

ПОВЕРХНОСТИ ХИЛЛА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Лукьянов Л.Г.

В 1836 г. для уравнений ограниченной круговой задачи трех тел Якоби получил новый интеграл, называемый теперь *интегралом Якоби*.

В 1878 г., используя интеграл Якоби, Хилл построил *поверхности нулевой скорости*, называемые также *поверхностями Хилла*.

В 1848 г. для изучения тесных двойных звезд Рош ввел в рассмотрение поверхности, именуемые сейчас *полостями Роша*.

Возможны следующие обобщения поверхностей Хилла:

- в ограниченной эллиптической задаче,
- в ограниченной гиперболической задаче,
- в фотогравитационной задаче,
- в задаче двух неподвижных центров,
- в поле трехосного эллипсоида,
- в поле космического вакуума,
- в задаче с переменными массами,
- с учетом реактивных сил,
- в общей задаче трех тел.

Ограниченная круговая задача трех тел

Интеграл Якоби:

$$\frac{V^2}{2} - \Omega = h, \quad \Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + U, \quad U = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2}$$

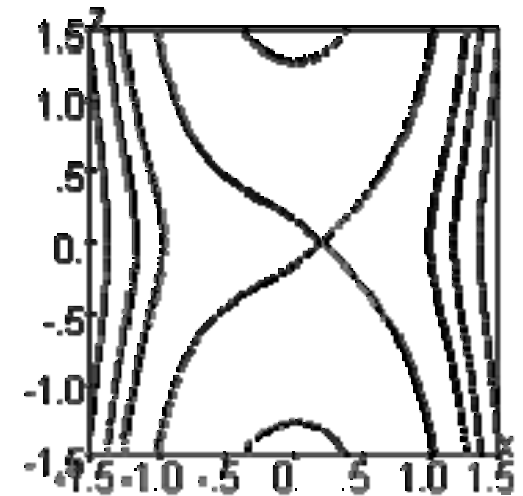
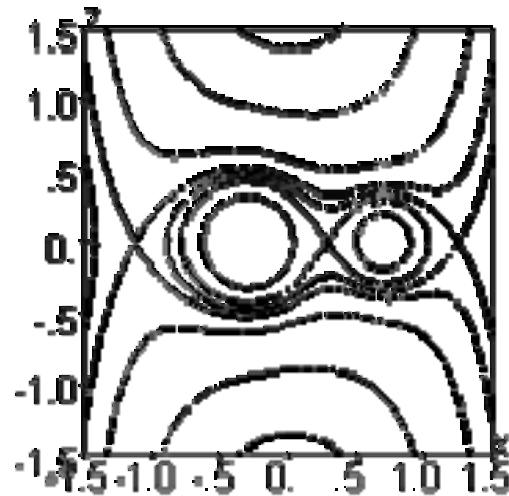
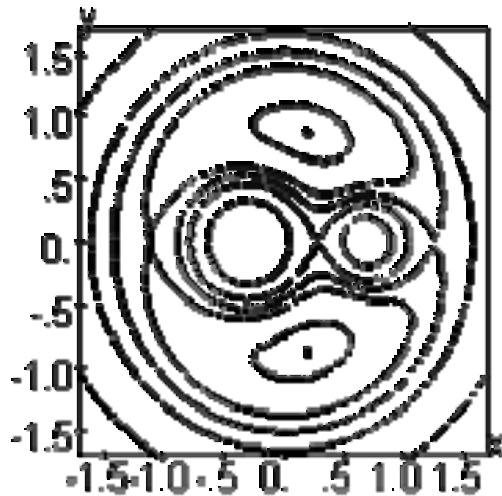
Поверхности Хилла:

$$2\Omega \geq C = -2h, \quad x^2 + y^2 + 2\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) = C$$

Классические поверхности Хилла

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0.3$$

$$C = -2h = [5, 3.92, 3.56, 3.29, 2.79, 2, 1.4]$$



Эллиптическая ограниченная задача

*Поверхности минимальной энергии в
координатах Нехвила*

$$\left\{ x^2 + y^2 - ez^2 \cos \nu + 2 \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - [1 - \mu(1-\mu)] \right\} (1+e) = C,$$

в непульсирующих координатах

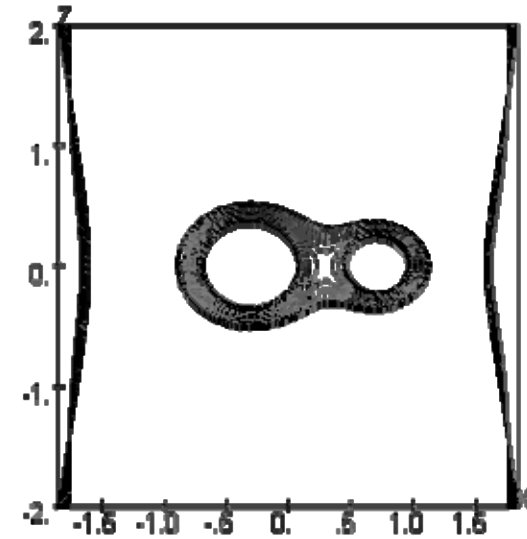
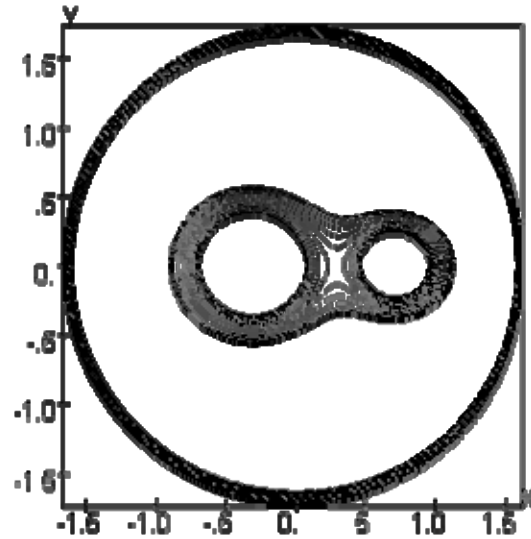
$$(X^2 + Y^2 - eZ^2 \cos \nu)(1 + e \cos \nu) + 2 \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \frac{1}{(1 + e \cos \nu)^2} -$$
$$-\frac{1 - \mu(1-\mu)}{1 + e \cos \nu} = C.$$

Поверхности минимальной энергии в эллиптической задаче

$$m_2/(m_1+m_2) = 0.3$$

$$e = 0.1$$

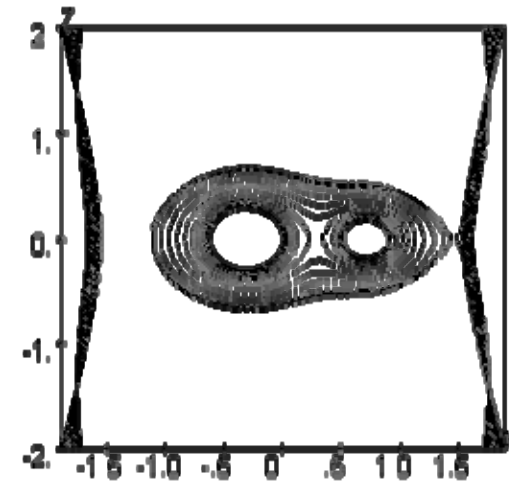
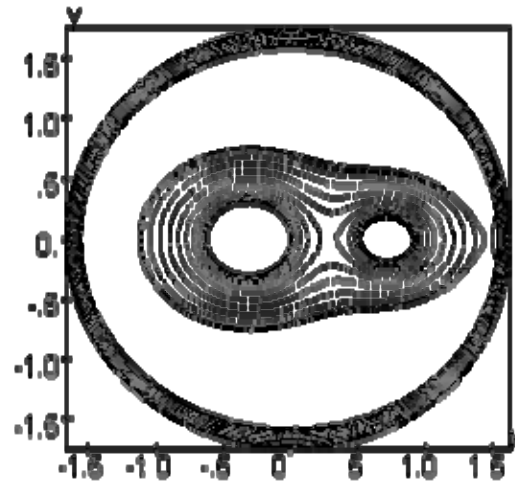
$$C = 3.2$$



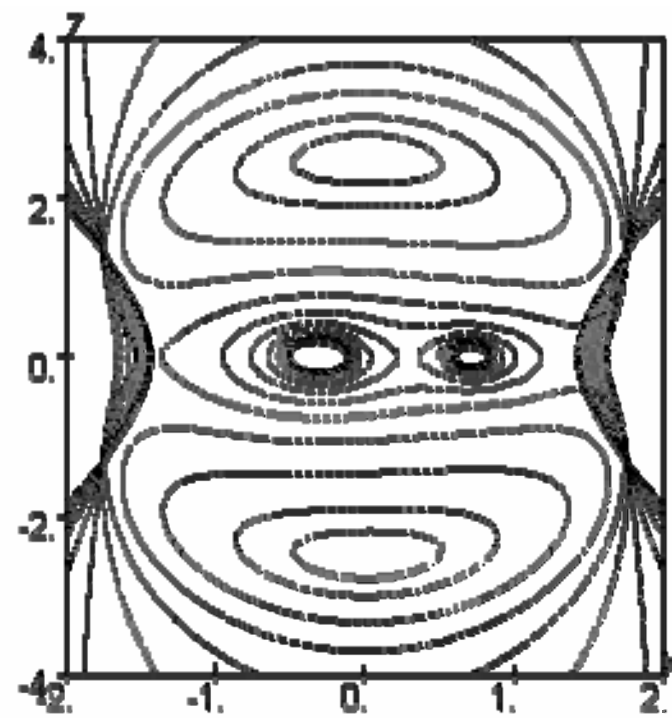
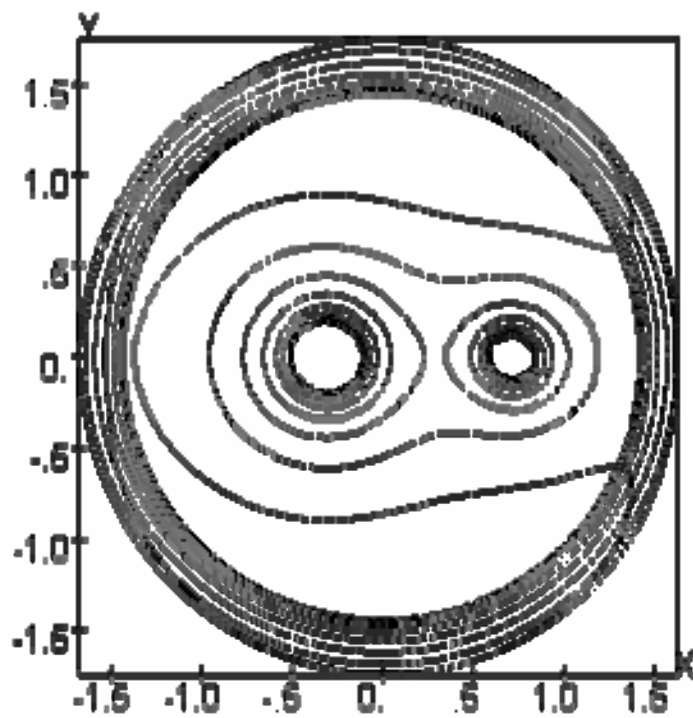
$$m_2/(m_1+m_2) = 0.3$$

$$e = 0.2$$

$$C = 3.2$$



$$e = 0.5, \quad \mu = 0.3, \quad C = 3.2$$

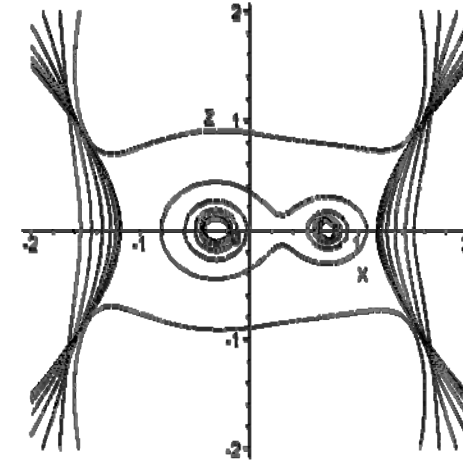
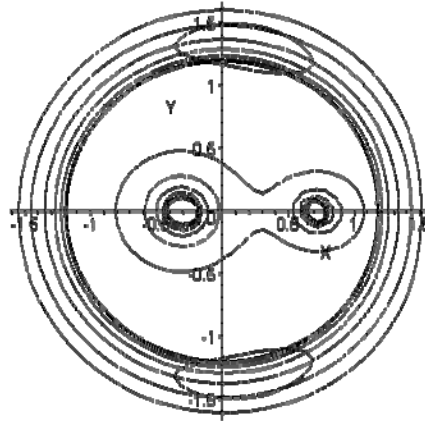


Поверхности минимальной энергии в гиперболической задаче

$$m_2/(m_1+m_2) = 0.3$$

$$e = 1.1$$

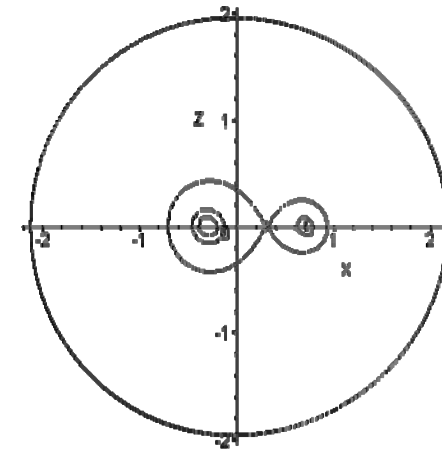
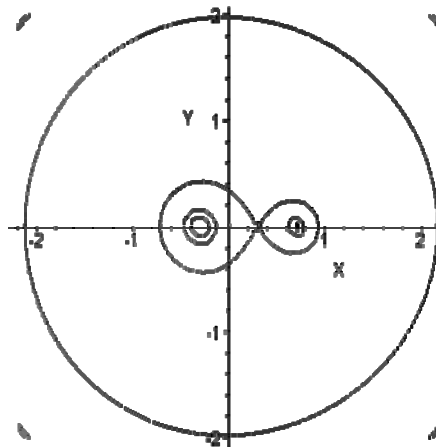
$$C = 3$$



$$m_2/(m_1+m_2) = 0.3$$

$$e = 1.1$$

$$C = 17.27$$



Фотогравитационная круговая ограниченная задача трех тел

В этой задаче учитываются гравитационные силы и силы светового давления со стороны основных тел. Силовая функция имеет вид:

$$U = q_1 \frac{1-\mu}{r_1} + q_2 \frac{\mu}{r_2}, \quad -\infty < (q_1, q_2) \leq 1.$$

Поверхности нулевой скорости представляются в виде:

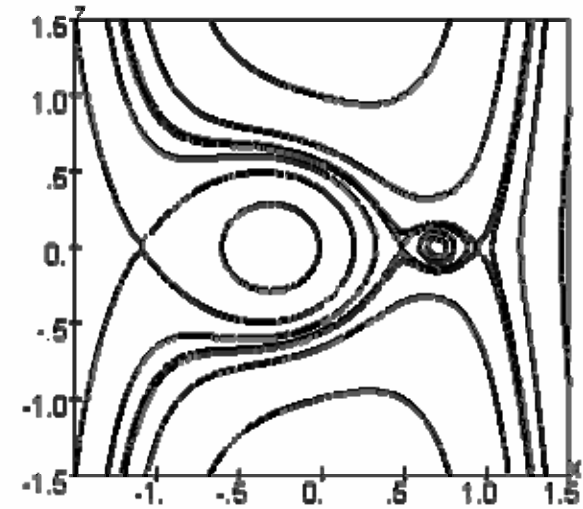
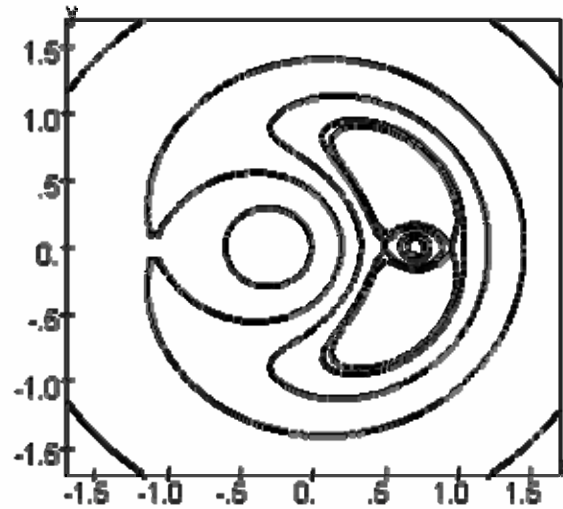
$$x^2 + y^2 + 2 \left(q_1 \frac{1-\mu}{r_1} + q_2 \frac{\mu}{r_2} \right) = C$$

Поверхности нулевой скорости в фотогравитационной задаче трех тел

$$m_2/(m_1+m_2) = 0.3$$

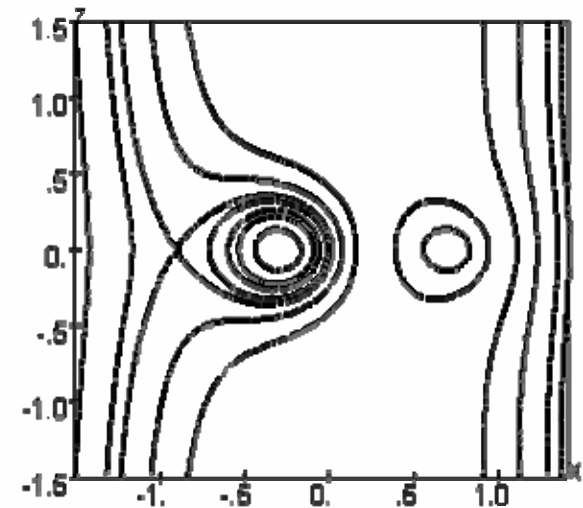
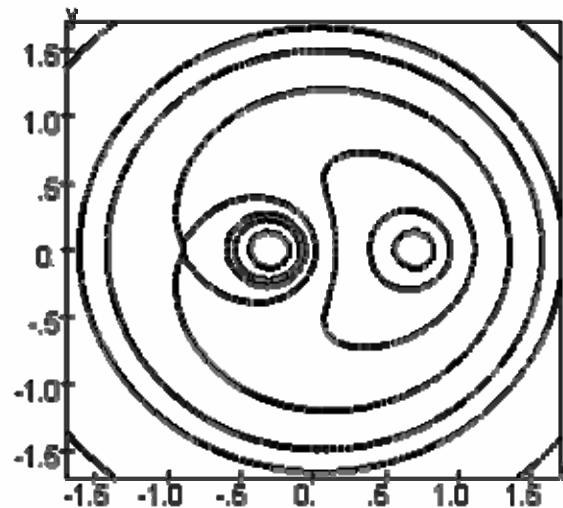
$$q_1 = 1$$

$$q_2 = 0.1$$



$$q_1 = 0.5$$

$$q_2 = -0.5$$



Задача двух неподвижных центров

$$U = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} = C \quad \text{- в задаче Эйлера.}$$

В задаче Еве Гредеакса:

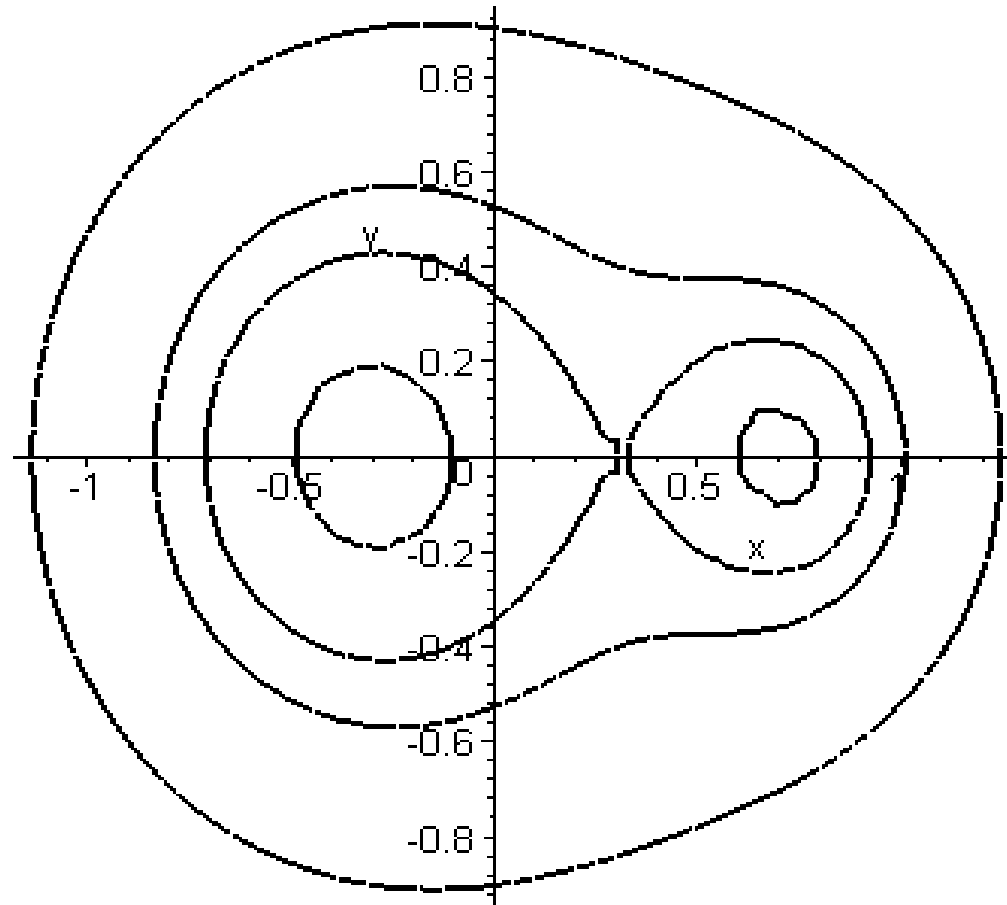
$$U = \frac{1+i\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2}, \quad U = 2 \frac{\lambda \mp \sigma \mu}{J} = C,$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{J + r^2 - 1}{2}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{J - r^2 + 1}{2}}, \quad J = \sqrt{(r^2 - 1)^2 + 4z^2},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_{1,2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm i)^2}.$$

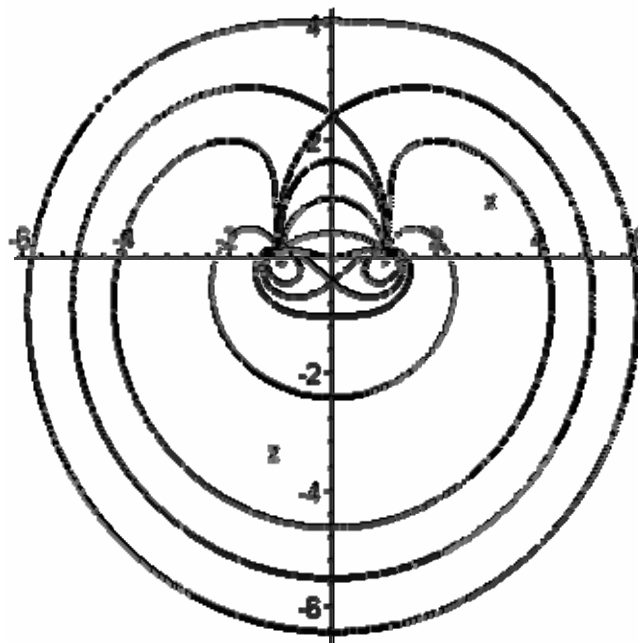
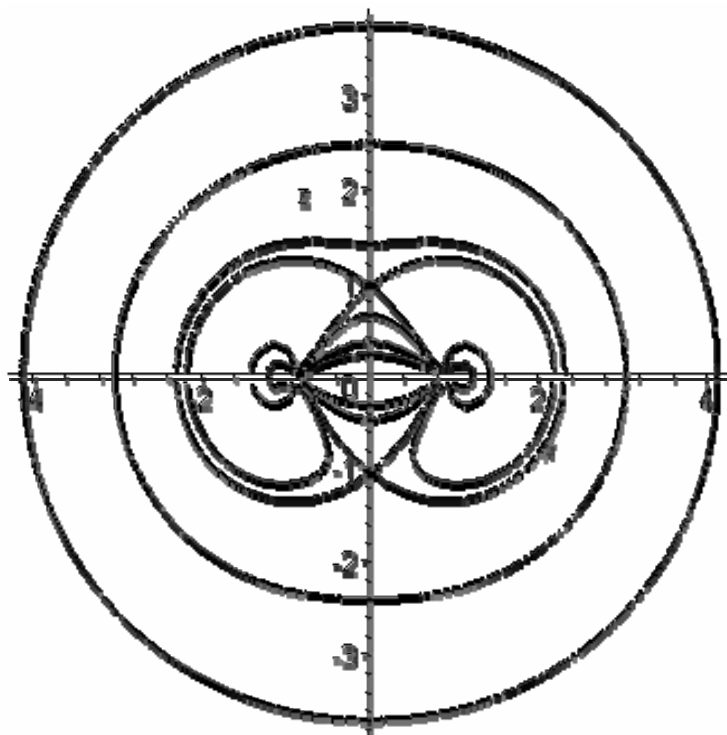
Поверхности нулевой скорости в задаче Эйлера

$$\mu = 0.3$$



Поверхности нулевой скорости в задаче Гредеакса

$$\sigma = 1$$



для Земли:

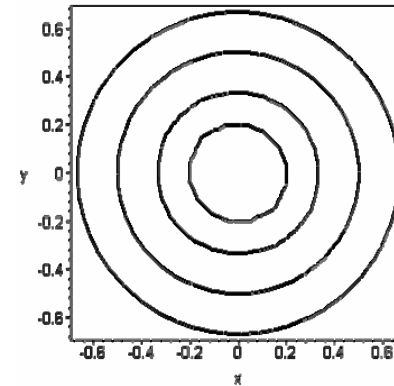
$$\sigma = -0.035647,$$

$$c = 209.729 \text{ km}$$

Задача двух тел

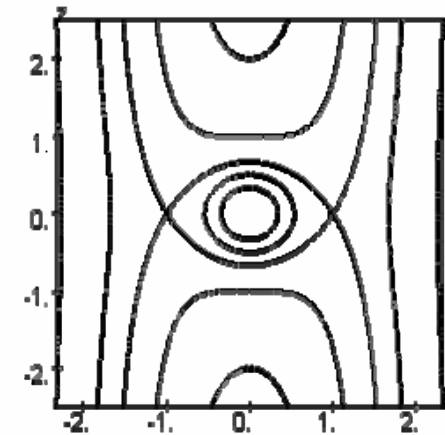
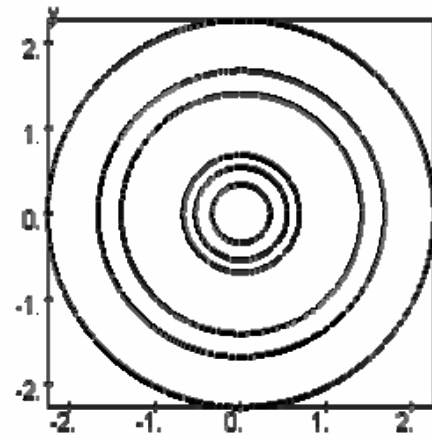
Центральное тело неподвижно.
Поверхность нулевой скорости:

$$U = \frac{\mu}{r} = C$$



Центральное тело вращается
с постоянной скоростью.
Поверхность нулевой скорости:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\mu}{r} = C$$



Гравитирующий вращающийся трехосный эллипсоид

Силовая функция

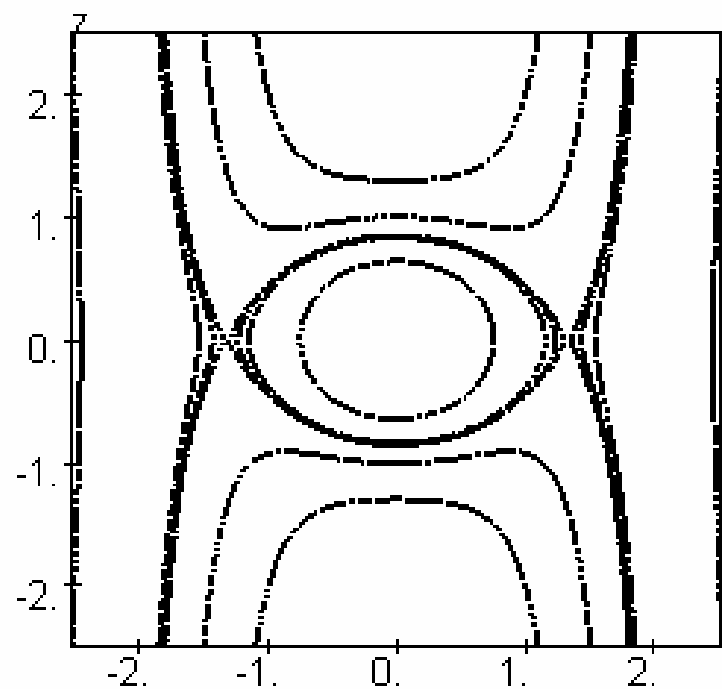
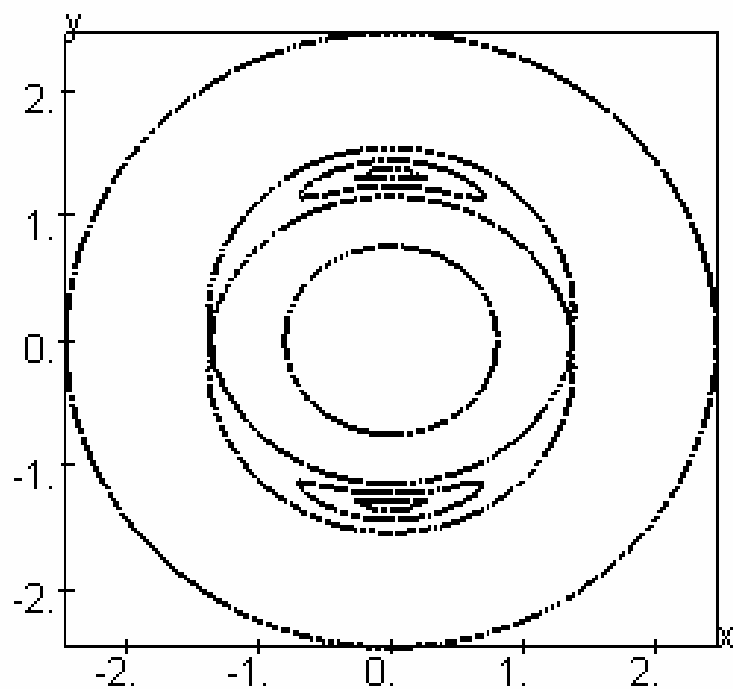
$$U = n^2 \frac{x^2 + y^2}{2} + fm \left(\frac{1}{r} + \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{r^5} + \dots \right),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Поверхность нулевой скорости:

$$n^2 \frac{x^2 + y^2}{2} + fm \left(\frac{1}{r} + \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{r^5} \right) = C.$$

Поверхности нулевой скорости трехосного, вращающегося эллипсоида



Ограниченная круговая задача трех тел в поле космического вакуума

$$U = \frac{m}{r_1} + \frac{m}{r_2} + \frac{1}{2} H^2 r^2, \quad W = U + n^2 \frac{x^2 + y^2}{2},$$

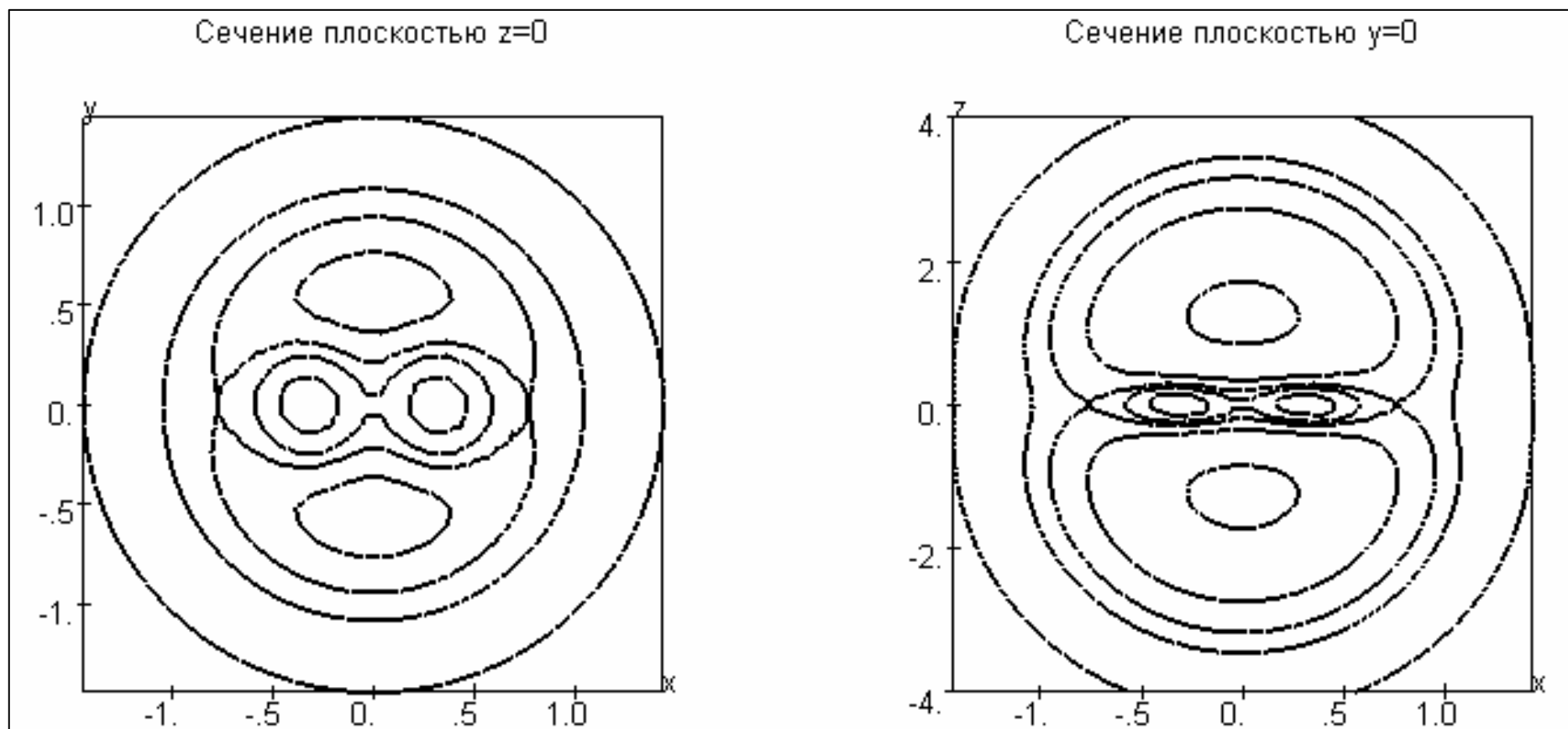
$$r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad n = \sqrt{\frac{2m}{a^3} - H^2}.$$

Поверхности нулевой скорости:

$$W = U + n^2 \frac{x^2 + y^2}{2} = C.$$

Поверхности нулевой скорости ограниченной круговой задачи в поле космического вакуума



Ограниченная круговая задача трех тел с переменными массами, изменяющимися по закону Мещерского

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{at^2 + bt + c}}, \quad - \zeta \hat{a} \hat{e} \hat{i} \hat{i} \quad \hat{I} \hat{a} \hat{u} \hat{a} \hat{o} \hat{n} \hat{e} \hat{i} \hat{a} \hat{i} \quad ,$$

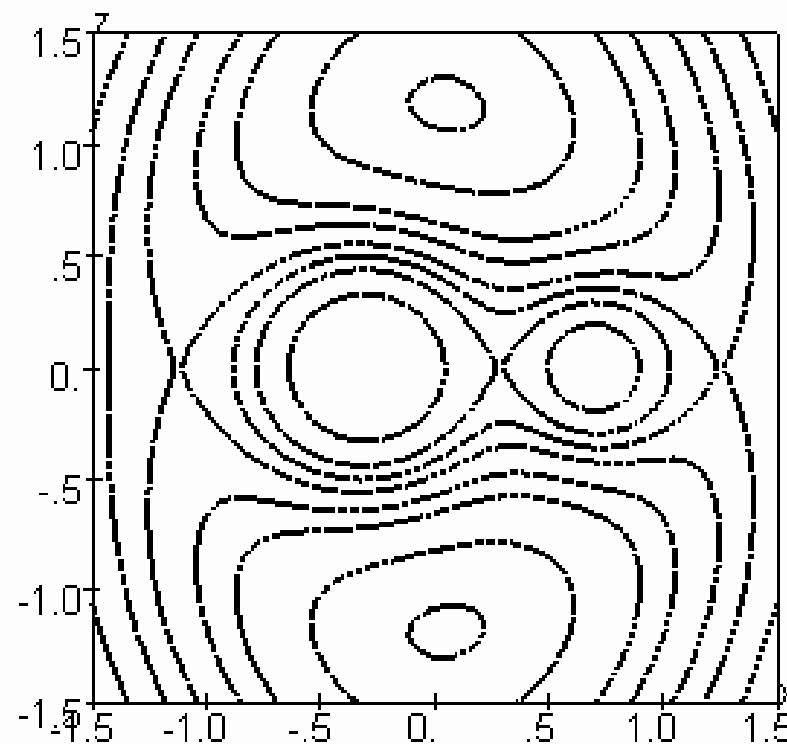
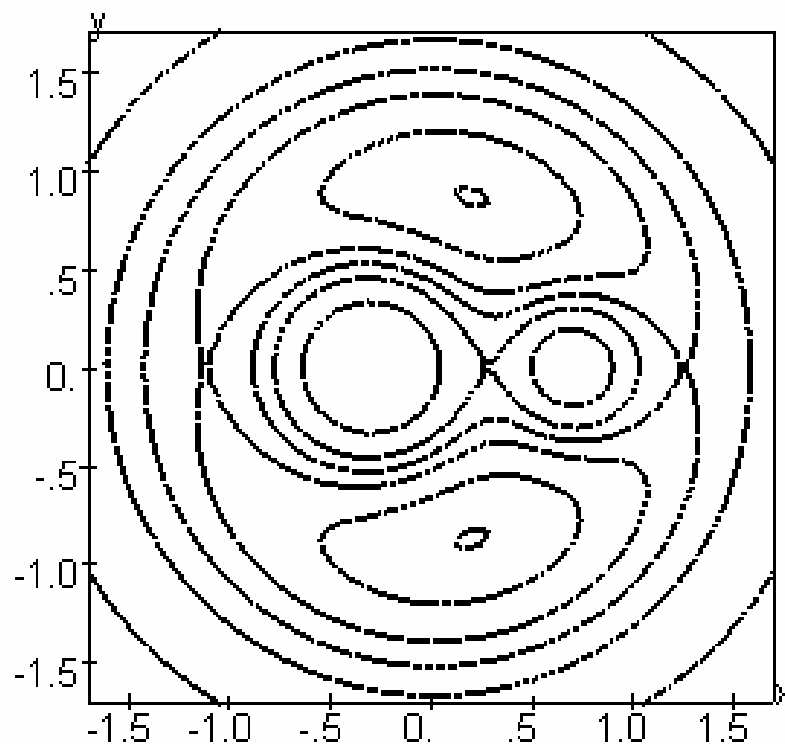
$$\Omega = k \frac{x^2 + y^2}{2} + (k-1) \frac{z^2}{2} + k \frac{1-\mu}{r_1} + k \frac{\mu}{r_2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2}$$

Поверхность нулевой скорости:

$$2\Omega = C.$$

Поверхности нулевой скорости ограниченной круговой задачи трех тел с переменными массами, изменяющимися по закону Мещерского



Ограниченная круговая консервативная задача трех тел с переменными массами

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{f(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r},$$

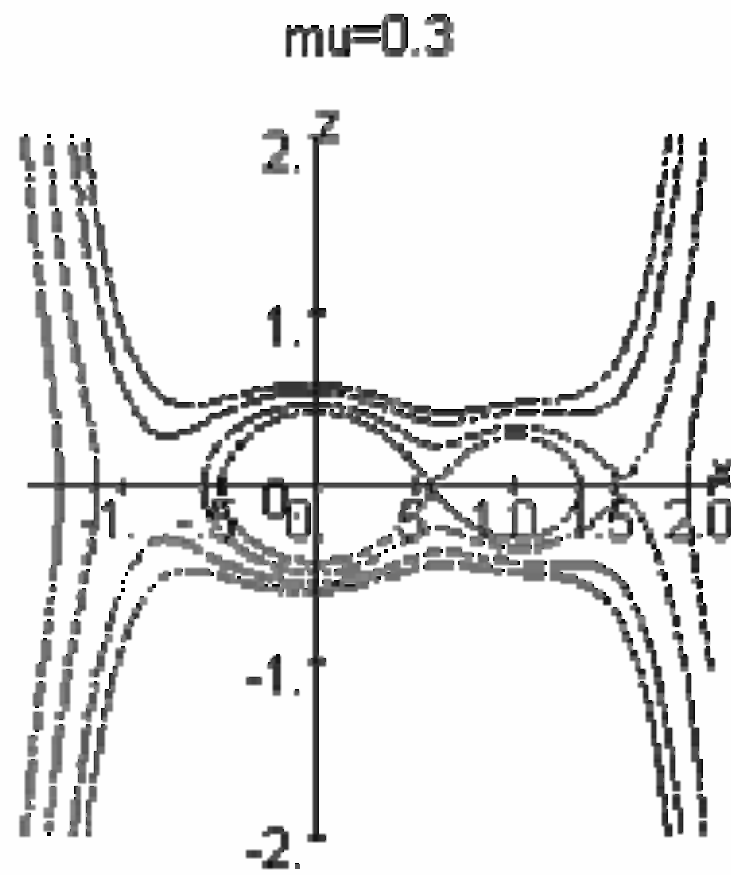
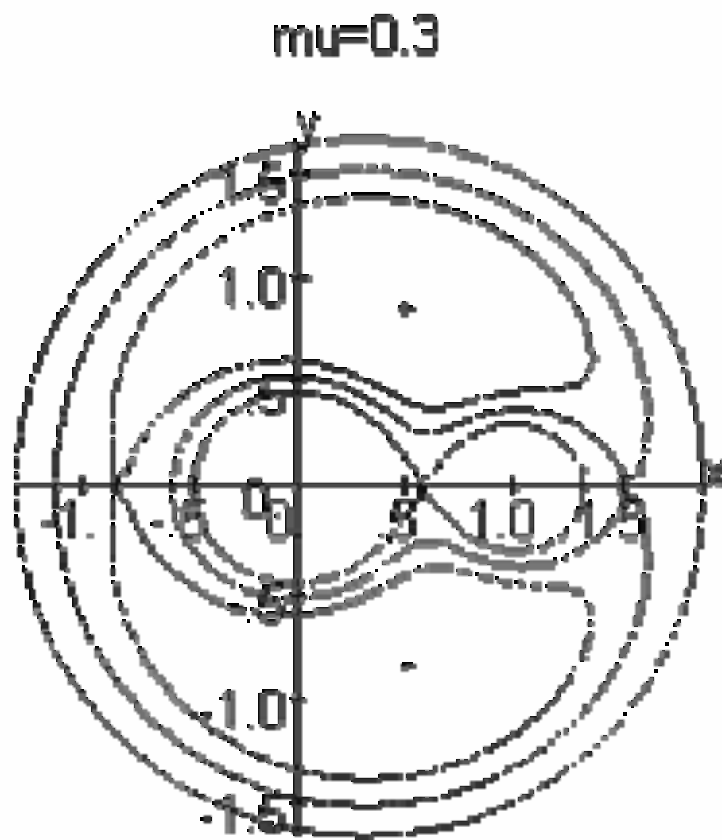
$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + U - \mu x, \quad U = \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + z^2}.$$

Поверхность минимальной энергии:

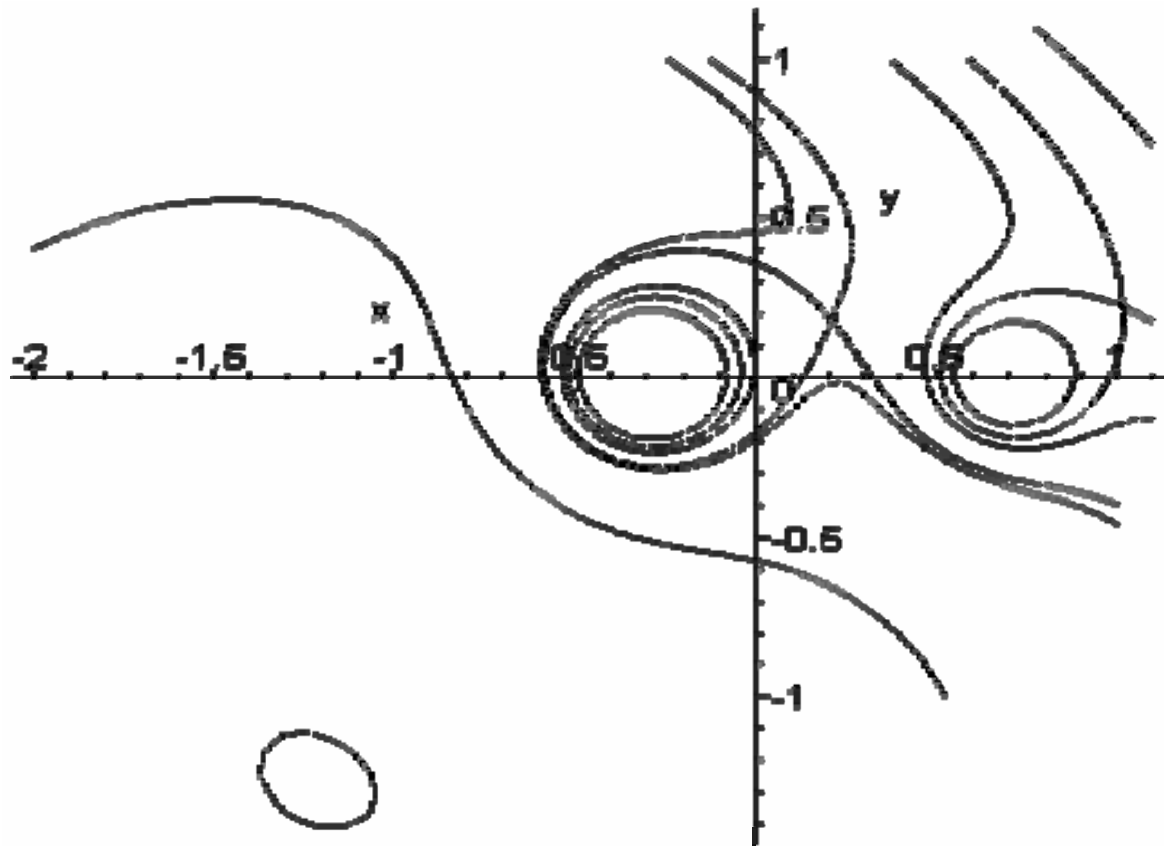
$$2\Omega = x^2 + y^2 + 2\frac{1 - \mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} - 2\mu x = C.$$

Поверхности минимальной энергии в ограниченной консервативной задаче трех тел с переменными массами



Ограниченная задача трех тел с учетом реактивных сил

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + U + ax + by = \frac{C}{2}, \quad (a = 1, b = 1).$$



Общая задача трех тел

Неравенство Зундмана

$$8I(U + h) - 4c^2 = \left(\frac{dI}{dt} \right)^2 \geq 0, \quad U = f \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right),$$

$$I = \frac{m_1 m_2 r_{12}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2 + m_3 m_1 r_{31}^2}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

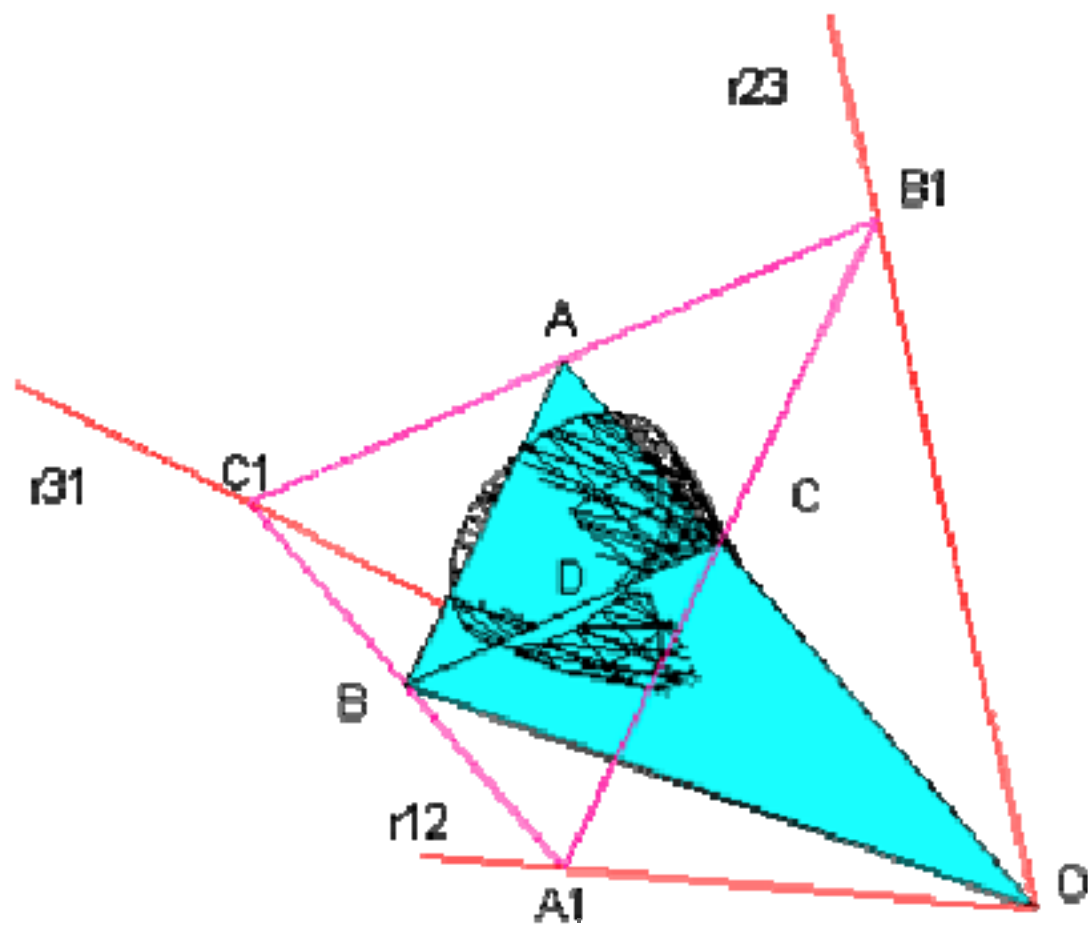
Поверхность Зундмана в пространстве взаимных расстояний:

$$I(U - C) = B, \quad C = -h, \quad B = \frac{c^2}{2},$$

$$0 \leq r_{ij} \leq r_{i+1 j+1} + r_{i+2 j+2}.$$

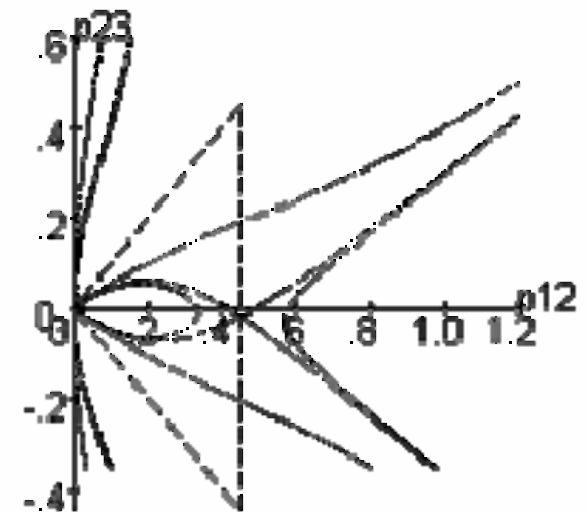
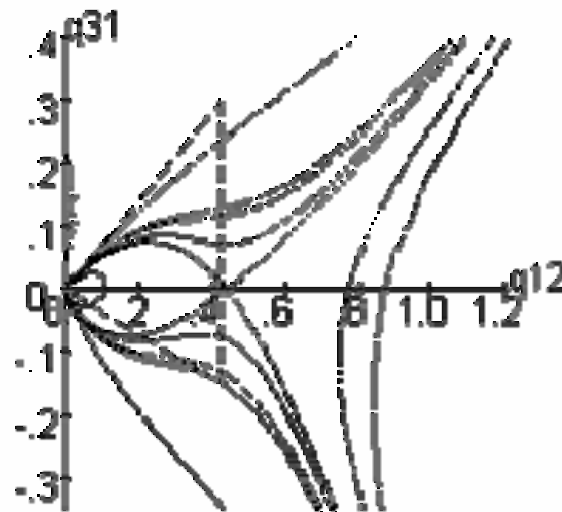
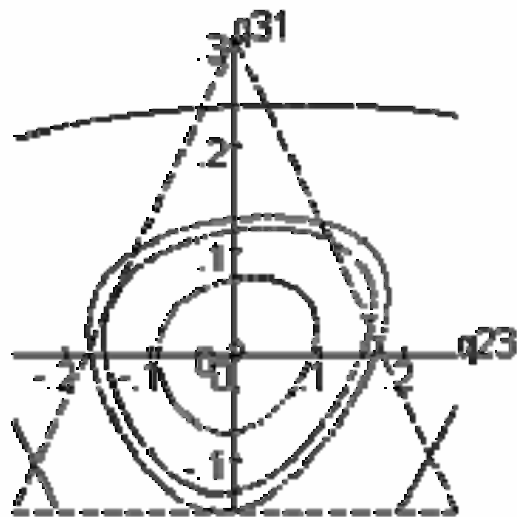
Поверхность нулевой кинетической энергии

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

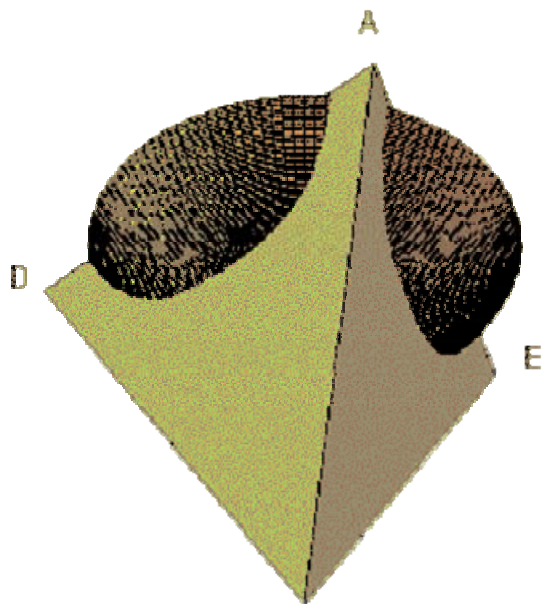


Сечения поверхностей Зундмана

$C=0.6, q_{12}=0.425, q_{23}=0, B=0.05, 0.0165, 0.0154, 0.013, 0.0119, 0.0052, 0, p_{31}=0, (q_{12}=0.425)$

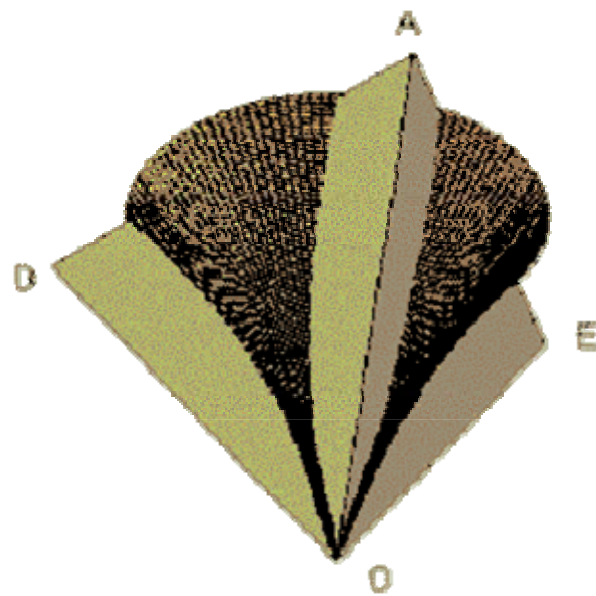


Поверхности нулевой кинетической энергии и поверхности Зундмана



$$T = U + h \geq 0$$

Рис. 1.



$$T = U + h \geq \frac{B}{I}$$

Рис. 4.

Литература

1. Маршал К. Задача трех тел. М.2005.
2. Lukyanov L.G., Shirmin G.I. On exact solution of the restricted photogravitational three-body problem. В книге: Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. Nova Science Publishers, Inc., New York. p 107, 2002.
3. Лукьянов Л.Г. О законе сохранения энергии в ограниченной эллиптической задаче трех тел. Астрон. журн., т.82, № 12, с.1137, 2005.
4. Лукьянов Л.Г. О поверхностях нулевой кинетической энергии. Труды ГАИШ, т. 76, с. 42, 2006.
5. Лукьянов Л.Г. О поверхностях нулевой скорости в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел. Астрон. ж. т. 65, в.6, с.1308, 1988.
6. Лукьянов Л.Г. О поверхностях нулевой скорости в ограниченной задаче трех тел с переменными массами. Астрон. ж. т. 69, в.3, с.640, 1992.
7. Гасанов С.А., Лукьянов Л.Г. О точках либрации в задаче о движении звезды внутри эллиптической галактики. Астрон. ж., т. 79, № 10, с.944, 2002.
8. Lukyanov L.G., Gasanov S.A. On zero-velocity surfaces inside a homogeneous rotating and gravitating ellipsoid. Astron. and Astrophys. Transactions, v.22,N.4-5, p.529, 2003.
9. Лукьянов Л.Г. Об обобщенной задаче двух неподвижных центров. Космические исследования, т. 44, №2,с.162, 2006.
10. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Поверхности Зундмана и устойчивость по Хиллу в задаче трех тел. Письма в Астрон.ж., т.33, № 8, с.618, 2007. 28

Спасибо за внимание