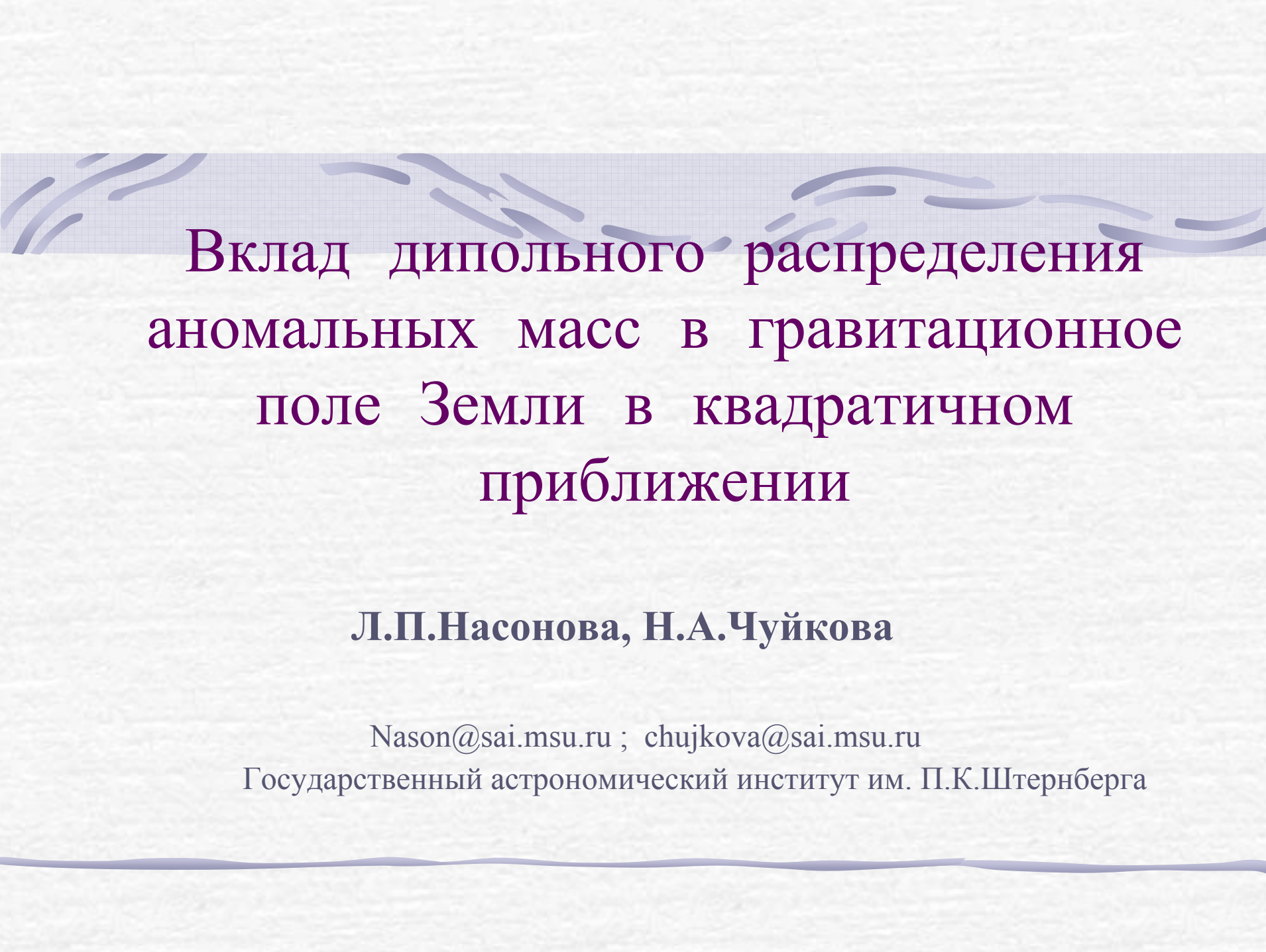




Вклад дипольного распределения аномальных масс в гравитационное поле Земли в квадратичном приближении

Л.П.Насонова, Н.А.Чуйкова

Nason@sai.msu.ru ; chujkova@sai.msu.ru

Государственный астрономический институт им. П.К.Штернберга

Потенциал сферического слоя

1. Распределение аномальных (т.е., отличных от соответствия гидростатическому равновесию) масс по высоте носит дипольный характер.

2. Аномальные массы представлены в виде простого сферического слоя $H(\varphi, \lambda)$

$(\bar{C}_{nm}, \bar{D}_{nm})$ - Коэффициенты разложения по шаровым функциям гравитационного потенциала .

$(\bar{a}_{nm}, \bar{b}_{nm})$ - коэффициенты разложения по шаровым функциям слоя аномальных масс $h=H(\varphi, \lambda)/R$

Внешний и внутренний потенциал слоя:

$$\bar{Y}_n(\varphi, \lambda) = \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{D}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_n(\sin \varphi)$$

$$V_i(r, \varphi, \lambda) = \frac{fM_0}{R} \sum_{n=1}^N \left(\frac{r}{R}\right)^n \bar{Y}_n(\varphi, \lambda),$$

$$V_e(r, \varphi, \lambda) = \frac{fM_0}{r} \sum_{n=1}^N \left(\frac{R}{r}\right)^n \bar{Y}_n(\varphi, \lambda),$$

$$\begin{cases} \bar{C}_{nm} \\ \bar{D}_{nm} \end{cases} = \frac{3}{2N+1} \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \frac{\Delta\sigma}{\bar{\sigma}} \begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases}$$

В линейном приближении

$$\begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases} = \begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases}_1$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases}_2 \rightarrow (h)^2$$

В квадратичном приближении , с учетом эллипсоидальности слоя

$$\begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases}_3 \rightarrow h\bar{P}_2(\sin \varphi)$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases} = \begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases}_1 + \frac{n+2}{2} \begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases}_2 + \alpha(n+2) \begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases}_3,$$

Для внешнего поля

$$\begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases} = \begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases}_1 - \frac{n-1}{2} \begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases}_2 + \alpha(n+2) \begin{cases} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{cases}_3,$$

Для внутреннего поля

Разложение по сферическим функциям

$$h(\varphi, \lambda) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{b}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad \left\{ \begin{matrix} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{matrix} \right\}_1$$

$$h^2(\varphi, \lambda) = \sum_{n=1}^{2N} \sum_{m=0}^n (\{\bar{a}_{nm}\}_2 \cos(m\lambda) + \{\bar{b}_{nm}\}_2 \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$$

Цель: выразить коэффициенты разложения через линейные члены.

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{matrix} \right\}_2 = \left\{ \begin{matrix} F1_{nm}(\{\bar{a}_{kl}, \bar{b}_{kl}\}_1) \\ F2_{nm}(\{\bar{a}_{kl}, \bar{b}_{kl}\}_1) \end{matrix} \right\}$$

Система элементарных сферических функций:

$$\begin{aligned} Y_{n,s}(x, \lambda) &= \bar{P}_{nm}(x) \cos(m\lambda), & (s \leq n, m = s) \\ Y_{n,s}(x, \lambda) &= \bar{P}_{nm}(x) \sin(m\lambda), & (s \geq (n+1), m = s - n) \end{aligned} \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi$$

$$h^2(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{2N} \sum_{s=0}^{2n} h_{n,s} Y_{n,s}, \quad \begin{aligned} h_{n,s \leq n} &= \{\bar{a}_{n,s}\}_2 \\ h_{n,s > n} &= \{\bar{b}_{n,s-n}\}_2 \end{aligned}, \quad h_{n,s} = \frac{1}{4\pi} \int_{x=-1}^1 \int_{\lambda=0}^{2\pi} h^2(\varphi, \lambda) Y_{n,s}(x, \lambda) d\lambda dx \quad x = \sin \varphi$$

Ряды Клебша-Гордона

$$\bar{P}_{n,m}(x)\bar{P}_{k,l}(x) = \sum_{n1=\max(|n-k|,m+l)}^{n+k} \bar{S}_{n,m,k,l,n1} \bar{P}_{n1,m+l}(x),$$

коэффициенты
Клебша-Гордона.

$$\bar{S}_{n,m,k,l,n1}$$

Разработаны два способа вычисления коэффициентов

$$\bar{S}_{n,m,k,l,n1}$$

$$1. \quad \bar{S}_{n,m,k,l,n1} = \frac{1}{4\pi} \int_{x=-1}^1 \int_{\lambda=0}^{2\pi} \bar{P}_{n,m}(x) \bar{P}_{k,l}(x) (\cos(m+l)\lambda) \bar{Y}_{n1,m+l} d\lambda dx \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$2. \quad K_{n,m} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) K_{k,l} \frac{d^l}{dx^l} P_k(x) - \sum_{n1=\max\{|n-k|,m+l\}}^{n+k} \bar{S}_{n,m,k,l,n1} K_{n1,m+l} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} P_{n1}(x) = 0,$$

Учет эллипсоидальности слоя аномальных масс

$$\{\bar{a}_{nm}, \bar{b}_{nm}\}_3 \quad h(\varphi, \lambda) \bar{P}_2(\sin\varphi) \quad n = 0..N+2, m = 0..\min(n, N)$$

$$\{\bar{a}_{n,m}\}_3 = \sum_{k=\max(1,m,|n-2|)}^{\min(n+2,N)} \bar{S}_{2,0,k,m,n} \bar{a}_{k,m}, \quad \{\bar{b}_{n,m}\}_3 = \sum_{k=\max(1,m,|n-2|)}^{\min(n+2,N)} \bar{S}_{2,0,k,m,n} \bar{b}_{k,m}.$$

Формулы для коэффициентов

$$\{\bar{a}_{nm}, \bar{b}_{nm}\}_2$$

$$h_{n,s}^{(N)}$$

$$h^2(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{2N} \sum_{s=0}^{2n} h_{n,s} Y_{n,s}$$

$$h_{n,s \leq n} = \{\bar{a}_{n,s}\}_2$$

$$h_{n,s > n} = \{\bar{b}_{n,s-n}\}_2$$

$$N \rightarrow N+1: h_{n,s}^{(N+1)} = h_{n,s}^{(N)} + dh_{n,s}^{(N)}$$

$$h_{2N+1,s} \quad h_{2N+2,s}$$

$$dh_{n,s}^{(N)}$$

для

$$1 \leq s \leq n$$

Добавки при вычислении

$$\{\bar{a}_{n,m}\}_2, m = s$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1, k \leq N \\ 1/2, k = N+1 \end{cases}$$

$$dh_{n,s}^{(N)} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \bar{P}_{n,s}^2 dx \sum_{l=\max(0, s-N-1)}^{\min(s, N+1)} \sum_{k=\max(1, s-l, |n-N-l|)}^{N+1} \delta_k \bar{S}_{N+1, l, k, s-l, n} (\bar{a}_{N+1, l} \bar{a}_{k, s-l} - \bar{b}_{N+1, l} \bar{b}_{k, s-l}) +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{\min(\frac{2N+2-s}{2}, \max(0, N+1-s))} \sum_{p=\max(s, s+2j)}^{2N+2} \int_{-1}^1 \bar{P}_{p, s+2j} \bar{P}_{n, s} dx \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=\max(1, s+j, |N+1-p|)}^{N+1} \delta_k \bar{S}_{N+1, j, k, s+j, p} (\bar{a}_{N+1, j} \bar{a}_{k, s+j} + \bar{b}_{N+1, j} \bar{b}_{k, s+j}) + \sum_{k=\max(1, j, |N+1-p|)}^{N+1} \delta_k \bar{S}_{N+1, j+s, k, s-l, p} (\bar{a}_{N+1, j+s} \bar{a}_{k, j} + \bar{b}_{N+1, j+s} \bar{b}_{k, j}) \right\}.$$

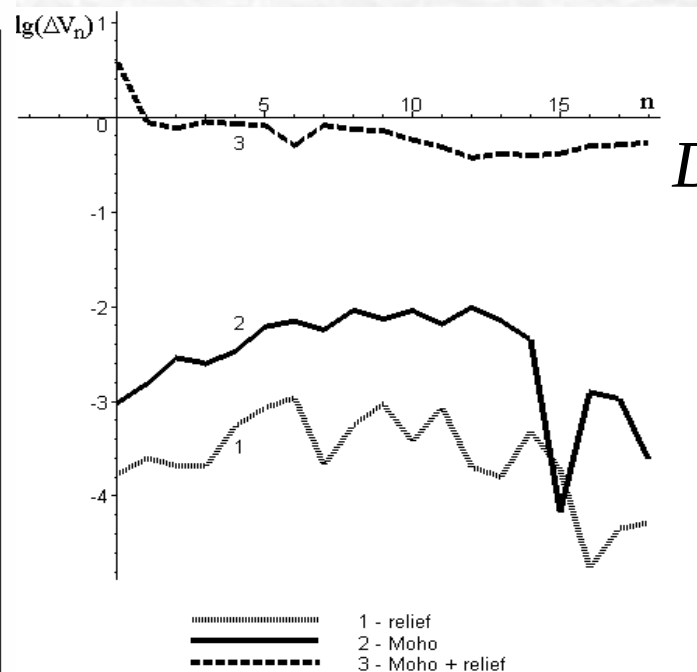
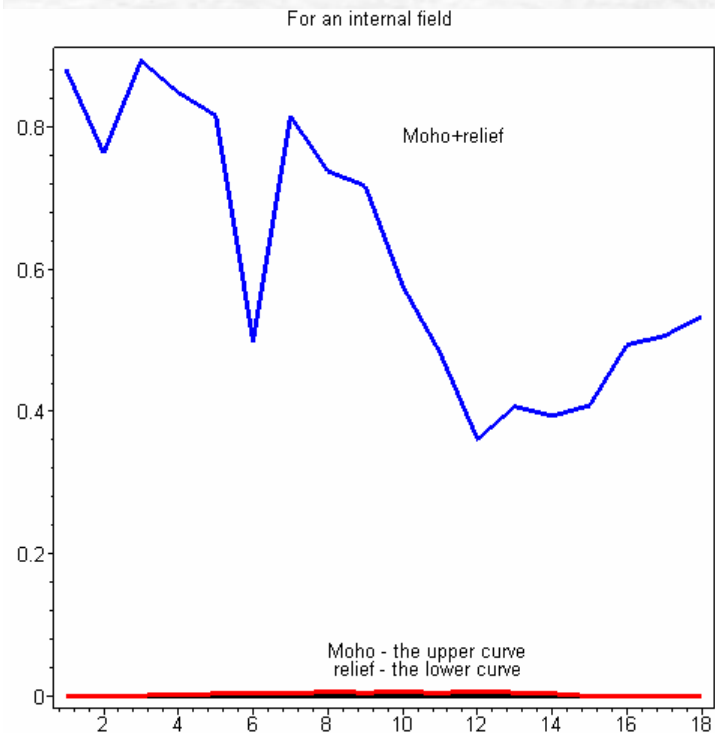
$$h_{n,s} = \sum_{N=[(n-1)/2]}^{N \max-1} dh_{n,s}^N, (n = 0..2N \max, s = 0..2n)$$

$$N_o = [(n-1)/2]$$

Учет квадратичных членов от разложения слоя степени N вносит дополнительный вклад в гармоники потенциала степени 0..2N

$$\{\bar{a}_{00}\}_2 = h_{0,0} = \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2) = \iint (h)^2 d\lambda d \sin \varphi$$

Зависимость среднеквадратического вклада по отдельности для масс рельефа и скачка плотности на М и суммарного вклада от степени разложения :



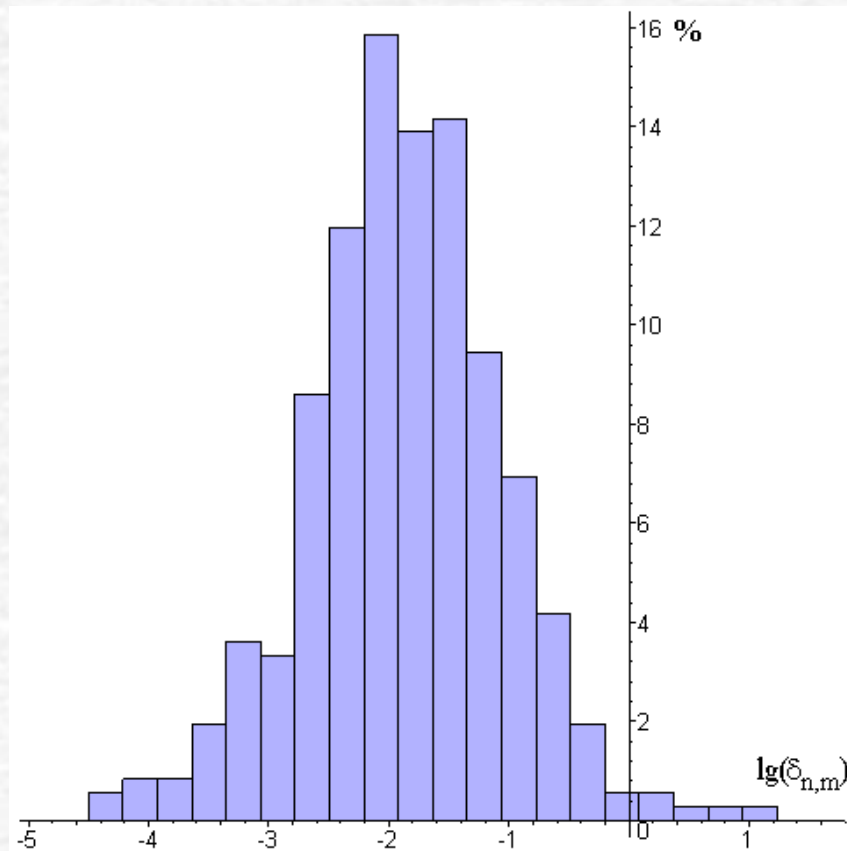
$$D_n = \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2)$$

$$\Delta \bar{V}_n = (\bar{V}_n - (\bar{V}_n)_1) / (\bar{V}_n)_1 = (\sqrt{D_n} - \sqrt{(D_n)_1}) / \sqrt{(D_n)_1}$$

Вклад квадратичных членов от скачка на М на порядок выше вклада от рельефа, а суммарный вклад примерно того же порядка малости, что и линейный вклад для гармоник $n=1..9$, и уменьшается для гармоник ($n=6,10..18$), соответствующих неполной изостатической компенсации рельефа на М

Гистограмма распределения относительного вклада в Стоксовы постоянные от суммы квадратичных членов для масс рельефа (r) и скачка плотности на M (M)

$$K \approx 0.115$$



$$\delta_{nm} = \left| \frac{n+2}{2} \left\{ \frac{\bar{a}_{nm}^r + K\bar{a}_{nm}^M}{\bar{b}_{nm}^r + K\bar{b}_{nm}^M} \right\}_2 / \left\{ \frac{\bar{a}_{nm}^r + K\bar{a}_{nm}^M}{\bar{b}_{nm}^r + K\bar{b}_{nm}^M} \right\}_1 \right|$$

(для внешнего поля)

$(\delta_{nm} > 1)$ для нескольких коэффициентов

$(\delta_{nm} > 0.01) \approx 57\%$

Линейный вклад в гравитационные аномалии на земном эллипсоиде от изостатически уравновешенной коры. (Диапазон изменений – (-17,18мГал))

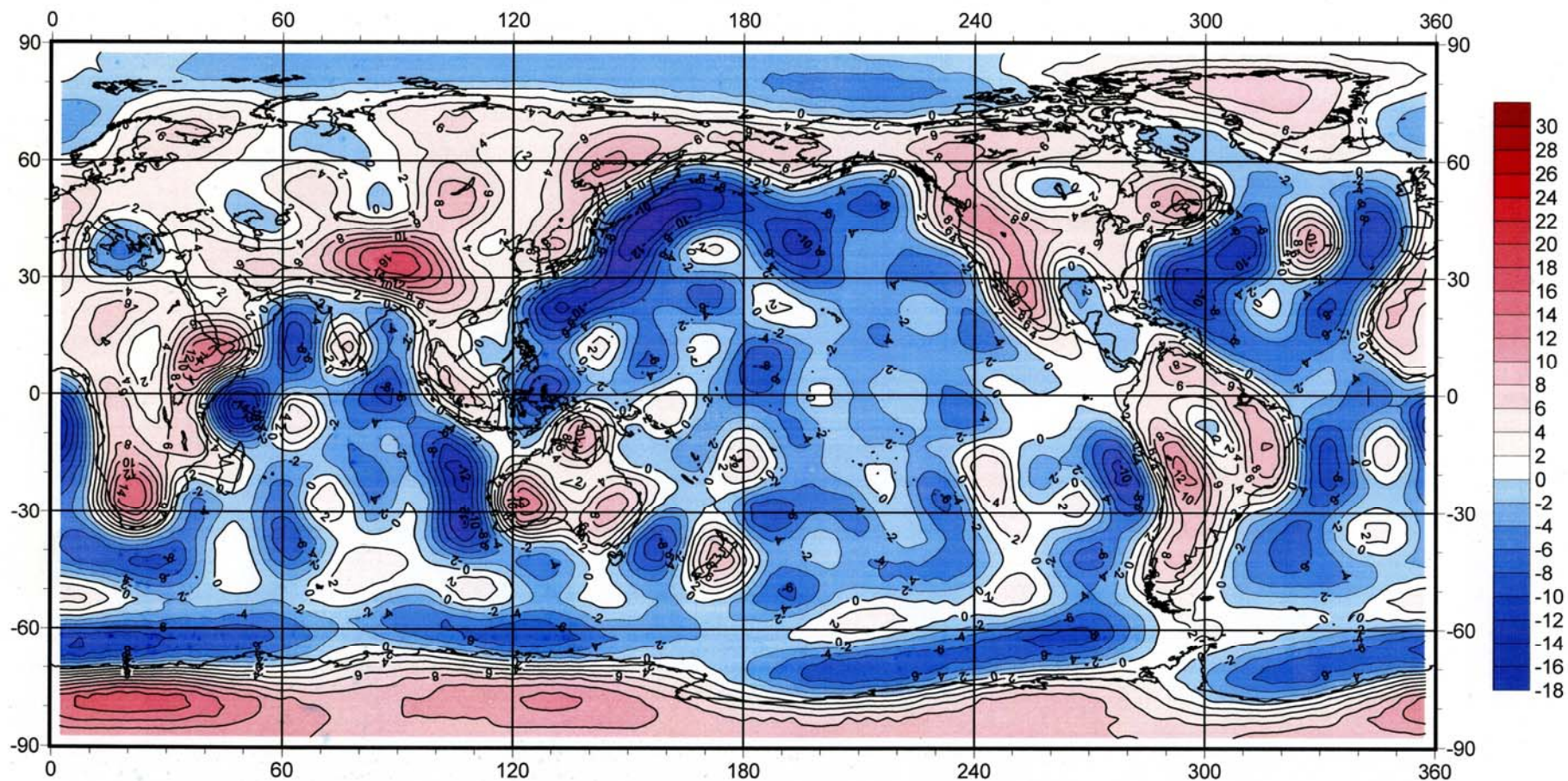


Рис.3. Линейный вклад в гравитационные аномалии на земном эллипсоиде от изостатически уравновешенной коры. Сечение изолиний 2 мГал, диапазон изменений (-17, 18) мГал

Вклад квадратичных членов в гравитационные аномалии на земном эллипсоиде от масс рельефа и скачка плотности на М. (Максимальное значение 13 мГал)

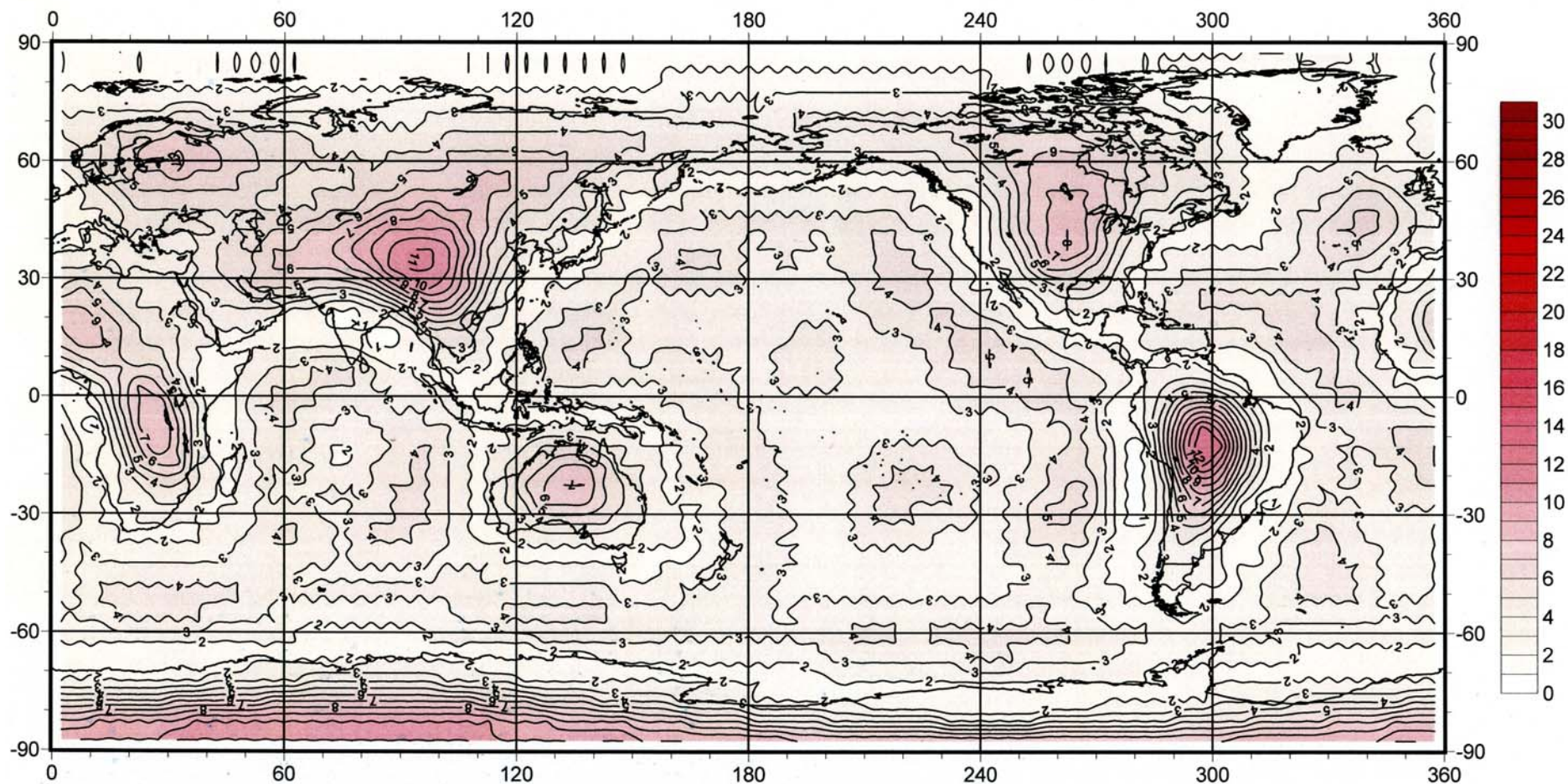


Рис.4. Вклад квадратичных членов в гравитационные аномалии на земном эллипсоиде от масс рельефа и скачка плотности на М. Сечение изолиний 1 мГал. Среднее значение 3.3 мГал, максимальное значение 13 мГал.

Общий вклад в гравитационные аномалии на земном эллипсоиде от изостатически уравновешенной коры. Диапазон изменений (-15, 29) мГал

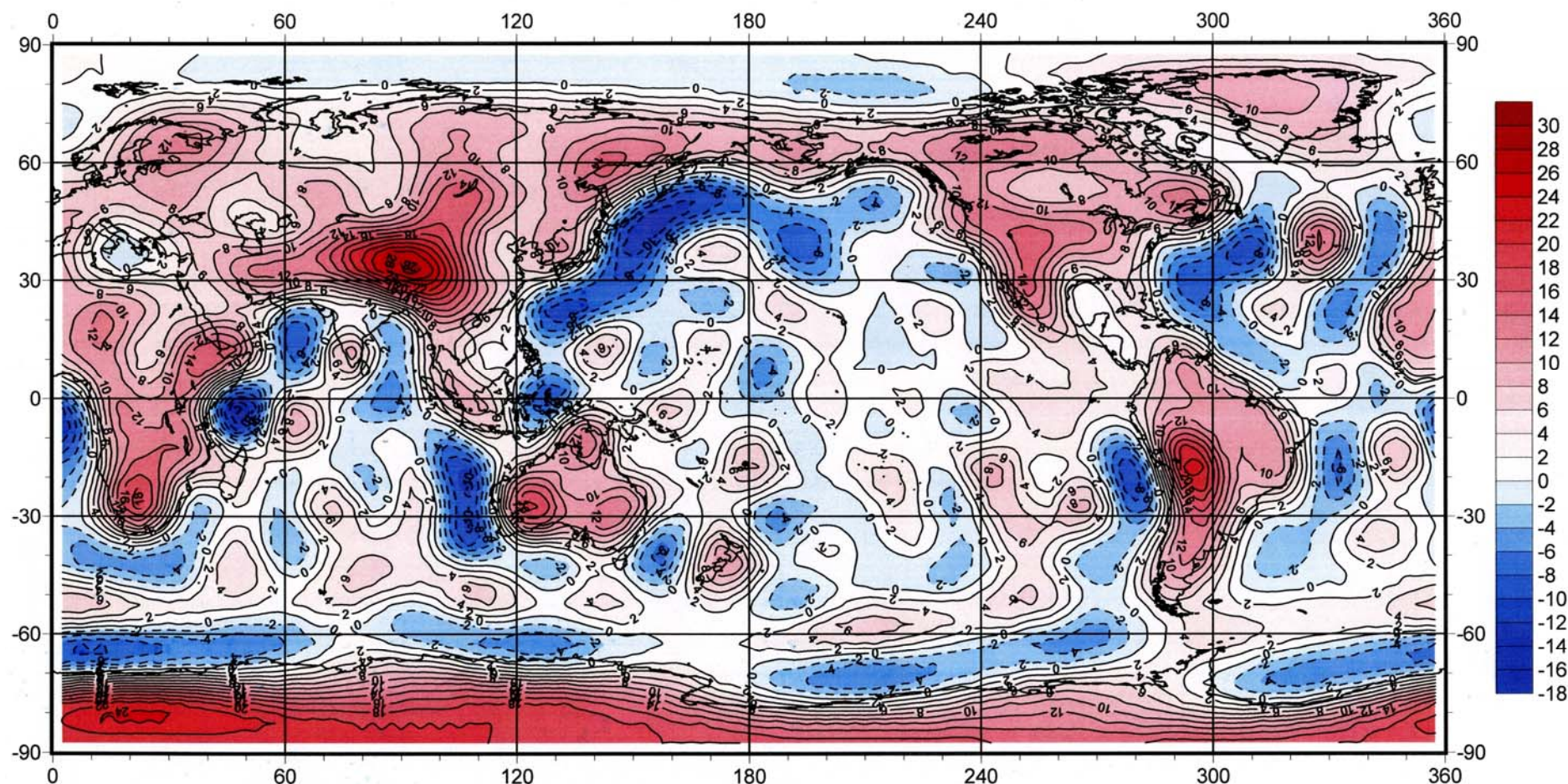


Рис.5. Общий вклад в гравитационные аномалии на земном эллипсоиде от изостатически уравновешенной коры. Сечение изолиний 2 мГал, диапазон изменений (-15, 29) мГал

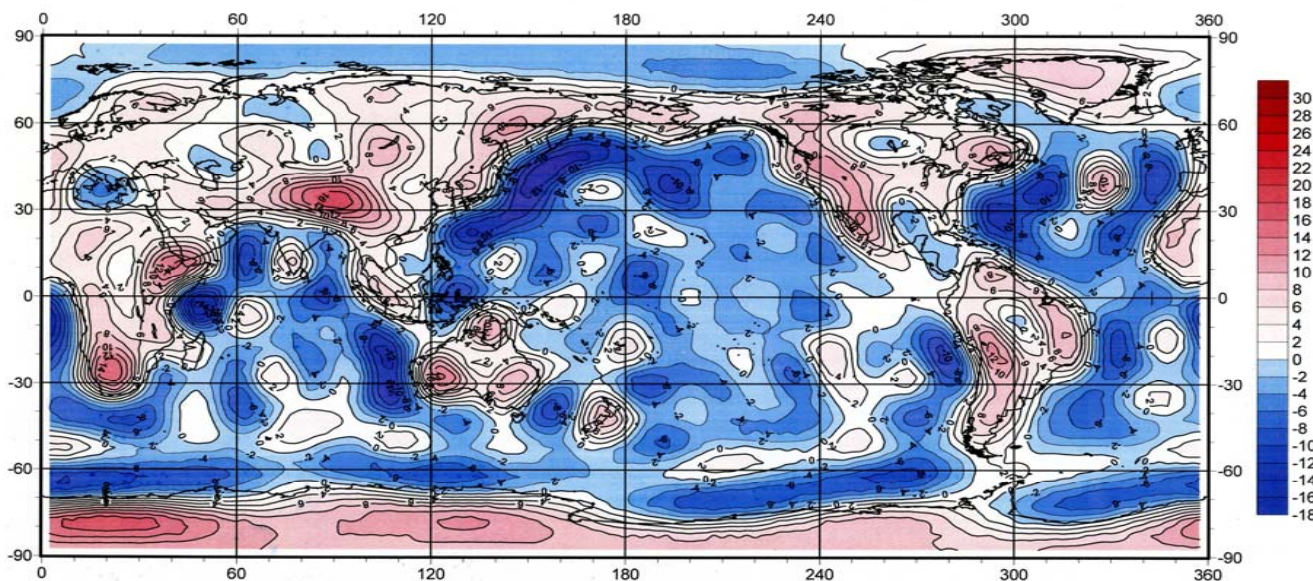


Рис.3. Линейный вклад в гравитационные аномалии на земном эллипсоиде от изостатически уравновешенной коры. Сечение изолиний 2 мГал, диапазон изменений (-17, 18) мГал

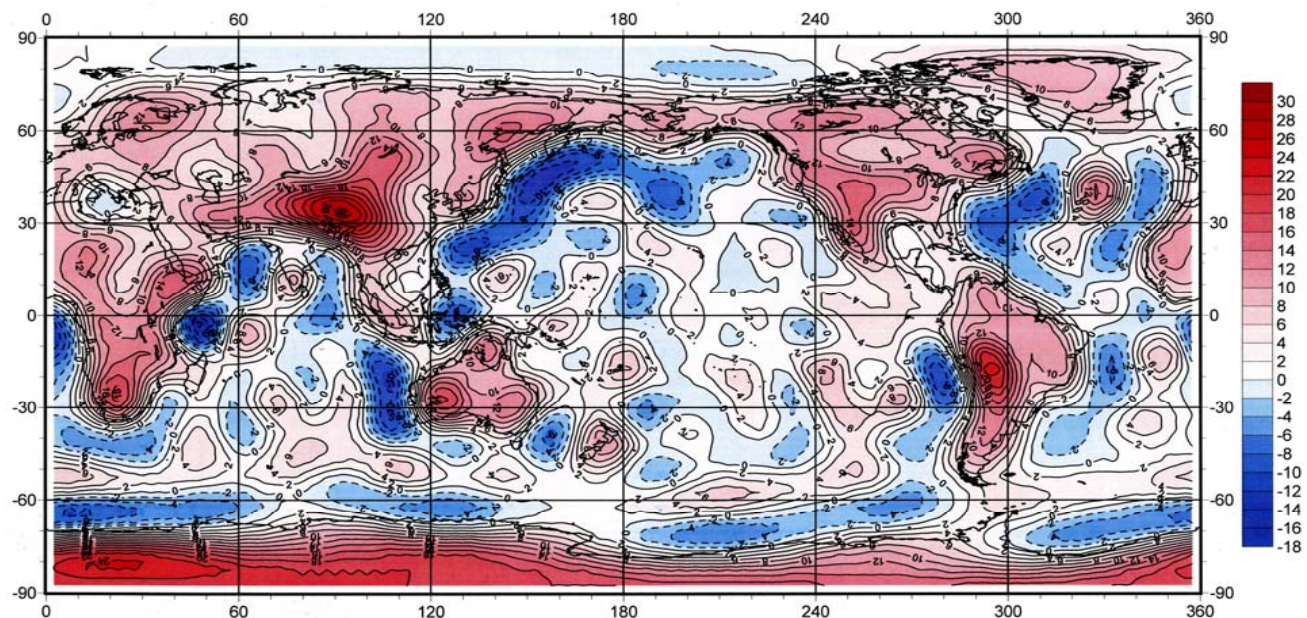


Рис.5. Общий вклад в гравитационные аномалии на земном эллипсоиде от изостатически уравновешенной коры. Сечение изолиний 2 мГал, диапазон изменений (-15, 29) мГал

**Сравнение
линейного и
общего вклада
на земном
эллипсоиде
от изостатически
уравновешенной
коры**

Линейный вклад в гравитационные аномалии на высоте 500 км от изостатически уравновешенной коры. Диапазон изменений (-6, 9) мГал

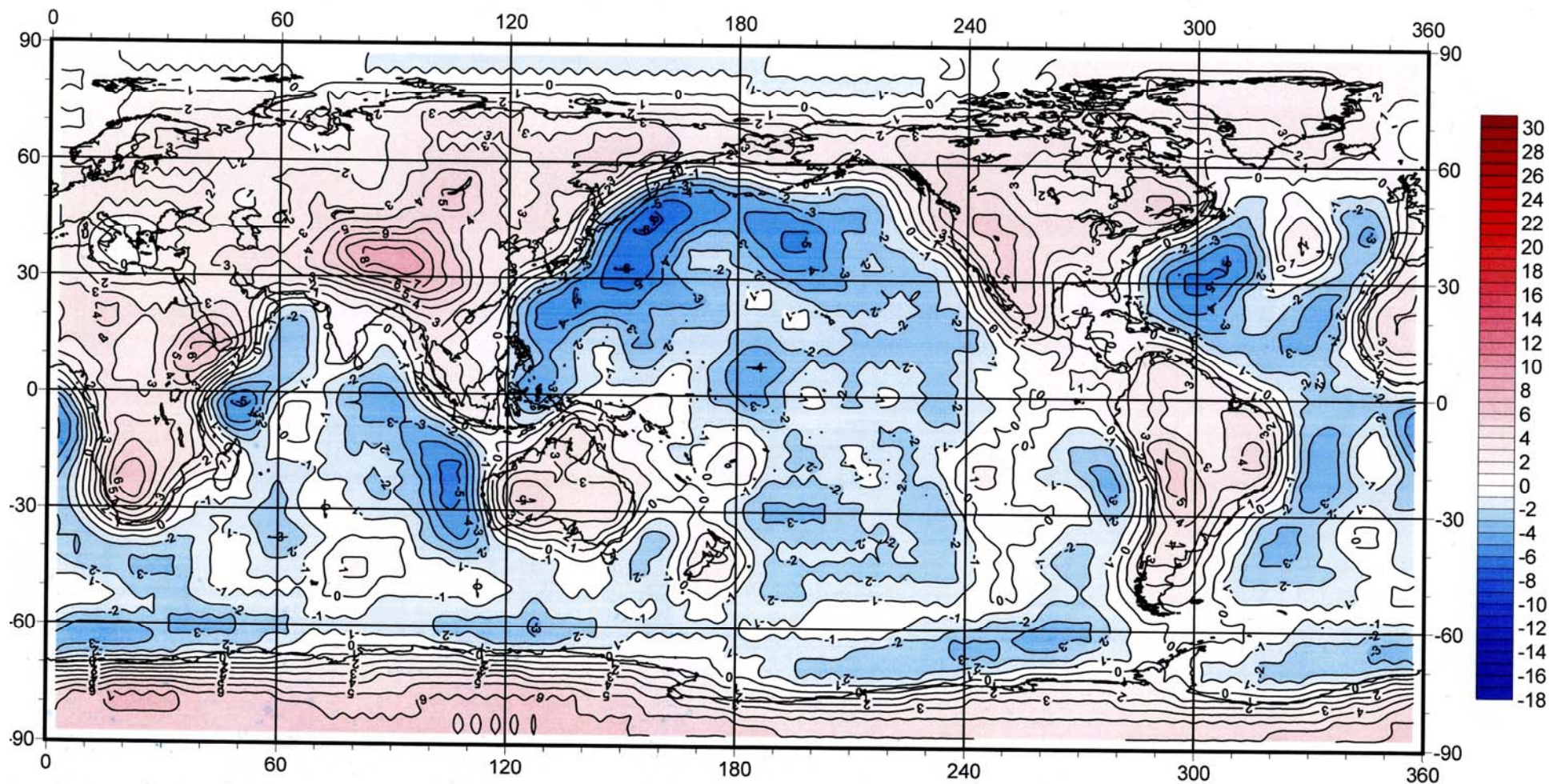


Рис. 6. Линейный вклад в гравитационные аномалии на высоте 500 км от изостатически уравновешенной коры. Сечение изолиний 1 мГал, диапазон изменений (-6, 9) мГал

**Вклад квадратичных членов в гравитационные аномалии на высоте 500 км
от масс рельефа и скачка плотности на М. Максимальное значение 7.1 мГал**

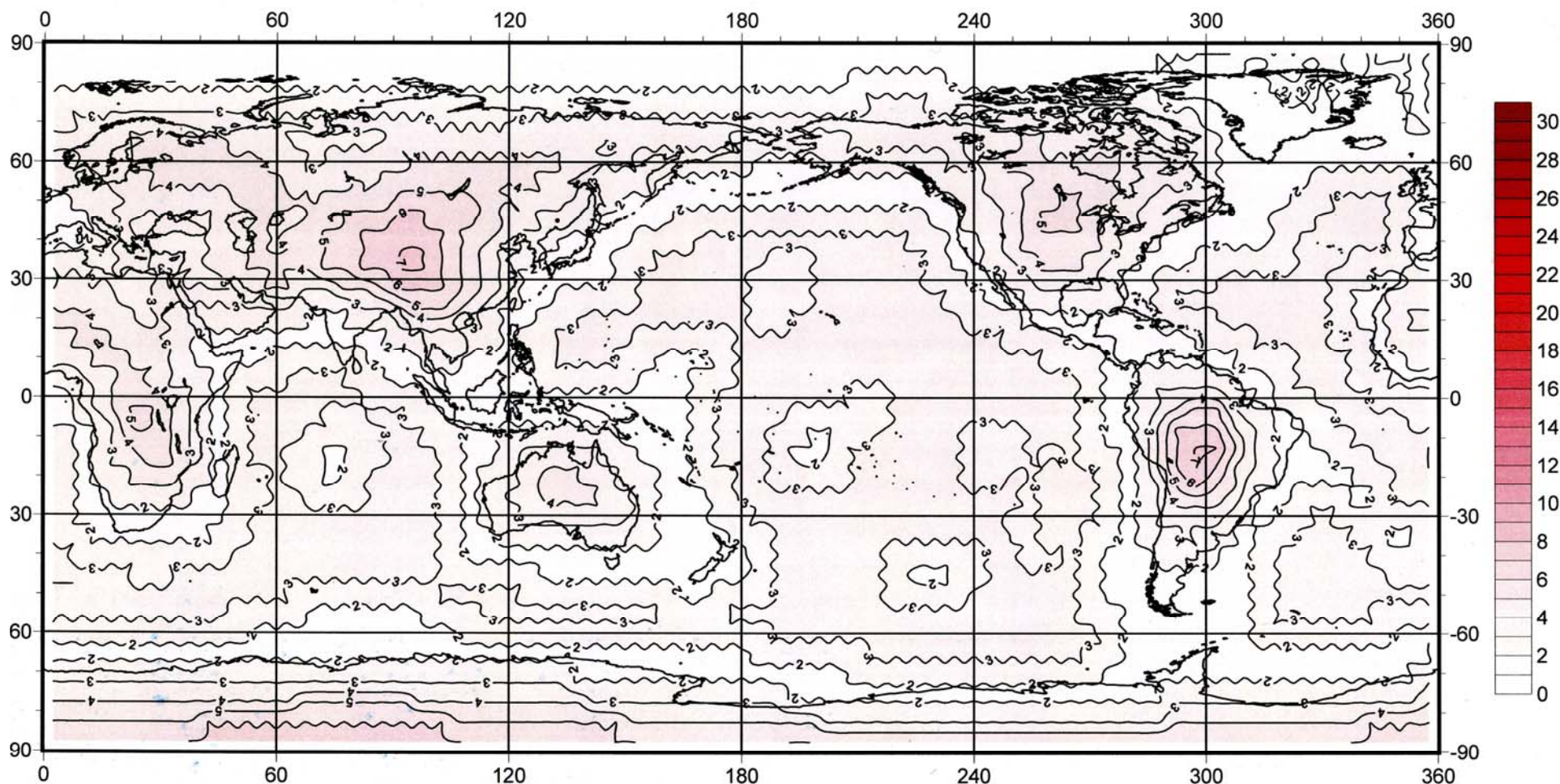


Рис. 7. Вклад квадратичных членов в гравитационные аномалии на высоте 500 км от масс рельефа и скачка плотности на М. Сечение изолиний 1 мГал. Среднее значение 2.8 мГал, максимальное значение 7.1 мГал.

Общий вклад в гравитационные аномалии на высоте 500 км
от изостатически уравновешенной коры. Диапазон изменений (-4, 16) мГал

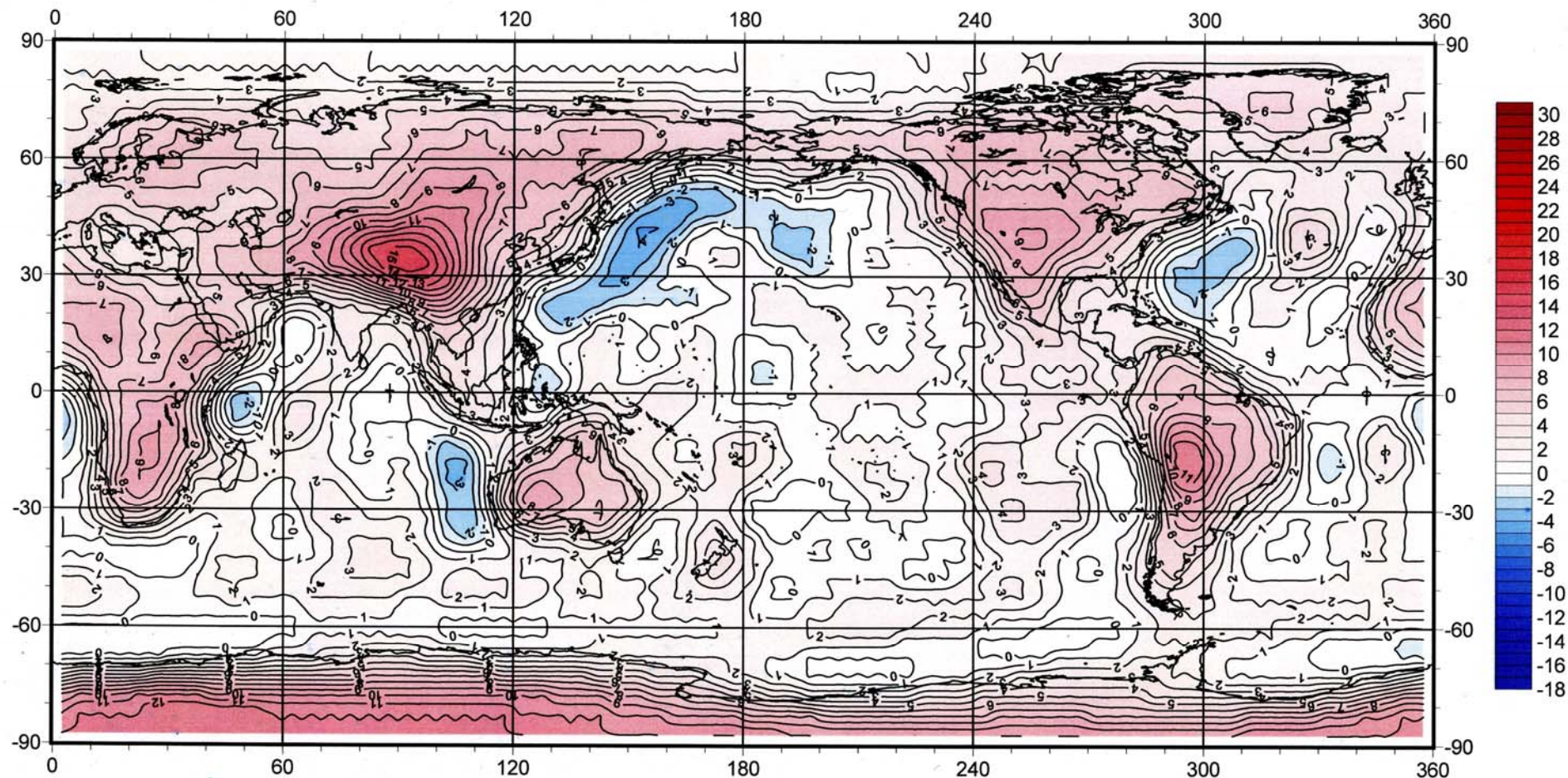


Рис.8. Общий вклад в гравитационные аномалии на высоте 500 км от изостатически уравновешенной коры. Сечение изолиний 1 мГал, диапазон изменений (-4, 16) мГал

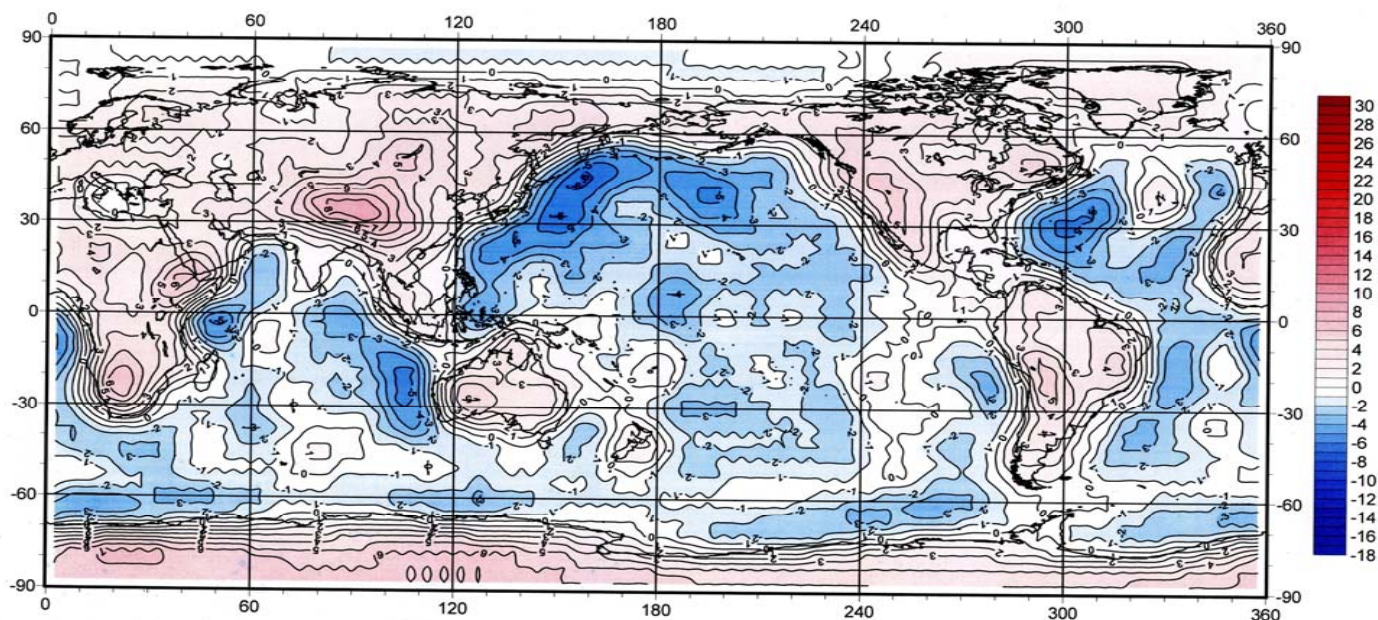


Рис. 6. Линейный вклад в гравитационные аномалии на высоте 500 км от изостатически уравновешенной коры. Сечение изолиний 1 мГал, диапазон изменений (-6, 9) мГал

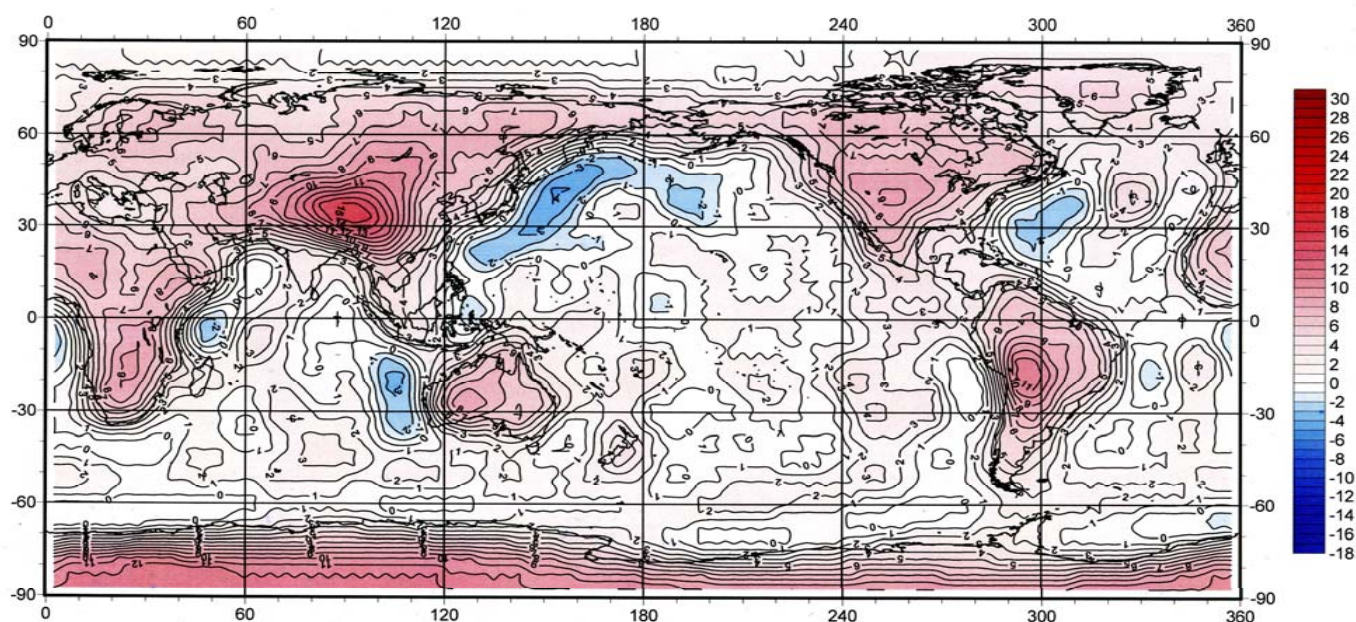


Рис. 8. Общий вклад в гравитационные аномалии на высоте 500 км от изостатически уравновешенной коры. Сечение изолиний 1 мГал, диапазон изменений (-4, 16) мГал

Сравнение
линейного и
общего вклада в
гравитационные
аномалии
на высоте 500 км
от изостатически
уравновешенной
коры

Неучет квадратично-
го вклада может зна-
чительно исказить
характер интерпре-
тации спутниковых
данных

Результаты и выводы

В работе были разработаны алгоритмы для последовательного получения формул, выражающих коэффициенты разложения по сферическим функциям квадрата некоторой функции от двух переменных, заданной изначально в виде разложения по сферическим функциям, через коэффициенты этого исходного разложения. Аналитические формулы получены для произвольного порядка $N_{\max}$ исходного разложения. Окончательные формулы для численных расчетов были получены до значения $N_{\max} = 9$ включительно, которые позволяют оценить вклад от учета квадратичных членов в Стоксовы постоянные степени 0..18. Полученные результаты проиллюстрированы на примере вклада квадратичных членов в гравитационное поле Земли от масс рельефа и скачка плотности на M .

Показано, что используя лишь линейное приближение при интерпретации гравитационных аномалий, можно получить неправильные оценки вклада границ коры в гравитационное поле Земли, а также неправильные оценки степени корреляции этих границ с гравитационными аномалиями.

Особенно заметен вклад квадратичных членов в спутниковой зоне, где он по абсолютной величине может даже превосходить линейный вклад для некоторых регионов.



Благодарим за внимание!