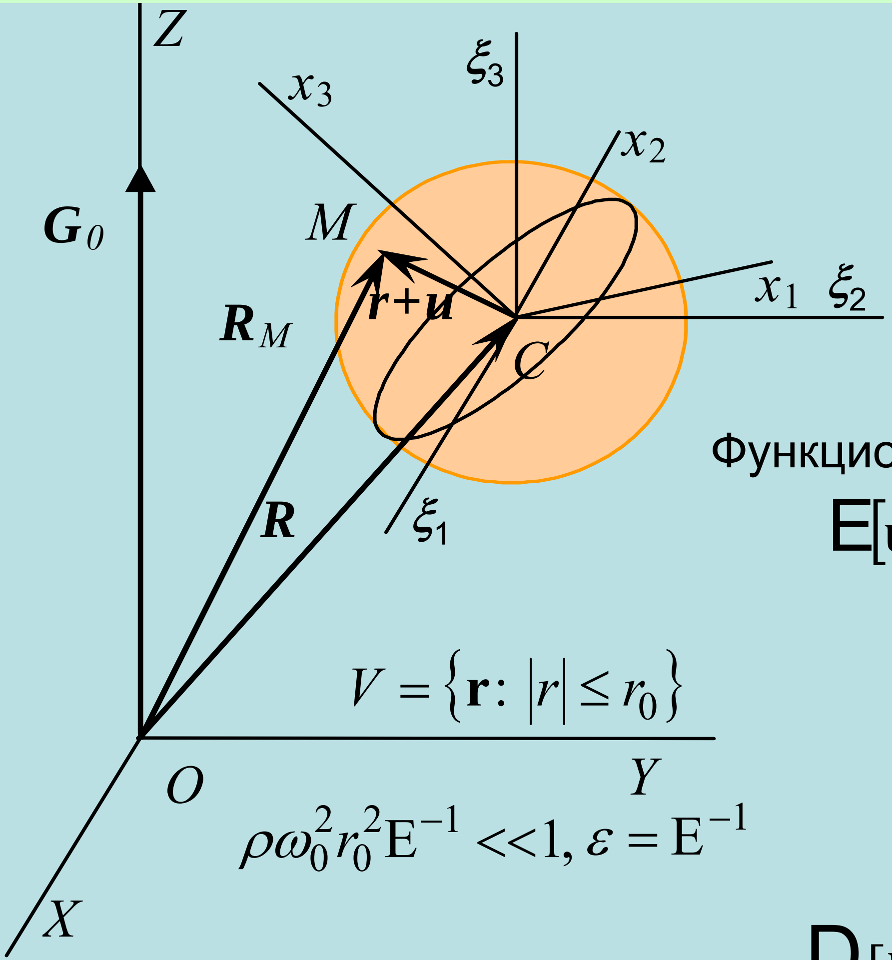
О модели вязкоупругого шара в задачах небесной механики

Шатина А.В.

ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ШАРА В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ



$$\mathbf{R}_M(\mathbf{r},t) = \mathbf{R}(t) + \Gamma(t)(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r},t)) \qquad (1)$$

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{m}\int_V \mathbf{R}_M(\mathbf{r},t)\rho\, dx,$$

$$\int_V \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rho\, dx = \mathbf{0},\ \int_V \operatorname{rot}\mathbf{u}\,\rho\, dx = \mathbf{0},\ dx = dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (2)$$

$$V = \{\mathbf{r}:\ |r| \le r_0\}$$

$$\rho\omega_0^2 r_0^2 \mathrm{E}^{-1} << 1,\ \varepsilon = \mathrm{E}^{-1}$$

Функционал потенциальной энергии упругих деформаций

$$\mathsf{E}[\mathbf{u}] = \int_V \alpha_1 (I_{\mathrm{E}}^2 - \alpha_2 II_{\mathrm{E}})dx, \quad \alpha_1 > 0,\ 0 < \alpha_2 < 3 \qquad (3)$$

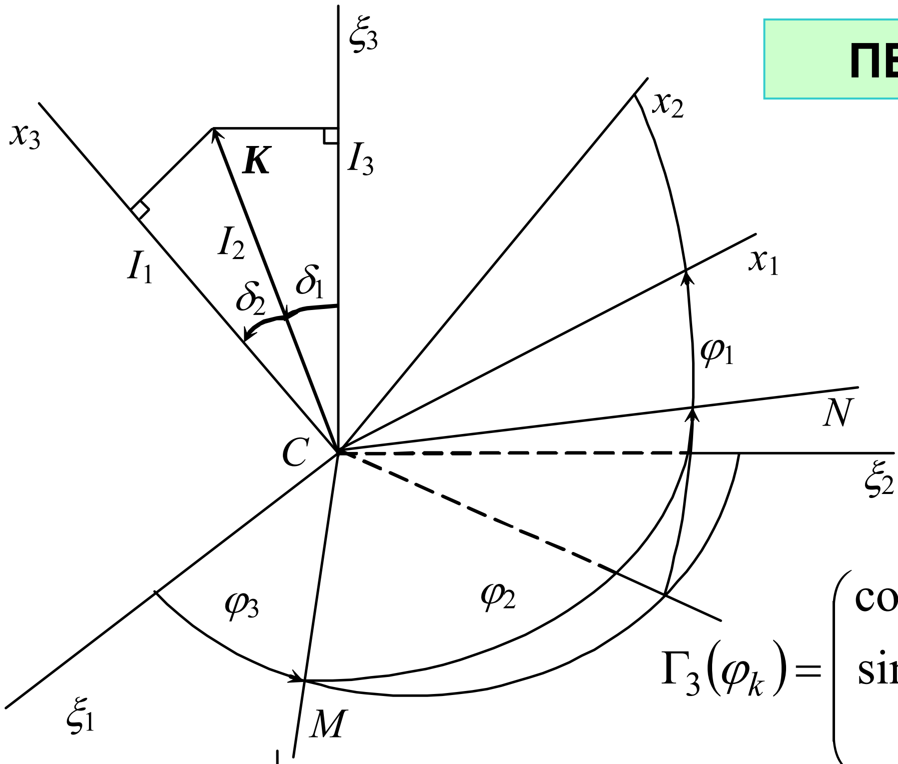
$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{E}(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)},\quad \alpha_2 = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}$$

$$I_{\mathrm{E}} = \sum_{i=1}^{3} e_{ii},\ \ II_{\mathrm{E}} = \sum_{i<j}^{3}(e_{ii}e_{jj} - e_{ij}^2),\ e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$\mathsf{D}[\dot{\mathbf{u}}] = \chi \mathsf{E}[\dot{\mathbf{u}}]$ – диссипативный функционал

$$T = \frac{1}{2}\int_V \dot{\mathbf{R}}_M^2 \rho dx = \frac{1}{2}\int_V \left[\Gamma^{-1}\dot{\mathbf{R}} + \text{щ}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}\right]^2 \rho dx, \qquad \text{щ}\times(\cdot) = \Gamma^{-1}\dot{\Gamma}(\cdot) \qquad (4)$$

$$\Pi = -\gamma \int_V \frac{\rho dx}{\sqrt{(\mathbf{R} + \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u}))^2}} \qquad (5)$$



ПЕРЕМЕННЫЕ АНДУАЙЕ $I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

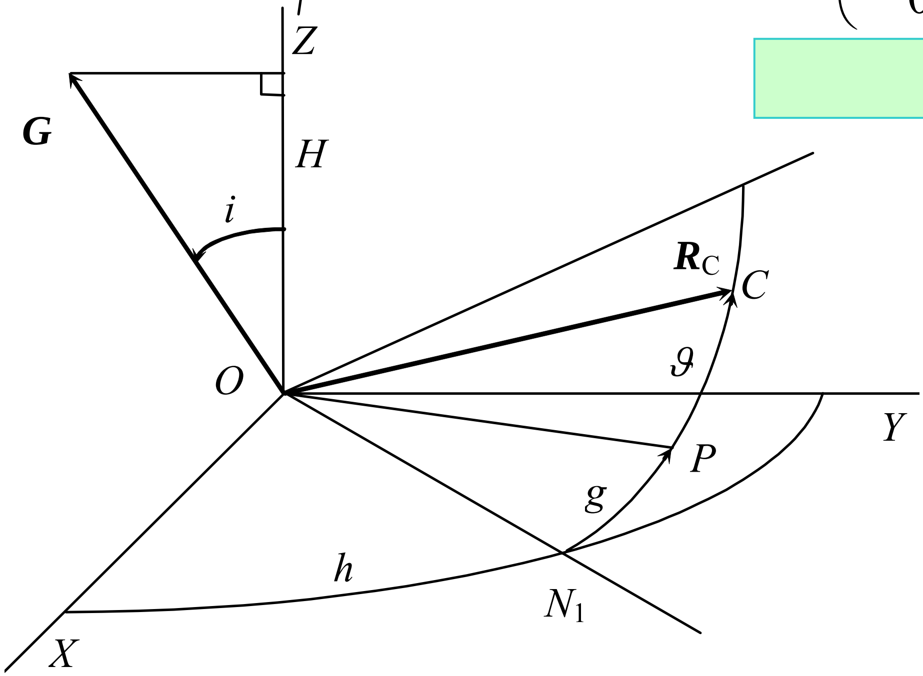
$$\mathbf{K} = \int\limits_V \mathbf{o} \times \dot{\mathbf{o}} \rho dx, \quad \mathbf{o} = \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u})$$

$$I_2 = |\mathbf{K}|, \quad \Gamma^{-1}\mathbf{K} = \left(\sqrt{I_2^2 - I_1^2}\sin\varphi_1, \sqrt{I_2^2 - I_1^2}\cos\varphi_1, I_1\right)$$

$$\cos\delta_1 = \frac{I_3}{I_2}, \quad \cos\delta_2 = \frac{I_1}{I_2}$$

$$\Gamma = \Gamma_3(\varphi_3)\Gamma_1(\delta_1)\Gamma_3(\varphi_2)\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1)$$

$$\Gamma_3(\varphi_k) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k & 0 \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1(\delta_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta_j & -\sin\delta_j \\ 0 & \sin\delta_j & \cos\delta_j \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} k = 1,2,3, \\ j = 1,2. \end{array}$$



ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЛОНЕ L, G, H, l, g, h

$$G = |\mathbf{G}|, L = \sqrt{\gamma m^2 a}, H = G\cos i$$

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}}^2 - \frac{\gamma m}{R} = -\frac{\gamma^2 m^3}{2L^2}, \mathbf{R} = \Gamma_3(h)\Gamma_1(i)\Gamma_3(g + \vartheta)\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{G^2}{\gamma m^2(1 + e\cos\vartheta)}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}, \quad \cos w = \frac{e + \cos\vartheta}{1 + e\cos\vartheta}, \quad l = w - e\sin w$$

ФУНКЦИОНАЛ РАУСА

$$\mathsf{R} = \mathsf{R}[I_1, I_2, I_3, L, G, H, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l, g, h, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}] =$$

$$= -\frac{\gamma^2 m^3}{2L^2} + \frac{I_2^2}{2A} - \frac{1}{A}(\mathbf{k}, \int_V \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} \rho\, dx) - \frac{1}{2A^2}(J_1[\mathbf{u}]\mathbf{k}, \mathbf{k}) +$$

$$+ \frac{\gamma}{R^3} \int_V \left[(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - 3(\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0, \mathbf{r})(\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0, \mathbf{u})\right] \rho dx + \mathsf{E}[\mathbf{u}] + \mathsf{R}^{**}, \qquad (6)$$

$$J_1[\mathbf{u}]\mathbf{k} = \int_V (\mathbf{r} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{u}] + \mathbf{u} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{r}]) \rho dx, \quad \mathbf{k} = \Gamma^{-1}\mathbf{K}$$

$$\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0 = \Gamma_3(-\varphi_1)\Gamma_1(-\delta_2)\Gamma_3(-\varphi_2)\Gamma_1(-\delta_1)\Gamma_3(h - \varphi_3)\Gamma_1(i)\Gamma_3(g + \vartheta)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Уравнения движения:

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial \mathsf{R}}{\partial \varphi_k}, \quad \dot{L} = -\frac{\partial \mathsf{R}}{\partial l}, \quad \dot{G} = -\frac{\partial \mathsf{R}}{\partial g}, \quad \dot{H} = -\frac{\partial \mathsf{R}}{\partial h},$$

$$\dot{\varphi}_k = \frac{\partial \mathsf{R}}{\partial I_k}, \quad \dot{l} = \frac{\partial \mathsf{R}}{\partial L}, \quad \dot{g} = \frac{\partial \mathsf{R}}{\partial G}, \quad \dot{h} = \frac{\partial \mathsf{R}}{\partial H}, \qquad k = 1,2,3 \qquad (7)$$

$$\left(-\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathsf{R} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathsf{R} + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathsf{D} + \text{л}_1, \delta\mathbf{u}\right)_V + \int_V (\text{л}_2, rot\,\delta\mathbf{u}) dx = 0, \quad \forall \delta\mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3 \qquad (8)$$

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

$$\dot{I}_1 = -\Delta\omega_4^4\left(1-e^2\right)^{-9/2}\cos\delta_2\left\{\frac{1+z^2}{2}F_1(e)\omega_2 - zF_2(e)\omega_4\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right\}$$

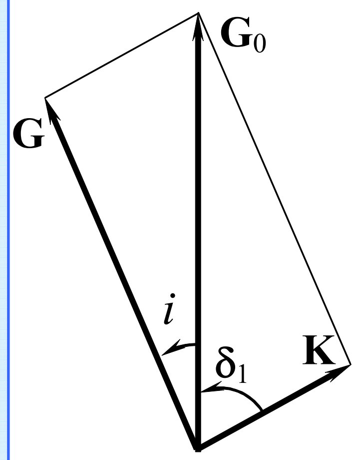
$$\dot{I}_2 = -\Delta\omega_4^4\left(1-e^2\right)^{-9/2}\left\{\frac{1+z^2}{2}F_1(e)\omega_2 - zF_2(e)\omega_4\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right\}$$

$$\dot{I}_3 = -\Delta\omega_4^4\left(1-e^2\right)^{-9/2}\left\{\frac{1}{2}(z\cos i+\cos\delta_1)F_1(e)\omega_2 - \cos i F_2(e)\omega_4\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right\}$$

$$\dot{L} = \Delta\omega_4^4\left(1-e^2\right)^{-6}\left\{zF_2(e)\omega_2 - F_3(e)\omega_4\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right\}$$

$$\dot{G} = \Delta\omega_4^4\left(1-e^2\right)^{-9/2}\left\{zF_1(e)\omega_2 - F_2(e)\omega_4\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right\} \qquad (9)$$

$$\dot{H} = -\dot{I}_3$$



$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{K}$$

$$\Delta = 18\varepsilon\chi\rho^2 D_2,\ D_2 = \frac{4\pi r_0^7(1+\nu)(9\nu+13)}{105(5\nu+7)},\ \omega_4 = \frac{\gamma^2 m^3}{L^3},\ \omega_2 = \frac{I_2}{A},\ \cos\delta_1 = \frac{I_3}{I_2},\ \cos\delta_2 = \frac{I_1}{I_2}$$

$$\cos i = H/G,\quad z = \cos(\delta_1 + i) = \frac{G_0^2 - G^2 - I_2^2}{2I_2G},\quad e^2 = 1 - G^2/L^2$$

$$F_1(e) = 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4,\quad F_2(e) = 1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6,\quad F_3(e) = 1 + \frac{31}{2}e^2 + \frac{255}{8}e^4 + \frac{185}{16}e^6 + \frac{25}{64}e^8$$

$$\boxed{\frac{I_1(t)}{I_2(t)} = \frac{I_1(0)}{I_2(0)},\qquad I_3 + H = G_0,\quad G\sin i = I_2\sin\delta_1} \qquad (10)$$

Стационарное решение: $e = 0,\ i = 0,\ \delta_1 = 0,\ \omega_2 = \omega_4$

1) $G_0 < \frac{4}{3}\sqrt[4]{3A\gamma^2 m^3}$

нет стационарных решений

2) $G_0 = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3A\gamma^2 m^3}$

одно стационарное решение $(R_* = \sqrt{1{,}2 r_0})$

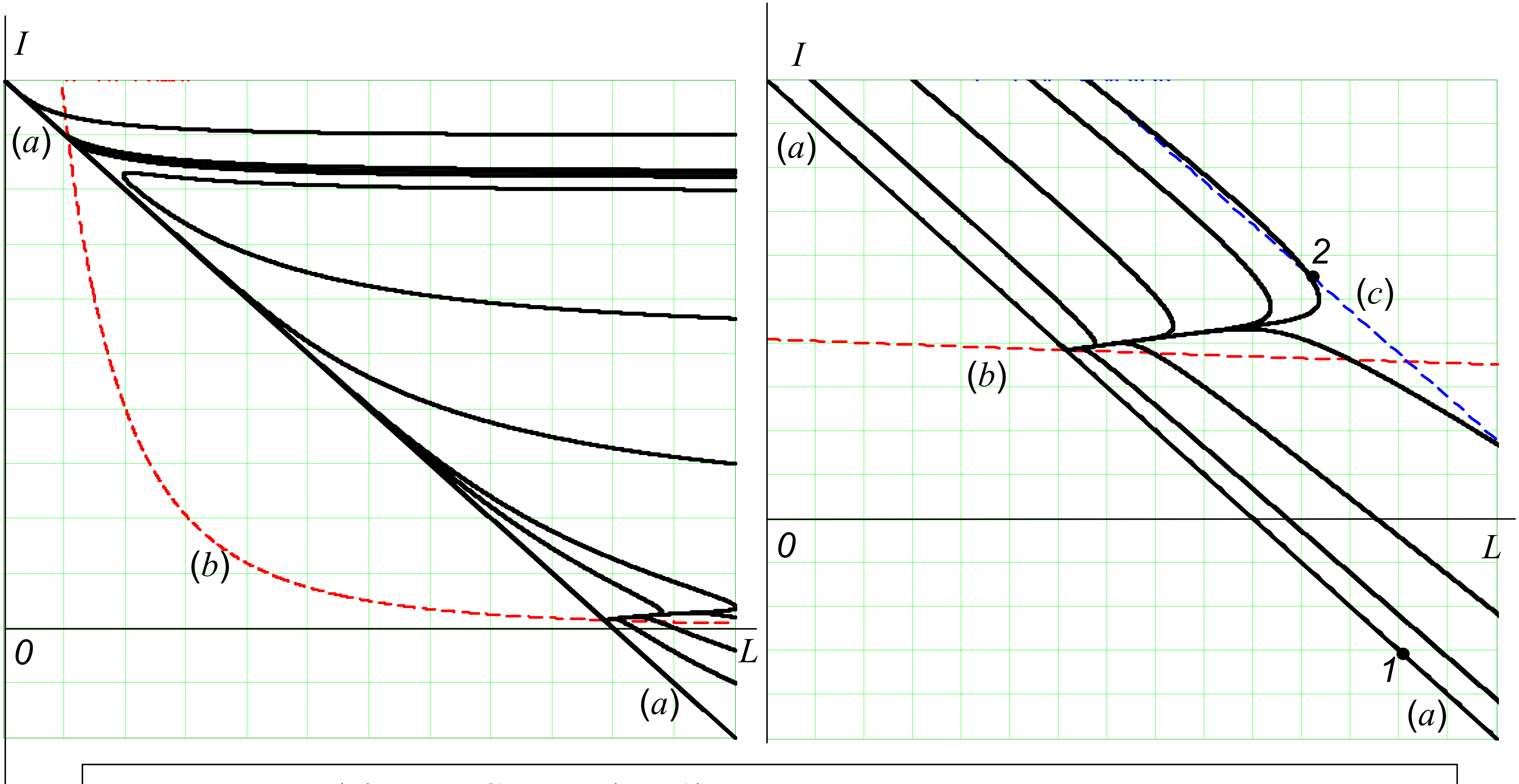
3) $G_0 > \frac{4}{3}\sqrt[4]{3A\gamma^2 m^3}$

два стационарных решения $(R_1 < R_* < R_2)$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\Delta}{2G}\omega_4^4\left(1-e^2\right)^{-9/2} F_1(e)\omega_2 \sin(\delta_1 + i)$$

$$\dot{\delta}_1 = \frac{\Delta\omega_4^4 \sin(\delta_1 + i)}{I_2(1-e^2)^6}\left\{\frac{z}{2}\omega_2(1-e^2)^{3/2} F_1(e) - \omega_4 F_2(e)\right\}$$

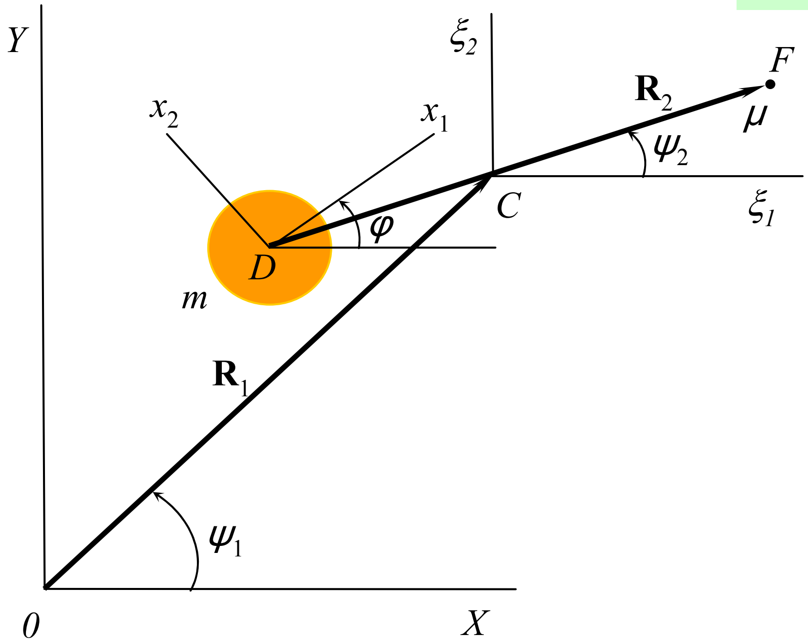
$$\dot{e} = -\frac{\Delta e \omega_4^4}{G(1-e^2)^6}\left\{9\left(1+\frac{15e^2}{4}+\frac{15e^4}{8}+\frac{5e^6}{64}\right)\omega_4 - \frac{11}{2}\left(1+\frac{3e^2}{2}+\frac{e^4}{8}\right)\left(1-e^2\right)^{3/2} z\omega_2\right\}$$



$$I + G = G_0 \qquad (a):\ I = G_0 - L \ \ (e=0)$$

$$(b):\ I = \frac{A\gamma^2 m^3}{L^3} \ \ (\omega_2 = \omega_4) \qquad (c):\ I = G_0 - \sqrt{0{,}9559}\,L \ \ (e = 0.21)$$

ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ДВОЙНОЙ ПЛАНЕТЫ



$$\mathrm{R}_2 << R_1$$

$$\mu << m << 1$$

$$T = \frac{1}{2}(m+\mu)\dot{\mathbf{R}}_1^2 + \frac{1}{2}m_r\dot{\mathbf{R}}_2^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \{[\mathbf{щ}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})]^2 + 2(\mathbf{щ}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u}),\dot{\mathbf{u}}) + \dot{\mathbf{u}}^2\}\rho dx$$

$$m_r = \frac{\mu m}{m+\mu}, \quad \mathbf{щ} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$$

$$\Pi = -\frac{f\mu}{\sqrt{\left(\mathbf{R}_1 + m(m+\mu)^{-1}\mathbf{R}_2\right)^2}} - \int_\Omega \frac{f\rho dx}{\sqrt{\left(\mathbf{R}_1 - \mu(m+\mu)^{-1}\mathbf{R}_2 + \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})\right)^2}} -$$

$$-\int_\Omega \frac{\mu f\rho dx}{\sqrt{\left(-\mathbf{R}_2 + \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})\right)^2}} + \mathsf{E}[\mathbf{u}], \; \mathsf{D}[\dot{\mathbf{u}}] = \chi\mathsf{E}[\dot{\mathbf{u}}]$$

Эволюционная система уравнений движения:

$$\dot{\Lambda}_1 = -18\varepsilon\chi\rho^2 D_2 \omega_1^4 (\omega_1 - \omega_3)$$

$$\dot{\Lambda}_2 = -18\varepsilon\chi\rho^2 D_2 \frac{\mu^2 \omega_2^4}{(m+\mu)^2} (\omega_2 - \omega_3)$$

$$\dot{I} = -\dot{\Lambda}_1 - \dot{\Lambda}_2$$

(11)

$$\dot{\Lambda}_1 = -\frac{\Delta}{\Lambda_1^{12}} [\frac{k}{\Lambda_1^3} - G_0 + \Lambda_1 + n\tilde{\Lambda}_2]$$

$$\dot{\tilde{\Lambda}}_2 = -\frac{\text{ж}\Delta}{\tilde{\Lambda}_2^{12}} [\frac{k}{\tilde{\Lambda}_2^3} - G_0 + \Lambda_1 + n\tilde{\Lambda}_2]$$

(12)

$$R_1 = \frac{\Lambda_1^2}{f(m+\mu)^2},\ R_2 = \frac{\Lambda_2^2}{f_0 m_r^2},\ f_0 = f(m+\mu)$$

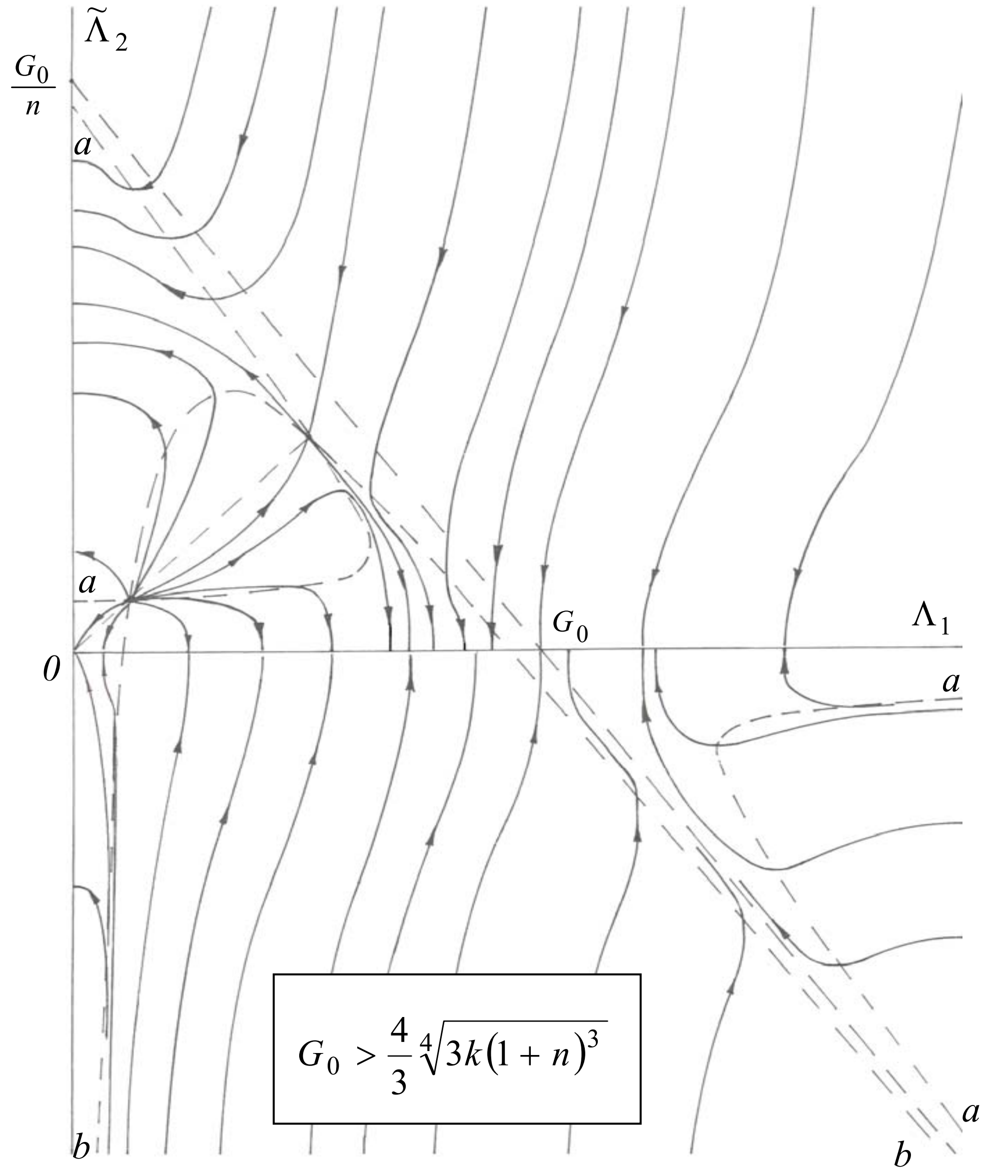
$$\omega_1 = \frac{f^2 (m+\mu)^3}{\Lambda_1^3},\ \omega_2 = \frac{f_0^2 m_r^3}{\Lambda_2^3},\ \omega_3 = \frac{I}{A}$$

$$\Delta = 18\varepsilon\chi\rho^2 D_2 f^8 (m+\mu)^{12} A^{-1}$$

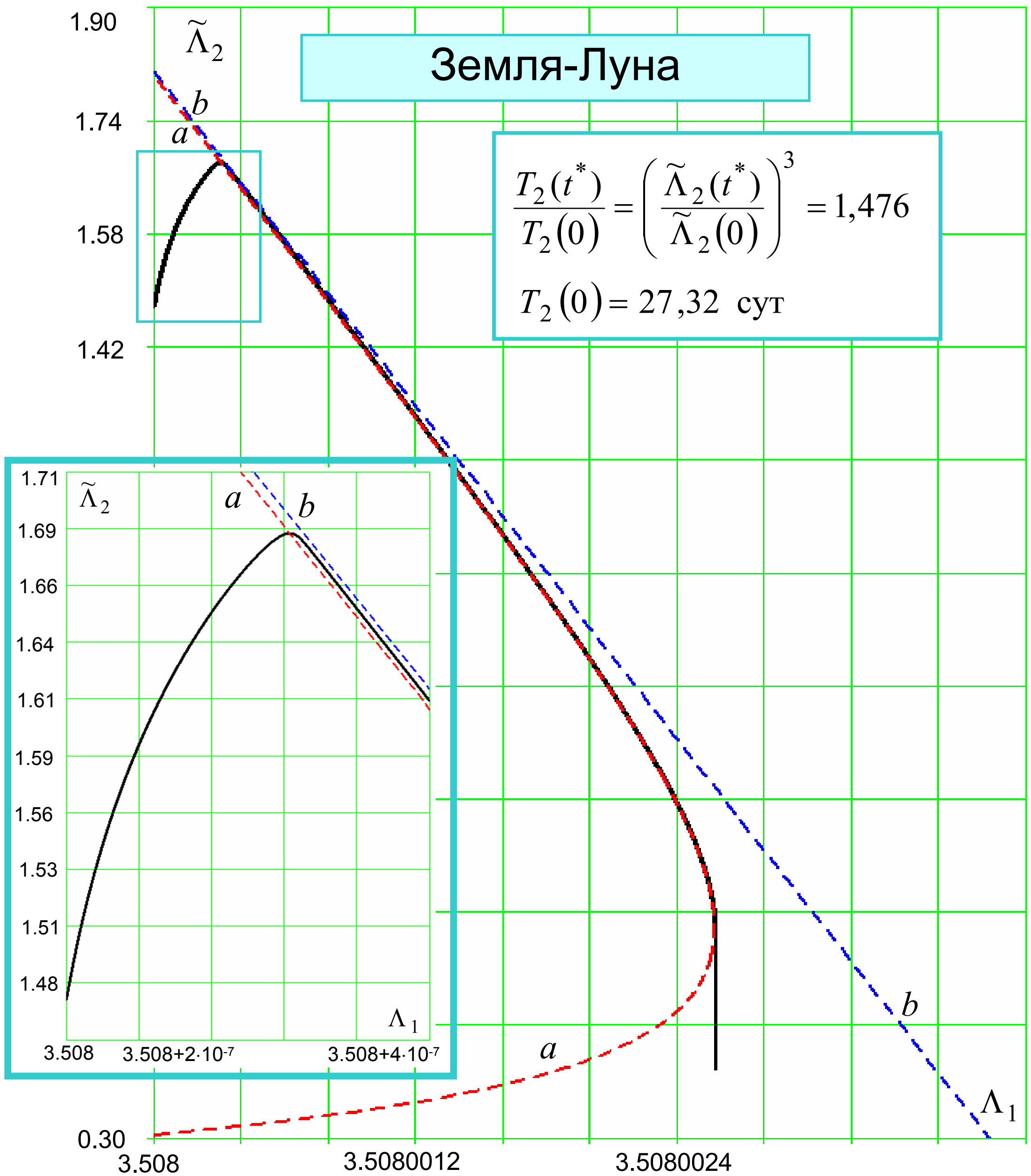
$$\tilde{\Lambda}_2 = \frac{(m+\mu)^{4/3}}{\mu m} \Lambda_2, R_2 = \frac{\tilde{\Lambda}_2^2}{f(m+\mu)^{5/3}}$$

$$\text{ж} = \frac{\mu}{m(m+\mu)^{2/3}}, \quad n = \frac{\mu m}{(m+\mu)^{4/3}},$$

$$k = Af^2 (m+\mu)^3$$



$\tilde{\Lambda}_2$
$\frac{G_0}{n}$
a
a
0
G_0
Λ_1
a
a
b
b
$G_0 > \frac{4}{3}\sqrt[4]{3k(1+n)^3}$



Земля-Луна
$$\frac{T_2(t^*)}{T_2(0)} = \left(\frac{\tilde{\Lambda}_2(t^*)}{\tilde{\Lambda}_2(0)}\right)^3 = 1{,}476$$
$T_2(0) = 27{,}32$ сут
$\tilde{\Lambda}_2$
Λ_1
a
b
1.90
1.74
1.58
1.42
0.30
3.508
3.5080012
3.5080024
1.71
1.69
1.66
1.64
1.61
1.59
1.56
1.53
1.51
1.48
3.508+2·10-7
3.508+4·10-7

Деформации вязкоупругой планеты, вызываемые полем гравитационных сил и сил инерции

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_1 = \varepsilon(\mathbf{u}_{10} + \mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{120} - \chi \dot{\mathbf{u}}_{120} + \mathbf{u}_{130} - \chi \dot{\mathbf{u}}_{130})$$

$$\mathbf{u}_{10} = \frac{2}{3}\rho\omega^2[d_1 r^2 + d_2 r_0^2]\mathbf{r}$$

$$\mathbf{u}_{11} = \rho\left\{ a_1\left[\frac{1}{6}\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{щ},\mathbf{r})^2\right]\mathbf{r} + (a_2 r^2 + a_3 r_0^2)\left[\frac{1}{3}\omega^2\mathbf{r} - (\mathbf{щ},\mathbf{r})\mathbf{щ}\right]\right\}$$

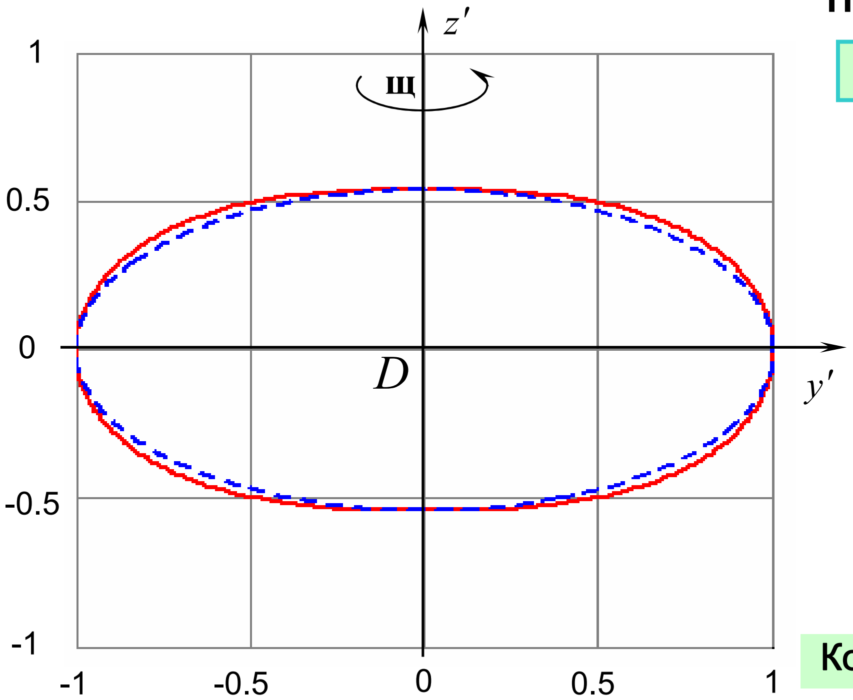
$$\mathbf{u}_{120} = -\frac{3\rho f m_2}{R_2^3}\left\{ a_1\left[\frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{o}_2,\mathbf{r})^2\right]\mathbf{r} + (a_2 r^2 + a_3 r_0^2)\left[\frac{1}{3}\mathbf{r} - (\mathbf{o}_2,\mathbf{r})\mathbf{o}_2\right]\right\}$$

$$\mathbf{u}_{130} = -\frac{3\rho f m_3}{Q_1^3}\left\{ a_1\left[\frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{o}_1,\mathbf{r})^2\right]\mathbf{r} + (a_2 r^2 + a_3 r_0^2)\left[\frac{1}{3}\mathbf{r} - (\mathbf{o}_1,\mathbf{r})\mathbf{o}_1\right]\right\}$$

$$\mathbf{o}_1 = \Gamma^{-1}\mathbf{Q}_1 / Q_1,\ \ \mathbf{o}_2 = \Gamma^{-1}\mathbf{R}_2 / R_2,\quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{OD},\ \mathbf{R}_2 = \mathbf{DF}$$

$$a_j = a_j(\nu),\ d_i = d_i(\nu),\ j = 1,2,3,\ i = 1,2$$

О ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАНЕТЫ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ПРИТЯГИВАЮЩЕГО ЦЕНТРА И СПУТНИКА



$\alpha = 1,\ \beta = 0.2,\ \gamma = 0.26$

ν	Е ($Н/м^2$)	$\lvert \varepsilon \mathbf{u}_{120} \rvert_{\max}$ (м)
0,2	$1{,}17 \cdot 10^{11}$	0,699
0,25	$1{,}21 \cdot 10^{11}$	0,697
0,3	$1{,}25 \cdot 10^{11}$	0,694

Уравнение поверхности вращающейся планеты:

$$\mathbf{S}_\omega = r_0 \mathbf{e}_r + \varepsilon \mathbf{u}_{10}(r_0 \mathbf{e}_r, t) + \varepsilon \mathbf{u}_{11}(r_0 \mathbf{e}_r, t)$$

$$\mathbf{S}_\omega = \alpha \mathbf{e}_r - \beta (\mathbf{e}_\omega, \mathbf{e}_r)^2 \mathbf{e}_r - \gamma (\mathbf{e}_\omega, \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_\omega$$

$$\alpha = (1 + \Delta_1 k_1) r_0,\ \beta = \Delta_1 k_2 r_0,\ \gamma = \Delta_1 k_3 r_0,\ \Delta_1 = \varepsilon \rho \omega^2 r_0^2,$$

$$k_1 = \frac{8 - \nu - 5\nu^2}{5(5\nu + 7)},\ k_2 = \frac{1+\nu}{5\nu + 7},\ k_3 = \frac{(1+\nu)^2}{5\nu + 7} \qquad (\alpha >> \gamma > \beta)$$

$$y' = \alpha \sin\theta - \beta \sin\theta \cos^2\theta,\quad z' = \alpha \cos\theta - \beta \cos^3\theta - \gamma \cos\theta$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

Коэффициент сжатия:

$$\kappa = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{cp}} = \frac{3m\omega^2(1+\nu)(2+\nu)}{4\pi \mathrm{E}(5\nu + 7) r_{cp}}$$

$$r_{\max} = (1 + \varepsilon \rho \omega^2 r_0^2 k_1) r_0,\ r_{\min} = r_{\max} - \varepsilon \rho \omega^2 r_0^3 (k_2 + k_3)$$

$$r_{\max} = 6378160\ м,\ r_{\min} = 6356775\ м, \qquad \kappa = 1/298.25$$

$$\rho = 3m / 4\pi r_0^3, \quad \omega = 7.292 \cdot 10^{-5}\ c^{-1}, \quad m = 5{,}976 \cdot 10^{24}\ кг$$

$$f = 6{,}67 \cdot 10^{-11} м^3/кг \cdot c^2,\ R_2 = 3{,}844 \cdot 10^8\ м,\ Q_1 = 149{,}6 \cdot 10^9\ м$$

$$\lvert \varepsilon u_{120} \rvert_{\max} = \frac{3 f m m_2}{2\pi \mathrm{E} R_2^3} \frac{(1+\nu)(2+\nu)}{(5\nu + 7)}$$

$$\frac{\lvert \varepsilon u_{120} \rvert_{\max}}{\lvert \varepsilon u_{130} \rvert_{\max}} = \frac{m_2 Q_1^3}{m_3 R_2^3} \approx 2{,}193$$

ПУБЛИКАЦИИ ПО ДОКЛАДУ

1) **Шатина А.В.** Эволюция движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Космические исследования, 2001, т.39, №3, с.303-315.

2) **Вильке В,Г., Шатина А.В.** Эволюция движения двойной планеты // Космические исследования, 2001, т.39, №3, с. 316-323.

3) **Вильке В.Г., Шатина А.В.** О поступательно-вращательном движении вязкоупругого шара в гравитационном поле притягивающего центра и спутника // Космические исследования, 2004, т. 42, №1, с 95-106.