в 433-435 дней!!!

Солнечная природа главного пика чандлеровского колебания

Поиск возможной причины существования 433-435-дневного периода приводит к неожиданному выводу, что это - **результат модуляции** частоты 1/458 обратных дней частотой 22-летнего (8036-дневного) ***цикла Хейла*** магнитной активности Солнца

$$\boxed{\frac{1}{458}+\frac{1}{8036}=\frac{1}{433}.}$$

Заключение

1). Линеаризация уравнений Эйлера недопустима.

2). Чандлеровское колебание – результат нелинейной реакции вращения Земли на квазипериодические внешние воздействия.

3). Главные воздействия: **полугодовой солнечный прилив**, **18.66- и 8.85-летняя модуляции лунных приливов**, **и 22-летний цикл Хейла магнитной активности Солнца**. Таким образом, природа ***ЧК*** – не только гравитационная, но и магнитная.