



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
МОДЕЛЬ СОЛНЕЧНОЙ
СИСТЕМЫ

План доклада

1. Введение
 2. Преобразование координат в плоскость орбиты.
 3. Определение положения планеты на орбите в новый момент времени.
 4. Дополнительные условия.
 5. Вычисление декартовых координат.
 6. Начальные данные.
 7. Вычисления и сравнения
- Выводы**

1. Введение

Движение тел Солнечной системы можно определить численным интегрированием дифференциальных уравнений их движения. Однако, для решения ряда прикладных задач требуется вычислять координаты планет более оперативно и, вместе с тем, с такой же точностью, которая характерна методам численного интегрирования уравнений. Для этой цели нами предлагается такая математическая модель Солнечной системы, которая основана на динамической задаче 2-х тел, а не на непосредственном решении классического уравнения Кеплера.

Примеры моделей

Модели движения небесных тел известны из глубокой древности.

1. «Дагестанская» модель, в которой движение Солнца и Луны, а возможно и других светил, моделировалось перемещением тени по меткам, например, по лункам, выдолбленным на камне (М.И. Исрапилов [3]). Служила человечеству десятки тысячелетий.

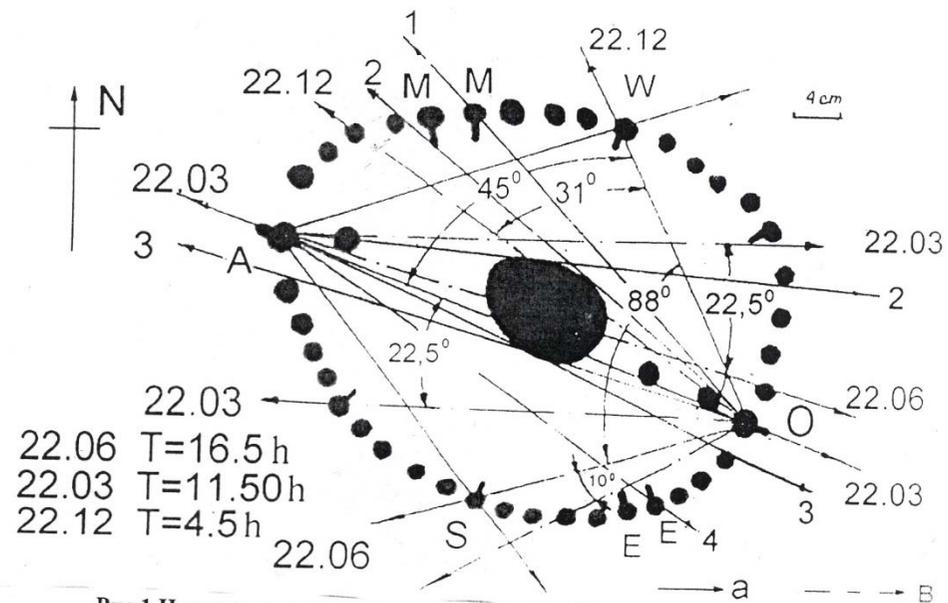
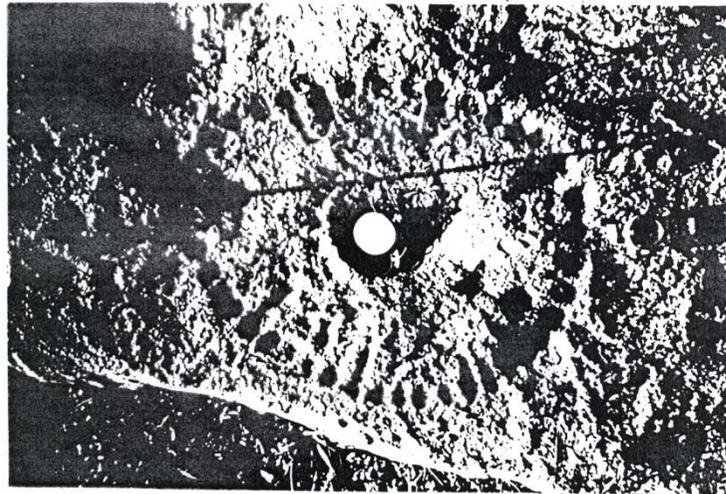


Рис.1. Наскальные рисунки – древний Солнечный календарь - часы «КУДАЛИ – 1» Фото и расчетная модель.

а, б – древние и современные линии теней гномона. Т – долгота дня 1-4 – линии фиксаторы наиболее важных сезонов: 1 – с 20.01 по 25.11 – полевой сезон животноводов и земледельцев, 2 – 3 – с 10.02 по 31.03 – сев яровых, 3 – 2 – с 11.09 по 10.11 – сев озимых, 4 – начало уборки озимых, 15.08 – начало уборки яровых.

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\alpha_1 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

2. Модель Шумеров(?) –Гиппарха – Птолемея [1] - [2], основанная на равномерном движении по эксцентрам и эпициклам. Служила человечеству около 20 веков.

3. Модель «Кеплера» основана на уравнении Кеплера для эксцентрической аномалии

$$E - e \cdot \sin E = M.$$

Служила человечеству 500 лет.

Итак, предлагается математическая модель, основанная на ньютоновском взаимодействии двух тел, например Солнца с массой M и планеты с массой m .

Дифференциальные уравнения движения планеты относительно Солнца в безразмерных величинах имеют вид:


$$\frac{d^2 \bar{r}}{d\bar{t}^2} = \alpha_1 \frac{\bar{r}}{r^3}, \quad (1)$$

где $\bar{r} = r/R_p$ – относительный радиус
положения планеты относительно Солнца;

$\bar{t} = t \cdot v_p / R_p$ – безразмерное время;

$\alpha_1 = \mu_1 / (R_p v_p^2)$ – параметр траектории;

$\mu_1 = -G(M+m)$ – параметр взаимодействия;

G – гравитационная постоянная;

R_p – радиус перигелия;

v_p – скорость планеты в перигелии.



Движение определяется одним параметром α_1 , который мы назвали параметром траектории [4]. Его использование вместо эксцентриситета e оправдано тем, что уравнения взаимодействия и их решение приобретают общность как в случае сил, зависящих только от расстояния, так и в случае сил, которые зависят также и от скорости [5]. В таком виде оказалось удобным рассмотрение задачи многих тел, осесимметрично расположенных на плоскости [6].

Решение уравнения (1) в безразмерных переменных в полярной системе координат (рис. 1б), с началом в Солнце, имеет вид [4]

для траектории:

$$r = \frac{1}{(\alpha_1 + 1) \cos \varphi - \alpha_1}, \quad (2)$$

и закона движения

$$\bar{t} = \frac{\bar{r} |\bar{v}_r|}{2\alpha_1 + 1} - \frac{\alpha_1 (\pi/2 + \arcsin\{[(2\alpha_1 + 1)\bar{r} - \alpha_1]/(-\alpha_1 - 1)\})}{(-2\alpha_1 - 1)^{3/2}}. \quad (3)$$

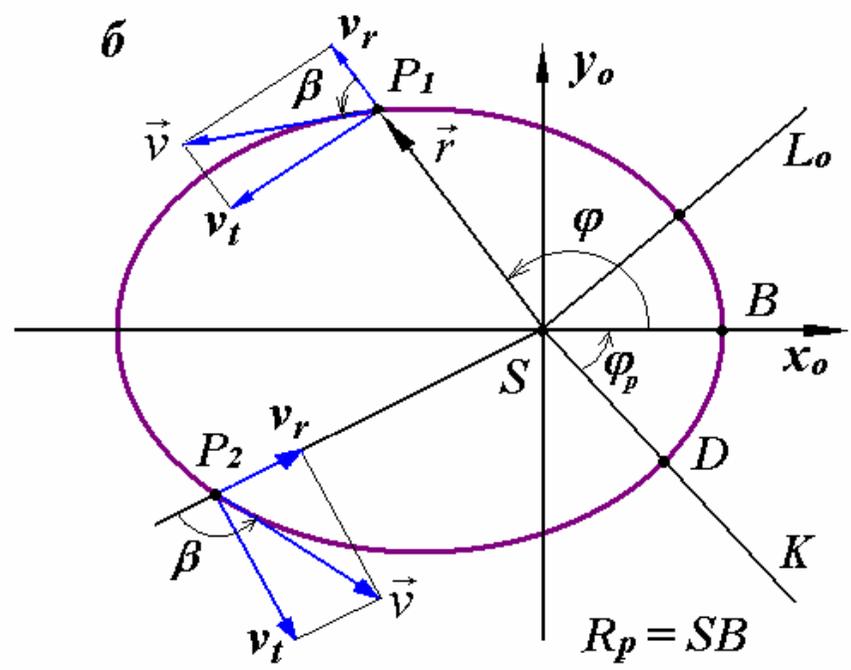
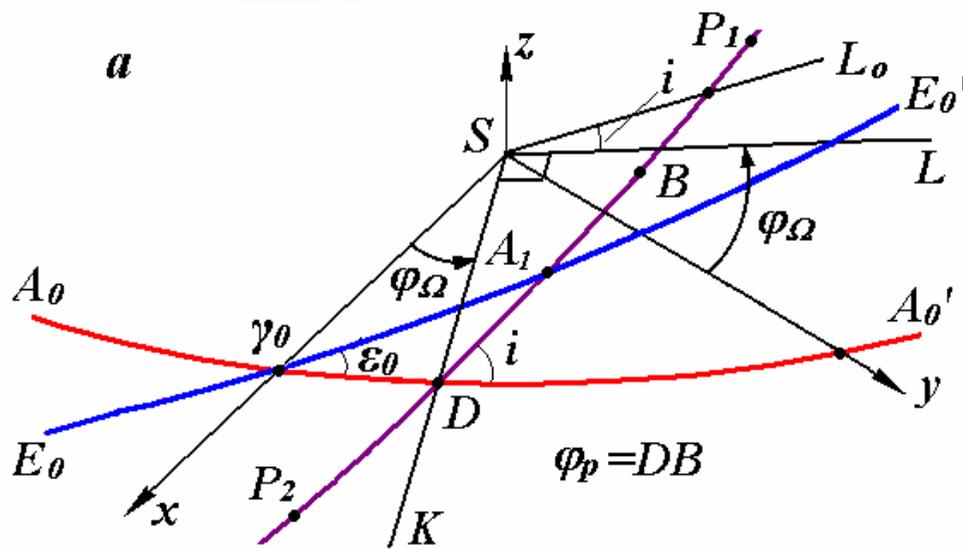


Рис. 1. Параметры орбиты планеты в неподвижной экваториальной гелиоцентрической системе координат $Sxyz$ (а) и в плоскости орбиты Sx_0y_0 (б):

E_0E_0' – неподвижная плоскость орбиты Земли (плоскость эклиптики); A_0A_0' – неподвижная плоскость экватора Земли; P_1P_2 – подвижная плоскость орбиты планеты; γ_0 – точка весеннего равноденствия, например, на эпоху 1950.0 г.

Уравнение (2) при $\alpha_1 = -1$ представляет окружность, при $-1 < \alpha_1 < -0.5$ – эллипс, при $\alpha_1 = -0.5$ – параболу; при $-0.5 < \alpha_1 < 0$ – гиперболу, а при $\alpha_1 = 0$ – прямую.

Другие параметры определяются следующими равенствами:

$$\bar{R}_a = R_a / R_p = -1 / (2\alpha_1 + 1), \quad \bar{v}_a = v_a / v_p = 1 / \bar{R}_a,$$

$$\bar{t}_a = -\frac{\alpha_1 \pi}{(-2\alpha_1 - 1)^{3/2}}, \quad \bar{T}_a = \frac{T_a v_p}{R_p} = 2\bar{t}_a. \quad (4)$$

$$\bar{v}_r = v_r / v_p = \sqrt{(\alpha_1 + 1)^2 - (\alpha_1 + 1/\bar{r})^2},$$

$$\bar{v}_t = v_t / v_p = 1/\bar{r}, \quad (5)$$

$$e = -(1 + 1/\alpha_1), \quad \bar{a} = a / R_p = \alpha_1 / (2\alpha_1 + 1). \quad (6)$$

2. Преобразование координат в плоскости орбиты.

Если известны в момент времени T координаты (x, y, z) и скорости (v_x, v_y, v_z) планеты в неподвижной гелиоцентрической экваториальной системе координат $Sxyz$

(рис.1 а), можно определить ее положение на орбите в полярной системе координат r, φ (рис. 1б) с помощью выражений:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{0,5}, \quad v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{0,5} \quad (7)$$

$$\cos \beta = (\vec{v} \cdot \vec{r}) / (v \cdot r) = (x \cdot v_x + y \cdot v_y + z \cdot v_z) / (v \cdot r) \quad (8)$$

$$v_r = v \cdot \cos \beta; \quad v_t = v \cdot \sin \beta. \quad (9)$$

$$\cos \beta = \frac{\pm \bar{v}_r}{\sqrt{\bar{v}_r^2 + \bar{v}_t^2}} = \pm \sqrt{\frac{(1 + \alpha_1)^2 - (\alpha_1 + 1/\bar{r})^2}{(1 + \alpha_1)^2 - (\alpha_1 + 1/\bar{r})^2 + 1/\bar{r}^2}} \quad (10)$$

$$R_p^d = -\alpha_1 \cdot \sin^2 \beta \left(1 - \sqrt{1 + (2\alpha_1 + 1) / (\alpha_1^2 \sin^2 \beta)} \right). \quad (11)$$

$$v_p^d = v_t r / R_p^d, \quad (12)$$

$$v_p = -2\alpha_1 \pi R_p / [T_{tr} (-2\alpha_1 - 1)^{1.5}]. \quad (13)$$

$$\varphi = \arccos[(1 + \alpha_1 \cdot \bar{r}) / (\bar{r} \cdot (\alpha_1 + 1))]. \quad (14)$$

$$t_p = \bar{t}(\bar{r}) \cdot R_p / v_p. \quad (15)$$

3. Определение положения планеты на орбите в новый момент времени.

3.1. Алгоритм. Прогнозирование величины радиуса.

Так как выражение (15) для радиуса r не выражается в явной форме, то задача решается методом последовательных приближений. Итерационный процесс реализован в двух вариантах: по радиусу r и по полярному углу φ . В первом варианте прогнозируемое значение радиуса в новый момент времени $T_l = T_+ h$

$$r_1 = r + v_p \cdot h_i \cdot \bar{v}_r + (v_p^2 / R_p) \cdot \bar{w}_r \cdot h_i^2 / 2, \quad (16)$$

где h_i – значение приращения времени в i -той итерации.

Время движения планеты от перигелия до точки с радиусом $\bar{r}_1 = r_1 / R_p$ определяется, как и величина t_p , по формуле (15), $t_{p1} = \bar{t}(\bar{r}_1) \cdot R_p / v_p$, а затем находим разность времен между двумя положениями планеты

$$\Delta t_i = t_{p1} - t_p = (v_p / R_p) [\bar{t}(\bar{r}_1) - \bar{t}(\bar{r})]. \quad (17)$$

Далее можно определить отклонение между этой величиной Δ и заданным приращением времени h

$$\Delta h_i = \Delta t_i - h \quad (18)$$

и ее относительное значение по очевидной формуле

$$\mathcal{E}_i = \Delta h_i / h. \quad (19)$$

Пусть точность вычислений характеризуется величиной EPS . Если $|\mathcal{S}_i| \geq EPS$, то вычисляем новое приращение времени

$$h_{i+1} = h_i - \Delta h_i \quad (20)$$

и повторяем процесс итераций, начиная с формулы (18). Итерационный процесс прекращается при достижении $|\mathcal{S}_i| < EPS$.

Таким образом, при завершении итерационного цикла мы определяем для нового момента времени T_1 полярные координаты φ_1 и r_1 планеты в плоскости ее орбиты с заранее заданной точностью EPS .

3.2. Алгоритм 2. Прогнозирование угла.

Для орбит, близких к круговым, полярный радиус планеты r практически не изменяется, поэтому используется итерационный цикл по углу φ . В новый момент времени T_1 мы прогнозируем значение угла φ_1 с учетом второй производной:

$$\varphi_1 = \varphi + (v_p / R_p)(\bar{v}_t / \bar{r}) \cdot h_i + \varepsilon \cdot h_i^2 / 2. \quad (21)$$

Время движения планеты от перигелия до точки с полярным углом φ по формуле

$$\bar{t} = \frac{(\alpha_1 + 1)|\sin \varphi|}{(2\alpha_1 + 1)[(\alpha_1 + 1) \cos \varphi - \alpha_1]} + \frac{\alpha_1 [\arcsin \frac{\alpha_1 + 1 - \alpha_1 \cos \varphi}{(\alpha_1 + 1) \cos \varphi - \alpha_1} - \pi / 2]}{(-2\alpha_1 - 1)^{3/2}}, \quad (22)$$

Аналогично выражению (17) рассчитывается разность времени

$$\Delta \bar{t}_i = (v_p / R_p)[\bar{t}(\varphi_1) - \bar{t}(\varphi)]. \quad (23)$$

Далее, повторяется алгоритм, описанный соотношениями (18) - (20).

4. Дополнительные условия.

Необходимость дополнительных условий обусловлена тем, что:

1) время прохождения планетой нижней и верхней частей эллиптической орбиты (рис. 1б) определяется одними и теми же зависимостями (3) и (22);

2) угол φ является циклической переменной;

3) в апсидных точках с радиусами R_p и R_a возникают особенности;

4) и существует ряд др. причин.

5. Вычисление декартовых координат.

По найденным полярным координатам планеты r, φ в плоскости ее орбиты определяются ее декартовы координаты в неподвижной системе координат $Sxyz$ (рис. 1a).

$$x = r[\cos(\varphi + \varphi_p) \cdot \cos \varphi_\Omega - \sin(\varphi + \varphi_p) \cdot \cos i \cdot \sin \varphi_\Omega]; \quad (24)$$

$$y = r[\cos(\varphi + \varphi_p) \cdot \sin \varphi_\Omega + \sin(\varphi + \varphi_p) \cdot \cos i \cdot \cos \varphi_\Omega]; \quad (25)$$

$$z = r \cdot \sin(\varphi + \varphi_p) \cdot \sin i. \quad (26)$$

Реальные параметры орбит планет подвержены вековым изменениям, т.е. их параметры $\varphi_p(t)$, $\varphi_\Omega(t)$ и $i(t)$, $e(t)$, $R_p(t)$ и $T_{tr}(t)$ являются функциями времени. Поэтому, если на каждом шаге вычислений полярные координаты планеты преобразовывать в декартовые координаты, тогда последние будут представлять движение планеты практически с той же точностью, что и вековые изменения параметров орбиты.

6. Начальные данные.

В момент T_0 в гелиоцентрической экваториальной системе координат задаются компоненты координат планеты x , y , z и скорости v_x , v_y , v_z .

Кроме того, задается 6 параметров орбиты $i(t)$, $\varphi_p(t)$, $\varphi_\Omega(t)$, $e(t)$, (или $\alpha_1(t)$), $R_p(t)$ и $T_{tr}(t)$. Эти параметры мы получили в результате численного интегрирования уравнений движения Солнечной системы за разные отрезки времени, в том числе за 100 млн. лет.

На интервале в нескольких тысячелетий их можно также получить из вековых возмущений С. Ньюкомба [7], или из средних элементов орбит в работе Дж.Л. Симона с соавторами [9].

7. Вычисления и сравнения.

В табл. 1 представлены рассчитанные по формуле (19) относительные погрешности времени δh_i после первых трех итераций для всех планет. Из таблицы видно, что после каждой итерации относительная погрешность во времени уменьшается не менее чем на три порядка.

Таблица 1. Относительные погрешности времени δh_i после первых трех итераций для планет от Меркурия (1) до Плутона (9) при счете по алгоритму 2.

Номер Планеты	Относительные отклонения δh_i после итераций:		
	Первая	Вторая	Третья
1	-9.571E-06	-2.984E-10	2.541E-15
2	9.541E-06	-2.63E-10	4.591E-14
3	-3.459E-06	-4.289E-11	1.326E-13
4	8.266E-05	-6.729E-09	4.796E-13
5	1.208 E-03	-1.456E-06	1.755E-09
6	-6.726 E-04	-4.478E-07	-2.995E-10
7	-4.211 E-04	-1.788E-07	-7.116E-11
8	-1.841 E-04	-3.387E-08	-4.551E-12
9	-4.504 E-04	-2.029E-07	-8.227E-11

Для проверки точности расчета по данной модели движения планет были проинтегрированы дифференциальные уравнения движения Солнца, планет и Луны [10] и получены их законы движения: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ за одно обращение планеты вокруг Солнца. Такие же законы движения этих планет были получены для математической модели Солнечной системы. Расхождение между этими законами очень мало.

Чтобы усилить различие координат на графиках, было рассмотрено движение планет относительно Земли:

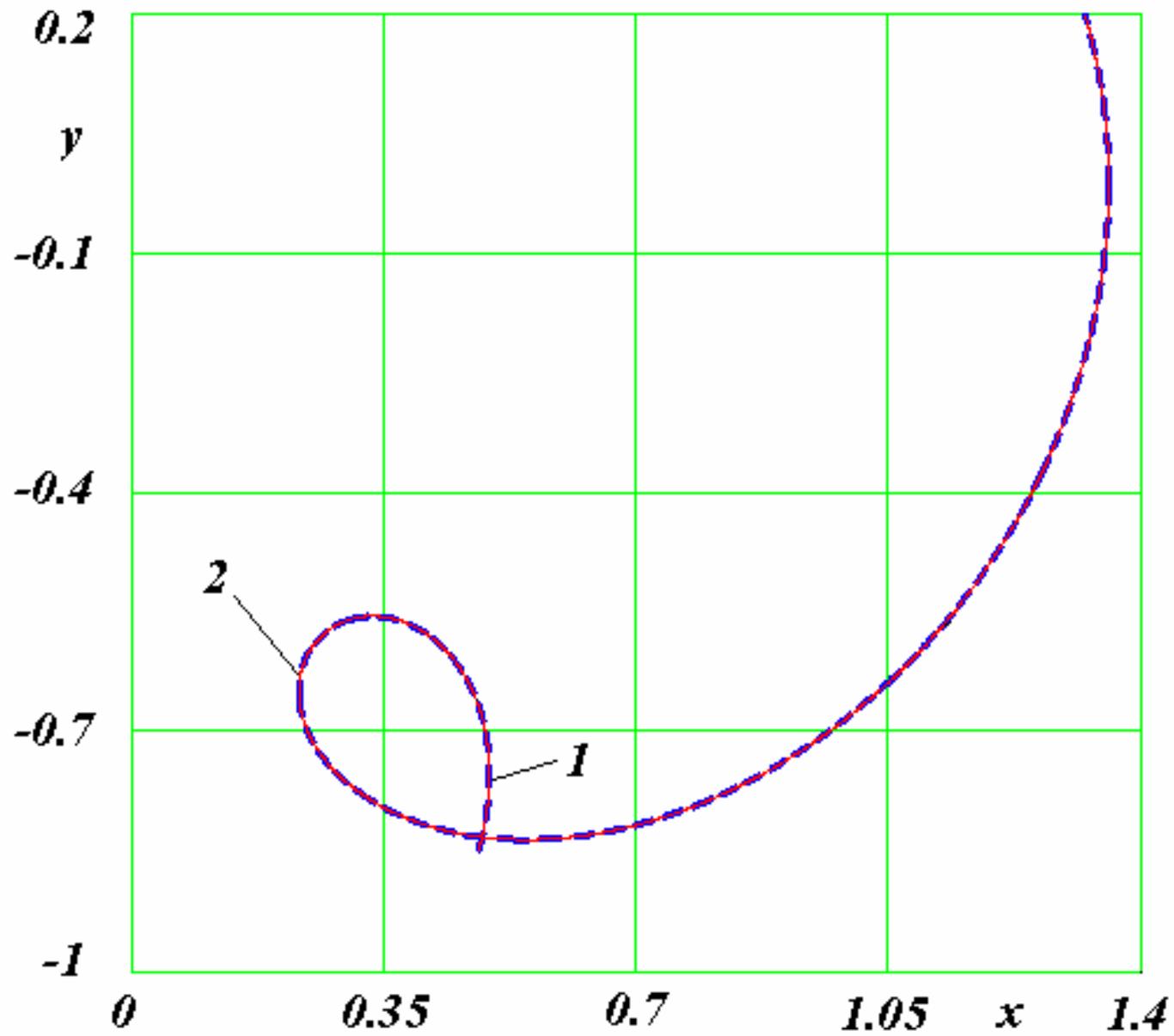
$$x_r = x - x_E; \quad y_r = y - y_E; \quad z_r = z - z_E, \quad (27)$$

где x_E , y_E и z_E выражают закон движения Земли.

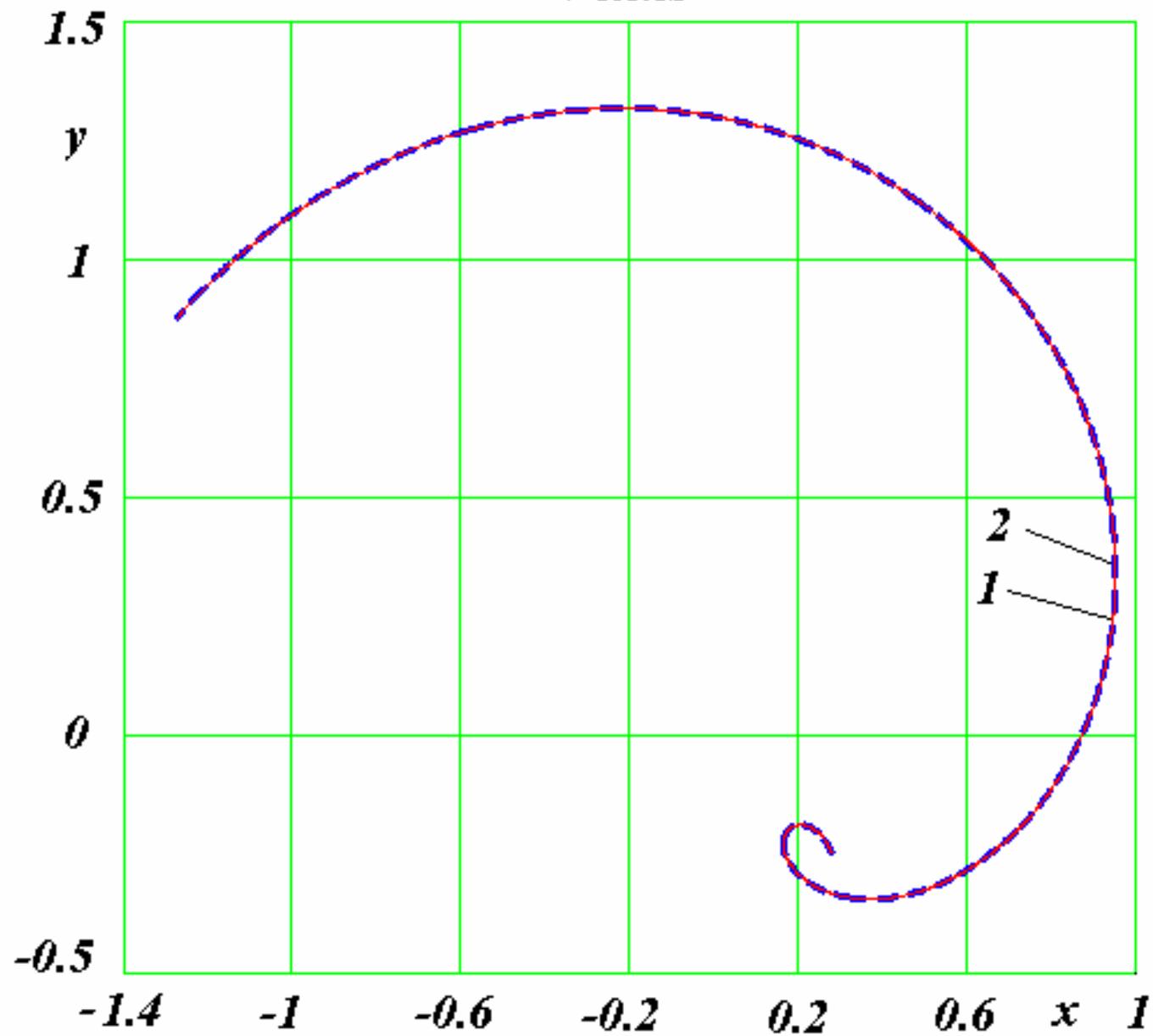


На графиках представлены проекции орбит планет относительно Земли на экваториальную плоскость, т.е. $y_r = f(x_r)$. Орбита Земли дана относительно Солнца. Другими словами, на графиках приведено сравнение орбит планет и Солнца при их движении относительно Земли. Результаты численного интегрирования изображены жирной пунктирной линией, а рассчитанные по нашей модели орбиты – тонкой сплошной. Время счета равно периоду обращения каждой планеты; координаты x_r и y_r выражены в астрономических единицах. В вычислениях использовался нами шаг интегрирования $h = 1 \cdot 10^{-4}$ года. Интервал времени изменялся от 0.24 года для Меркурия до 250 лет для Плутона.

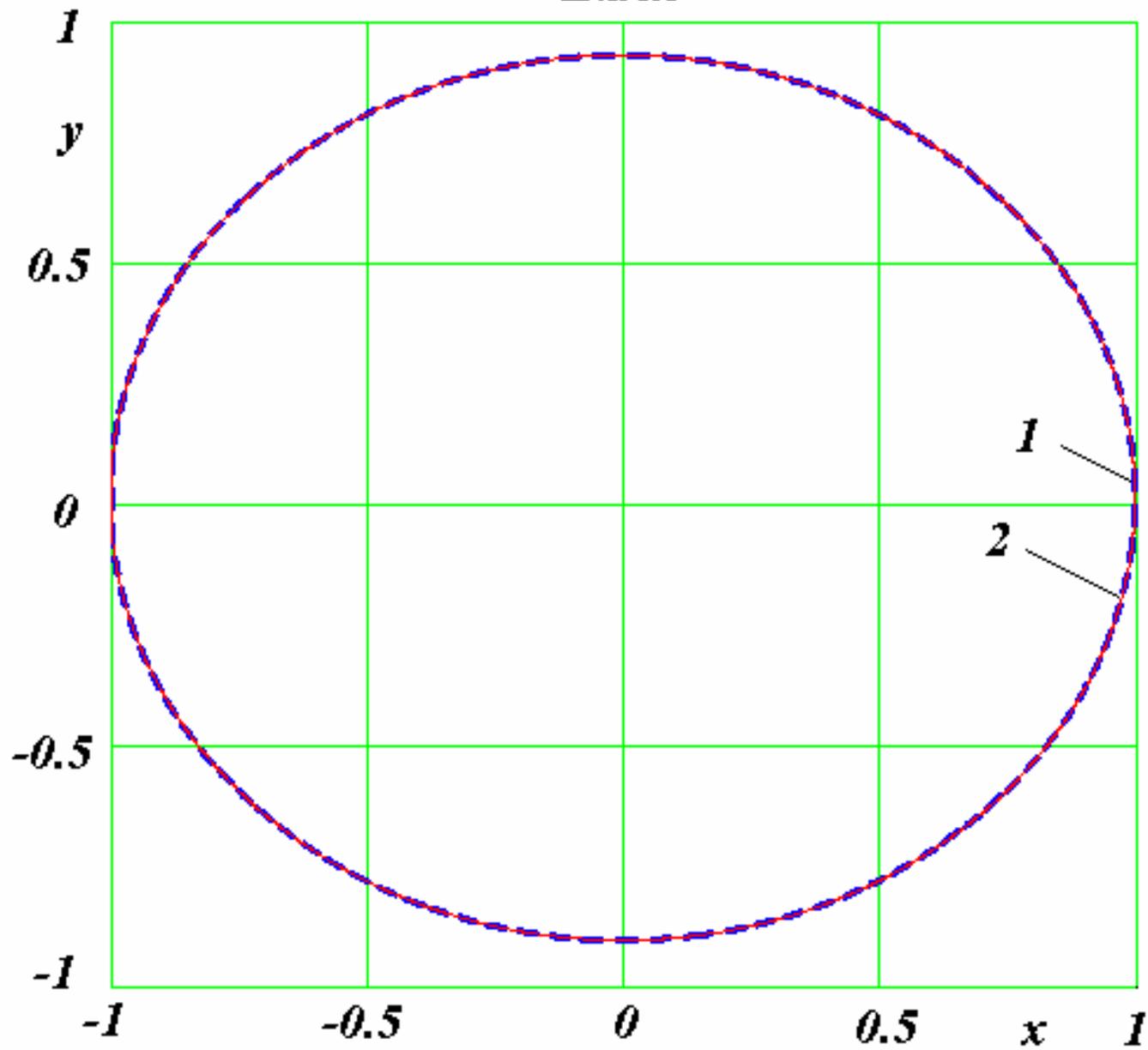
Mercury



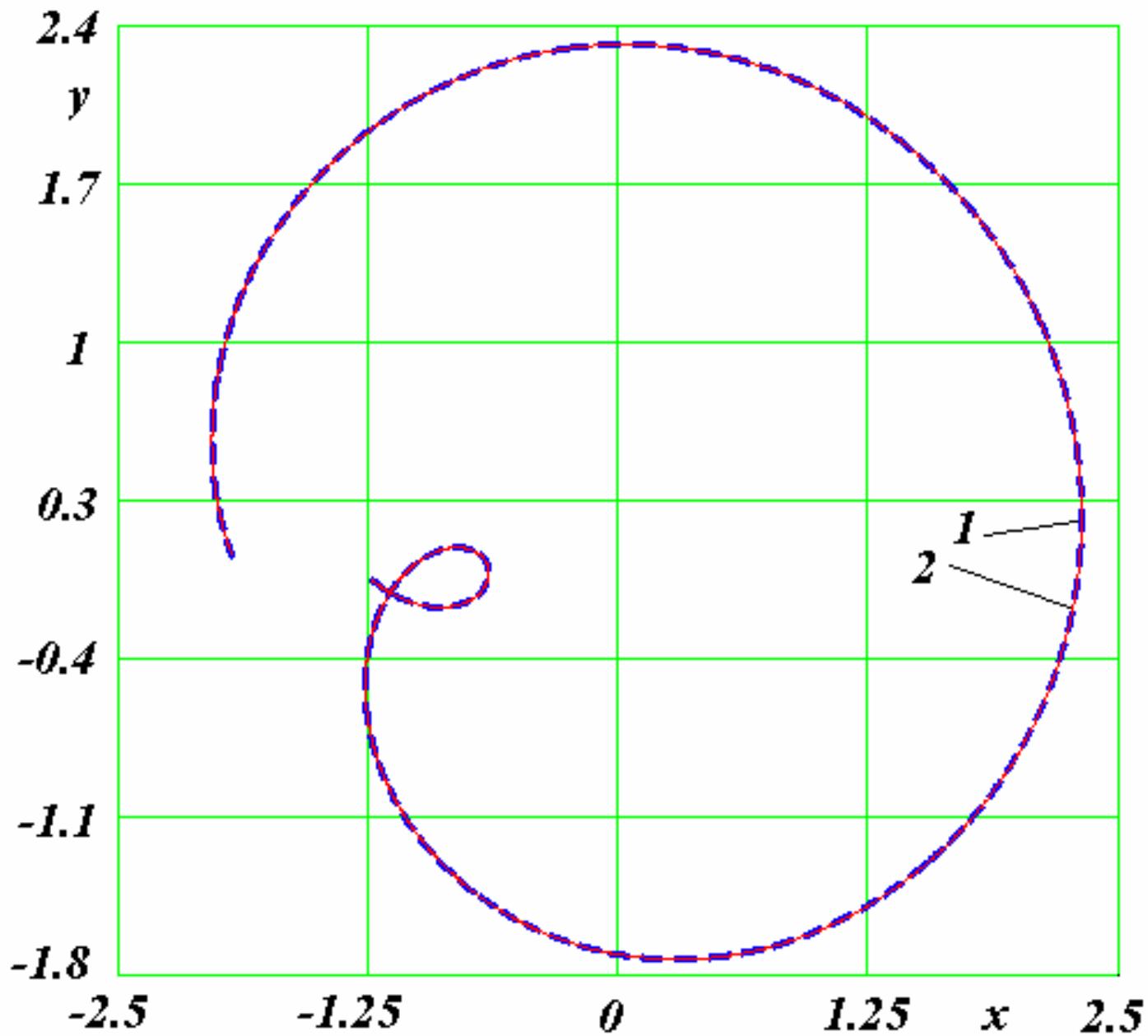
Venus



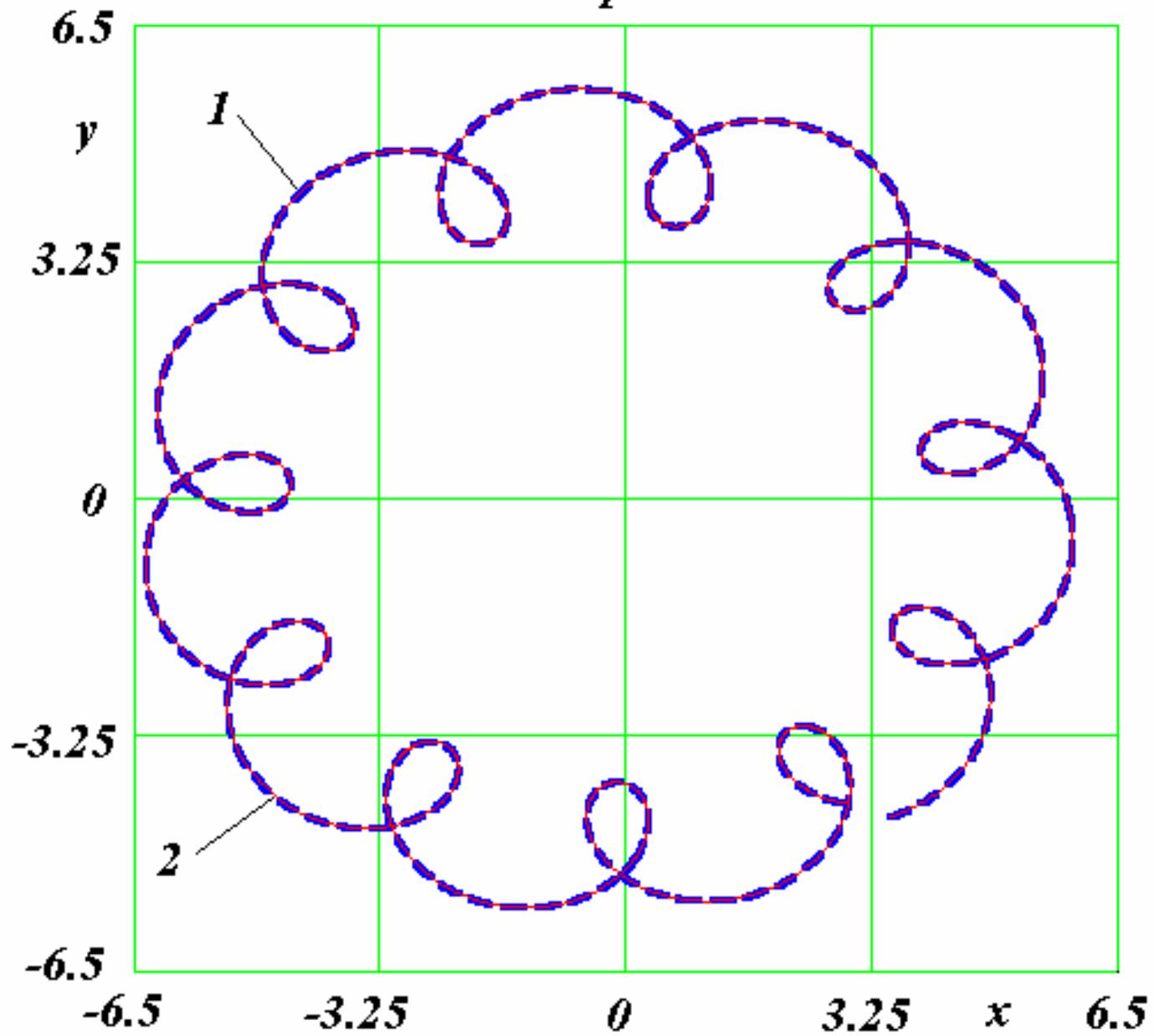
Earth



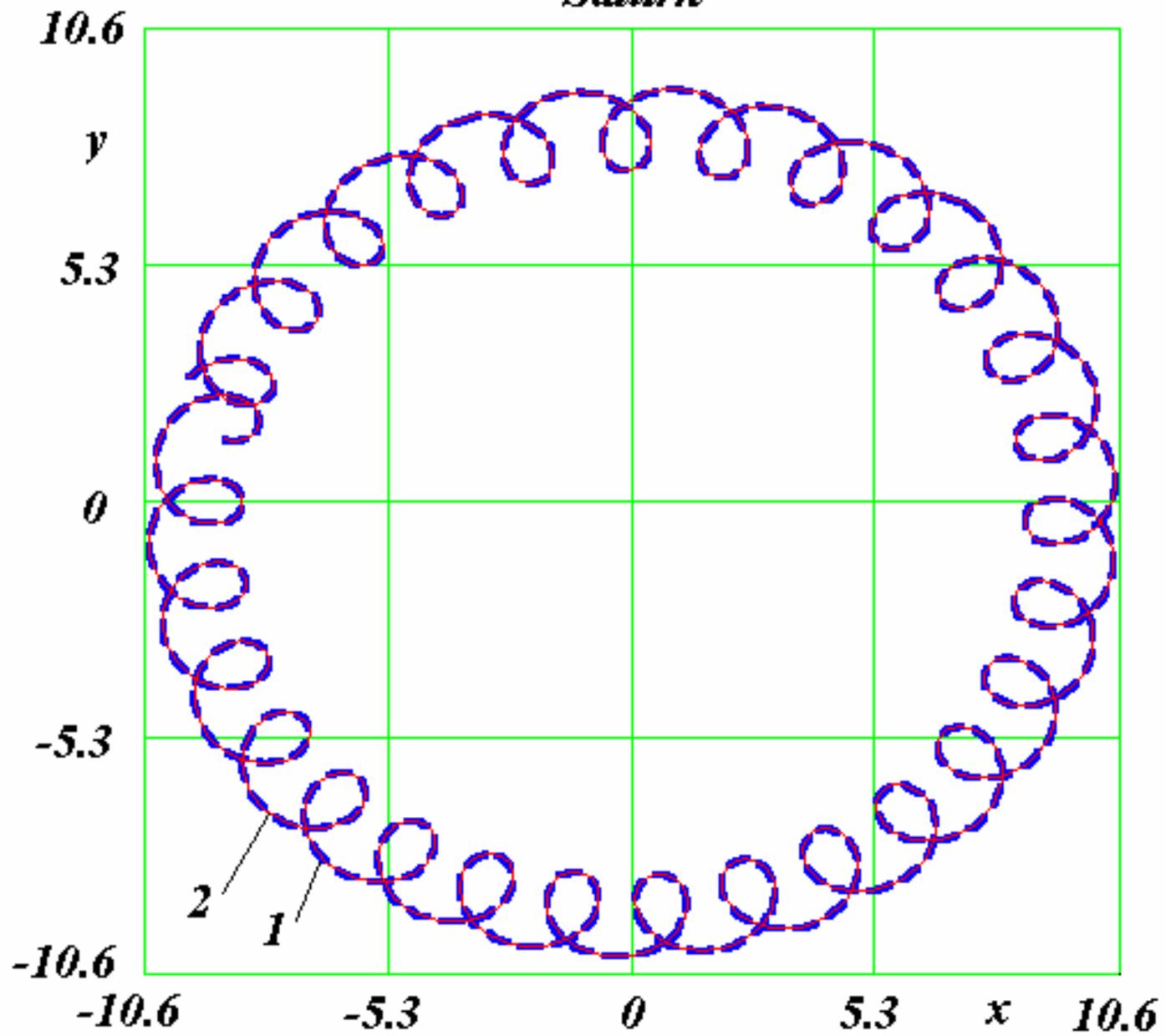
Mars



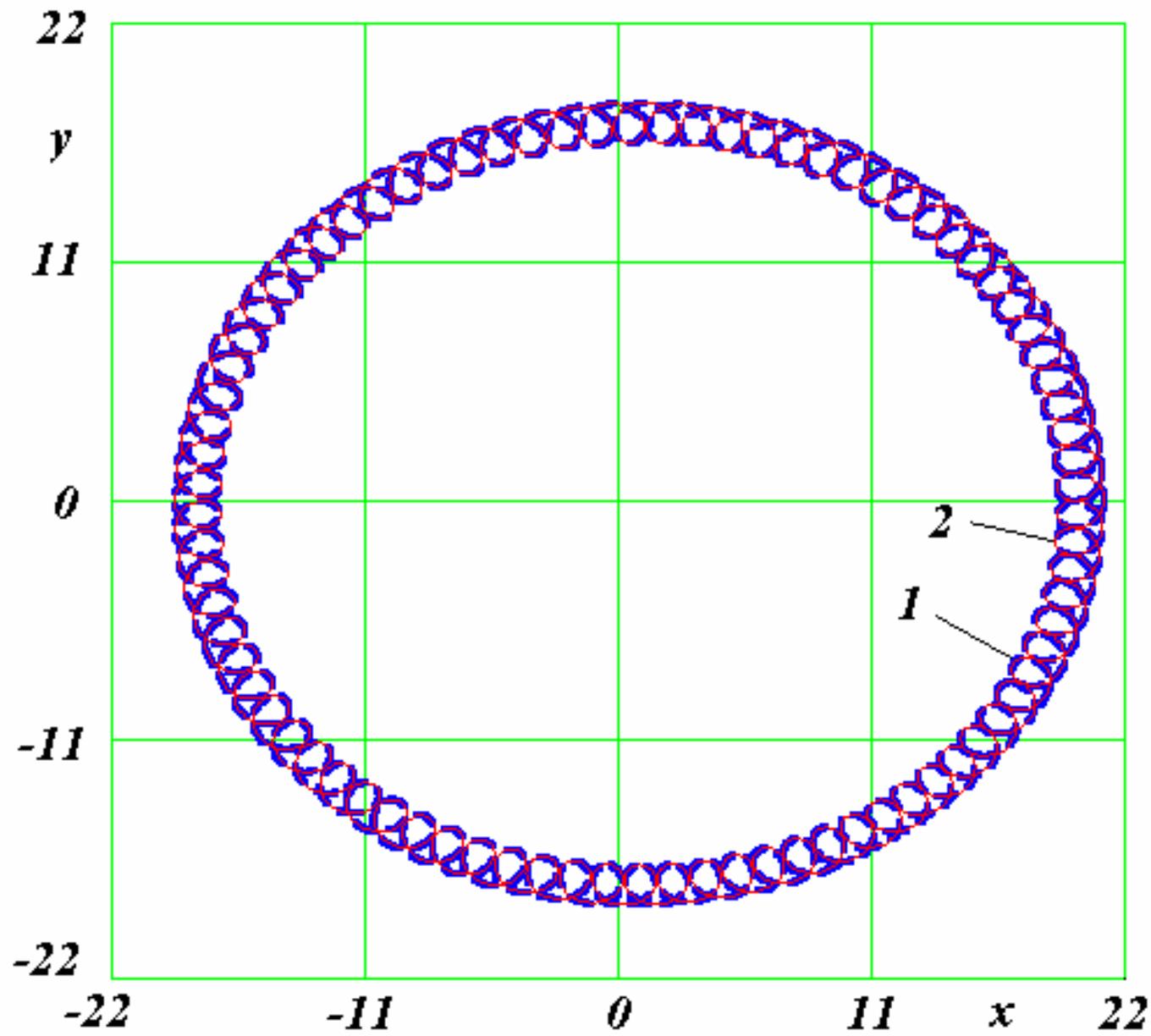
Jupiter



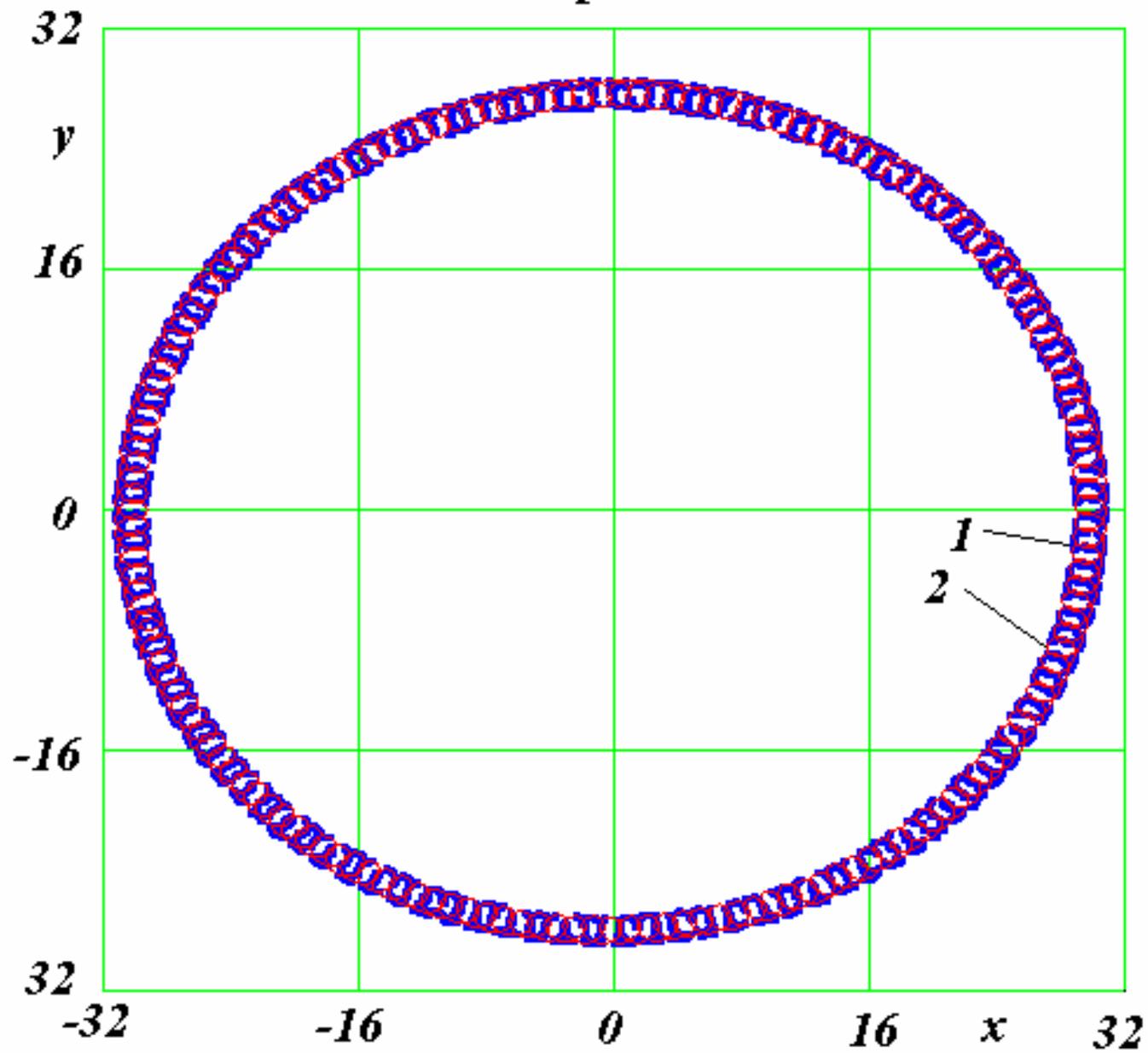
Saturn



Uranus



Neptune





Как видно из представленных графиков, орбиты планет и Солнца относительно Земли, рассчитанные двумя методами, фактически не различаются.

За один оборот Плутона вокруг Солнца Земля совершает почти 248 оборотов. За это время параметры ее орбиты изменяются существенно. На фрагменте графика для Плутона в увеличенном масштабе показан участок с началом и концом движения по орбите. Отличие между двумя вариантами фактически отсутствует. Это подтверждает правомерность нашего подхода, состоящего в том, что учет вековых изменений в элементах планетных орбит позволяет с достаточной точностью и весьма экономно построить такие теории движения орбит планет Солнечной системы, которые могут служить основой новых космогонических и космологических исследований.

По этой модели можно рассчитывать движение малых планет, астероидов, комет и спутников планет. Однако, для спутников, в отличие от других тел, все орбитальные расчеты необходимо выполнять в планетоцентрической системе. Еще раз отметим, что для расчета движения всех этих тел необходимо иметь начальные их координаты и вековые изменения параметров орбит: $\varphi_p(t)$, $\varphi_{\Omega}(t)$, $i(t)$, $e(t)$, $R_p(t)$, $T_{tr}(t)$.

Выводы.

1. Предложен математический метод, основанный на некоторых модификациях решения классической задачи двух тел, позволяющий создать вполне удовлетворительную по точности динамическую модель Солнечной системы.
2. Вычисление движения планет Солнечной системы и сравнение его с движением, рассчитанным другим методом, говорит в пользу достоверности модели, полученной более эффективными и экономичными методами.

Литература

1. Птолемей К. Альмагест: Математическое сочинение в тринадцати книгах: пер. с древнегреч. И.И. Веселовского / Ин-т истории естествознания и техники РАН; научн. ред. Г.Е. Куртик.-М.: Наука. Физматлит, 1998. - 672с.
2. Лаплас П.С. Изложение системы мира. – Л.: Наука, 1982. - 376с.
3. Исрапилов М.И. Наскальные рисунки Дагестана и колебания полюсов и наклона оси Земли в голоцене / Махачкала: Изд-во «Юпитер», 2003г. - 432с.
4. Смутьский И.И. Теория взаимодействия. - Новосибирск: Из-во Новосиб. ун-та, НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1999. – 294 с.
5. Смутьский И.И. Траектории при взаимодействии двух тел, зависящем от относительного расстояния и скорости//Математическое моделирование. - 1995. - Т.7. - N7. - С.117-126.
6. Смутьский И.И. Осесимметричная задача гравитационного взаимодействия N-тел// Математическое моделирование. – 2003, а, т. 15, № 5, с. 27-36.
7. Newcomb S. The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy. Washington: Government printing office. 1895. –202 p.
8. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г. Н. Дубошина. Изд. 2-е, доп. и перераб. М., Наука, 1976, 854 с.
9. Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J. et. al. Numerical Expression for Precession Formulae and Mean Elements for the Moon and the Planets // Astron. Astrophys. – 1994, vol. 282, p. 663-683.
10. Мельников В. П., Смутьский И.И. Астрономические факторы воздействия на криосферу Земли и проблемы их исследования// Криосфера Земли. – 2004. – Т. VIII, № 1, с. 3–14.
11. Смутьский И.И., Сеченов К.Е. Уравнения вращательного движения Земли и их решения при воздействии Солнца и планет / Институт криосферы Земли СО РАН. - Тюмень, 2007. - 35 с. - ил. : 7. Библиогр.: 19 назв. - Рус. - Деп. в ВИНТИ 02.05.07 г. № 492-В2007.