УДК 531.391

ВЛИЯНИЕ ПРИЛИВОВ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛАНЕТЫ

© 2011 г. В.Г.Вильке, А.Н.Данилкин

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию

Формирование температурных полей планет зависит от многих факторов, в том числе, от выделения тепла вследствие радиоактивного распада вещества планеты, от химических реакций, связанные с выделением тепла, от диссипации энергии в процессе приливной деформации планеты. Описание этих процессов наталкивается на значительные трудности, обусловленные недостатком знаний о внутреннем строении планет и физических характеристик образующих их веществ [1]. Измерение температурного поля планеты возможно для незначительных по сравнению с радиусом планеты глубин от поверхности планеты и сопряжено с дорогостоящими экспериментами. В случае Земли максимальная глубина, на которой было определено значение температуры, составляет 12 км для скважины на Кольском полуострове, тогда как средний радиус Земли равен 6371 км. Имеются также численные оценки теплового потока с поверхности Земли и различного рода исследования физических свойств материалов, составляющих кору Земли.

Приливы в теле планеты порождаются гравитационными силами взаимодействия с материальными объектами и силами инерции в системе координат связанной с планетой. Их изменение во времени приводит к рассеянию механической энергии в материале планеты, которая переходит в тепло и формирует температурное поле внутри планеты. В качестве модели недеформированной планеты принят вязкоупругий однородный шар, поведение материала которого описывается моделью Кельвина-Фойхта [2]. Найден тензор скоростей деформаций вращающейся планеты и усредненное поле температур внутри планеты. Приведены оценки температурного поля Земли, порождаемого приливами.

1.ТЕНЗОР СКОРОСТЕЙ ПРИЛИВНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ И ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ.

Рассмотрим движение вязкоупругой планеты в гравитационном поле сил, порождаемом материальной точкой [3, 4]. Предположим, что центр масс планеты и материальная точка движутся по круговым орбитам в плоскости CX_1X_2 и что вращение планеты происходит вокруг оси OX_3 с угловой скоростью ω_1. Свяжем с деформируемой планетой систему координат $Ox_1x_2x_3$ и представим поле перемещений точек планеты, считая ее упругим однородным шаром, в виде [3,4]

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)/\mathrm{E} = \mathbf{u}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_3(\mathbf{r},t)$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_1(\mathbf{r}) = -\rho\omega_1^2 (d_{11}\mathbf{r}^2 + d_{21} r_0^2)\mathbf{r} \\
&\mathbf{u}_2(\mathbf{r}) = -\rho J^{-2}[a_1 (B_1\mathbf{r},\mathbf{r})\mathbf{r} + (a_2\mathbf{r}^2 + a_3 r_0^2)B_1\mathbf{r}] \\
&\mathbf{u}_3(\mathbf{r},t) = 3\rho\Omega_1^2 [a_1 (B_2\mathbf{r},\mathbf{r})\mathbf{r} + (a_2\mathbf{r}^2 + a_3 r_0^2)B_2\mathbf{r}] \\
&d_{11} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{15(1-\nu)}, \quad d_{21} = -\frac{(3-\nu)(1-2\nu)}{15(1-\nu)} \\
&a_1 = \frac{(1+\nu)}{5\nu+7}, \quad a_2 = -\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{5\nu+7}, \quad a_3 = \frac{(1+\nu)(2\nu+3)}{5\nu+7}
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ρ, E, ν – плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала планеты, J, r_0 – момент инерции относительно оси Ox_3 и радиус недеформированной планеты, Ω_1 – орбитальная угловая скорость при движении планет по круговым орбитам. Симметрические матрицы B_1, B_2 с нулевым следом имеют вид

$$B_1 = \frac{1}{3} J^2 \omega_1^2 \operatorname{diag}\{-1,-1,2\}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \cos^2\psi - 1/3 & \sin 2\psi/2 & 0 \\ \sin 2\psi/2 & \sin^2\psi - 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}, \psi = (\omega_1 - \Omega_1)t \quad (2)$$

Поля перемещений $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ стационарны и определяют форму планеты, сплющенную по оси Ox_3 в результате воздействия центробежных сил инерции при ее вращении с угловой скоростью ω_1. Поле перемещений точек планеты $\mathbf{u}_3(r,t)$ определяет приливы в теле планеты, зависящие от времени в каждой точке планеты. Дифференцируя по времени поле перемещений (1) и учитывая зависимость от времени матрицы B_2 в (2) , получим поле скоростей точек планеты относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = Q[a_1 (\frac{\partial B_2}{\partial \psi}\mathbf{r},\mathbf{r})\mathbf{r} + (a_2 r^2 + a_3 r_0^2)\frac{\partial B_2}{\partial \psi}\mathbf{r}], \quad Q = 3\rho \mathrm{E}^{-1} \Omega_1^2 \omega, \quad \omega = \omega_1 - \Omega_1 \qquad (3)$$

Воспользуемся сферической системой координат (r,θ,φ), когда $x_1 = r\sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = r\cos\theta$, $0<\theta<\pi$, $\varphi \bmod 2\pi$, и найдем проекции поля скоростей (3) на ее оси

$$\begin{aligned} v_r &= Q[(a_1 + a_2) r^2 + a_3 r_0^2]\, r \sin^2\theta \sin 2(\varphi - \psi) \\ v_\theta &= Q(a_2 r^2 + a_3 r_0^2)\, r \sin\theta\cos\theta \sin 2(\varphi - \psi) \\ v_\varphi &= Q(a_2 r^2 + a_3 r_0^2) r \sin\theta \cos 2(\varphi - \psi) \end{aligned} \qquad (4)$$

Используя (4), вычислим компоненты тензора скоростей деформаций в сферической системе координат. Имеем [5]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} = Q[3(a_1 + a_2) r^2 + a_3 r_0^2] \sin^2\theta \sin 2(\varphi - \psi) \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = Q[a_1 r^2 \sin^2\theta + (a_2 r^2 + a_3 r_0^2)\cos^2\theta] \sin 2(\varphi - \psi) \\
\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} ctg\,\theta = Q[a_1 r^2 \sin^2\theta - a_2 r^2 - a_3 r_0^2] \sin 2(\varphi - \psi) \\
\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2}[\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}] = Q[(a_1 + 2a_2) r^2 + a_3 r_0^2] \sin\theta\cos\theta \sin 2(\varphi - \psi) \\
\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2}[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}] = Q[(a_1 + 2a_2) r^2 + a_3 r_0^2] \sin\theta \cos 2(\varphi - \psi) \\
\varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2r}[\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - v_\varphi ctg\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}] = Q(a_2 r^2 + a_3 r_0^2)\cos\theta \cos 2(\varphi - \psi)
\end{aligned} \qquad (5)$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ВНУТРИ ПЛАНЕТЫ

Диссипативные свойства материала однородной деформируемой планеты опишем линейной моделью Кельвина-Фойхта, полагая квадратичную по скоростям диссипативную функцию равной [2]

$$D[\mathbf{v}] = \frac{\varsigma}{2}\mathrm{I}^2 + \eta\,\mathrm{II} = \frac{3\varsigma - 2\eta}{6}\mathrm{I}^2 + \eta\sum_{\alpha,\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}^2$$

$$\mathrm{I} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}\,,\ \mathrm{II} = (\varepsilon_{rr} - \frac{\mathrm{I}}{3})^2 + (\varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\mathrm{I}}{3})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{\mathrm{I}}{3})^2 + 2\varepsilon_{r\theta}^2 + 2\,\varepsilon_{\theta\varphi}^2 + 2\varepsilon_{r\varphi}^2 \qquad (6)$$

Здесь ς, η – коэффициенты вязкости, отвечающие за скорость объемного расширения и изменение сдвиговых деформаций частиц тела.

Уравнение теплопроводности, описывающее распределение температуры внутри планеты, имеет вид [6]

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = k\,\Delta T + 2A\,D[\mathbf{v}] \qquad (7)$$

где c – удельная теплоемкость материала планеты, k – коэффициент теплопроводности, A – термический эквивалент работы. Диссипативная функция представляется $\pi/2$ – периодической функцией угла $(\varphi - \psi)$. Соответственно температурное поле $T(\mathbf{r},t)$ также окажется аналогичной периодической функцией, представленной суммой независящей от времени компоненты $T_0(\mathbf{r})$ и периодической функции с нулевым средним по времени. Найдем средние по времени значения правой и левой частей уравнения (7) и получим стационарное уравнение теплопроводности

$$k\,\Delta T_0 + 2A\langle D[\mathbf{v}]\rangle = 0,\ \ \langle D[\mathbf{v}]\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D[\mathbf{v}]\,d\,\varphi \qquad (8)$$

Граничные условия для уравнения (8) примем в виде

$$T_0(r_0,\theta) = T_* \qquad (9)$$

Здесь T_* – постоянная температура внешней среды, окружающей планету. Если иметь в виду Землю, окруженную атмосферой, температура поверхности которой определяется множеством различных факторов, то в качестве постоянной температуры поверхности T_* можно принять температуру атмосферы на высотах порядка 30 километров или температуру на глубинах порядка нескольких десятков метров, где влияние различных погодных вариаций температуры нивелируется. Как будет показано ниже, значение этой температуры имеет порядок нескольких сотен градусов Кельвина и суммируется с температурным полем, обращающимся в нуль на поверхности Земли.

Найдем решение уравнения (8) с граничным условием (9). Используя (5), (6), получим

$$\langle D[\mathbf{v}]\rangle = \frac{Q^2 a_1^2\,\eta}{2}\sum_{k=1}^{6} d_k\, f_k \qquad (10)$$

где

$$f_1 = r_0^4\,,\quad f_2 = r_0^2\, r^2\,,\quad f_3 = r_0^2\, r^2\cos^2\theta,\quad f_4 = r^4\,,\quad f_5 = r^4\cos^2\theta,\quad f_6 = r^4\cos^4\theta$$

$$\begin{aligned}
&d_1 = 4\,p_3^2\,,\qquad d_2 = p_3\,(8 + 16\,p_2),\qquad d_3 = -\,p_3\,(8 + 8\,p_2)\\
&d_4 = 13 + 24\,p_2 + 18p_2^2 + (5 + 2\,p_2)^2[\varsigma/(2\eta) - 1/3]\\
&d_5 = -22 - 32p_2 - 16p_2^2 - 2\,(5 + 2\,p_2)^2\,[\varsigma/(2\eta) - 1/3]\\
&d_6 = 9 + 8\,p_2 + 2p_2^2 + (5 + 2\,p_2)^2[\varsigma/(2\eta) - 1/3],\qquad p_2 = a_2/a_1,\quad p_2 = a_3/a_1
\end{aligned} \qquad (11)$$

Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}$$

Найдем частные решения уравнения Пуассона (8), когда температурное поле не зависит от угла φ. Используя (10), получим

$$\Delta F_k(r,\theta) = f_k(r,\theta), \; k=1,...,6$$

$$F_1 = \frac{r_0^4 r^2}{6}, \quad F_2 = \frac{r_0^2 r^4}{20}, \quad F_3 = \frac{r_0^2 r^4}{12}\cos^4\theta, \quad F_4 = \frac{r^6}{42} \tag{12}$$

$$F_5 = \frac{r^6}{12}\cos^4\theta - \frac{11}{180} r^6 \cos^6\theta, \quad F_6 = \frac{r^6}{30}\cos^6\theta$$

Представим уравнение (8) в виде

$$\Delta T_0(r,\theta) = -G\sum_{i=1}^{6} d_i g_i, \qquad G = AQ^2 a_1^2 \eta r_0^6 k^{-1} \tag{13}$$

$g_1 = 1$, $g_2 = x^2$, $g_3 = x^2 z^2$, $g_4 = x^4$, $g_5 = x^4 z^2$, $g_6 = x^4 z^4$, $x = r/r_0$, $z = \cos\theta$

Используя частные решения (12), найдем решение уравнения (13) в форме

$$T_0(x,z) = -G\sum_{i=1}^{6} d_i F_i r_0^{-6} + G\sum_{k=0}^{3} q_{2k} x^{2k} P_{2k}(\cos\theta) \tag{14}$$

$$P_0(z) = 1, \quad P_2(z) = \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}, \quad P_4(z) = \frac{35}{8}z^4 - \frac{15}{4}z^2 + \frac{3}{8}$$

$$P_6(z) = \frac{231}{16}z^6 - \frac{315}{16}z^4 + \frac{105}{16}z^2 - \frac{5}{8}$$

Здесь $P_k(z)$ – полиномы Лежандра [6]. Граничное условие в (9) соответствует $x = 1$ и представляется в виде

$$-\sum_{i=1}^{6} d_i F_i(r_0,\cos\theta) r_0^{-6} + \sum_{k=0}^{3} q_{2k} P_{2k}(\cos\theta) = T_* G^{-1} \tag{15}$$

Приравнивая в (15) коэффициенты при одинаковых степенях $\cos\theta$, получим систему линейных неоднородных уравнений относительно q_{2k}, $k = 0,1,2,3$. Поскольку матрица системы имеет нулевые члены, лежащие ниже главной диагонали, то ее решение находится в виде

$$\begin{aligned} &q_6 = -\frac{4}{945}d_5 + \frac{8}{3465}d_6, \quad q_4 = \frac{2}{105}d_3 + \frac{4}{385}d_6, \quad q_2 = \frac{1}{21}d_3 + \frac{1}{54}d_5 + \frac{1}{63}d_6 \\ &q_0 = T_* G^{-1} + \frac{1}{6}d_1 + \frac{1}{20}d_2 + \frac{1}{60}d_3 + \frac{1}{42}d_4 + \frac{5}{756}d_5 + \frac{19}{3465}d_6 \end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя значения коэффициентов (16) в формулу (14), получим распределение температуры внутри Земли

$$\begin{aligned} T_0(x,z) = T_* + G(1-x^2)\Big\{&\frac{1}{6}d_1 + \frac{1}{20}(1+x^2)d_2 + \frac{1}{420}(7-3x^2)d_3 + \frac{1}{42}(1+x^2+x^4)d_4 + \\ &+\frac{1}{756}(5-7x^2+2x^4)d_5 + \frac{1}{6930}(38-17x^2+10x^4)d_6 + \\ &+x^2z^2\left[\frac{1}{14}d_3 + \frac{1}{36}(1+x^2)d_5 + \frac{1}{462}(11-7x^2)d_6\right] + \frac{1}{22}x^4z^4 d_6\Big\} \end{aligned} \tag{17}$$

Определение числовых значений величин коэффициентов, входящих в полученные формулы, представляет определенные трудности, поскольку нет достоверных данных о характеристиках сплошной среды, образующей тело планеты. В используемой модели коэффициенты p_2, p_3 согласно формулам (10), (11) равны $p_2 = -2-\nu$, $p_3 = 3+2\nu$. Коэффициент Пуассона ν выражается через скорости продольных v_P и поперечных v_S волн в упругой сплошной среде, а именно, [3]

$$\nu = \frac{(v_P/v_S)^2 - 2}{2[(v_P/v_S)^2 - 1]}$$

Величины скоростей продольных и поперечных волн в Земле определяются методами сейсмологии.

Значительные сложности представляет определение коэффициентов диссипации энергии в материале планеты. Величины этих коэффициентов характеризуются добротностью материала. Распространена модель, неупругого тела Кельвина-Фойхта, когда коэффициент $\varsigma = 0$, что означает отсутствие диссипации при объемном сжатии или расширении материала планеты [7]. В этом случае неупругие свойства сплошной среды характеризуются одним коэффициентом η. Описанная ситуация имеет место в случае вязкой несжимаемой жидкости. В случае Земли это условие выполняется в жидкой сферической оболочке, расположенной на глубине порядка 2900 км до глубины порядка 5100 км, где отсутствуют продольные волны растяжения-сжатия.

Другой доступный для измерения параметр представляется суммарной величиной энергии излучаемой с поверхности планеты. Это обстоятельство позволяет оценить величину коэффициента G в формуле (17). Примем мощность этого излучения равной мощности производимой в теле планеты энергии за счет внутреннего трения

$$W = 2\int_V D[\mathbf{v}]\, r^2 \sin\theta \, d\, r\, d\theta\, d\varphi$$

Воспользовавшись (10), найдем

$$W = 2\pi Q^2 a_1^2 \eta \sum_{k=1}^{6} d_k \int_0^{r_0}\int_0^{\pi} f_k\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta = 4\pi r_0^2\, \sigma \qquad (18)$$

где σ – средняя величина мощности теплового излучения с поверхности планеты. Вычисляя интегралы в (18) получим

$$Q^2 a_1^2 \eta = \frac{\sigma}{d_0\, r_0^5}, \quad d_0 = \frac{1}{3} d_1 + \frac{1}{5} d_2 + \frac{1}{15} d_3 + \frac{1}{7} d_4 + \frac{1}{21} d_5 + \frac{1}{35} d_6 \Rightarrow \quad G = \frac{A r_0 \sigma}{k\, d_0} \qquad (19)$$

Таким образом, можно определить все коэффициенты в выражении температурного поля (17), проистекающего вследствие выделения тепла из-за деформаций, вызванных приливами.

В случае двух гравитационных центров, порождающих приливы в теле планеты, квадратичный по скоростям диссипативный функционал представляется в форме

$$D[\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2] = (L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (L\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + 2(L\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (L\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)$$

где $L-$ линейный симметрический дифференциальный оператор, порождающий диссипативную функцию. Допустим, что поля скоростей $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, периодические по углам φ_1, φ_2, имеют различные по времени нерезонансные периоды, определяемые движением двух притягивающих центров в системе координат, связанной с планетой. Тогда в результате усреднения диссипативной функции по углам φ_1, φ_2 получим $\langle (L\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \rangle = 0$. Следовательно, температурные поля определяются независимым образом для каждой приливной деформации по описанной выше методике, при условии замены величины Q^2 на сумму $Q_1^2 + Q_2^2$ в коэффициенте (13), где согласно (3)

$$Q_k = 3\rho\, \mathrm{E}^{-1} \Omega_k^2\, \omega_{1k}, \quad \omega_{1k} = \omega_1 - \Omega_k, \quad k = 1,2$$

Влияние двух притягивающих центров на формирование температурного поля планеты эквивалентно одному центру с соответствующими параметрами.

Ситуация с двумя гравитационными центрами существенна для Земли, когда приливы порождаются притяжением Луны и Солнца. Вообще говоря, количество гравитационных центров, вызывающих приливы, равно $N-1$, если рассматривается задача о движении системы N вязкоупругих шаров [4].

3.ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ, ПОРОЖДАЕМОЕ ПРИЛИВАМИ.

Оценим температурное поле Земли, используя имеющиеся в литературе оценки значений различных физических величин [1,8].

Будем считать, что диссипативные свойства вязкоупругого материала Земли описываются упрощенной моделью Кельвина - Фойхта, когда $\varsigma = 0$. При этом допущении рассеяние энергии определяется деформациями сдвига (девиаторная часть тензора скоростей деформаций) и пропорционально коэффициенту вязкости η. Заметим, что диссипативный фактор земных недр описывается в литературе их добротностью, значения которой имеют существенный разброс. Коэффициент Пуассона примем равным $\nu = 0.3$, что соответствует значениям скоростей продольной волны 13 км/с и поперечной волны 7 км/с на глубине 2000 км [1] . Коэффициенты в формулах (13), (19) оказываются равными

$$\begin{aligned} &p_2 = -2-\nu = -2.3, \quad p_3 = 3+2\nu = 3.6, \quad r_0 = 6.371\cdot 10^6 \text{ м} \\ &d_1 = 51.84, \quad d_2 = -103.68, \quad d_3 = 27.44 \\ &d_4 = 52.97, \quad d_5 = -32.93, \quad d_6 = 1.127, \quad d_0 = 4.404 \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя значения коэффициентов (20) в формулу (17), получим

$$\frac{T_0 - T_*}{G} = (1-x^2)[5.129 - 3.888x^2 + 1.176x^4 + z^2x^2(1.7857 - 0.9315x^2) + 0.0512z^4x^4] \tag{21}$$

График функции (21) представлен на рисунке 1, а на рисунке 2 – графики двух функций, полученных из (21) при $z = 0$ и $z = 1$, описывающих изменение температуры на экваторе (кривая 1) и на полюсе (кривая 2). Как следует из рисунка 1, температура Земли монотонно возрастает при приближении к центру Земли. Из вида графиков на рисунке 2 следует, что при приближении к центру Земли по радиусам, проходящим через точку экватора Земли или через ее полюс, температура монотонно возрастает и оказывается большей в соответствующих точках, лежащих на полярном радиусе, нежели в точках на экваториальном радиусе.

Используя формулу (21), вычислим градиент температурного поля на поверхности Земли

$$\nabla T_0(z) = -\frac{2G}{r_0}(2.417 + 0.854z^2 + 0.0512z^4) \Rightarrow G = -\frac{r_0 \ \nabla T_0(z)}{2\ (2.417 + 0.854z^2 + 0.0512z^4)} \tag{22}$$

Из формулы (22) следует, что тепловой поток на полюсе $(z^2 = 1)$ больше теплового потока на экваторе $(z = 0)$, а их отношение $\nabla T_0(1,1)/\nabla T_0(1,0) = 1.374$.

В литературе существуют различные оценки величины градиента температурного поля. Полагая согласно [1] $\nabla T = 0.02$ К м^{-1} и $z = 0$, определим коэффициент G по формуле (22) $G = 2.766\cdot 10^4$. В результате температура в центре Земли оказывается равной $T_0 = T_* + 137318$ K.

Если принять $\nabla T = 0.01$ К м^{-1} и $z = 1$, то получим $G = 1.006\cdot 10^4$, а температуру в центре Земли $T_0 = T_* + 49970$ K

Тепловой поток с поверхности Земли примем равным [1]

$$\sigma = 1.48\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{кал}}{\text{см}^2\text{с}} = 6.2\ 10^{-2}\ \frac{\text{дж}}{\text{м}^2\ \text{с}}$$

Согласно закону теплопроводности Фурье $A\sigma = k\nabla T$, где ∇T – градиент температуры, равный увеличению температуры Земли при изменении глубины на один метр. Отсюда получим $A\sigma / k = \nabla T$ и далее, используя (20) и полагая согласно [1] $\nabla T = 0.02$ К м^{-1}, получим $G = r_0\, d_0^{-1} \nabla T = 1.8226\cdot 10^4$ K.

Подставляя в формулу (21) $x = 0$, найдем температуру в центре Земли $T_0(0,z) = T_* + 90382$ K. Температура T_* соответствует средней температуре поверхности

Земли и оценивается величиной порядка 280 К (температура на глубине 10 метров, где не значительно влияние атмосферных эффектов). Если градиент температуры у поверхности Земли принять равным $\nabla T = 0.01 \text{ К м}^{-1}$, то температура в центре Земли окажется равной $T_0(0,z) = T_* + 45191 \text{ К}$.

Для оценки коэффициента G примем коэффициент теплопроводности в среднем для Земли $k = 2$ дж $\text{м}^{-1}\text{с}^{-1}\text{ К}^{-1}$ и получим $\nabla T = \sigma / k = 0.031 \text{Км}^{-1}$, $G = 3.898 \cdot 10^4$ К. В результате температура в центре Земли будет равна $T_0(0,z) = T_* + 193302$ К.

Вычислим коэффициент вязкости материала Земли η, соответствующий выделяемому в Земле теплу вследствие диссипации энергии. Используя формулу (19), получим

$$\eta = \frac{\sigma}{Q^2 a_1^2 r_0^5 d_0}$$

Примем следующие значения коэффициентов, характеризующие свойства материала Земли и параметры ее движения

$\text{Е} = 10^{11} \text{ Н м}^{-2}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 5 \cdot 10^3 \text{ кг м}^{-3}$, $\omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $\Omega_1 = 2.69 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$

Далее получим

$$Q = 7.891 \cdot 10^{-26} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1}, \quad a_1 = 0.121$$

В результате значение коэффициента вязкости материала Земли оказывается равным $\eta = 1.55 \cdot 10^{14}$ Па $\cdot$ с. Имеющиеся в литературе оценки коэффициентов вязкости различных слоев Земли, лежат в диапазоне $10^7 - 10^{23}$ пуазы [8].

Приведенные выше оценки имеют значительный разброс как следствие недостаточно точных значений физических характеристик Земли.

Если тепловой поток, излучаемый с поверхности Земли разделить на две части, одна из которых соответствует отводу тепла, генерируемому приливами, а вторая отводу тепла, порождаемому радиоактивным распадом земного вещества, то при расчетах температурного поля, порождаемого приливами, следует учитывать соответствующую часть теплового потока σ, что приведет к уменьшению составляющей температуры в центре Земли, обусловленной приливами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 080800600, 080200367).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жарков В.Н.* Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука. 1983.
2.*Жермен П.* Курс механики сплошных сред. Общая теория. М.: Высшая школа. 1983.
3.*Вильке В.Г.*Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил// ПММ.1980. Т.44. Вып. 3. С. 395 – 402.
4. *Вильке В.Г* О движении деформируемых планет и устойчивости их стационарных движений//Космич. исслед. 2010. Т.48. № 3. С.279-288.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат. 1953. Издание второе.
6. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика Часть 2. М.: Физматгиз. 1963.
7.*УиттекерЭ.Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции М.: Физматгиз 1963.
8. *Сидоренко Н.С.* Физика нестабильностей вращения Земли. М.: Физматлит.2002.

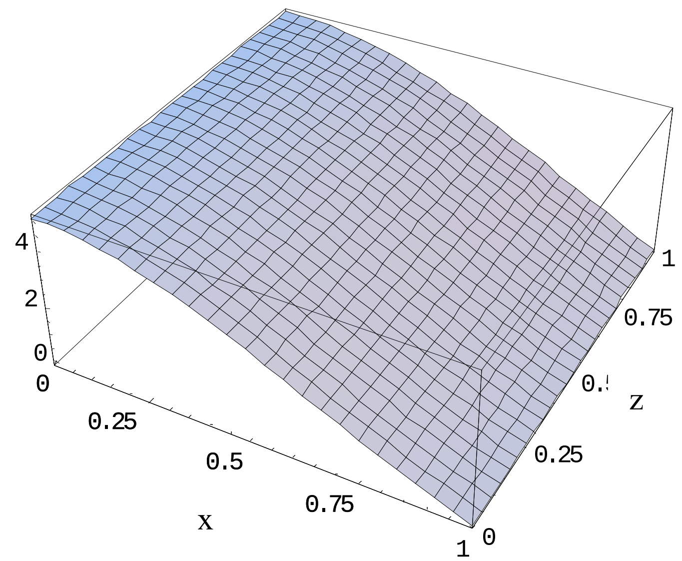

Рисунок 1.

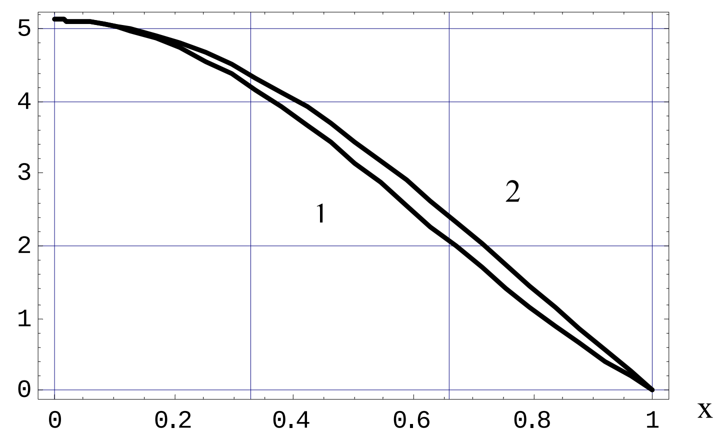

Рисунок 2.

АННОТАЦИЯ

ВЛИЯНИЕ ПРИЛИВОВ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛАНЕТЫ

В.Г.Вильке, А.Н.Данилкин

Определяется температурное поле внутри планеты вследствие выделения тепла за счет приливных деформаций планеты. Приливные деформации возникают как следствие гравитационного взаимодействия планеты с другим небесным телом, вращающимся относительно планеты по круговой орбите. Предполагается, что собственная угловая скорость вращения планеты относительно ее центра масс постоянна и ортогональна к плоскости орбиты второй планеты. Деформации планеты описываются линейной моделью вязкоупругого тела Кельвина-Фойхта. Найденное поле температур представлено в сферической системе координат и не зависит от долготы, по которой проводилось усреднение, обусловленное собственным вращением планеты. Температура внутри планеты монотонно возрастает при приближении к центру планеты, а ее значения в точках, лежащих на полярном радиусе планеты превосходят ее значения в соответствующих точках, лежащих на экваториальном радиусе. Приведены числовые оценки параметров температурного поля Земли, порождаемого лунными приливами.

INFLUENCE OF TIDES ON THE TEMPERATURE FIELD OF THE PLANET

V.G.Vil'ke, A.N.Danilkin