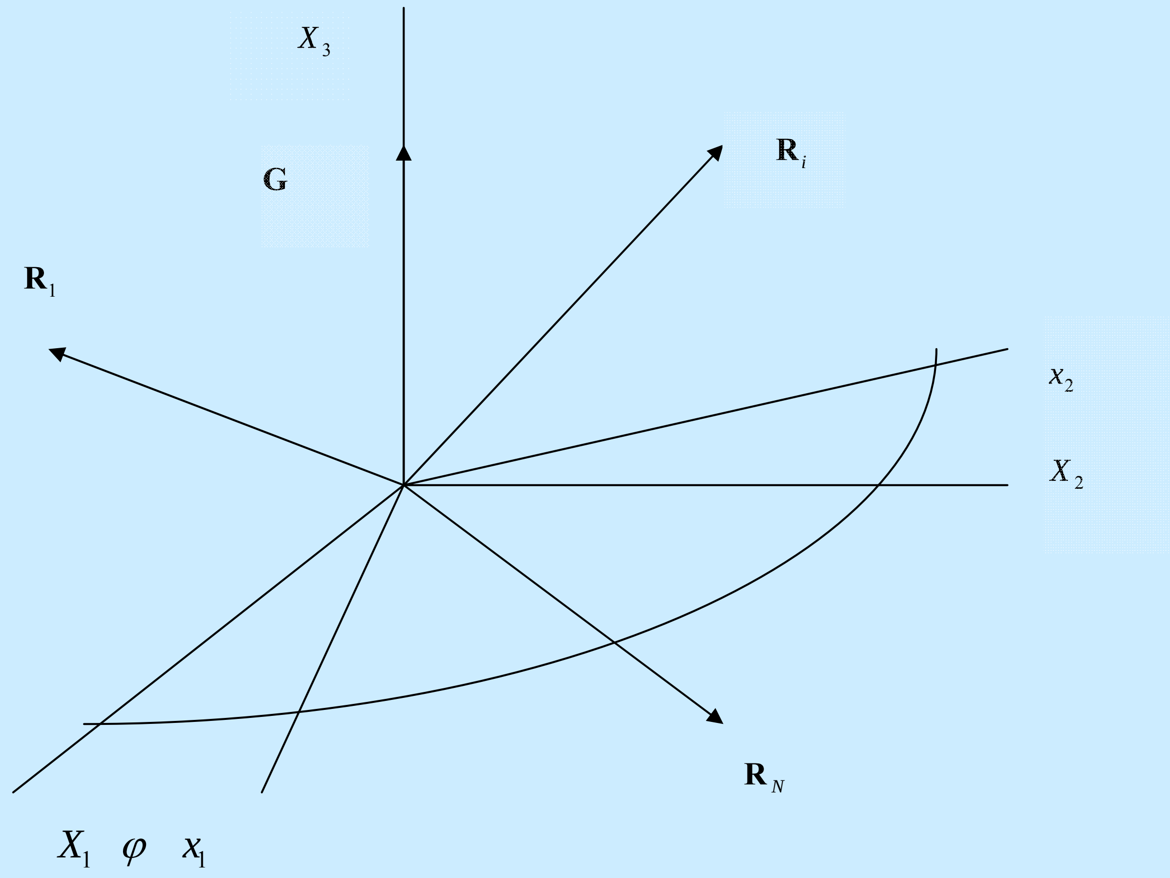
МОДЕЛЬ ДИССИПАТИВНОЙ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Механико-математический факультет МГУ

В.Г.Вильке


X_3
$\mathbf{R}_i$
$\mathbf{G}$
$\mathbf{R}_1$
x_2
X_2
$\mathbf{R}_N$
X_1 φ x_1

1. Стационарные движения в задаче N тел и их устойчивость.

$$\mathbf{R}_i = \Gamma_3(\varphi)\,\mathbf{r}_i, \quad \mathbf{v}_i = \dot\varphi[\mathbf{e}_3\times\mathbf{r}_i] + \dot{\mathbf{r}}_i, \quad i = 1,..,N$$

$$\Gamma_3(\varphi) = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \quad T + U, \qquad L_2 = \frac{1}{2}\,(J\,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3)\,\dot\varphi^2, \qquad L_1 = \dot\varphi\sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\mathbf{r}}_i\,[\mathbf{e}_3\times\mathbf{r}_i]$$

$$L_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\mathbf{r}}_i^2 + U, \quad (J\,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3) = \sum_{i=1}^{N} m_i\,[\mathbf{e}_3\times\mathbf{r}_i]^2, \quad U = \sum_{i<j}^{N}\frac{\gamma\, m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = \left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|$$

$$\Re = L - \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\dot\varphi = L_0 - L_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\mathbf{r}}_i^2 - \frac{1}{2(J\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3)}\Big(G - \sum_{i=1}^{N}[\mathbf{r}_i\times m_i\,\dot{\mathbf{r}}_i]\mathbf{e}_3\Big)^2 + U$$

$$V(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N) = \frac{G^2}{2(J\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3)} - U$$

Лемма. Необходимым условием обращения в нуль первой вариации являются равенства $\mathbf{r}_i \mathbf{e}_3 = 0 \ \forall i$

т.е. стационарная конфигурация располагается в плоскости Cx_1x_2

Для доказательства рассмотрим однопараметрическую группу преобразований

$$h^{\alpha}: E^3 \to E^3, \ h^{\alpha}\mathbf{r}_i = \mathrm{A}\mathbf{r}_i, \ \mathrm{A} = diag\{1,1,\alpha\}$$

Получим

$$V(\mathrm{A}\mathbf{r}_1,...,\mathrm{A}\mathbf{r}_N) = \frac{G^2}{2(J\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3)} - \sum_{i<j}^{N} \frac{\gamma m_i m_j}{[(\mathrm{A}\mathbf{r}_{ij})^2]^{1/2}}, \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$$

Первый член в правой части не зависит от α, а частная производная измененной потенциальной энергии по α должна обращаться нуль на стационарных конфигурациях. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} V(\mathrm{A}\mathbf{r}_1,..., \mathrm{A}\mathbf{r}_N) = \alpha \sum_{i<j}^{N} \frac{\gamma m_i m_j [(\mathbf{r}_{ij}\mathbf{e}_3)]^2}{[(\mathrm{A}\mathbf{r}_{ij})^2]^{3/2}} = 0$$

Поскольку сумма больше нуля, то равенство возможно только при $\alpha = 0$.

Все векторы $\mathbf{r}_i$ лежат в плоскости Cx_1x_2 В этом случае согласно лемме Лагранжа

$$(J\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = \sum_{i}^{N} m_i \mathbf{r}_i^2 = M^{-1} \sum_{i<j}^{N} m_i m_j r_{ij}^2, \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i, \ r_{ij}^2 = \mathbf{r}_{ij}^2,$$

$$V(r_{ij}) = \frac{M\,G^2}{2\sum_{i<j}^{N} m_i\, m_j\, r_{ij}^2} - \sum_{i<j}^{N} \frac{\gamma\, m_i\, m_j}{r_{ij}}$$

Для случая двух точек (**классическая задача Кеплера – Ньютона**) представим измененную потенциальную энергию в виде

$$V(r) = \frac{G^2}{2m_r r^2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r}, \quad m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad r_{12} = r$$

Расстояние между телами в стационарном движении определяется из уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{G^2}{m_r\, r^3} + \frac{\gamma\, m_1\, m_2}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{G^2}{m_r\ \gamma\, m_1\, m_2}$$

а вторая производная при этом положительна

$$\frac{\partial^2 V(r_0)}{\partial r^2} = \frac{3G^2}{m_r\, r_0^4} - \frac{2\gamma\, m_1\, m_2}{r_0^3} = \frac{G^2}{m_r\, r_0^4} > 0$$

$$\frac{d(T+V)}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \dot r}\dot r \le 0, \quad W(\dot r, r) \ge 0$$

Неустойчивость коллинеарной стационарной конфигурации в случае $N \ge 3$

Обозначим через $q_k = r_{k(k+1)}$ $(k=1,\ldots,N-1)$ независимые координаты, определяющие конфигурацию системы.

$$V = \frac{b}{2A} - \sum_{i<j}^{N} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \qquad \delta V = \sum_{i<j}^{N} m_i m_j \left(\frac{1}{r_{ij}^2} - \frac{b r_{ij}}{A^2} \right) \delta r_{ij} = 0$$

$$\delta^2 V = \sum_{i<j}^{N} m_i m_j \left(\frac{1}{r_{ij}^2} - \frac{b r_{ij}}{A^2} \right) \sum_{l,s=1}^{N-1} \frac{\partial^2 r_{ij}}{\partial q_l \partial q_s} \delta q_l \delta q_s + \frac{4b}{A^3} \left(\sum_{i<j}^{N} m_i m_j r_{ij} \delta r_{ij} \right)^2 -$$

$$- \sum_{i<j}^{N} m_i m_j \left(\frac{2}{r_{ij}^3} + \frac{b}{A^2} \right) (\delta r_{ij})^2 \; ; \; b = MG^2, \; A = \sum_{i<j}^{N} m_i m_j r_{ij}^2, \quad \delta r_{ij} = \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\partial r_{ij}}{\partial q_l} \delta q_l$$

Для линейной конфигурации справедливы соотношения

$$r_{ij} = \sum_{s=i}^{j-1} q_s \Rightarrow \delta r_{ij} = \sum_{s=i}^{j-1} \delta q_s, \quad \delta^2 r_{ij} = 0, \quad \forall\, i,\ j > i$$

Выберем независимые вариации так, чтобы вариация момента инерции системы $M^{-1} A$ была равна нулю, т.е.

$$\sum_{i<j}^{N} m_i m_j r_{ij} \sum_{s=i}^{j-1} \delta q_s = 0$$

Тогда вторая вариация измененной потенциальной энергии представится в виде

$$\delta^2 V = -\sum_{i<j}^{N} m_i m_j \left(\frac{2}{r_{ij}^3} + \frac{b}{A^2} \right) (\delta r_{ij})^2 < 0$$

Пусть существует набор векторов $(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_N),\ \mathbf{r}_i=(x_{1i},x_{2i})\ (i=1,\dots,N)$

соответствующий стационарной конфигурации системы

Для доказательства неустойчивости стационарных конфигураций в случае $N\geq 3$

достаточно показать, что существует ненулевой набор возможных перемещений, при котором измененная потенциальная энергия принимает отрицательные значения (теорема Кельвина-Четаева). Как и ранее, будем рассматривать такие наборы вариаций, при которых момент инерции системы относительно центра масс сохраняется.

Если перейти к системе координат $Cxyz$ повернутой на угол α относительно оси Cx_3 совпадающей с осью Cz, то в этой системе координат стационарная конфигурация представится набором векторов

$$(\Gamma_3(\alpha)\mathbf{r}_1,\dots,\Gamma_3(\alpha)\mathbf{r}_N),\ \ \Gamma_3(\alpha)\mathbf{r}_i=(x_i,y_i)\ (i=1,\dots,N)$$

где $\Gamma_3(\alpha)$ - ортогональный оператор, определенный выше. Определим две функции

$$I_x(\alpha)=\sum_{i=1}^{N}m_i(\Gamma_3(\alpha)\mathbf{r}_i,\mathbf{e}_x)^2,\ \ I_y(\alpha)=\sum_{i=1}^{N}m_i(\Gamma_3(\alpha)\mathbf{r}_i,\mathbf{e}_y)^2$$

Лемма. Существует такой угол α, при котором $I_x=I_y$

В случае, когда $I_x \neq I_y$, имеем

$$I_x - I_y = \sum_{i=1}^{N} m_i [(x_{1i}^2 - x_{2i}^2)\cos 2\alpha + 2x_{1i}x_{2i}\sin 2\alpha] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$ctg\ 2\alpha = -2\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_{1i}x_{2i} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (x_{1i}^2 - x_{2i}^2) \right)^{-1}$$

В системе координат $Cxyz$ измененная потенциальная энергия имеет вид

$$V(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N) = \frac{G^2}{2J_z} - \sum_{i<j}^{N} \frac{\gamma m_i m_j}{(\mathbf{r}_{ij}^2)^{1/2}}, \qquad J_z = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2\,, \quad \mathbf{r}_{ij}^2 = x_{ij}^2 + y_{ij}^2,\ \ x_{ij} = x_i - x_j,\ \ y_{ij} = y_i - y_j$$

Рассмотрим две группы отображений плоскости Cxy

в себя, порождающих возможные перемещения точек системы.
Первая группа соответствует гомотетии относительно центра масс системы

$$h^k : \mathbf{r}_i \mapsto k\mathbf{r}_i \ , \quad k \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon), \ \varepsilon > 0$$

Измененная потенциальная энергия и ее производная по параметру группы k представляются в виде

$$V(k\mathbf{r}_1,\ldots,k\mathbf{r}_N) = \frac{G^2}{2k^2 J_z} - \frac{1}{k}\sum_{i<j}^{N}\frac{\gamma m_i m_j}{(\mathbf{r}_{ij}^2)^{1/2}}, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial k}\right|_{k=1} = -\frac{G^2}{J_z} + \sum_{i<j}^{N}\frac{\gamma m_i m_j}{(\mathbf{r}_{ij}^2)^{1/2}} = 0$$

Вторая группа отображений $h^\lambda : \mathbf{r}_i \mapsto \Lambda\mathbf{r}_i, \ \Lambda = diag\{1+\lambda, 1-\lambda\}, \lambda \in (-\varepsilon, \ \varepsilon), \ \varepsilon > 0$

порождает возможные перемещения $\delta\,\mathbf{r}_i = (x_i, -y_i) \ (i = 1,\ldots, N)$

при которых центр масс системы остается в начале координат и обращается в нуль
первая вариация момента инерции системы относительно оси Cz

$$\delta J_z = \delta\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) = 2\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i \delta x_i + y_i \delta y_i) = 2\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 - y_i^2) = 0$$

Первая и вторая вариации измененной потенциальной энергии имеют вид

$$\delta V = \left.\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = -\frac{G^2}{J_z^2}\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i \delta x_i + y_i \delta y_i) + \sum_{i<j}^{N} \frac{\gamma m_i m_j}{(\mathbf{r}_{ij}^2)^{3/2}} (x_{ij} \delta x_{ij} + y_{ij} \delta y_{ij})$$

$$\delta^2 V = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\right|_{\lambda=0} = \frac{4G^2}{J_z^3}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i \delta x_i + y_i \delta y_i)\right)^2 - \frac{G^2}{J_z^2}\sum_{i=1}^{N} m_i [(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2] +$$

$$+\sum_{i<j}^{N} \frac{\gamma m_i m_j}{(\mathbf{r}_{ij}^2)^{3/2}} [(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2] - 3\sum_{i<j}^{N} \frac{\gamma m_i m_j}{(\mathbf{r}_{ij}^2)^{5/2}} (x_i \delta x_i + y_i \delta y_i)^2$$

На определенной выше группе возможных перемещений вторая вариация равна

$$\delta^2 V = -\frac{G^2}{J_z} + \sum_{i<j}^{N} \frac{\gamma m_i m_j}{(\mathbf{r}_{ij}^2)^{1/2}} - 3\sum_{i<j}^{N} \frac{\gamma m_i m_j}{(\mathbf{r}_{ij}^2)^{5/2}} (x_i^2 - y_i^2)^2$$

Первые два члена в полученном выражении в сумме равны нулю, а последняя сумма преобразуются к виду

$$\delta^2 V = -3\sum_{i<j}^{N} \frac{\gamma m_i m_j}{(\mathbf{r}_{ij}^2)^{1/2}} \left(\frac{x_{ij}^2}{r_{ij}^2} - \frac{y_{ij}^2}{r_{ij}^2} \right)^2 = -3\sum_{i<j}^{N} \frac{\gamma m_i m_j}{(\mathbf{r}_{ij}^2)^{1/2}} \cos^2 2\beta_{ij} < 0$$

Здесь угол β_{ij} обозначает угол между прямой, соединяющей точки с номерами i и j, и осью Cx

Все косинусы одновременно не могут обращаться в нуль, так как в этом случае стационарная конфигурация располагается вдоль оси Cy и становится коллинеарной, что противоречит сделанному выше предположению.

МОДЕЛЬ ДИССИПАТИВНОЙ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

2. Уравнения движения деформируемых шаров.

Пусть рассматриваемые шары деформируемы. Свяжем с каждым шаром систему координат $C_i\, x_{1i}\, x_{2i}\, x_{3i}$ и обозначим через $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}_i, t),\ |\mathbf{r}_i| \le a_i$ поле перемещений точек i - того шара при деформациях. Система координат $C_i\, x_{1i}\, x_{2i}\, x_{3i}$ интегральным образом связана с шаром, поскольку справедливы условия

$$\int_{V_i} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}_i, t)\, d\, x^{(i)} = 0, \qquad \int_{V_i} rot\, \mathbf{u}_i(\mathbf{r}_i, t)\, d\, x^{(i)} = 0.$$

Обозначим $\Gamma_i(\mathbf{s}_i(t)),\ \mathbf{s}_i(t) = (s_{1i}(t), s_{2i}(t) s_{3i}(t))$ -ортогональный оператор перехода от системы координат $C_i\, x_{1i}\, x_{2i}\, x_{3i}$ к инерциальной системе координат $OX_1X_2X_3$

$$-\frac{\gamma m_i m_j}{R_{ij}} + \Pi_{ij} + \Pi_{ji}$$

$$\Pi_{ij} = \frac{\gamma m_j}{R_{ij}^3}\left(\int_{V_i} \mathbf{r}_i \mathbf{u}_i \rho_i\, dx^{(i)} - \frac{3}{R_{ij}^2} \int_{V_i} (\mathbf{R}_{ij}, \Gamma_i \mathbf{r}_i)(\mathbf{R}_{ij}, \Gamma_i \mathbf{u}_i) \rho_i\, dx^{(i)} \right)$$

$$\mathrm{E}_i[\mathbf{u}_i] = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \int_{V_i} \left[\frac{\nu_i}{1-2\nu_i}(div\, \mathbf{u}_i)^2 + \sum_{k,l=1}^{3} e_{kl}^2\right] dx^{(i)}; \qquad e_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right),$$

$$D_i[\dot{\mathbf{u}}_i] = \chi_i\, \mathrm{E}_i[\dot{\mathbf{u}}_i]; \qquad \mathbf{u}_i = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}), \qquad \chi_i > 0.$$

Уравнения динамической линейной теории упругости малых деформаций для

i - того шара в системе координат $C_i\, x_{1i}\, x_{2i}\, x_{3i}$

$$\rho_i \{\ddot{\mathbf{u}}_i + [\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_i] + [\boldsymbol{\omega}_i \times [\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i)]] + 2[\boldsymbol{\omega}_i \times \dot{\mathbf{u}}_i]\} +$$

$$+ \nabla \mathrm{E}_i [\mathbf{u}_i] + \chi_i \nabla \mathrm{E}_i [\dot{\mathbf{u}}_i] + \nabla_{\mathbf{u_i}} \Pi = 0, \qquad \mathbf{p}_{\mathbf{n}}\big|_{\mathbf{n} \in \partial V_i} = 0.$$

Предполагается, что перемещения точек шара малы, что обеспечивается малостью безразмерных параметров $\varepsilon_{ij} = \rho_i \gamma m_j R_{ij}^{-3} a_i^2 E_i^{-1}$ $\quad \varepsilon_i = \rho_i \omega_i^2(0)\, a_i^2 E_i^{-1}$, где $\omega_i(0)$ - начальное значение угловой скорости шара.

$$\rho_i \{[\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_i] + [\boldsymbol{\omega}_i \times [\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i]]\} +$$

$$+ \varepsilon_{i0} \{\nabla \mathrm{E}_i [\mathbf{u}_{1i}] + \chi_i \nabla \mathrm{E}_i [\dot{\mathbf{u}}_{1i}] + \sum_{j \neq i}^{N} \nabla_{\mathbf{u_i}} \Pi_{ij} = 0, \qquad \mathbf{p}_{\mathbf{n}}\big|_{\mathbf{n} \in \partial V_i} = 0,$$

$$\nabla_{\mathbf{u_i}} \Pi_{ij} = \rho_i \Omega_{ij}^2 [r_i - 3(\Gamma_i^{-1} \mathbf{R}_{ij}^{\circ}, \mathbf{r}_i) \Gamma_i^{-1} \mathbf{R}_{ij}^{\circ}, \quad \Omega_{ij}^2 = \gamma m_j R_{ij}^{-3}, \quad \mathbf{R}_{ij}^{\circ} = \mathbf{R}_{ij} \left|\mathbf{R}_{ij}\right|^{-1}$$

$$\mathbf{u}_{1i}(\mathbf{r}_i, t) = \mathbf{v}_{0i}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{v}_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{k=0,\, j \neq i}^{\infty, N} (-\chi_i)^k \frac{d^k\, \mathbf{v}_{ij}(\mathbf{r}_i, t)}{d t^k} \approx$$

$$\approx \mathbf{v}_{0i}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{v}_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{j \neq i}^{N} [\mathbf{v}_{ij}(\mathbf{r}_i, t) - \chi_i \dot{\mathbf{v}}_{ij}(\mathbf{r}_i, t)],$$

$$\varepsilon_{i0}\,\nabla \mathrm{E}[\mathbf{v}_{0i}] = \frac{2}{3}\rho_i\,\boldsymbol{\omega}_i^2\,\mathbf{r}_i\,,\ \ \mathbf{p}_{\mathbf{n}}\big|_{\mathbf{r}_i\in\partial V_i} = 0, \qquad \boldsymbol{\omega}_i = (\omega_{1i}\,,\,\omega_{2i}\,,\,\omega_{3i}) \tag{1}$$

$$\varepsilon_{i0}\,\nabla \mathrm{E}[\mathbf{v}_i] = \frac{2}{3}\rho_i\,B_i\,\mathbf{r}_i\,, \quad \mathbf{p}_{\mathbf{n}}\big|_{\mathbf{r}_i\in\partial V_i} = 0, \qquad B_i = (\frac{\boldsymbol{\omega}_i^2}{3}\,\delta_{kl} - \omega_{ki}\,\omega_{li}) \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_{i0}\,\nabla \mathrm{E}[\mathbf{v}_{ij}] = \frac{2}{3}\rho_i\,\Omega_{ij}^2\,B_{ij}\,\mathbf{r}_i\,, \qquad \mathbf{p}_{\mathbf{n}}\big|_{\mathbf{r}_i\in\partial V_i} = 0, \\ B_{ij} = (3e_{k,ij}\,e_{l,ij} - \delta_{kl}), \quad \Gamma_i^{-1}\,\mathbf{R}_{ij}^{\circ} = \mathbf{e}_{ij} = (e_{1,ij}\,,\,e_{2,ij}\,,\,e_{3,ij}).\end{gathered} \tag{3}$$

Решение задачи (1) определяет сферически симметричную часть деформации шара вследствие его вращения и имеет вид

$$\mathbf{v}_{0i} = g_i(r_i)\mathbf{r}_i, \quad g_i(r_i) = -2/3\,\rho_i\,\omega_i^2\,(d_{1i}\,r_i^2 + d_{2i}), \ \ r_i = |\mathbf{r}_i|,$$

$$d_{1i} = \frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{2(4-3\nu_i)}, \quad d_{2i} = -\frac{(3-\nu_i)(1-2\nu_i)}{2(4-3\nu_i)}a_i^2$$

Матрицы B_i, B_{ij} имеют нулевые следы, и решения задач (2), (3) представляются в форме

$$\mathbf{v}_i = c_i\,[a_{1i}\,(B_i\,\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_i)\,r_i + (a_{2i}\mathbf{r}_i^2 + a_{3i})\,B_i\,\mathbf{r}_i], \qquad c_i = \rho_i;$$

$$\mathbf{v}_{ij} = c_{ij}\,[a_{1i}\,(B_{ij}\,\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_i)\,r_i + (a_{2i}\mathbf{r}_i^2 + a_{3i})\,B_{ij}\,\mathbf{r}_i], \;\; c_{ij} = \rho_i\,\Omega_{ij}^2;$$

$$a_{1i} = \frac{1+\nu_i}{5\nu_i+7}, \quad a_{2i} = -\frac{(1+\nu_i)(2\nu_i+3)}{5\nu_i+7}, \quad a_{2i} = \frac{(1+\nu_i)(2\nu_i+3)}{5\nu_i+7}\,a_i^2.$$

$$\Pi_{ij} = -\frac{3\gamma m_j\,D_i\,\rho_i}{R_{ij}^3\,E_i}\Big[c_i\,(B_i\mathbf{y}_{ij},\mathbf{y}_{ij}) + \sum_{k\neq i}^{N} c_{ik}\,(B_{ij}\mathbf{y}_{ij},\mathbf{y}_{ij})\Big], \;\; \mathbf{y}_{ij} = \Gamma_i^{-1}\,\mathbf{R}_{ij}^{\circ}$$

,.

$$\int_{V_i} \mathbf{r}_i\,\mathbf{v}_\alpha\,dx^{(i)} = 0, \;\; \int_{V_i} (\mathbf{P},\mathbf{r}_i)(\mathbf{Q},\mathbf{v}_\alpha)\,dx^{(i)} = c_\alpha D_i\,(B_\alpha\mathbf{P},\mathbf{Q}); \quad D_i = \frac{4\pi a_i^7\,(1+\nu_i)(9\nu_i+13)}{105(5\nu_i+7)}$$

$$\Pi_{ij} = -m_j\,h_i\,R_{ij}^{-3}\,\Big\{\boldsymbol{\omega}_i^2 - 3(\boldsymbol{\omega}_i,\mathbf{y}_{ij})^2 + \sum_{k\neq i}^{N}\Omega_{ik}^2\,[9(\mathbf{e}_{ik},\,\mathbf{y}_{ij})^2 - 3]\Big\}, \quad h_i = \gamma\,D_i\,\rho_i^2\,E_i^{-1}$$

$$\mathbf{F}_{ip} = -\sum_{j\neq i}^{N} \nabla_{\mathbf{R}_i} \Pi_{ij} = h_i \sum_{j\neq i}^{N} \frac{m_j}{R_{ij}^4} \{[15(\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{y}_{ij})^2 - 3\boldsymbol{\omega}_i^2 + \sum_{k\neq i}^{N} \Omega_{ij}^2 (9 - 45(\mathbf{e}_{ik}, \mathbf{y}_{ij})^2] \mathbf{R}_{ij}^{\circ} -$$

$$-6(\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{y}_{ij}) \Gamma_i \boldsymbol{\omega}_i + 18 \sum_{k\neq i}^{N} \Omega_{ij}^2 (\mathbf{e}_{ik}, \mathbf{y}_{ij}) \Gamma_i \mathbf{e}_{ik} \}.$$

$$\mathbf{F}_{ip} = 3h_i \sum_{j\neq i}^{N} \frac{m_j}{R_{ij}^5} \{(A_i^{-2} [5(\mathbf{L}_i, \mathbf{R}_{ij})^2 R_{ij}^{-2} - \mathbf{L}_{ij}^2] + \sum_{k\neq i}^{N} \frac{\gamma m_k}{R_{ik}^3} [3 - \frac{(\mathbf{R}_{ik}, \mathbf{R}_{ij})^2}{R_{ik}^2 R_{ij}^2}]) \mathbf{R}_{ij} -$$

$$-2A_i^{-2} (\mathbf{L}_i, \mathbf{R}_{ij}) \mathbf{L}_i + 9 \sum_{k\neq i}^{N} \frac{\gamma m_k}{R_{ik}^5} (\mathbf{R}_{ik}, \mathbf{R}_{ij}) \mathbf{R}_{ik} \}.$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = 0, \quad \frac{d\Omega_{ik}^2}{dt} = -\frac{3m_k}{R_{ik}^4} \dot{R}_{ik}, \quad \frac{d\mathbf{e}_{ik}}{dt} = \frac{\Gamma_i^{-1} \dot{\mathbf{R}}_{ik}}{R_{ik}} - \frac{\dot{R}_{ik}}{R_{ik}} \mathbf{e}_{ik} - [\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_{ik}]$$

$$\mathbf{F}_{id} = 9\gamma\,\chi_i\,h_i \sum_{J,k\neq i}^{N} \frac{m_j\,m_k}{R_{ij}^5\,R_{ik}^4}\{[3\dot{R}_{ik}\,(5\frac{(\mathbf{R}_{ij},\mathbf{R}_{ik})^2}{R_{ij}^2\,R_{ik}^2} - 1) + \frac{10(\mathbf{R}_{ij},\mathbf{R}_{ik})}{R_{ij}^2\,R_{ik}}((\mathbf{R}_{ij},\dot{\mathbf{R}}_{ik}) +$$

$$+ A_i^{-1}(\mathbf{L}_i,\mathbf{R}_{ij}\times\mathbf{R}_{ik}))]\mathbf{R}_{ij} + 2R_{ik}^{-1}[3\dot{R}_{ik}R_{ik}^{-1}(\mathbf{R}_{ij},\mathbf{R}_{ik}) - (\mathbf{R}_{ij},\dot{\mathbf{R}}_{ik}) + A_i^{-1}(\mathbf{L}_i,\mathbf{R}_{ik}\times\mathbf{R}_{ij})]\mathbf{R}_{ik} -$$

$$-2R_{ik}^{-1}(\mathbf{R}_{ij},\mathbf{R}_{ik})[\dot{\mathbf{R}}_{ik} - A_i^{-1}(\mathbf{L}_i\times\mathbf{R}_{ik})]\}.$$

Движение центров масс деформируемых планет описывается системой уравнений

$$m_i\,\ddot{\mathbf{R}}_i = -\sum_{j\neq i}^{N}\frac{\gamma\,m_i\,m_j}{R_{ij}^3}\mathbf{R}_{ij} + \mathbf{F}_{ip} + \mathbf{F}_{id}\,, \quad i = 1,\ldots,N.$$

Теорема об изменении моментов количеств для каждого шара

$$\dot{\mathbf{L}}_i = \mathbf{M}_{ip} + \mathbf{M}_{id}\,, \quad i = 1,\ldots, N$$

$$\mathbf{M}_{ip} = 6h_i \sum_{j \neq i}^{N} \frac{m_j}{R_{ij}^5 A_i^2} (\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{L}_i)[\mathbf{R}_{ij} \times \mathbf{L}_i]$$

Для определения момента диссипативных сил следует варьировать потенциал

$$\Pi_{ijd} = \frac{9\chi_i h_i m_j}{R_{ij}^3} \sum_{k \neq i}^{N} \frac{\gamma m_k}{R_{ik}^3} \{ \frac{\dot{R}_{ik}}{R_{ik}} [1 - 3(\mathbf{e}_{ik}, \mathbf{y}_{ij})^2] + 2(\mathbf{e}_{ik}, \mathbf{y}_{ij})(\dot{\mathbf{e}}_{ik}, \mathbf{y}_{ij}) \}$$

по переменной $\mathbf{y}_{ij} = \Gamma_i^{-1} \mathbf{R}_{ij} R_{ij}^{-1}$, которая содержит оператор Γ_i

В результате найдем момент диссипативных сил

.

$$\mathbf{M}_{id} = 18\gamma\chi_i h_i \sum_{j,k \neq i}^{N} \frac{m_j m_k}{R_{ij}^5 R_{ik}^5} \Big\{ [\frac{5\dot{R}_{ik}}{R_{ik}} (\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ik}) - (\mathbf{R}_{ij}, \dot{\mathbf{R}}_{ik}) - A_i^{-1} (\mathbf{L}_i, [\mathbf{R}_{ij} \times \mathbf{R}_{ik}])][\mathbf{R}_{ij} \times \mathbf{R}_{ik}] -$$

$$- (\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ik})[\mathbf{R}_{ij} \times \dot{\mathbf{R}}_{ik}] - A_i^{-1} (\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ik})[\mathbf{R}_{ij} \times [\mathbf{R}_{ik} \times \mathbf{L}_i]] \Big\}.$$

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{L}_i + [\mathbf{R}_i \times m_i \dot{\mathbf{R}}_i]) = const$$

Диссипативные силы и моменты порождаются диссипативной функцией Релея

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_{id}\,\dot{\mathbf{R}}_i + A_i^{-1}\mathbf{M}_{id}\mathbf{L}_i) = \sum_{i=1}^{N} \chi_i\,\mathrm{E}_i[\sum_{j\neq i}^{N} \dot{\mathbf{v}}_{ij}(\mathbf{r}_i, t)] \geq 0$$

Теорема об изменении полной энергии системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}[m_i\,\dot{\mathbf{R}}_i^2 + \frac{\mathbf{L}_i^2}{A_i}] - \sum_{i<j}^{N}\frac{\gamma\, m_i\, m_j}{R_{ij}}\right) = \sum_{i=1}^{N}(\mathbf{F}_{ip}\dot{\mathbf{R}}_i + A_i^{-1}\,\mathbf{M}_{ip}\,\mathbf{L}_i) - 2W$$

$$U_{ip} = \frac{h_i}{A_i^2}\sum_{j\neq i}^{N} m_j\left[\frac{\mathbf{L}_i^2}{R_{ij}^3} - \frac{3(\mathbf{L}_i, \mathbf{R}_{ij})^2}{R_{ij}^5}\right] + \frac{3\gamma\, h_i}{2}\sum_{j,k\neq i}^{N}\frac{m_i\, m_j}{R_{ij}^3 R_{ik}^3}\left[\frac{3(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ik})^2}{R_{ij}^2 R_{ik}^2} - 1\right]$$

Система может совершать стационарные движения, соответствующие ее вращению как твердого тела вокруг постоянного вектора момента количеств движения системы с постоянной угловой скоростью $\Omega\,\mathbf{e}_3$

В этом случае справедливы равенства

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \Omega[\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_i], \quad \mathbf{L}_i = A_i\,\Omega\mathbf{e}_3, \quad i = 1,\dots,N$$