Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Звуча в гармонии вселенной
И в хоре сфер гремя, как гром,
Златое солнце неизменно
Течет предписанным путем.
Непостижимость мирозданья
Дает нам веру и оплот,
И, словно в первый день созданья,
Торжественен вселенной ход!

И.-В.Гёте «Фауст»

0.1 Основные задачи, решаемые сферической астрономией

За двадцать пять лет, прошедших после выхода прекрасного учебника профессора МГУ К.А.Куликова «Курс сферической астрономии», астрометрия изменилась коренным образом. Точность позиционных наблюдений возросла примерно в тысячу раз. Такой прогресс обусловлен вводом в строй и непрерывным совершенствованием радиоинтерферометров со сверхдлинными базами (РСДБ), инструментов для лазерной локации Луны и спутников, вводом в действие систем глобального определения местоположения (GPS и ГЛОНАСС), разработкой специальных спутников для проведения астрометрических наблюдений, а также разработкой новых методов обработки результатов. Успешное завершение космического проекта «HIPPARCOS» позволило создать высокоточный каталог ~ 120000 звезд. Измерение параллаксов этих звезд дало ценнейшую информацию о пространственном распределении этих звезд около Солнца не только для астрометристов, но и для астрофизиков, специалистов по звездной динамике и небесной механике.

Каковы основные задачи астрометрии и сферической астрономии, о которой далее пойдет речь? Астрометрия является частью астрономии. Главной задачей астрометрии является определение из наблюдений положений и скоростей различных небесных тел, расстояний до них, а также формы тел. Но положение или координаты тела могут быть определены лишь относительно другого тела или какой-то выбранной точки. В астрономии координаты измеряются относительно системы отсчета.

Система отсчета (английский синоним «reference system») — это теоретическое понятие; на основе официальных соглашений определяются основные плоскости и точки, а также координатные оси системы. Как правило, ни оси, ни основные точки системы на небе не выделены. Поэтому в виде практической реализации системы отсчета (по-английски «reference frame») принимается список координат и скоростей некоторого числа выбранных объектов (например, звезд или радиоисточников). Такой список называется *каталогом*. Отдельный каталог является одной из реализаций системы отсчета.

Таким образом, на основе позиционных наблюдений астрометрия определяет системы координат. Две таких системы имеют особую важность. Это — небесная система координат, необходимая для определения положения и динамики небесных тел, и земная система координат, в которой измеряется положение наблюдателя.

Другой задачей астрометрии является определение моментов астрономических событий и промежутка времени между ними, т.е. определение и хранение времени.

Сферическая астрономия является одним из разделов астрометрии. В бо́льшей степени она ближе к математике. Задачи, которые решает сферическая астрономия, связаны, главным образом, с математическими методами редукции астрономических наблюдений. Истоки сферической астрономии находятся в Древней Греции. Это связано с необычайным расцветом математики в IV-II в. до н.э., и использованием математических методов в астрономии древнегреческими учеными. Краткий исторический обзор развития сферической астрономии и астрометрии приводится ниже. Безусловно этот обзор не является исчерпывающим, так как автор старался выделить лишь основные этапы в развитии этой науки.

Сейчас рассмотрим основные задачи, которые решаются сферической астрономией. Первой задачей, как уже говорилось, является *определение систем сферических координат*, тогда как задачей астрометрии является построение этих систем в виде каталогов звезд, радиоисточников и других небесных объектов. После определения систем координат второй задачей сферической астрономии является *вывод уравнений преобразования координат небесных тел из одной системы в другую.* Положение небесных объектов непрерывно меняется с течением времени. Поэтому для изучения их движения необходимо определить *шкалу и единицу времени* для знания точного момента наблюдений и промежутка времени между наблюдениями. *Определение различных шкал времени* и установление связи между ними — это третья важнейшая задача сферической астрономии.

Если наблюдения проводятся с поверхности Земли, то координаты небесных объектов искажаются из-за а) *рефракции*, б) *аберрации*, в) *параллактического смещения.* Рефракция — это искривление луча света от объекта из-за преломления при прохождении земной атмосферы. Аберрация — это смещение положения объекта в результате собственного движения наблюдателя. Параллактическое смещение (изменение направления на объект) возникает из-за перемещения наблюдателя в другую точку пространства. В результате этих причин наблюдатель видит объект не в том месте, где он находится на самом деле. Учет рефракции, аберрации и параллактического смещения является классической задачей сферической астрономии. В связи с широким использованием в настоящее время наблюдений в радиодиапазоне в данном курсе подробно рассматривается вопрос о радиорефракции.

Координаты объекта после учета рефракции, аберрации и параллактического смещения относятся к сферической системе координат, заданной на момент наблюдения. Эта система связана с Землей, если наблюдения проводятся с Земли. Положение *земной системы координат* относительно *инерциальной системы координат* изменяется из-за *собственного вращения Земли, прецессии и нутации*. Поэтому для преобразования координат объекта из земной системы координат в инерциальную систему необходимо знать *параметры вращения Земли*.

Изучение вращения Земли — одна из важнейших задач астрометрии. В курсе «Сферической астрономии» мы лишь кратко коснемся этой проблемы, так как вращение Земли связано с определением шкал времени.

Процессы вращения Земли вокруг оси издавна принимались за основу счета времени. Сутки — одни из основных единиц счета времени и в природе, и в человеческой жизни. Лишь в середине XX века было доказано, что *продолжительность суток* (или угловая скорость вращения Земли вокруг оси) не остается постоянной. Значительно раньше (в конце прошлого века) было обнаружено *движение полюса*, т.е. изменение положения мгновенной оси вращения относительно главной оси инерции Земли.

Таким образом, вектор мгновенной угловой скорости вращения Земли, две компоненты x и y которого определяют положение полюса вращения, а третья — продолжительность суток, не остается постоянным ни по величине, ни по направлению.[1] Изменения компонент довольно малы, но спектр очень сложен. К настоящему времени в спектре продолжительности суток обнаружены колебания с периодами от нескольких часов до полутора тысяч лет с амплитудами от 2-3 мкс (1 мкс = 1 микросекунда $= 10^{-6}$ с) до ~ 2 млс (1 млс = 1 миллисекунда $= 10^{-3}$ с). Так как продолжительность суток равна 86400 с, то максимальное относительное изменение скорости вращения Земли не превышает $\sim 2 \cdot 10^{-8}$. В спектре движения полюса также найдены внутрисуточные и сезонные колебания с амплитудами от 10 до 50 мкс дуги (1 сек дуги $= 1'' \approx 1$радиан$/206264,806$). Наибольшую амплитуду $(\sim 0'',2)$ имеет *чандлеровское колебание* с периодом $\sim 1,2$ года и годовое колебание с амплитудой $\sim 0'',1$. Полюс не отклоняется от оси инерции более чем на 15 м.

Причинами неравномерности вращения Земли и движения полюса являются внешние и внутренние процессы. К внешним процессам обычно относят приливное действие Луны и Солнца, а к внутренним — движения в атмосфере, в Мировом океане и в жидком ядре, а также перераспределение масс в коре и мантии.

Приливное воздействие Луны и Солнца приводит не только к изменению компонент вектора мгновенной угловой скорости в теле Земли, но и к изменению его положения в пространстве. Это явление называется *лунно–солнечной прецессией*. Причиной прецессионно-нутационного движения оси вращения является перемен-

[1]Три компоненты угловой скорости (или параметры вращения Земли) не могут быть предсказаны на основе теории. Существует множество причин (в том числе и неизвестных), которые приводят к вариациям компонент угловой скорости.

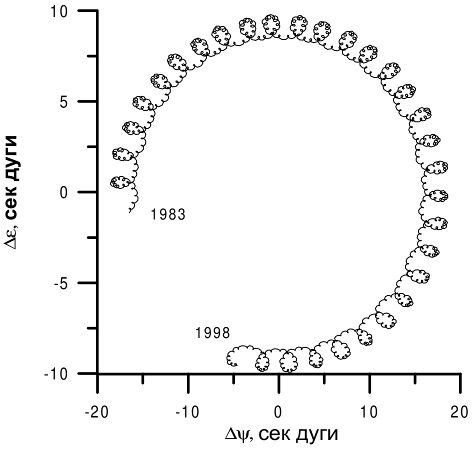

Рис. 1: Нутация оси Земли (без учета прецессионного движения с 1983 по 1997 гг. Нутационное движение разложено на две компоненты: $\delta\psi$–нутацию в долготе и $\Delta\varepsilon$–нутацию в наклоне. Главная нутационная гармоника, имеющая период, равный 18,6 года, определяется поворотом плоскости лунной орбиты. Меньшие петли вызваны эллиптичностью орбит Луны и Земли, наклоном орбиты Луны к эклиптике и рядом других причин. Теория нутации Земли МАС1980 включает 106 гармоник нутационного движения с периодом от 4,7 суток до 18,6 лет и амплитудами от $\sim 9'', 2$ до менее чем 1 мс дуги.

ный момент сил, возникающий из-за действия Луны и Солнца на экваториальное утолщение Земли.

Если изменение положения оси вращения в теле Земли приводит к изменению географических координат (широт и долгот) пунктов, то изменение положения оси вращения в пространстве приводит к изменению координат звезд. Таким образом, прецессия изменяет со временем вид звездного неба. Амплитуда прецессии равна $\sim 23^\circ, 5$, а период — примерно 26000 лет. Кроме векового прецессионного смещения в пространстве ось вращения испытывает и периодические колебания (*нутацию*) с гармониками, основные из которых имеют периоды 13,7 суток, 27,6 суток, 6 месяцев, 1 год, 18,6 лет. Движение с периодом 18,6 лет имеет максимальную амплитуду ($\sim 9''$). Остальные нутационные гармоники имеют меньшие амплитуды. В результате нутационного движения ось вращения описывает сложные петли в пространстве (рис. 1).

Учет влияния прецессии и нутации на координаты небесных тел также является одной из задач сферической астрономии.

Необходимость рассмотрения теории вращения Земли в данном курсе связана с определением *небесного эфемеридного полюса*, изучением суточных движений полюса и их связи с нутационным движением оси вращения Земли. Определение небесного эфемеридного полюса было принято на Генеральной Ассамблее Международного астрономического союза (МАС) в Монреале в 1979 г. и состоит в следующем:
«Принимая во внимание, что полная теория общего нутационного движения Земли

вокруг ее центра масс может быть описана как сумма двух компонент: (1) астрономической нутации, обычно упоминаемой как нутация, которая является движением по отношению к пространственно-фиксированной системе координат, и (2) движения полюсов, которое представляет собой движение по отношению к связанной с Землей координатной системе, рекомендуется:
(а) производить расчет астрономической нутации на основе модели реальной Земли для Небесного Эфемеридного Полюса, для которого не существует почти суточных движений ни по отношению к пространственно-фиксированной, ни по отношению к связанным с телом координатным системам и нутацию которого можно рассчитать на основе моментов внешних сил; (б) использовать численные значения, приведенные в таблице (см. Приложение A) для расчета астрономической нутации Небесного Эфемеридного Полюса».[2]

Движение полюса, согласно этому определению, представляет движение небесного эфемеридного полюса, определенного с помощью принятой теории прецессии и нутации, по отношению к связанной с Землей координатной системе.

Знание положения оси вращения Земли в пространстве и теле планеты необходимо для определения ориентации земной системы координат относительно небесной системы координат. Это диктуется потребностями как фундаментальной науки (изучение строения Земли, движение Земли в пространстве), так и техники (космическая геодезия и навигация).[3]. В связи с ростом точности решаемых в этих областях задач требуется создание инерциальной системы координат с погрешностями не более $0,1$ мс дуги и земной системы координат с погрешностями взаимных положений пунктов не более 2-3 мм. Небесная и земная системы координат должны связываться новой теорией нутации и прецессии неупругой Земли, согласующейся с наблюдениями в пределах ± 1 мс дуги. Согласно резолюциям XXIII Генеральной Ассамблеи МАС новая теория должна быть разработана в течение 1997-1999 гг.[4]

С 1998 г. небесная система задается координатами ~ 600 внегалактических радиоисточников. Центр этой системы помещается в барицентр солнечной системы. Из-за большого расстояния до радиоисточников их собственное движение относительно земного наблюдателя очень мало. Поэтому небесная система близка к инерциальной системе координат. Реализацией земной системы координат являются геоцентрические прямоугольные координаты более чем 500 станций, расположенных в 290 пунктах наблюдения.

Земная и небесная системы координат являются основой для построения теории прецессии и нутации, изучения тектоники, деформаций земной коры, а также

[2] На Генеральной ассамблее МАС 2000 г. в связи с принятием новой теории нутации и повышением точности наблюдений вместо небесного эфемеридного полюса вводится небесный промежуточный полюс.

[3] В идеальном случае небесная система координат должна быть инерциальной. Однако из-за непредсказуемых движений небесных тел и ошибок наблюдений возможны малые случайные и систематические повороты реализованной системы координат. Поэтому часто такую систему называют квазиинерциальной

[4] XXIV Генеральная Ассамблея МАС (Бирмингем, 2000 г.) приняла решение об использовании новой теории нутации МАС2000 с 1 января 2003 г.

для решения задач космической геодезии и навигации. Поэтому, для правильной интерпретации результатов определения параметров вращения Земли, деформаций поверхности Земли и т.д. различными методами с точностью $0,1$ мс дуги и выше, необходимо, чтобы ошибки реализации земной и небесной систем координат не превышали этого значения.

Это очень сложная задача, решение которой требует колоссальных затрат. Но мировое сообщество идет на эти расходы, так как это нужно для решения хозяйственных, политических, военных и научных потребностей. Причиной этого является решение основной задачи астрометрии, которая не изменилась за прошедшие несколько тысяч лет — определение положения наблюдателя в пространстве и во времени.

0.2 Краткий исторический обзор

Астрометрия — одна из самых древних наук — появилась на заре человечества из-за необходимости научиться определять местоположение, измерять промежутки времени, предсказывать наступление астрономических событий и т.д. Как и любая наука, астрометрия началась с накопления данных, которыми были результаты наблюдений за звездами, Солнцем, Луной, планетами. Измерение положений этих объектов явилось основой для построения первых моделей Вселенной.

Строго говоря, до изобретения телескопа в начале XVII века астрономия являлась астрометрией. Основными задачами древней астрономии были определения моментов определенных событий, связанных с религией, мифологией и т.д. Хозяйственные нужды требовали установления точного календаря, основанного на наблюдениях Солнца, Луны и звезд. За ~ 2500 лет систематических наблюдений вавилонские астрономы установили периодичность затмений, что позволяло предсказывать их. В Вавилонии была изобретена шестидесятиричная система счисления, от которой идет современный счет времени: в одном часе содержится 60 минут, в одной минуте — 60 секунд.

Значительные достижения в астрономии связаны с наблюдениями древнеегипетских жрецов. Существование Египта зависело от разливов Нила, приносивших на поля плодородный ил. Если они запаздывали, стране грозили неурожай и голод. Неудивительно поэтому, что египтяне внимательно следили за важнейшим событием — появлением на небе Сириуса, совпадавшим с ежегодным разливом Нила. Можно сказать, что египетскую астрономию создала необходимость вычисления периодов подъема и спады воды в Ниле. Египтяне дали определение *эклиптики* — видимого пути Солнца на фоне созвездий и разделили ее на двенадцать частей, образовавших Зодиак, т.е. "круг зверей". В течение полутора тысяч лет египетские жрецы зарегистрировали 373 солнечных и 832 лунных затмения. Это позволило заметить периодичность затмений и научиться их предсказывать. Наблюдения позволили создать точный солнечный календарь, была определена продолжительность года в $365^1/4$ дней. Для измерения времени использовались водяные и солнечные часы. Благодаря этим достижениям астрономов история Древнего Египта известна очень хорошо: мы знаем имена и годы правления всех фараонов.

Наблюдения жрецов Вавилона и Египта являются ценными с научной точки зрения и в наши дни. На основании записей моментов затмений жрецами и вычислений этих моментов с помощью современных теорий движения Земли и Луны оказалось возможным вычислить замедление скорости вращения Земли за последние ~ 2500 лет.

Дальнейший прогресс астрономии-астрометрии связан, в первую очередь, с достижениями в области математики во время расцвета древнегреческой науки. Астрономия в Древней Греции стала точной математической наукой.

Согласно античной традиции первым греческим астрономом и математиком был Фалес Милетский, живший в конце VII — первой половине VI в. до н.э. Он — один из «семи мудрецов» — прославился предсказанием солнечного затмения, случившегося в 585 г. до н.э. Как и вавилоняне и египтяне, он не понимал того, что происходит на небе во время затмений, а просто использовал периодичности, найденные жрецами Вавилона и Египта. Опираясь на результаты вавилонской науки Фалес пытался разобраться в строении Вселенной, определить порядок расположения звезд, Солнца, Луны по отношению к Земле, которую он представлял плоским диском. Он считал, что ближе всего к Земле находятся звезды, а дальше всего — Солнце. Эти ошибки были исправлены его продолжателями.

Анаксагору из Клазомен (годы жизни предположительно 500 — 428 г. до н.э.) принадлежит заслуга правильного объяснения не только солнечных, но и лунных затмений.

Эмпедокл из Агригента (около 490 — 430 г. до н.э.) — астроном и философ, поэт и политический деятель, отказавшийся от царской власти — также объясняет затмения прохождением между Землей и Солнцем темной Луны. Неясно, какой представлял себе Эмпедокл форму Земли, но Луна имеет плоскую форму, получая свой свет от Солнца. Поразительна догадка Эмпедокла о том, что свет распространяется с большой, но конечной скоростью света. К сожалению эта (и многие другие гениальные догадки древних греков) были отвергнуты благодаря авторитету Аристотеля, который писал: «Эмпедокл и всякий другой, придерживающийся того мнения, неправильно утверждали, будто свет передвигается и распространяется в известный промежуток времени между землей и небесной твердью, нами же [это движение] не воспринимается» из-за того, что скорость света очень велика.

Впервые гипотеза о шарообразности Земли была сформулирована пифагорейцами. В пифагорейской школе оформилась классическая модель космоса, в которой небесные светила располагались на семи сферах в следующем порядке, по мере удаления от Земли: Луна, Солнце, Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн. При своем вращении сферы издают отдельные тона, в совокупности образующие «музыку сфер». Пифагореец Филолай из Тарента, живший в конце V в. до н.э., изменил эту модель. Он поместил в центр мира Огонь, вокруг которого вращается десять сфер: сфера неподвижных звезд, сферы пяти планет, сферы Луны, Солнца, Земли и невидимой «Противоземли».

От теории пифагорейцев в современной астрономии сохранилось понятие «небесная сфера». Отказ от геоцентризма, признание шарообразной формы Земли, ее обращения вокруг центрального огня, объяснение времен года наклоном земной орбиты по отношению к солнечной орбите (Солнце тоже обращается вокруг центрального огня) представляли приближение к истине, без чего не возникла бы гелиоцентрическая система Аристарха Самосского.

Во второй половине V в. до н.э. благодаря наблюдениям афинских астрономов Метона и Эвктемона была установлена продолжительность тропического года и неравенство времен года. Метон ввел 19-летний цикл, который содержит 6940 сут и почти в точности равен длительности 235 лунных (синодических) месяцев. Средняя длительность года в метоновом цикле составляла $365,26316$ суток, что всего на 19 минут длиннее введенного четырьмя столетиями позднее юлианского года ($365,25$ сут) и на 30 мин — длительности тропического года во время Метона ($365,2425$ сут). Длительность лунного месяца в метоновом цикле была всего на 2 мин больше точного значения.

Эвктемон из наблюдений равноденствий и солнцестояний нашел, что длительность весны равнялась 93 сут, лета — 90, осени — 90, зимы — 92, т.е. обнаружил неравномерность движения Солнца по эклиптике. Столетие спустя астроном Каллипп, ученик и помощник Аристотеля, улучшил и метонов цикл, и уточнил неравенство времен года.

Выдающиеся достижения греческой астрономии IV в. до н.э. связаны с именами Евдокса Книдского (ок. 400 — 355 г. до н.э.) и Аристотеля (384 — 322 г. до н.э.). Евдокс был великим математиком. Он первым привнес в астрономию строгие математические методы, и, поэтому, его считают создателем античной теоретической астрономии.

По уже сложившемуся мнению греческих мыслителей наиболее совершенным геометрическим телом являлся шар, а наиболее совершенной плоской фигурой — круг. Поэтому задачей Евдокса, которую он блестяще решил, было согласование предположения о движении небесных тел по круговым орбитам с наблюдениями. Из наблюдений же следовало, что орбиты Солнца и Луны не являются круговыми; видимые траектории планет также далеки от круговых. Евдокс представил неравномерные движения небесных тел в виде комбинаций равномерных круговых движений. С каждым телом (за исключением неподвижных звезд) связано определенное число равномерно вращающихся сфер. Связь сфер выражалась в том, что полюсы каждой внутренней сферы фиксированы относительно внешней. Поэтому каждая сфера, помимо собственного вращения, участвует во вращении всех наружных сфер. Само небесное тело фиксировано в определенной точке экватора самой внутренней сферы.

Всего в модели Евдокса 27 равномерно вращающихся вокруг Земли сфер, центры которых совпадают, а оси вращения могут иметь различное направление.

Модель космоса Евдокса далека от реальной, но это была первая математическая модель. В этой связи заметим, что разработка теории движения небесных тел в виде комбинации вращающихся сфер, неизбежно должна была привести к разработке сферической геометрии и кинематики точки. Мы знаем об этом из двух небольших сочинений, написанных неким Автоликом в конце IV в до н.э.

Теория Евдокса была улучшена впоследствии Каллиппом и Аристотелем. Каллипп добавил ряд дополнительных сфер, чтобы лучше согласовать результаты для внутренних планет, объяснить различную длительность времен года. Всего в модели стало 34 сферы.

Аристотель еще более усложнил теорию Евдокса, которая благодаря его авторитету превратилась в реальный механизм движения небесных тел. Земля находилась в центре мира и была неподвижна. Согласно Аристотелю вращающаяся сфера неподвижных звезд увлекает за собой следующую сферу: внешнюю сферу Сатурна. Та в свою очередь увлекает вторую сферу Сатурна и т.д. Для исключения влияния Сатурна на Юпитер (чтобы последний не повторял движения Сатурна) Аристотель помещает между ними три нейтрализующих сферы. Аналогично он поступает для других планет. Всего в его модели уже 56 сфер, причем надо понимать буквально, что небесные тела прикреплены к эфирным сферам, и движутся не сами тела, а сферы. Космос Аристотеля конечен, он имеет форму сферы, за пределами которой нет ни пространства, ни времени. Вне его находится лишь перводвигатель–бог, который приводит в равномерное круговое движение сферу неподвижных звезд.

Следующий важный шаг в построении теории строения космоса был сделан учеником Платона Гераклидом Понтийским (IV в. до н.э.). Он предположил, что вращение небесной сферы может быть объяснено вращением самой Земли. Для объяснения изменения яркости Меркурия и Венеры — важнейшего недостатка моделей Евдокса и Каллиппа — Гераклид предположил, что они обращаются вокруг Солнца, а не вокруг Земли.

Аристарх Самосский (310 — 230 г. до н.э.) пошел дальше своего предшественника. На основе строгого математического метода он доказывает, что Солнце должно быть гораздо больше Земли по размерам. Из наблюдений Луны в первой четверти он находит угол, под которым видно расстояние Земля–Луна из центра Солнца. Аристарх заключает, что расстояние от Земли до Солнца должно равняться примерно 18-20 расстояниям от Земли до Луны и что диаметры Солнца и Луны находятся в той же пропорции, что и их расстояния до Земли. Отсюда он находит, что объем Солнца должен быть примерно в 250 раз больше объема Земли. Хотя эта цифра занижена, можно полагать, что этого было достаточно для возникновения сомнений в правильности геоцентрической системы мира: если Солнце столь велико, то почему ему не быть в центре космоса. В подобной системе мира сразу решается проблема с изменениями яркости планет. В ответ на возражение, что движение Земли должно привести к смещению положения звезд (то, что сегодня мы называем параллактическим смещением), Аристарх говорит о большой величине радиуса небесной сферы.

Метод рассуждений Аристарха Самосского — безупречен. Ошибочными были наблюдения. В действительности отношение расстояний от Земли до Солнца и от Земли до Луны равно не 18-20, а ~ 400.

В качестве основных возражений противников гелиоцентрической системы Аристарха Самосского обычно приводят следующие. При предположении, что все планеты движутся по круговым орбитам вокруг Солнца, невозможно объяснить неравенство времен года. Как известно, подобные возражение высказывались и Копернику, и были разрешены лишь в результате работ Кеплера. В качестве второго возражения обычно приводят слова Клавдия Птолемея о невозможности вращения Земли. По его словам все предметы, не связанные жестко с Землей, должны двигаться в направлении, обратном вращению Земли. Поэтому «ни облака, ни другие летающие или парящие объекты никогда не будут видимы движущимися на восток». Против этого заключения довольно трудно возразить, если не известен закон инерции.

Кроме выдающихся теоретических работ в III в до н.э. в Древней Греции, по-видимому, проводятся первые позиционные наблюдения звезд. Астрономы-наблюдатели Аристилл и Тиморахис (III в. до н.э.), используя специальные угломерные инструменты, определяли прямые восхождения и склонения звезд, т.е. координаты в экваториальной системе и получили первый звездный каталог. Впоследствии Гиппарх и Птолемей использовали эти наблюдения для исследования прецессии.

Эратосфен из Кирены (276 — 194 г. до н.э.), измерив дугу меридиана между Александрией и Сиеной, вычислил размер земного шара. Из его вычислений следует, что длина окружности меридиана составляет 39690 км, что всего на 310 км отличается от истинного значения. Кроме этой работы Эратосфен определил наклон эклиптики к экватору с ошибкой всего в $8'$, которое затем было использовано Гиппархом и Птолемеем.

Гиппарх (ок. 180 — 125 г. до н.э.) — величайший астроном античного времени. Заслуги Гиппарха громадны — как в области наблюдательной, так и теоретической астрономии. Сравнивая свои наблюдения с наблюдениями Аристилла и Тиморахиса, он обнаружил, что изменились лишь долготы звезд, а широты остались неизменными. Гиппарх объяснил это тем, что точка осеннего равноденствия за примерно сто семьдесят лет переместилась вдоль эклиптики с востока на запад на 2°, т.е. постоянная прецессии равна $\sim 43''$. На основе этого открытия он смог очень точно определить продолжительность тропического года (с ошибкой всего 6 мин). Динамическое объяснение прецессии впервые было дано Ньютоном. Прецессия обусловлена притяжением экваториального избытка масс Земли Луной и Солнцем, и во времена Гиппарха, когда еще не было ни динамики, ни данных о сжатии Земли, не могло существовать правильного объяснения прецессии.

Огромной заслугой Гиппарха явилось составление первого звездного каталога, дошедшего до нас. Впоследствии этот каталог был дополнен Птолемеем и приведен в «Альмагесте». Считается, что бóльшая часть звезд этого каталога (около 850) наблюдалась именно Гиппархом.

Поскольку Гиппарх занимался разработкой календаря, то, вполне естественно, что он занимался разработкой теории движения Солнца и Луны. Для объяснения неравномерности движения Солнца по эклиптике он разработал теорию эпициклов и эксцентров и вывел «первое неравенство»: разность в положении центра истинного и среднего Солнца. В современной литературе это неравенство известно как "уравнение времени".

Следующие два столетия после смерти Гиппарха были неплодотворным периодом. В это время не появилось сколько нибудь значительных работ по астрономии, хотя астрономия была популярной наукой. Упомянем лишь о книге Гемина (первая половина I в. до н.э.) «Элементы астрономии», в которой излагаются основы сферической астрономии в популярном изложении.

Новый подъем в астрономии происходит лишь в конце I в. н.э., уже в эпоху Римской империи. Непосредственным предшественником Птолемея был выдающийся астроном Менелай Александрийский. Помимо наблюдений, которые впоследствии использовал Птолемей, он активно работал в области тригонометрии. В арабском переводе до нас дошла его «Сферика», состоящая из трех книг, в которых он доказывает ряд теорем о сферических треугольниках. В «Альмагесте» Птолемей также приводит доказательства этих теорем, но не делает ссылок на Менелая (как впрочем и на Евклида и Архимеда). Тем не менее «Альмагест» Клавдия Птолемея (ок. 100 — ок.165 г.) — выдающееся достижение античной астрономии.[5] В тринадцати книгах «Альмагеста» Птолемей изложил и систематизировал достижения древнегреческих астрономов, и прежде всего Гиппарха. В первых двух книгах автор излагает основы сферической тригонометрии, дает описание некоторых угломерных инструментов и приводит решение ряда задач сферической астрономии. Затем рассматривается движение Солнца и Луны. Шестая книга посвящена теории солнечных и лунных затмений. Седьмая и восьмая книги содержат знаменитый звездный каталог 1027 звезд, составленный Птолемеем на основании своих наблюдений и наблюдений Гиппарха. Книги с девятой по тринадцатую посвящены теории движения планет.

Помимо того, что «Альмагест» — научное произведение, в котором построена астрономическая картина мира, того что сейчас называют «системой мира Птолемея», он в течение почти полутора тысяч лет использовался как учебник астрономии.

После выхода в свет «Альмагест» становится основным астрономическим сочинением. В первую очередь идеи Птолемея распространяются на восток: известно, что копии попали в Персию и Индию. После арабских завоеваний середины VII века астрономия начинает активно развиваться в Средней Азии: Багдаде, Хорезме, Дамасске и др. В это время появляется арабский перевод «Альмагеста». Многие ученые (аль-Хорезми (начало IX в.), аль-Фергани (середина IX в.), аль-Баттани (конец IX в.) и др.) подробно излагают основные идеи Птолемея, стараясь сделать изложение более популярным и простым. При этом разрабатываются новые математические методы, в частности для вычисления сферических треугольников. Помимо теоретических работ арабские астрономы начинают проводить собственные наблюдения с целью уточнения координат звезд, вошедших в каталог Птолемея.

Начиная с IX в. каталог Птолемея неоднократно перенаблюдался (аль-Баттани (880 г.), ас-Суфи (964 г.), «Альфонсовы таблицы» (1252 г.), Улугбек (1437 г.) Благодаря повышению точности наблюдений и большой разности эпох аль-Баттани, ас-Суфи получают значение постоянной прецессии с ошибкой $1''$, определяют наклон эклиптики к экватору с ошибкой $6''$.

После завоевания арабами Испании «Альмагест» в арабском переводе и книги

[5] Первоначальное название «Альмагеста» — «Мегале синтаксис», что означает «Большое построение». Впоследствии арабские переводчики в средние века употребили название «Аль Маджести», от которого и произошло русское название.

арабских ученых появились в Европе, где были переведены на латинский язык. По одному из переводов «Альмагеста» (с примечаниями и дополнениями Региомонтана) учился молодой Коперник.

Годы 1543 и 1609 являются особыми датами в астрономии. В 1543 г. вышла знаменитая книга Коперника «Об обращениях небесных сфер», положившая начало революции в астрономии. В 1609 г. вышла книга Иоганна Кеплера «Новая астрономия», в которой был дан вывод двух законов движения планет вокруг Солнца. В этом же году впервые Галилей с помощью изобретенного телескопа сделал ряд выдающихся открытий.

На промежуток между этими двумя датами приходится деятельность датского астронома Тихо Браге (1546 — 1601), который выполнил огромную по объему работу по накоплению и систематизации точных астрономических наблюдений. Тихо Браге был замечательным наблюдателем. Он составил каталог, содержавший положения 777 звезд с очень высокой для дотелескопической эпохи точностью $\pm 30''$. Впоследствии каталог был расширен до 1005 звезд и опубликован Кеплером в его «Рудольфовых таблицах» в 1627 г. Наблюдения Тихо Браге положений Марса за 20 лет оказались неоценимым материалом для расчетов Кеплера.

Перед смертью Тихо Браге завещал Кеплеру результаты своих наблюдений для того, чтобы последний использовал их для подтверждения системы Тихо. Согласно гипотезе Тихо Браге, планеты движутся вокруг Солнца, которое обращается с годичным периодом вокруг неподвижной Земли. Кеплер не выполнил завещания, но всегда подчеркивал особое значение наблюдений Тихо Браге для построения теории движения планет.

Джон Непер (1550 — 1617) известен как изобретатель логарифмов. Непер использовал новый метод для решения ряда задач сферической тригонометрии. С его именем связаны формулы определения двух углов сферического треугольника по противолежащим сторонам и углу между ними, так называемые аналогии Непера.

В связи с потребностями мореплавания (необходимостью определения координат кораблей) в XVII веке осознается важность точного измерения времени. В 1657 г. Христианом Гюйгенсом были изобретены маятниковые часы. После этого он обратился к проблеме определения долготы, так как был уверен, что именно с помощью часов — хранителей времени, можно будет решить сложнейшую проблему навигации — измерение долготы в открытом море.

Насколько остра была эта проблема говорит решение английского правительства 1714 года об объявлении премии в 20 тыс. фунтов стерлингов ($\sim$ 1 млн. долларов по сегодняшнему курсу) за способ, позволяющий определить долготу с точностью до половины градуса. В поисках таких способов приняли участие крупнейшие астрономы XVIII века. Главные усилия были направлены на улучшение теории движения Луны и построение точного каталога звезд. Так Эйлер составил таблицы, по которым долгота находилась с точностью около градуса, и получил часть премиальной суммы.

Второй способ, предложенный Гюйгенсом, был реализован в 1735 г. Джоном Гаррисоном, который изобрел хронометр и смог окончательно решить проблему долготы.

За полвека до этого события для решения проблемы долготы была основана Гринвичская обсерватория. Благодаря усовершенствованию методов наблюдений, которое произвел первый королевский астроном Джон Флемстид, точность определения координат звезд достигла $\pm 2''$. Для хранения времени были построены самые точные для того времени маятниковые часы, которые показывали среднее солнечное время.

К концу XVIII века механические часы получают повсеместное распространение, их конструкция постоянно совершенствуется, следовательно, растет точность. К середине XIX века в связи с бурным развитием техники и возникших неудобств, связанных с различием местного и среднего времени, принимается решение (в 1884 г.) об определении нулевого меридиана, поясного времени и вводе линии перемены дат.

После изобретения телескопа Галилеем, усовершенствования его конструкции Ньютоном точность наблюдений также стала быстро расти. В 1725 г. английский королевский астроном Джеймс Брадлей открыл явление аберрации света, что непосредственно указывало на перемещение Земли в пространстве. Аберрация света — это результат сложения скорости света, приходящего от звезды, со скоростью движения Земли по орбите по правилу параллелограмма. Одновременно это открытие доказало конечность скорости света.

Для того, чтобы сделать это открытие, требовалась высокая точность наблюдений, так как величина постоянной аберрации (отношение скорости света к скорости Земли) равна $\sim 20,''5$. Точность каталогов Дж. Брадлея достигла $\pm 0^s, 16$ по прямому восхождению и $\pm 1,''3$ по склонению.

Спустя столетие после открытия аберрации удалось измерить параллаксы звезд, хотя правильную оценку расстояний до них дал еще Ньютон (см. стр. **??**).

Разработка теории, объясняющей результаты наблюдений — это важнейший этап становления науки. Главная задача теории состоит в объяснении результатов наблюдений и предсказании астрономических явлений, которые зависят от взаимного расположения небесных тел. Этими проблемами были заняты лучшие европейские ученые на протяжении XVIII и XIX веков. Эйлер, Лагранж, Лаплас, Гаусс и другие выдающиеся ученые посвятили многие работы для согласования теории и наблюдений небесных объектов. В процессе решения этой задачи был развит весьма мощный математический аппарат, применяемый в астрономии и теоретической механике. В результате развития теории появились *астрономические эфемериды* — вычисленные значения координат, скоростей, блеска и других параметров — небесных тел.

Теоретические работы по изучению вращения Земли были начаты Ньютоном. Применив законы механики к вращающейся Земле, он пришел к заключению, что Земля должна быть сплющена у полюсов. Именно сжатием Земли объясняется прецессия.

Идеи Ньютона были развиты в трудах Эйлера, Клеро, Даламбера, Лагранжа, Лапласа. В 1749 г. Даламбер разработал строгую теорию прецессии. При этом он объяснил также явление нутации — периодическое колебание земной оси в пространстве (нутация была открыта Брадлеем уже после смерти Ньютона — в 1745 г.). Клеро занимался вопросом о фигуре Земли и вывел теорему, которая носит его имя, позволяющую определить сжатие Земли по измерениям силы тяжести на ее поверхности.

Лаплас более подробно, чем Даламбер, рассмотрел теорию прецессии и нутации Земли с учетом влияния атмосферы и океанов, построил теорию приливов. Впервые Лаплас высказал предположение о переменности скорости вращения Земли, т.е. о неравномерности шкал времени, которые основаны на вращении Земли.

Многие из работ Лапласа были продолжением и развитием гениальных работ Эйлера, который фактически построил кинематику и динамику вращающихся тел.

Для проверки результатов вычислений потребовалось усовершенствование методов наблюдений. Поэтому вполне естественно считать, что уточнение наблюдений стало важнейшим этапом развития астрометрии. Многие ученые, начиная с Тихо Браге, завоевали репутацию великих не за новизну открытий, а за точность, полноту и надежность разработанных методов наблюдений. Как сказано выше, сейчас для этих целей разрабатывается специальная аппаратура и сложнейшие космические проекты, что требует больших финансовых затрат, а также времени и сил.

0.3 Основные задачи учебника

Возросшая точность позиционных наблюдений, широкое использование радиоинтерферометров и космических средств, компьютерная обработка данных требуют изменения содержания курса «Сферическая астрономия». Этот процесс отразился в настоящем курсе лекций. В связи с широким использованием РСДБ в астрометрии в курсе кратко излагаются основы радионаблюдений и принципы *редукции* (или обработки) наблюдений.

В связи с ростом точности необходимо использовать точные методы редукции наблюдений. Это означает, что при обработке наблюдений требуется учитывать эффекты общей теории относительности и использовать точные формулы прецессии, нутации, аберрации и других эффектов. Большой объем обрабатываемой информации требует применения компьютеров. Поэтому формулы редукции построены таким образом, чтобы в максимальной степени оптимизировать время вычислений и сэкономить машинную память. Это объясняет широкое использование матричных методов в обработке наблюдений и написание формул в векторных обозначениях. Автор старался использовать в качестве определений величин стандартные (принятые или рекомендованные Международным астрономическим союзом) определения. Поэтому можно использовать как справочник.

С одной стороны для вывода точных формул редукции требуется строгость доказательств, а с другой стороны—доступность. Курс «Сферическая астрономия» по традиции читается в Государственном астрономическом институте им.П.К.Штернберга (ГАИШ) МГУ для студентов первого курса, когда подготовка по математике и физике еще не завершена. Поэтому некоторые вопросы освещаются в общем, более доступном виде.

Глава 1

Основы сферической геометрии

1.1 Основные понятия

Одним из главных достижений космического проекта HIPPARCOS[1] является прямое измерение расстояний до ~ 120000 звезд, которые находятся на расстоянии до 1 килопарсека (кпк) от Солнца. Несмотря на то, что объем, в котором расположены эти звезды составляет очень малую часть от объема нашей Галактики, измерение расстояний является важнейшим результатом, потому что можно построить трехмерную картину ближайшей окрестности Солнца. Это дает возможность решить многие задачи звездной динамики и астрофизики.

Если расстояния до небесных объектов не известны, то наблюдения называются позиционными. В этом случае удобно отнести все объекты: звезды, радиоисточники и т.д. на одно и то же расстояние, то есть расположить их на поверхности сферы с центром в точке, где находится наблюдатель. Такая сфера называется *небесной сферой*. Радиус небесной сферы произволен, но удобно для дальнейших вычислений считать его равным единице.

Чтобы знать изменение положения звезды в пространстве, необходимо измерить три компоненты скорости звезды. К сожалению для большинства звезд известны лишь две компоненты скорости в картинной плоскости, то есть в плоскости, перпендикулярной линии, соединяющей наблюдателя и звезду. Удобнее всего считать, что картинная плоскость совпадает с плоскостью, касательной к небесной сфере.

Геометрические построения и вычисления на поверхности сферы отличаются от таковых на плоскости. Поэтому можно говорить о сферической геометрии как о самостоятельном разделе геометрии. Следует заметить, что формулы сферической геометрии справедливы не только для небесной сферы, но и для любой другой сферы (например, при проведении вычислений на земном глобусе). Необходимо лишь учитывать радиус сферы.

Одними из основных понятий планиметрии являются понятия точки и прямой линии. В сферической геометрии аналогом прямой линии как линии с наименьшей

[1]Краткие сведения о проекте HIPPARCOS и о полученных результатах излагаются в §...

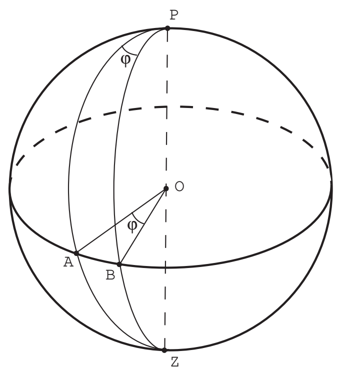

Рис. 1.1: Определение двугранного угла

длиной, соединяющей две точки, является дуга окружности, образованной пересечением большого круга с небесной сферой.

Определение 1.1 *Большим кругом является плоскость, проходящая через центр сферы.*

Через любые две точки, лежащие на поверхности сферы, можно провести большой круг. Это утверждение эквивалентно аксиоме из планиметрии: через любые две точки можно провести прямую линию. Перпендикуляр к большому кругу, проходящий через центр сферы, пересекает ее в двух точках, называемых *полюсами.* Большой круг пересекает сферу по окружности.[2] Очевидно, что любая прямая, принадлежащая плоскости большого круга и проходящая через центр сферы, является диаметром сферы. Два больших круга пересекаются по диаметру.

Рассмотрим сферу с центром в точке O (рис. 1.1).

Проведем большой круг через две точки A и B, лежащие на поверхности сферы. Полюсы обозначим как P и Z. Через точки P и A, затем через P и B проведем два больших круга.

Определение 1.2 *Угол между двумя большими кругами называется двугранным углом.*

Единицами измерения углов в астрономии являются градусы, радианы, часы. Так как радиус сферы равен единице, то длина дуги $\widehat{AB}$ (рис. 1.1) равна центральному углу AOB, то есть φ, выраженному в радианах. По определению градус ($^\circ$) — это центральный угол, равный $1/360$ части целой окружности. Градус делится на 60 угловых

[2]Во избежании недоразумений при дальнейшем изложении заметим, что иногда большим кругом называют пересечение сферы с плоскостью.

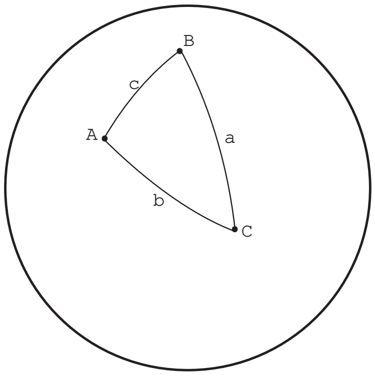

Рис. 1.2: Определение сферического треугольника

минут ($1^\circ = 60'$), каждая из которых равна 60 угловым секундам ($1' = 60''$), то есть градус состоит из 3600 угловых секунд ($1^\circ = 3600''$). В современных позиционных наблюдениях точность намного превышает $1''$. Поэтому, часто в качестве единицы измерения углов используется миллисекунда (мс) дуги, причём 1 мс дуги $= 10^{-3}{}''$. Для примера сообщим, что под таким углом видна горошина с расстояния в 1000 км.

Длина целой окружности равна 2π радиан, поэтому

$$1 \text{ радиан} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ{,}2957795 \approx 206264''{,}8062.$$

Для измерения углов используются также часы, причем (1^h) — это центральный угол, соответствующий $1/24$ части целой окружности. В одном часе содержится 60 минут или 3600 секунд ($1^h = 60^m = 3600^s$). Очевидно, что $1^h = 15^\circ, 1^m = 15', 1^s = 15''$.

Рассмотрим теперь три точки, которые лежат на сфере и не принадлежат одному большому кругу. Через каждую пару точек можно провести большие круги (рис. 1.2).

Определение 1.3 *Сферическим треугольником ABC называется фигура, образованная тремя дугами больших кругов, попарно соединяющих точки A, B, C.*

Примером сферического треугольника может быть треугольник ABP круги (рис. 1.1).

Обычно углы сферического треугольника обозначают большими буквами, например A, B, C, а стороны, противолежащие углам — соответствующими малыми буквами: $AB = c, BC = a, AC = b$. Как и в планиметрии, в сферической геометрии существуют определенные соотношения между сторонами и углами треугольников. Основные формулы будут выведены в следующем параграфе. Здесь отметим лишь следующие свойства сферических треугольников. Углы A и B в треугольнике ABP

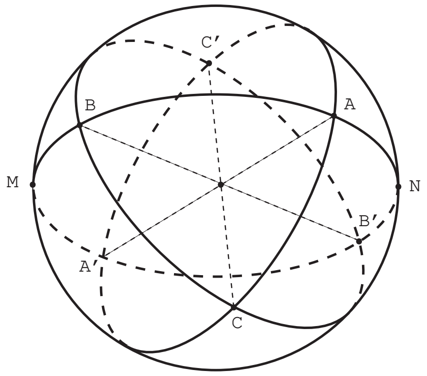

Рис. 1.3: Вычисление площади сферического треугольника

(рис. 1.1) – прямые, так как большие круги, проходящие через точки P, A, Z и P, B, Z, перпендикулярны плоскости AOB. Поэтому, поскольку угол $\varphi > 0$, сумма углов сферического треугольника может превышать $180°$. Теперь проведем плоскость через точки A, B, C (рис. 1.2) и параллельно ей плоскость, проходящую через центр сферы. Очевидно, что эта плоскость поделит сферу на две полусферы, причем треугольник ABC будет полностью лежать в одной из полусфер. Таким образом, любой из углов сферического треугольника будет меньше, чем $180°$. Следующие свойства сферического треугольника аналогичны свойствам плоского треугольника:
а) В каждом сферическом треугольнике против бо́льшего угла лежит бо́льшая сторона;
б) Сумма любых двух сторон больше третьей стороны.

Найдём площадь сферического треугольника. Для этого рассмотрим треугольник ABC (рис. 1.3). Обозначим его площадь через S. Плоскость $ABMA'B'N$ делит сферу на две полусферы, в одной из которых и расположен треугольник ABC. Площадь полусферы равна $2\pi R^2$, если радиус сферы равен R. На рис. 1.3 площадь ближней к нам полусферы складывается из площадей следующих фигур: сегмента сферы $ABMA'CA$, сегмента $BCB'NAB$ минус треугольник ABC, сегмента $CA'C'B'C$ минус треугольник $A'B'C'$. Если углы треугольника ABC измеряются в радианах, то площадь каждого из указанных сегментов равна $2AR^2$, $2BR^2$, $2CR^2$, соответственно. Треугольник $A'B'C'$ равновелик заданному треугольнику ABC. Поэтому можно написать уравнение:

$$2\pi R^2 = 2AR^2 + 2BR^2 - S + 2CR^2 - S.$$

Отсюда площадь сферического треугольника ABC равна

$$S = R^2(A + B + C - \pi),$$

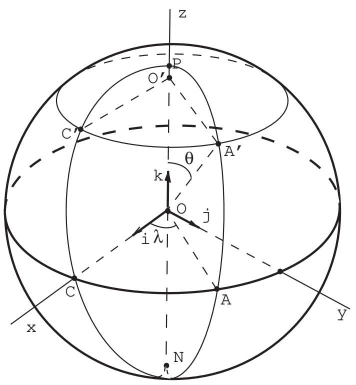

Рис. 1.4: Определение сферических координат точки

где углы A, B, C выражены в радианах.

Определим теперь площадь всей небесной сферы. Для этого удобно площадь сферы выразить в квадратных градусах. Для этого сначала выразим радиус сферы в градусах: $R = 360°/2\pi$. Тогда площадь всей сферы равна

$$4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{360°}{2\pi}\right)^2 \approx 41252.97 \text{ квадратных градусов.}$$

Определение 1.4 *Любая плоскость, которая не проходит через центр сферы, называется малым кругом.*

Рассмотрим рис. 1.4. Через произвольно выбранные точки A и C проведем большой круг. Полюсы обозначим как P и $\mathcal{N}$. Проведем теперь через полюсы и точку A большой круг (аналогично проведем большой круг через точку C). Обозначим через θ центральный угол между направлением на точку P и направлением на произвольную точку A', лежащую на сфере в плоскости большого круга $PA\mathcal{N}$. Проведем через точку A' плоскость, параллельную большому кругу OAC. Полученная плоскость является малым кругом, и радиус окружности $O'A'$ равен

$$r = OA' \sin\theta = R \sin\theta, \tag{1.1}$$

если $OA' = R$.

Введем декартову систему координат: ось x направим вдоль радиуса OC, ось z — вдоль радиуса OP. Обозначим единичные векторы осей x и z как $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$, соответственно. Направление оси y зададим единичным вектором $\mathbf{j}$ согласно уравнению:

$$\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}. \tag{1.2}$$

Векторное произведение (1.2) векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{i}$ определяет правую декартову систему координат $Oxyz$.

Обозначим через λ двугранный угол между плоскостями $PC\mathcal{N}$ и $PA\mathcal{N}$. Числа R, θ, λ называются *сферическими координатами* точки A'. При $R = 1$ достаточно знать две координаты θ, λ для определения положения точки на сфере. В следующей главе будут определены различные системы сферических координат. В каждой из них переменные θ, λ имеют разные названия и могут обозначаться другими буквами.

Выразим декартовы координаты точки A', равные x, y, z, через сферические координаты. Если направление в точку A' из центра сферы O задается вектором $\mathbf{R}$, то

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{1.3}$$

Часто вектор $\mathbf{R}$ называют радиус-вектором точки A'.

В линейной алгебре выражение (1.3) называется разложением вектора $\mathbf{R}$ по линейно-независимым базисным векторам $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. На основании рис. 1.4 и (1.1) получим:

$$\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\lambda, \\ y &= R\sin\theta\sin\lambda, \\ z &= R\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Система уравнений (1.4) представляет преобразование между сферической и декартовой системами координат. Модуль вектора $\mathbf{R}$ равен

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R, \tag{1.5}$$

и, если $OA' = 1$, то $\mathbf{R}$ является единичным вектором.

Пусть точка C' лежит на сфере и является точкой пересечения большого круга $PC\mathcal{N}$ и малого круга $A'O'C'$ (рис. 1.4). Найдем длину дуги $\widehat{A'C'}$. Так как угол $A'O'C'$ равен λ, то

$$\widehat{A'C'} = O'A' \cdot \lambda = R\lambda\sin\theta. \tag{1.6}$$

Так как в дальнейшем изложении часто будут использоваться векторы и векторный анализ, напомним основные действия над векторами.

Скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется скаляр c:

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\gamma, \tag{1.7}$$

где γ — угол между двумя векторами, модуль каждого вектора определяется согласно (1.5). Если $\gamma = 90°$, то $c = 0$. Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Используя это свойство, получим:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Очевидно, что $x = \mathbf{R}\cdot\mathbf{i}$, $y = \mathbf{R}\cdot\mathbf{j}$, $z = \mathbf{R}\cdot\mathbf{k}$, то есть прямоугольные координаты вектора равны проекциям вектора на оси координат. Скалярное произведение в декартовых координатах имеет вид:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Свойства скалярного произведения:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a},\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c},\quad (\beta\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\beta(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

Векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ двух векторов есть вектор, перпендикулярный и $\mathbf{a}$, и $\mathbf{b}$, модуль которого равен

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin\gamma, \tag{1.8}$$

а его направление совпадает с направлением движения правого винта при его повороте от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ на угол γ, меньший π. Если $\sin\gamma=0$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны (или антипараллельны). В прямоугольной системе координат получим:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0,\quad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}. \tag{1.9}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. Из других свойств векторного произведения выделим следующие:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c},(\beta\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\beta(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

Используя свойства скалярного и векторного произведений векторов перейдем к выводу основных формул сферической геометрии.

1.2 Основные формулы сферической геометрии

Рассмотрим сферический треугольник ABC на небесной сфере, причем точка A является полюсом, а точка B лежит в плоскости Oxz (рис. 1.5). Декартовы координаты векторов $\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_B,\mathbf{r}_C$ определяются согласно (1.4):

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_A &= (0,0,1),\\ \mathbf{r}_B &= (\sin c,0,\cos c),\\ \mathbf{r}_C &= (\sin b\cos A,\sin b\sin A,\cos b).\end{aligned}$$

По определению скалярного произведения имеем $\mathbf{r}_B\cdot\mathbf{r}_C=\cos a$. Это же произведение в декартовых координатах имеет вид:

$$\mathbf{r}_B\cdot\mathbf{r}_C=\sin c\sin b\cos A+\cos c\cos b.$$

Перепишем эти формулы в следующем виде:

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A. \tag{1.10}$$

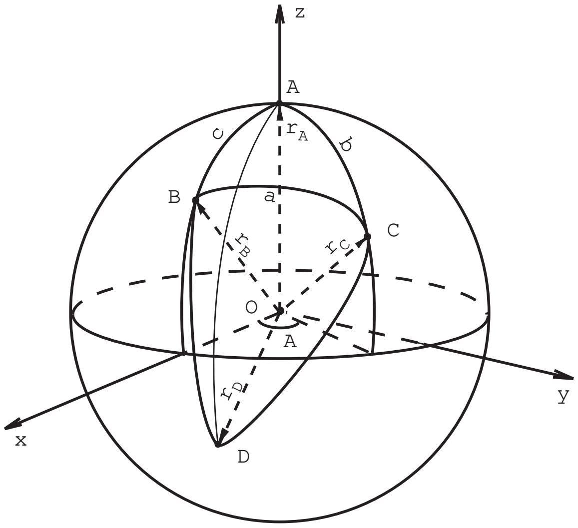

Рис. 1.5: К выводу формул синусов и косинусов

Определение 1.5 *Косинус стороны сферического треугольника равен произведению косинусов двух других его сторон плюс произведение синусов этих сторон на косинус угла между ними.*

Обычно уравнение (1.10) называют формулой косинусов. С помощью циклической перестановки можно написать формулы косинусов для двух других сторон:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \tag{1.11}$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \tag{1.12}$$

Теперь вычислим векторное произведение $\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B$. Согласно (1.8) получим:

$$|\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B| = \sin a.$$

Допустим, что вектор $\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B$ направлен в точку D (рис. 1.5), то есть

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_D \sin a. \tag{1.13}$$

Используя (1.9), запишем левую часть (1.13) в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin b \cos A & \sin b \sin A & \cos b \\ \sin c & 0 & \cos c \end{pmatrix} = \\ &= (\sin b \sin A \cos c)\ \mathbf{i} + (\cos b \sin c - \sin b \cos A \cos c)\ \mathbf{j} + (-\sin b \sin c \sin A)\ \mathbf{k}.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Правую часть (1.13) согласно (1.3) можно записать в виде:

$$\mathbf{r}_D \sin a = \sin a\left[\mathbf{i}(\sin AD \cos BAD) + \mathbf{j}(\sin AD \sin BAD) + \mathbf{k} \cos AD\right]. \tag{1.15}$$

В треугольнике BAD сторона $\widehat{BD} = 90°$, и плоскость OBD перпендикулярна плоскости OBC ($\angle DBC = 90°$). Поэтому $\angle ABD = 90° + B$. По формуле косинусов имеем

$$\cos\widehat{AD} = \cos 90° \cos c + \sin 90° \sin c \cos(90° + B)$$

или

$$\cos\widehat{AD} = -\sin c \sin B.$$

Приравнивая z-компоненты в формулах (1.14) и (1.15), получим:

$$-\sin b \sin c \sin A = -\sin a \sin c \sin B$$

или

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin A}.$$

По аналогии получим:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \tag{1.16}$$

Эти уравнения известны как формулы синусов.

Определение 1.6 *В сферическом треугольнике отношение синуса стороны к синусу противолежащего угла есть величина постоянная.*

Запишем формулу синусов для треугольника ABD:

$$\frac{\sin AD}{\sin(90° + B)} = \frac{\sin 90°}{\sin BAD},$$

то есть: $\cos B = \sin AD \sin BAD$. Сравнивая y-компоненты в уравнениях (1.14) и (1.15), получим:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \tag{1.17}$$

Определение 1.7 *Произведение синуса стороны сферического треугольника на косинус прилежащего угла равно произведению косинуса на синус других сторон минус произведение синуса на косинус этих же сторон, умноженное на косинус угла между ними.*

Используя циклическую перестановку сторон и углов, можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A,\\
\sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B,\\
\sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B,\\
\sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C,\\
\sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Формулы (1.17) и (1.18) назовем формулами подобия.

На основе формул синусов, косинусов и формул подобия можно получить ряд других уравнений, связывающих углы и стороны сферического треугольника. С выводом этих уравнений можно ознакомиться в соответствующих учебниках. Так как в астрономии наиболее часто используются формулы синусов, косинусов и подобия, на выводе других уравнений мы не будем останавливаться.

Глава 2

Системы координат

2.1 Определениям составы координат

Одной из задач сферической астрономии, как говорилось во «Введении», является определение системы отсчета или системы координатных осей, относительно которых находится положение небесных тел. В отличие от астрометрии в сферической астрономии дается математическое определение систем координат и связи между ними. Реализация этих систем, т.е. привязка их к выбранным небесным телам, является главной задачей астрометрии.

Если для определения координат и скоростей тел используется классическая механика, то система отсчета должна быть инерциальной. При предположении, что пространство является евклидовым (или абсолютным по терминологии Ньютона), инерциальной система может быть если она неподвижна или движется прямолинейно с постоянной скоростью относительно абсолютного пространства. Время в ньютоновой механике также является абсолютным в том смысле, что течение времени не зависит от положения часов в пространстве. Это означает, что при переносе начала координат из одной точки пространства в другую (или переходу в другую инерциальную систему) законы физики остаются неизменными. Говорят, что они ковариантны по отношению к этому преобразованию координат. Расстояние между двумя событиями, происшедшими в одно и то же время, одинаково в разных инерциальных системах, т.е. является инвариантной величиной.

Ни оси, ни основные плоскости инерциальной системы на небесной сфере не нарисованы. Поэтому в астрономии для определения системы координат используются небесные тела. Определить основные плоскости и оси системы отсчета можно двумя способами: кинематическим и динамическим. Если существуют выбранные тела, координаты которых известны и постоянны, то с этими телами можно связать инерциальную или, как говорят астрометристы, *фундаментальную систему координат*. Это — кинематическое определение. В действительности координаты небесных тел точно не известны из-за ошибок наблюдений и могут меняться по ряду причин. В этом случае наилучшим приближением к инерциальной системе будет система, определяемая объектами, координаты которых известны с наилучшей точностью и искажены лишь случайными ошибками. Мы можем говорить, что подобная система *в среднем* не имеет вращения, и можем назвать ее квазиинерциальной. В настоящее время наилучшей системой является система, задаваемая координатами внегалактических радиоисточников. Наилучшей оптической реализацией квазиинерциальной системы является каталог звезд HIPPARCOS.

Систему координат можно определить динамическим образом, если в качестве тел выбрать тела солнечной системы, координаты которых определяются на основе уравнений движения, не содержащих кориолисовых членов. В простейшем случае — кеплеровском движении тела по эллиптической орбите относительно центрального тела — система координат может быть определена плоскостью орбиты, которая сохраняет свое положение в пространстве; ось z может быть определена как перпендикуляр к плоскости орбиты, а ось x, например, совпадающей с большой полуосью эллипса. В рамках ньютоновой механики положение оси x сохраняет свое положение в плоскости орбиты. Задавая ось y с помощью уравнения 1.2, можно определить инерциальную систему координат. Так как период обращения тела является постоянным, то кроме динамической системы отсчета может быть определена динамическая шкала времени, которая получила название *эфемеридной*.

В действительности ни положение плоскости орбиты в пространстве, ни положение большой полуоси в плоскости орбиты не остаются постоянными из-за *возмущений* со стороны других тел солнечной системы, эффектов общей теории относительности. Поэтому динамическая система отсчета задается эфемеридами — таблицами положений Солнца, Луны и больших планет. В настоящее время широко используются эфемериды, вычисленные Лабораторией реактивного движения (JPL) DE200/LE200, DE403/LE403 и DE405/LE405. Эфемериды DE405/LE405 рекомендованы МСВЗ для использования в качестве стандартных, и ожидается, что они в скором времени заменят эфемериды DE200/LE200, которые сейчас являются основой для астрономических вычислений.

2.2 Эпоха каталога и эпоха равноденствия

Как говорилось во «Введении» в древности чаще всего использовали эклиптическую систему координат, т.е. основной плоскостью была плоскость эклиптики. Такой выбор объясняется тем, что древние астрономы изучали главным образом движение планет, Солнца и Луны, которые располагаются вблизи плоскости эклиптики. При повышении точности наблюдений в средние века от эклиптической системы переходят к экваториальной системе, задаваемой плоскостью среднего экватора и точкой весеннего равноденствия. Термин «средний экватор» употребляется в астрометрии в том смысле, что экватор подвержен смещению только из-за прецессии.

До 1998 г. квазиинерциальная система была реализована в виде FK5 (Фундаментальный Каталог 5), который включает 1535 звезд. Координаты звезд известны с ошибкой $\sim 0,''08$ и собственные движения с ошибкой ~ 1 мс дуги в год. Дополнительный каталог (FK5-sup.) включает 3117 звезд, координаты и собственные движения которых определены с бо́льшими ошибками ($\sim 0,''12$ и 2 мс дуги в год, соответственно). Основная плоскость системы FK5 задавалась экватором на эпоху J2000.0 (см. с. **??**), а начало отсчета прямых восхождений — пересечением экватора с эклиптикой на эпоху J2000.0. Согласно решению МАС эклиптика определялась динамическим образом на основании наблюдений тел солнечной системы. Поэтому начало отсчета прямых восхождений называется *динамическим равноденствием* и обозначается как $\Upsilon_{J2000.0}$.

С 1 января 1998 г. по решению МАС определена Международная небесная система координат (ICRS), оси которой фиксированы по отношению к квазарам, причем направления осей согласованы с системой FK5. Система ICRS реализуется координатами 212 опорных радиоисточников. Для более плотного заполнения к ним добавлены 396 дополнительных источников, координаты которых измерены с худшей точностью. Создание новой системы отсчета стало возможным благодаря результатам 15-летних наблюдений на РСДБ.

Новая система отсчета основывается на кинематическом принципе: считается, что оси системы остаются неподвижными относительно самых удаленных объектов Вселенной. Основной плоскостью по-прежнему является средний экватор на эпоху J2000.0. В соответствии с рекомендациями МАС полюс системы ICRS согласуется с полюсом FK5 в пределах ошибок последнего: $\sigma_{P_{FK5}} = 50$ мс дуги (рис. 2.1). Начало отсчета прямых восхождений системы ICRS близко к динамическому равноденствию J2000.0 и согласовано с системой FK5.

Наблюдения на РСДБ показали также, что средний экватор на эпоху J2000.0 не совпадает с экватором системы ICRS. Причиной этого являются ошибки в теории нутации МАС1980. В результате полюс $P_{J2000.0}$, соответствующий среднему экватору J2000.0, смещен относительно полюса ICRS (P_{ICRS}) (рис. 2.1). На рис. 2.1 показан также участок экватора с точками O_{FK5}, O_{ICRS} — началом прямых восхождений в системах FK5 и ICRS, а также точка динамического равноденствия $\Upsilon_{J2000.0}$.

Из-за прецессии, нутации и ряда других причин, рассматриваемых ниже, координаты небесных тел будут различаться в разные моменты времени. Это означает, что для вычисления изменения координат необходимо измерить промежуток времени между наблюдениями.

Для измерения времени выбирается какой-либо периодический процесс. Измерение длительности промежутка между двумя событиями заключается в его сравнении с периодом этого процесса. Итак, с одной стороны, необходимо определить с максимальной точностью момент проведения наблюдения или *эпоху наблюдения*, а с другой стороны, нужно измерить интервал между двумя эпохами в выбранных единицах временной шкалы. С давних пор основными единицами счета времени являются сутки и год, отражающие вращение Земли вокруг оси и обращение Земли вокруг Солнца. В связи с повышением точности наблюдения и обнаружения неравномерности вращения Земли были введены более точные шкалы времени. Вопросы, связанные с определением шкал времени и связи между ними, будут рассмотрены в главе **??**.

При составлении каталога каждая звезда наблюдается несколько раз на протяже-

Рис. 2.1: Полюс ICRS (P_{ICRS}) и полюс FK5 (P_{FK5})и начало прямых восхождений

нии одного или нескольких лет. В результате на каждый момент или эпоху наблюдения определяются *видимые координаты* звезды. Под *эпохой каталога* понимают среднюю эпоху наблюдения звезд каталога. Для сравнения координат звезд необходимо привести их к единой системе координат на стандартную эпоху. В настоящее время по решению МАС принята система экваториальных координат FK5 для равноденствия J2000.0 (до этого стандартными эпохами были B1950.0, B1900.0 и другие)[1]. *Эпохой равноденствия* называется эпоха, на которую фиксируется положение небесного экватора и эклиптики и,следовательно, точка весеннего равноденствия. Например, эпохой каталога HIPPARCOS является эпоха J1991.25, эпохой равноденствия — J2000.0, т.е. координаты звезд в каталоге приводятся на момент J1991.25, а положение в пространстве плоскости экватора на момент J2000.0.

При переходе от классической механики к специальной теории относительности необходимо изменить некоторые понятия. Преобразования от одной инерциальной системы к другой осуществляются с помощью уравнений Лоренца. В курсе теории относительности доказывается, что при преобразовании Лоренца законы физики не изменяются, т.е. они лоренц — ковариантны. Промежуток времени между двумя событиями в разных инерциальных системах уже не является инвариантом: собственное время (время, связанное с движущимся наблюдателем) течет быстрее, чем время в лабораторной системе отсчета, измеряемое покоящимися часами.

В присутствии полей тяготения законы специальной теории относительности в общем случае не работают. Однако в ограниченных областях пространства, как утверждает Эйнштейн, можно выбрать неускоренно движущуюся систему координат. Такую систему можно считать локально инерциальной, в которой законы специальной теории относительности выполняются с высокой точностью. Преобразование координат при переходе от одной локальной системы к другой определяется уравнениями Лоренца. В общей теории относительности течение времени определяется не только скоростью часов, но и гравитационным потенциалом. Поэтому вводится соответствующее «координатное» время и закон преобразования времени при переходе в другую систему. Эти вопросы будут подробно рассмотрены в главе **??**.

Как мы видели, в астрономии используются экваториальная и эклиптическая системы координат. Свое название они получили от основных плоскостей систем отсчета. Кроме них используются горизонтальная и галактическая системы координат, главными плоскостями в которых являются горизонт наблюдателя и плоскость экватора нашей Галактики. Все эти системы координат являются сферическими.

В следующем параграфе мы определим эти системы и введем соответствующие сферические координаты. Затем используем формулы (1.10), (1.16), (1.17) и (1.18) для вычисления преобразования координат небесных тел от одной системы координат к другой в случае, когда начала осей совпадают. Если начала осей не совпадают, то строгое преобразование координат выполняется с учетом формул общей теории относительности.

В зависимости от выбора начала осей различают следующие системы координат:

---

[1]Буквы перед годом обозначают счет времени юлианскими (J) или бесселевыми годами (B).

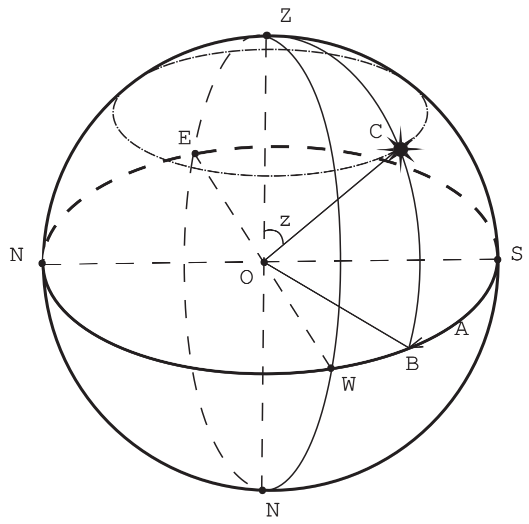

Рис. 2.2: Горизонтальная система координат

- топоцентрические с началом в точке наблюдения;
- геоцентрические — в центре масс Земли;
- гелиоцентрические — в центре Солнца;
- барицентрические — в центре масс солнечной системы.

Они будут рассмотрены в следующей главе. Иногда удобно использовать другие системы. В частности при обработке наблюдений HIPPARCOS вводилась система координат с началом в центре масс спутника и осью z, направленной вдоль оси его вращения.

2.3 Горизонтальная система координат

Представим себе наблюдателя, находящегося на поверхности Земли. По определению сфера единичного радиуса с центром в точке расположения наблюдателя называется небесной сферой. Одним из выделенных направлений для наблюдателя является направление, совпадающее с отвесной линией, или с силой притяжения Земли. Мысленно продолжим отвесную линию вверх и вниз до пересечения ее с небесной сферой. Точки пересечения (полюсы горизонтальной системы координат) называются *зенитом* и *надиром* и обозначаются как Z и $\mathcal{N}$, соответственно (рис. 2.2). Плоскость, перпендикулярная отвесной линии, называется *плоскостью горизонта.* Если через точки зенита и надира провести плоскость, то она пересечет небесную сферу по окружности, которая по традиции называется *вертикальным кругом.* На плоскости горизонта выделим четыре точки: севера (N), юга (S), запада (W) и востока (E) (рис. 2.2).

Определение 2.1 *Вертикальный круг, проходящий через точки востока и запада, называется первым вертикалом.*

Если вертикальный круг проходит через светило C, то он называется *вертикалом светила*. Дуга вертикала $\widehat{ZC}$ называется *зенитным расстоянием* z светила C. Вместо зенитного расстояния часто используется другая координата: *высота светила* h над горизонтом; дуга $\widehat{CB}$ равна h. Из рисунка видно, что $z+h = 90°$. Зенитное расстояние (или высота светила) является одной из координат в горизонтальной системе. Удобство использования зенитного расстояния понятно. При таком определении z эквивалентно углу θ (рис. 1.4).

Второй координатой в горизонтальной системе является *азимут* A светила. Азимут — это двугранный угол между плоскостью $NZS\mathcal{N}$ и вертикалом светила. Следует заметить, что в определении точки отсчета азимута имеется произвол. В учебнике Куликова "Курс сферической астрономии"азимут отсчитывается от точки юга в направлении на запад (по часовой стрелке) от $0°$ до $360°$. В иностранной литературе азимут отсчитывается от точки севера на восток от $0°$ до $360°$, а иногда азимут измеряется в пределах $-180° < A \leq 180°$.

Главными кругами в горизонтальной системе координат являются: *горизонт*, *первый вертикал*, *вертикал светила* и *точки* : зенита, надира, севера, юга, востока и запада. Используются также малые круги светил — *круги высоты* или альмукантораты. Это — круги, параллельные горизонту и проходящие через светило. На рис. 2.2 круг высоты показан пунктирной линией.

Наблюдатель неподвижен относительно горизонтальной системы координат. Но объекты на небе движутся относительно горизонтальной системы сложным образом из-за того, что направление отвесной линии не совпадает с направлением оси вращения Земли (если наблюдатель не находится на полюсе). Направление оси вращения является вторым выбранным направлением для наблюдателя, находящегося на поверхности Земли. С направлением оси вращения Земли связана вторая рассматриваемая система координат — экваториальная.

2.4 Экваториальная система координат

Допустим, что центр небесной сферы совпадает с центром масс Земли. Если продолжить ось вращения Земли до пересечения с небесной сферой, то точки пересечения называются *полюсами мира*, а сама ось— *осью мира*. Вращение Земли приводит к кажущемуся вращению небесной сферы относительно оси мира.

Определение 2.2 *Тот полюс, с которого видно, что вращение Земли происходит против часовой стрелки называется северным, а противоположный — южным.*

В дальнейшем изложении будем считать, что на небесную сферу мы смотрим снаружи. Это аналогично взгляду на глобус Земли. Координаты звезд в экваториальной системе в этом случае определяются аналогично широте и долготе на поверхности

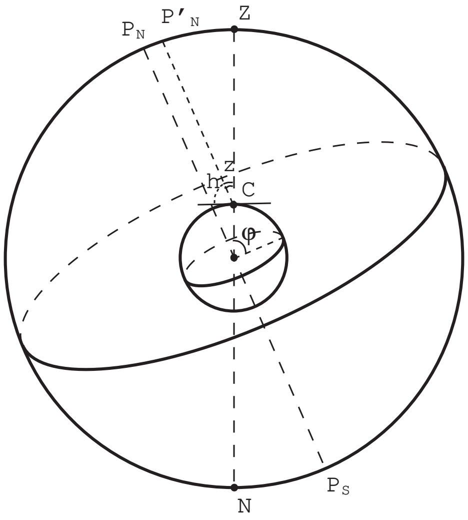

Рис. 2.3: К выводу уравнения: $\varphi = h$

Земли. Заметим, что при взгляде на небесную сферу снаружи расположение звезд зеркально отличается от того, что видит наблюдатель с поверхности Земли.

Определение 2.3 *Плоскость, перпендикулярная оси мира и проходящая через центр небесной сферы, называется небесным экватором.*

Отметим на рис. 2.3 северный (P_N) и южный (P_S) полюсы мира, а также зенит Z и надир $\mathcal{N}$ наблюдателя, расположенного в точке C на поверхности Земли.

Определение 2.4 *Плоскость, проходящая через точки P_N, Z, P_S, $\mathcal{N}$, называется плоскостью небесного меридиана.*

Проведем через точку C плоскость горизонта (она перпендикулярна плоскости страницы и показана прямой линией), а также ось CP'_N параллельно оси мира. Если φ — астрономическая широта наблюдателя, равная углу между отвесной линией и плоскостью экватора, то $\varphi = h$, то есть *высота полюса мира равна астрономической широте наблюдателя.*

Парадокс, суть которого заключается в том, что с одной стороны радиус небесной сферы равен единице, а с другой, что точки P_N и P'_N расположены на бесконечном расстоянии, решается достаточно просто: радиус Земли пренебрежимо мал по сравнению с расстоянием до ближайших звезд.

Пусть C — звезда на небесной сфере (рис. 2.4).

Определение 2.5 *Большой круг, проходящий через полюсы мира и звезду S, называется кругом склонений.*

Дуга $\widehat{AC}$ круга склонения, отсчитываемая от небесного экватора до звезды, называется *склонением*:

$$\widehat{AS} = \delta.$$

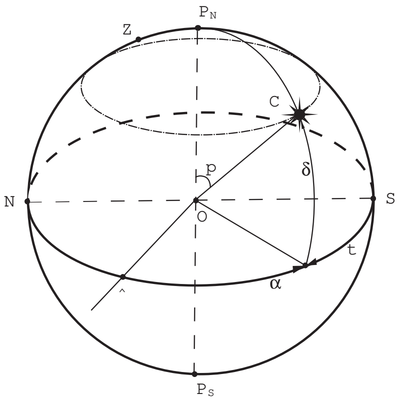

Рис. 2.4: Экваториальная система координат

Склонение δ положительно, если звезда находится в северном полушарии, и отрицательно, если — в южном: $-90^\circ \le \delta \le 90^\circ$. Довольно редко вместо склонения используется *полярное расстояние* p, равное дуге $\widehat{P_N C}$. Полярное расстояние отсчитывается от северного полюса мира от 0° до 180°. Очевидно, что $p + \delta = 90^\circ$. Склонение (или полярное расстояние) является первой координатой в экваториальной системе.

Второй координатой в экваториальной системе координат является *прямое восхождение* α. Никакого особого (выделенного) направления в плоскости экватора нет. Поэтому выбор начала отсчета прямых восхождений произволен. До 1998 года эта точка определялась в момент пересечения центром Солнца экватора, когда Солнце двигается из южного полушария в северное. Это происходит примерно 21 марта каждого года, и точка называется *точкой весеннего равноденствия*. Противоположная точка на экваторе называется *точкой осеннего равноденствия*.

В настоящее время точка весеннего равноденствия находится в созвездии Рыб, точка осеннего равноденствия — в созвездии Девы. Принятое обозначение точек — ♈ и ♎ для весеннего и осеннего равноденствий, соответственно, относятся к знакам Овна и Весов. Причиной смещения точек весеннего и осеннего равноденствия является *прецессия*, о которой мы расскажем позже.

Вернемся к движению Солнца. Видимое движение Солнца есть не что иное, как отражение движения Земли вокруг Солнца. Плоскость земной орбиты назовем *плоскостью эклиптики*, которая определяет *эклиптическую систему координат*[2].

С 1998 г. Международным астрономическим Союзом (МАС) в качестве реализации небесной системы координат принят каталог внегалактических радиоисточников. МАС рекомендует, чтобы начало прямых восхождений новой небесной системы ко-

[2]Определение эклиптики до сих пор является предметом дискуссий. По определению, принятому в МСВЗ, эклиптика — это средняя плоскость орбиты Земли, которая определяется вековой составляющей движения восходящего узла и склонением Луны(?) относительно инерциальной плоскости

ординат было близким к динамическому равноденствию J2000.0. Начало системы отсчета прямых восхождений определяется принятием среднего прямого восхождения 23 радиоисточников из разных каталогов, координаты которых исправлены таким образом, чтобы прямое восхождение квазара 3С273 было бы постоянным и согласовалось со значением в системе FK5 ($\alpha = 12^h 29^m 6^s.6997$; J2000.0). При таком определении точка весеннего равноденствия уже не привязывается к эклиптике. Для того, чтобы определить положение динамической эклиптики в системе ICRS, необходимы специальные исследования (изучение движения Луны в системе ICRS, наблюдения космических зондов в системе ICRS и т.д.) В результате этих работ было найдено положение динамического равноденствия J2000.0 $\Upsilon_{J2000.0}$ (рис. 2.1) в системе ICRS.

Вернемся к экваториальной системе координат. Если точка Υ определена тем или иным образом, то дуга экватора $\widehat{\Upsilon A}$ от точки весеннего равноденствия до круга склонений звезды называется *прямым восхождением*:

$$\widehat{\gamma A} = \alpha.$$

Прямые восхождения отсчитываются от точки весеннего равноденствия γ против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса мира, от 0^h до 24^h или от $0°$ до $360°$.

Если Z — зенит наблюдателя, N и S — точки севера и юга (рис. 2.4), то, как было сказано раньше, плоскость $P_N Z S P_S N$ является плоскостью небесного меридиана. Двугранный угол между плоскостью небесного меридиана и кругом склонения называется *часовым углом* t светила. Часовые углы отсчитываются от южной точки экватора по часовой стрелке, если смотреть с северного полюса мира, от 0^h до 24^h или от $0\circ$ до $360°$.

Малый круг, параллельный экватору и проходящий через звезду S, называется *параллелью* (показан пунктирной линией на рис. 2.4).

В экваториальной системе координат основными кругами являются: *экватор*, от которого отсчитываются склонения, *небесный меридиан*, *круг склонений*. Основные точки — это *полюсы мира*, *точка весеннего равноденствия*– начало отсчета прямых восхождений– и *южная точка экватора* – начало отсчета часовых углов.

Базисную тройку векторов, определяющих экваториальную систему координат, обозначим как $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, причем вектор $\mathbf{k}$ направлен в северный полюс мира P_N, $\mathbf{i}$ — в точку Υ, а вектор $\mathbf{j}$ равен: $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$, так что $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ составляют правую тройку векторов.

2.5 Эклиптическая система координат

Главной плоскостью в эклиптической системе координат является плоскость эклиптики. Пересечение этой плоскости и небесной сферы называется эклиптикой. Северный полюс эклиптики обозначим через Π_N; по определению дуга $\widehat{P_N \Pi_N}$ должна быть меньше $90°$ (рис. 2.5). Южный полюс эклиптики обозначим как Π_S. Линия пересечения двух плоскостей — небесного экватора и эклиптики называется линией узлов.

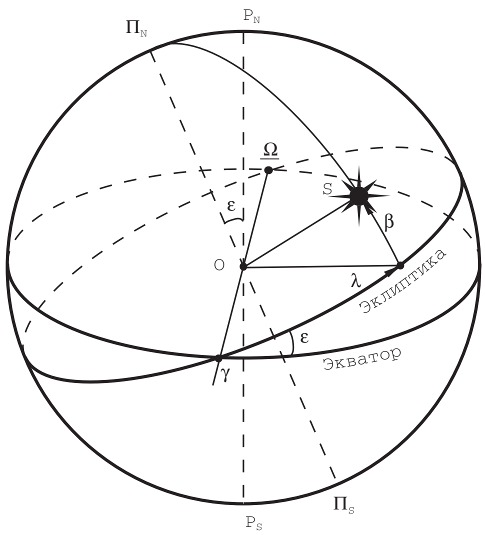

Рис. 2.5: Эклиптическая система координат

Определение 2.6 *Большой круг, проведенный через полюсы эклиптики и звезду, называется кругом широты.*

Дуга круга широты $\widehat{AS}$, отсчитываемая от плоскости эклиптики, называется *эклиптической широтой*:

$$\widehat{AS} = \beta.$$

Широта положительна в северном и отрицательна в южном полушарии:

$$-90^\circ \le \beta \le 90^\circ.$$

Второй координатой является *эклиптическая долгота*, равная двугранному углу между большим кругом, который проходит через полюсы эклиптики и линию узлов, и кругом широты:

$$\widehat{\Upsilon A} = \lambda.$$

Долгота измеряется от точки весеннего равноденствия от 0° до 360° против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса эклиптики, то есть в направлении возрастания прямых восхождений. Ось x в эклиптической системе координат совпадает с осью x экваториальной системы. Обозначим орты эклиптической системы через $\mathbf{i}_e, \mathbf{j}_e, \mathbf{k}_e$, причем $\mathbf{i}_e = \mathbf{i}$, вектор $\mathbf{k}_e$ направлен в северный полюс эклиптики Π_N, а $\mathbf{j}_e = \mathbf{k}_e \times \mathbf{i}_e$.

Ось вращения Земли наклонена к плоскости орбиты под углом $\sim 23^\circ, 5$. Поэтому угол $\Pi_N O P_N$ равен $\sim 23^\circ, 5$. Очевидно, что угол между плоскостями экватора и эклиптики (назовем его ε) также равен этой величине. Угол ε медленно меняется из-за прецессии. Точное значение ε на эпоху J2000.0 равно: $\varepsilon = 23^\circ 26' 21'', 448$.

Основными кругами в эклиптической системе координат являются эклиптика, круг широты, а основными точками — полюсы эклиптики и точка весеннего равноденствия.

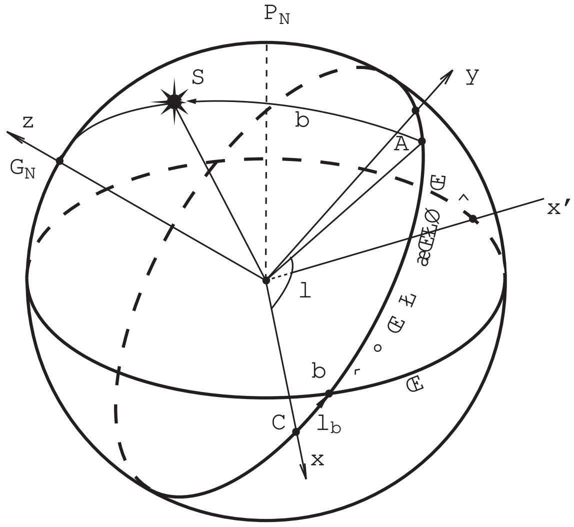

Рис. 2.6: Галактическая система координат

2.6 Галактическая система координат

Еще одной, часто используемой, особенно в звездной динамике, системой координат является галактическая система. При обработке результатов проекта HIPPARCOS галактическая система координат была определена следующим образом[3]. Обозначим точку, экваториальные координаты которой равны

$$\begin{aligned} \alpha &= 192^\circ, 85948, \\ \delta &= 27^\circ, 12825, \end{aligned}$$

как G_N и назовем её северным галактическим полюсом, а диаметрально противоположную точку — южным. Большой круг с полюсом в точке G_N назовем *галактическим экватором* (рис. 2.6).

Определение 2.7 *Большой круг, проходящий через звезду S и полюсы Галактики, называется кругом галактической широты.*

Если точка A является точкой пересечения круга широты и галактического экватора, то дуга $\widehat{AS}$ называется *галактической широтой* звезды: $\widehat{AS} = b$. Галактические широты положительны в северном и отрицательны в южном полушарии: $-90^\circ \le b \le 90^\circ$. Раньше галактические долготы l отсчитывались от восходящего узла ☊, то есть точки пересечения галактического и небесного экваторов, прямое

[3]Существуют другие определения галактической системы координат. Однако так как система отсчета, реализованная каталогом HIPPARCOS, официально признана МАС (резолюция B1.2 XXIV Генеральной Ассамблеи МАС), и одной из задач проекта HIPPARCOS является связь галактической системы с ICRS, мы будем использовать предложенное авторами этого проекта определение.

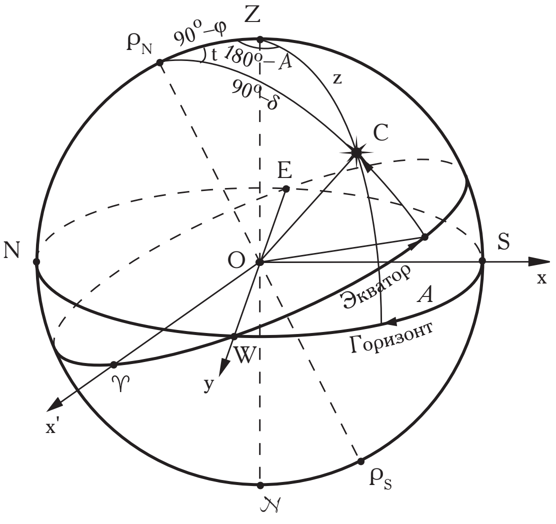

Рис. 2.7: Связь горизонтальных и экваториальных координат

восхождение которой равнялось $\sim 18^h40^m$. Сейчас начало отсчета долгот (точка C на рис. 2.6 — направление на центр Галактики) определяется галактической долготой восходящего узла Ω, которая равна $l_{\Omega} = 32°, 93192$. Галактические долготы отсчитываются от 0° до 360° против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса Галактики.

Единичный вектор в направлении северного полюса Галактики обозначим как $\mathbf{k}_g$, а вектор, направленный в центр Галактики—как $\mathbf{i}_g$. Ось x галактической системы направим вдоль вектора $\mathbf{i}_g$, ось z— вдоль $\mathbf{k}_g$. Ось y определяется единичным вектором $\mathbf{j}_g$, который равен $\mathbf{j}_g = \mathbf{k}_g \times \mathbf{i}_g$.

После определения основных сферических систем координат рассмотрим методы, используемые для преобразования координат из одной системы в другую.

2.7 Преобразование координат из одной системы в другую

Данная задача уже упоминалась при рассмотрении горизонтальной системы координат. Если система установки телескопа горизонтальная, то движение звезд в этой системе будет нелинейным. Для точного ведения телескопа за звездой требуется пересчитывать экваториальные координаты звезды в горизонтальные. Рассмотрим сначала классический метод и найдем выражения, связывающие экваториальные и горизонтальные координаты. Затем рассмотрим матричный метод, который можно использовать для преобразования координат вектора из одной системы в другую.

Рассмотрим треугольник $P_N ZC$ (рис. 2.7). Вершинами в этом треугольнике являются зенит, полюс мира и звезда C. Такой треугольник называется *параллактическим.* Согласно определениям координат, имеем: дуга $\widehat{ZC}$ равна зенитному расстоянию z, дуга $\widehat{P_N C}$ равна $90^\circ - \delta$, дуга $\widehat{P_N Z}$ равна $90^\circ - \varphi$, двугранный угол ZP_NC — это часовой угол t, двугранный угол P_NZC равен $180^\circ - A$. Допустим, что требуется найти зенитное расстояние и азимут источника по его сферическим координатам. По теореме косинусов, используя треугольник P_NZC, имеем:

$$\cos z = \cos(90^\circ - \delta)\cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - \delta)\sin(90^\circ - \varphi)\cos t$$

или

$$\cos z = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t \tag{2.1}$$

По теореме синусов получим:

$$\frac{\sin z}{\sin t} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(180^\circ - A)}$$

или

$$\sin z\sin A = \cos\delta\sin t \tag{2.2}$$

По теореме подобия получим:

$$\sin z\cos(180^\circ - A) = \cos(90^\circ - \delta)\sin(90^\circ - \varphi) - \sin(90^\circ - \delta)\cos(90^\circ - \varphi)\cos t$$

или

$$\sin z\cos A = -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos t. \tag{2.3}$$

Уравнения (2.1-2.3) однозначно определяют z и A по координатам δ и t.

Обратное преобразование (от z и A к δ и t) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \cos\delta\sin t &= \sin z\sin A, \\ \cos\delta\cos t &= \cos z\cos\varphi + \sin z\sin\varphi\cos A, \\ \sin\delta &= \cos z\sin\varphi - \sin z\cos\varphi\cos A. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Точно так же можно получить формулы, связывающие экваториальную систему координат с эклиптической, экваториальную с галактической и т.д.

Однако более просто найти преобразование от одной системы координат к другой системе с помощью матричных методов. Так как в дальнейшем мы будем использовать эти методы часто, рассмотрим их подробно.

Разложение вектора по тройке базисных векторов ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) было записано в виде (1.3):

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где x, y, z - проекции вектора $\mathbf{r}$ (1.5) на векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, соответственно. Используя матричные обозначения, это выражение можно записать в виде:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где запись $(\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k})$ обозначает вектор-строку. Оставим обозначение $(\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k})$ для базисной тройки векторов экваториальной системы. Базисную тройки векторов эклиптической и галактической системы координат обозначены в § 2.5 и 2.6 как $(\mathbf{i}_e\,\mathbf{j}_e\,\mathbf{k}_e)$ и $(\mathbf{i}_g\,\mathbf{j}_g\,\mathbf{k}_g)$, соответственно.

Тогда радиус-вектор одного и того же источника может быть выражен в различных системах координат, используя (1.4) в виде:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{i}_e & \mathbf{j}_e & \mathbf{k}_e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\lambda\\ \cos\beta\sin\lambda\\ \sin\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{i}_g & \mathbf{j}_g & \mathbf{k}_g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos b\cos l\\ \cos b\sin l\\ \sin l\end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Чтобы найти преобразование от одной системы координат к другой, надо найти матрицу поворота от одной базисной тройки к другой. Например, найдем преобразование от экваториальной к эклиптической системе. Тогда

$$\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{i}_e & \mathbf{j}_e & \mathbf{k}_e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\lambda\\ \cos\beta\sin\lambda\\ \sin\beta\end{pmatrix}.$$

Умножим обе части уравнения на вектор-столбец $\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix}^T$ слева, где индекс "T"обозначает транспонирование, т.е. $\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}$. В результате получим

$$\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{i}_e & \mathbf{j}_e & \mathbf{k}_e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\lambda\\ \cos\beta\sin\lambda\\ \sin\beta\end{pmatrix}.$$

По определению скалярного произведения имеем:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица.

Таким образом преобразование от эклиптической к экваториальной системе можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix} = A_e\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\lambda\\ \cos\beta\sin\lambda\\ \sin\beta\end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

где

$$A_e = \begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{i}_e & \mathbf{j}_e & \mathbf{k}_e\end{pmatrix}.$$

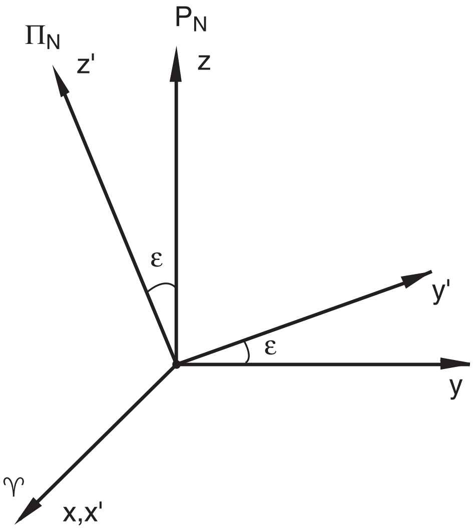

Рис. 2.8: Расположение осей экваториальной и эклиптической систем координат

Вычислим матрицу A_e в явном виде, используя рис. 2.8. В обеих системах ось x направлена в точку весеннего равноденствия Υ. Поэтому направление векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{i}_e$ совпадает. Оси z и z' направлены соответственно в полюс мира P_N и полюс эклиптики Π_N. Следовательно угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_e$ равен ε. Угол между векторами $\mathbf{j}$ и $\mathbf{j}_e$ также равен ε. Используя определение скалярного произведения, получим:

$$A_e = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}_e & \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}_e & \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}_e \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}_e & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}_e & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}_e \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}_e & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}_e & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \cos(90^\circ+\varepsilon) \\ 0 & \cos(90^\circ-\epsilon) & \cos\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Уравнения (2.7) и (2.8) однозначно определяют связь между двумя системами координат, и удобны при вычислении на компьютере. Тем не менее приведем преобразование (2.7) в явном виде:

$$\begin{aligned} \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda, \\ \cos\delta\sin\alpha &= \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon, \\ \sin\delta &= \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Используя матричную запись (2.7) легко найти обратное преобразование от экваториальной к эклиптической системе координат. Для этого умножим уравнение (2.7) слева на матрицу, обратную A_e, т.е. на A_e^{-1}:

$$A_e^{-1}\begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Матрица A_e обладает специальными свойствами. Нетрудно проверить, что $A_e^T A_e = A_e A_e^T = I$, т.е. $A_e^T = A_e^{-1}$. Подобные матрицы называются ортогональными. Преобразование (2.10) имеет, таким образом, вид:

$$\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\lambda\\ \cos\beta\sin\lambda\\ \sin\beta\end{pmatrix} = A_e^T\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon\\ 0 & -\sin\epsilon & \cos\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Матрица A_e^T описывает преобразование от экваториальной системы к эклиптической. Вращение на угол ε для совмещения осей y и z с осями y' и z', соответственно, называется правым, так как при этом движение воображаемого правого винта совпадает с направлением оси x. Матрица A_e^T, поэтому, описывает правое вращение относительно оси x.

В явном виде из (2.11) получим:

$$\begin{aligned}\cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha,\\ \cos\beta\sin\lambda &= \cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon,\\ \sin\beta &= -\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Аналогично могут быть получены матрицы вращений относительно осей y и z. Для сохранения общности изложения обозначим матрицы поворотов относительно осей x,y,z на угол ϕ как $R_1(\phi)$, $R_2(\phi)$, $R_3(\phi)$, соответственно, причем

$$R_1(\phi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}; R_2(\phi) = \begin{pmatrix}\cos\phi & 0 & -\sin\phi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\phi & 0 & \cos\phi\end{pmatrix}; R_3(\phi) = \begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Матрица A_e (2.8) равна, следовательно, $R_1(-\varepsilon)$, т.е. для перехода от эклиптической к экваториальной системе необходимо повернуть оси эклиптической системы относительно оси x (x') на угол $-\varepsilon$.

С помощью матриц (2.13) можно вычислить любую матрицу, описывающую вращение в трехмерном пространстве.

Рассмотрим две декартовы системы координат: x, y, z и x', y', z' (рис. 2.9). Найдем матрицу преобразования R координат вектора из системы x, y, z к системе x', y', z'. Сначала повернем систему x, y, z относительно оси z на угол Ψ (до совмещения оси x с линией узлов $O☊$). Вращение относительно линии узлов (которая теперь совпадает с осью x) на угол Θ приведет к совмещению оси z с осью z'. И, наконец, поворот относительно оси z' на угол Φ переводит ось x в положение x' (y в y' соответственно). Все повороты—положительны.

Углы Ψ, Θ, Φ называются *углами Эйлера.* Три угла Эйлера *однозначно* определяют поворот одной системы координат относительно другой. В астрономии эти углы имеют собственное название. Если оси x, y лежат в плоскости эклиптики, то угол Ψ называется *углом прецессии.* Угол Θ есть *угол нутации*, а угол Φ называется *углом собственного вращения.*

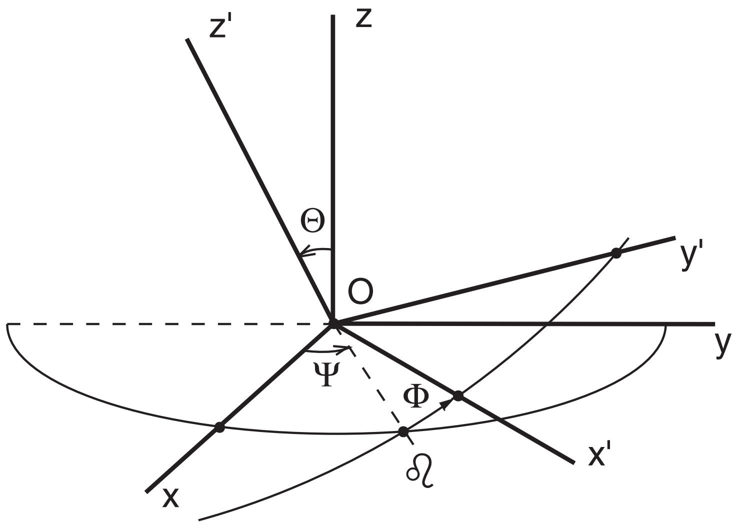

Рис. 2.9: Определение углов Эйлера

Матрица вращения R равна произведению трех матриц (обратите внимание на порядок перемножения матриц и последовательность вращений):

$$R = R_3(\Phi)R_1(\Theta)R_3(\Psi) = \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или

$$R = \begin{pmatrix} \cos\Phi\cos\Psi - \sin\Phi\cos\Theta\sin\Psi & \cos\Phi\sin\Psi + \sin\Phi\cos\Theta\cos\Psi & \sin\Phi\sin\Theta \\ -\sin\Phi\cos\Psi - \cos\Phi\cos\Theta\sin\Psi & -\sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Theta\cos\Psi & \cos\Phi\sin\Theta \\ \sin\Theta\sin\Psi & -\sin\Theta\cos\Psi & \cos\Theta \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

С помощью матричного метода легко найти матрицу преобразования экваториальных координат (α, δ) в галактические координаты (l,b) (рис. 2.6).

Из уравнения (2.6) имеем:

$$\begin{pmatrix} \cos b\cos l \\ \cos b\sin l \\ \sin b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_g \\ \mathbf{j}_g \\ \mathbf{k}_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}.$$

Орт $\mathbf{i}$ направлен в точку Υ, $\mathbf{j}$ — в точку с прямым восхождением, равным 90°, и $\mathbf{k}$ — в северный полюс мира. Согласно определению вектор $\mathbf{i}_g$ направлен в центр Галактики, $\mathbf{k}_g$ - в северный полюс G_N (§ 2.6).

Матрица

$$A_G = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_g \\ \mathbf{j}_g \\ \mathbf{k}_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

является искомой матрицей преобразования.

Довольно трудно вычислить скалярные произведения $\mathbf{i}_g \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{i}_g \cdot \mathbf{j}$ и т.д. непосредственно. Поэтому вычислим матрицу (2.15), соответствующую переходу от экваториальной системы к галактической следующим образом: выполним первое вращение относительно оси мира на угол α_{Ω} (прямое восхождение точки Ω), т. е. вычисляем матрицу $R_3(\alpha_{\Omega})$, затем выполняем вращение относительно линии узлов на угол $90^\circ - \delta_{G_N}$ и получаем матрицу $R_1(90^\circ - \delta_{G_N})$, где δ_{G_N} — склонение северного галактического полюса. Третий поворот — это поворот относительно оси, соединяющей северный и южный полюса Галактики, на угол $-l_{\Omega}$. В результате матрица A_G записывается в виде:

$$A_G = R_3(-l_{\Omega}) \cdot R_1(90^\circ - \delta_{G_N}) \cdot R_3(\alpha_{\Omega}).$$

Заметим, что $\alpha_{\Omega} = \alpha_{G_N} + 90^\circ$, α_{G_N} — прямое восхождение северного галактического полюса. Это следует из того, что двугранный угол $G_N P_N \Omega$ равен 90°. Заменяя символ ϕ в (2.13) на соответствующие углы, получим:

$$A_G = \begin{pmatrix} \cos l_{\Omega} & \sin l_{\Omega} & 0 \\ \sin l_{\Omega} & \cos l_{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\delta_G & \cos\delta_G \\ 0 & -\cos\delta_G & \sin\delta_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_{\Omega} & \sin\alpha_{\Omega} & 0 \\ -\sin\alpha_{\Omega} & \cos\alpha_{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

Подставив значения углов и вычислив произведение матриц, получим:

$$A_G = \begin{pmatrix} -0.0548765604 & 0.4941094279 & -0.8676661490 \\ -0.8734370902 & -0.4448296300 & -0.1980763734 \\ -0.4838350155 & 0.7469822445 & 0.4559837762 \end{pmatrix} \qquad (2.17)$$

Обратное преобразование (от галактической к экваториальной системе координат) выражается матричным уравнением:

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = A_G^{-1} \begin{pmatrix} \cos b\cos l \\ \cos b\sin l \\ \sin l \end{pmatrix} \qquad (2.18)$$

Так как матрица A_G - ортогональная, то $A_G^{-1} = A_G^T$.

Для перехода от горизонтальной (z, A) к экваториальной системе координат (t, δ) (рис. 2.4 и 2.7) достаточно выполнить один поворот: относительно оси $-Oy$ (обе системы координат — левые) на угол $-(90^\circ - \varphi)$, где φ — астрономическая широта. Следовательно матричное уравнение преобразования координат можно записать как

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos t \\ \cos\delta\sin t \\ \sin\delta \end{pmatrix} = R_2(\varphi - 90^\circ) \begin{pmatrix} \sin z\cos A \\ \sin z\sin A \\ \cos z \end{pmatrix}. \qquad (2.19)$$

Очевидно, что эта система совпадает с уравнениями (2.4).

Глава 3

Небесная сфера и системы координат

При определении небесной сферы говорилось, что центром сферы является глаз наблюдателя. Небесная сфера с центром на поверхности Земли называется *топоцентрической*. При перемещении наблюдателя по поверхности Земли меняется положение центра сферы, следовательно, координаты небесных объектов также будут меняться. Для того, чтобы сравнить положения небесных тел, полученных наблюдателями с разных точек на поверхности Земли, нужно привести эти положения к одной системе координат. Если гипотетического наблюдателя поместить в центр Земли, то такая система координат называется *геоцентрической*, если в центр Солнца, то *гелиоцентрической* и, если центр небесной сферы помещен в центр тяжести солнечной системы, то *барицентрической*. Так как принятая МАС система ICRS имеет начало в барицентре солнечной системы, то преобразование координат небесных тел из топоцентрической в барицентрическую систему и обратно является одной из главных задач астрометрии.

Изменение положений небесных объектов при переходе от одной системы координат к другой возникает из-за эффектов аберрации, параллактического смещения, отклонения лучей в поле тяжести Солнца, планет и т.д. Эти эффекты будут обсуждаться в главе **??**. При этом необходимо учитывать разное течение времени в разных системах, и, прежде всего определить используемые шкалы времени **??**.

Каждая из точек (центр Земли, центр Солнца или барицентр солнечной системы) может быть началом экваториальной или эклиптической систем координат.

Для чего вводится такое большое число систем координат? Выше уже говорилось, что необходима лишь одна система, к которой необходимо привести все наблюдения для корректного сравнения.

Из истории астрономии известно, что в течение ~ 2000 лет такой системой была геоцентрическая система (система Птолемея), которая из-за вращения Земли не была инерциальной. Переход от геоцентрической системы к гелиоцентрической системе Коперника привел не только к открытию закона тяготения Ньютоном и законов обращения планет Кеплером. Гелиоцентрическая система была первой инерциальной (точнее квазиинерциальной) системой координат в астрономии, в которой выполняются законы Ньютона. Переход от гелиоцентрической системы отсчета к барицентрической системе, оси которой были фиксированы по отношению к звездам, а с 1998 г. по отношению к внегалактическим компактным радиоисточникам, отражает не только прогресс методов наблюдений, но и точность практической реализации инерциальной системы координат.

Таким образом, чтобы преобразовать наблюдения к инерциальной системе координат, необходимо знать: 1) положение центра Земли относительно барицентра солнечной системы; 2) положение наблюдателя относительно центра Земли; 3) ориентацию геоцентрической системы координат относительно барицентрической. Каждая из трех задач решается различными методами. Прогресс в астрометрии за последние 20 лет, о котором говорилось во введении, связан с прогрессом в небесной механике (появились новые, более точные эфемериды Солнца, планет, Луны), в геодезии и геодинамике (координаты пунктов на поверхности Земли определены с миллиметровой точностью), в службе вращения Земли (координаты полюса, всемирное время, прецессия и нутация находятся в настоящее время с субмиллисекундной точностью).

Рассмотрим сначала вопросы, связанные с определением и построением земной системы координат.

3.1 Основные параметры Земли

Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые основные данные о Земле. Земля не является идеальной сферой. Из-за вращения Земля сплюснута у полюсов. Если бы вся поверхность Земли была покрыта океаном, то при отсутствии приливного воздействия Луны и Солнца форма поверхности представляла бы *геоид*.В каждой точке P Земли с координатами x, y, z можно вычислить потенциал притяжения[1], равный

$$U(P) = U(x, y, z) = G \int_V \frac{1}{r}\, dM,$$

где $G = 6,67259 \times 10^{-11}$ м^3/ кг$\cdot$ с^2 — гравитационная постоянная (согласно стандартам МСВЗ), $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от начала координат до точки P. Интегрирование выполняется по всему объему Земли, включая океаны и атмосферу.

Так как Земля вращается, то в точке P можно вычислить потенциал центробежной силы U_c:

$$U_c(P) = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2\theta,$$

где Ω — угловая скорость вращения Земли, θ — полярное расстояние. Тогда потенциал силы тяжести W в точке P равен:

$$W(P) = U(P) + U_c(P). \tag{3.1}$$

[1]Потенциал — это скалярная функция, характеризующая потенциальную энергию поля. В случае гравитационного притяжения двух тел потенциальная энергия пропорциональна массам тел и обратно пропорциональна расстоянию между ними. Потенциал притяжения первого тела равен потенциальной энергии, если масса второго тела равна единице.

Вектор силы тяжести $\mathbf{g}$ есть градиент W:

$$\mathbf{g} = \operatorname{grad} W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right).$$

Символ grad означает оператор градиента, который в декартовых координатах записывается следующим образом:

$$\operatorname{grad} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad (3.2)$$

а в сферических координатах (r, θ, λ), где r — расстояние, θ — полярное расстояние, λ — долгота (1.4):

$$\operatorname{grad} = \mathbf{i}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_\lambda\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \lambda}, \qquad (3.3)$$

причем единичные векторы $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\lambda$ направлены в сторону возрастания координат.

Направление отвесной линии определяется единичным вектором $\mathbf{n}$, причем

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|},$$

то есть вектор $\mathbf{n}$ направлен вверх (в зенит).

Поверхности, определяемые уравнениями $W = \text{const}$, называются эквипотенциальными или уровенными. Одна из них, соответствующая среднему уровню моря, является геоидом. Линии, которые ортогональны к уровенным поверхностям, называются силовыми линиями.

В каждой точке геоида сила тяжести направлена по нормали к поверхности, то есть по касательной к силовой линии. Геоид не имеет простой геометрической формы, однако близок к эллипсоиду вращения. Поэтому для изучения фигуры Земли вводят референц-эллипсоиды, аппроксимирующие геоид с той или иной точностью. Топографические особенности (горы, впадины) относят к референц-эллипсоиду.

3.2 Уравнение геоида

Для вычисления уравнения геоида используем формулу (3.1) и вычислим потенциал притяжения тела произвольной формы. Полученные выражения будут использоваться при вычислении прецессионного и нутационного движения осей Земли.

Потенциал точки с массой M на расстоянии r равен:

$$U = \frac{GM}{r}. \qquad (3.4)$$

Сила притяжения этой точки другой точки с массой m равна:

$$\mathbf{F} = m \operatorname{grad} U. \qquad (3.5)$$

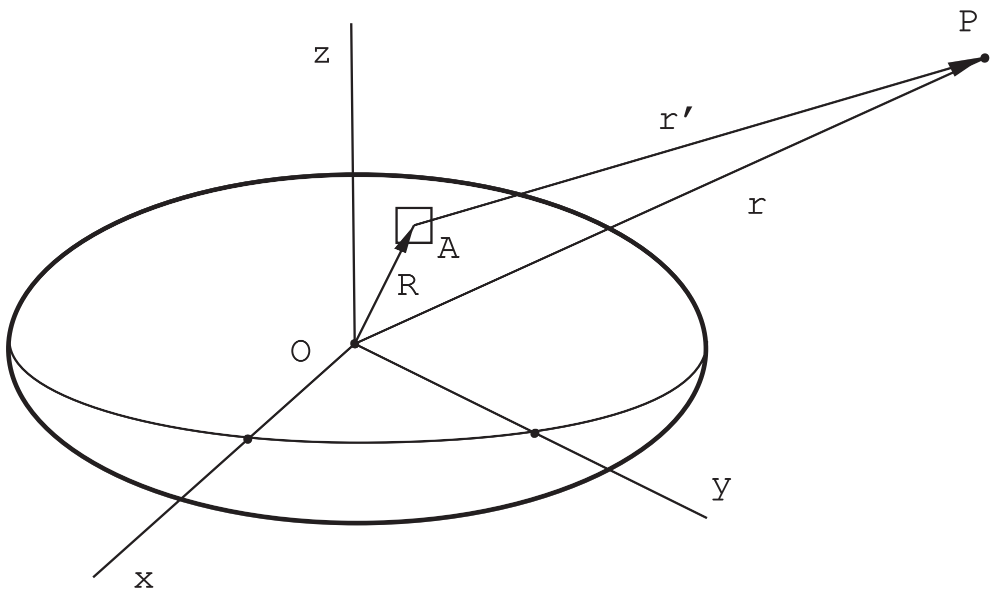

Рис. 3.1: Вычисление потенциала в точке

Подставляя в (3.5) выражение (3.4) и используя (3.3), получим хорошо известную формулу Ньютона:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{i}_r.$$

Используем выражение для потенциала точки (3.4) и найдем потенциал притяжения элемента массы dM тела произвольной формы в точке P. Будем считать, что точка P расположена вне тела. Для этого определим систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс тела (рис. 3.1).

Расстояние от точки O до элемента массы dM, находящегося в точке A с координатами x, y, z, равно R, а до точки P равно r. Тогда потенциал в точке P равен

$$dU(P) = \frac{GdM}{r'} = \frac{GdM}{r\sqrt{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r}\right)\cos\psi}}, \tag{3.6}$$

где r' — расстояние от точки A до точки P, ψ — угол между отрезками OA и OP. Найдем разложение знаменателя по степеням $1/r$, предполагая, что $s = (\frac{R}{r})^2 - 2(\frac{R}{r})\cos\psi \ll 1$:

$$\begin{aligned}(1+s)^{-1/2} &\approx 1 - \frac{1}{2}s + \frac{3}{8}s^2 - \frac{15}{48}s^3 + \cdots = \\ &= 1 + \frac{R}{r}\cos\psi - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\cos^2\psi - \frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\cos\psi + \cdots = \\ &= 1 + \frac{R}{r}\cos\psi + \left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sin^2\psi + \cdots . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Традиционное представление потенциала U имеет вид:

$$dU = \frac{GdM}{r}\sum_{n=0}\Big(\frac{R}{r}\Big)^n P_n(\cos\psi),$$

где $P_n(\cos\psi)$—полиномы Лежандра. Индекс n называется степенью полинома Лежандра, причем

$$P_0(\cos\psi) = 1,\ P_1(\cos\psi) = \cos\psi,\ P_2(\cos\psi) = \frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2}.$$

Чтобы найти потенциал в точке P от всех точек тела, проинтегрируем (3.6) во всему объему тела, используя разложение (3.7):

$$U = \frac{G}{r}\int_V dM + \frac{G}{r^2}\int_V R\cos\psi dM + \frac{G}{r^3}\int_V R^2 dM - \frac{3}{2}\frac{G}{r^3}\int_V R^2\sin^2\psi dM + \cdots . \quad (3.8)$$

Первый член соответствует потенциалу точки с массой $M = \int_V dM$, расположенной в начале координат O. Второй член равен нулю, так как начало координат совпадает с центром масс тела. Это легко доказать. В самом деле центр масс тела - это точка O, радиус-вектор которой относительно некоторой системы координат равен:

$$\mathbf{r}_O = \frac{1}{M}\int_V \mathbf{r} dM,$$

где $\mathbf{r}$—радиус-вектор элемента массы dM. Если центр масс тела совпадает с началом системы координат, то $\int_V \mathbf{r}dM = 0$. Это доказывает утверждение, что второй член в (3.8) равен нулю.

Определим главные моменты инерции Земли A, B, C относительно осей x, y, z, соответственно, следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \int_V (y^2+z^2)dM, \\ B &= \int_V (x^2+z^2)dM, \\ C &= \int_V (x^2+y^2)dM. \end{aligned}$$

Тогда третий член в (3.8) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} &+ \frac{G}{r^3}\int_V R^2 dM = +\frac{G}{r^3}\int_V (x^2+y^2+z^2)dM = \\ &+ \frac{G}{2r^3}\left[\int_V (y^2+z^2)dM + \int_V (x^2+z^2)dM + \int_V (x^2+y^2)dM\right] = \frac{G}{2r^3}(A+B+C). \end{aligned}$$

Так как произведение $R\sin\psi$ равно перпендикуляру, опущенному из точки A на прямую OP, то четвертый член в (3.8) равен моменту инерции I тела относительно оси OP. Следовательно, потенциал тела в точке P равен:

$$U = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3I). \tag{3.9}$$

Если l, m, n — направляющие косинусы прямой OP относительно осей x, y, z, то

$$I = Al^2 + Bm^2 + Cn^2.$$

Обозначим угол между OP и осью Oz через θ. Тогда

$$n^2 = \cos^2\theta = 1 - l^2 - m^2.$$

Предположим, что $A = B$. В этом случае момент инерции равен

$$I = A(l^2 + m^2) + Cn^2 = A + (C - A)n^2.$$

Подставляя I в (3.9) найдем окончательное выражение для потенциала тела в точке P:

$$U = \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(C - A)(3\cos^2\theta - 1) + \cdots . \tag{3.10}$$

Для Земли главные моменты инерции равны $C = (8,04 \pm 0,01) \cdot 10^{37}$ кг· м^2 и $A = (8,01 \pm 0,01) \cdot 10^{37}$ кг· м^2. Относительная разность экваториальных моментов A и B равна $(B - A)/A \sim 2 \cdot 10^{-5}$. Поэтому часто считают, что $A = B$ и тем самым полагают, что Земля — двухосный эллипсоид.

Перепишем (3.10) в следующем виде:

$$U = \frac{GM}{r}\Big[1 - J_2\Big(\frac{a}{r}\Big)^2 P_2(\cos\theta) + \cdots\Big], \tag{3.11}$$

где $J_2 = (C - A)/(Ma^2)$ — динамический форм-фактор Земли, a — экваториальный радиус Земли.

Уравнение (3.11) в пределе должно выполняться на поверхности Земли. Если ограничиться разложением до $(a/r)^2$, то полный геопотенциал на поверхности Земли равен:

$$W = \frac{GM}{r}\Big[1 - J_2\Big(\frac{a}{r}\Big)^2 P_2(\cos\theta)\Big] + U_c. \tag{3.12}$$

Центробежный потенциал U_c запишем в виде:

$$U_c = \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2\theta.$$

Так как геоид определяется как поверхность постоянного потенциала, приравняем потенциал на полюсе и экваторе Земли, учитывая, что при $\theta = 0^\circ$ $r = c$, а при $\theta = 90^\circ$ $r = a$:

$$\frac{GM}{a} + \frac{1}{2}\frac{GM}{a}\frac{C - A}{Ma^2} - \frac{1}{2}a^2\Omega^2 = \frac{GM}{c} - \frac{GM}{c}\frac{C - A}{Ma^2}\frac{a^2}{c^2}.$$

Отсюда
$$\frac{c-a}{a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{C-A}{M}\frac{c^2+ac+a^2}{a^2c^2}\right) \approx -\frac{3}{2}\frac{C-A}{Mc^2} - \frac{1}{2}\frac{a^2c\Omega^2}{GM}.$$
Определяя сжатие как $f = (a-c)/c$, получим
$$f = \frac{a-c}{a} \approx \frac{3}{2}\frac{C-A}{Ma^2} + \frac{1}{2}\frac{\Omega^2a^3}{GM}. \tag{3.13}$$

Формула верна с точностью до 10^{-3}, так как c заменено на a. С той же точностью уравнение поверхности геоида имеет вид:
$$r = a(1-f\cos^2\theta). \tag{3.14}$$

3.3 Геоцентрическая и геодезическая системы координат

Формула (3.13) связывает геометрические параметры (a, c) Земли с её динамическими параметрами (A, C, J_2). Это позволяет выбрать геометрическую фигуру — эллипсоид вращения, который будет близок к реальной фигуре — геоиду.

В соответствии с рекомендациями референц-эллипсоид должен иметь те же значения геоцентрической гравитационной константы $GM_\oplus$, ($M_\oplus$— масса Земли), динамического фактора J_2, как и реальная Земля. Постоянная скорость вращения эллипсоида должна равняться средней скорости вращения Ω Земли относительно главной оси инерции. Центр референц-эллипсоида должен совпадать с центром масс Земли.

В таблице 3.1 приводятся параметры некоторых, наиболее часто используемых референц-эллипсоидов. Для каждого из референц-эллипсоидов приведенные параметры являются константами.

Таблица 3.1: Параметры некоторых референц-эллипсоидов.

Название	a км	$1/f$	$GM_\oplus$ 10^{14}м^{3}с$^{-2}$	J_2 10^{-3}	Ω 10^{-5}рад/с
WGS 84	6378.137	298.25722356	3.986005	1.08263	7.292115
GRS 80	6378.137	298.257222	3.986005	1.08263	7.292115
IAU 76	6378.140	298.257	3.986005	1.08263	——
IERS 96	6378.13649	298.25645	3.986004418	1.0826359	7.292115

Система спутниковой навигации GPS сообщает координаты в системе WGS84 (World Goodetic System). Референц-эллипсоид IERS96 рекомендуется использовать при обработке РСДБ-наблюдений.

Рассмотрим систему координат, связанную с референц-эллипсоидом. Основным направлением геоцентрической системы координат является ось вращения Земли,

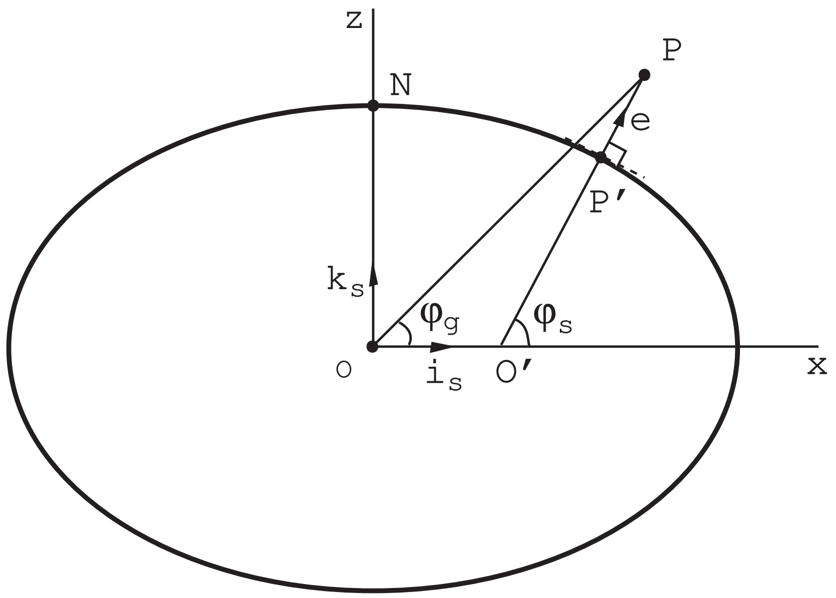

Рис. 3.2: Определение геоцентрических и геодезических координат

которая пересекается с ее поверхностью в точках северного (N) и южного (S) полюсов. Плоскость, перпендикулярная оси вращения, называется *экваториальной плоскостью*, а линия пересечения плоскости с поверхностью Земли называется *экватором*. Плоскость, проходящая через полюсы и точку (не обязательно находящуюся на поверхности эллипсоида), называется *плоскостью геодезического меридиана*. Так как малая полуось c равна

$$c = a(1 - f),$$

то уравнение меридионального сечения референц-эллипсоида есть уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-f^2)} = 1. \tag{3.15}$$

Нулевым меридианом (началом отсчета долгот) считается меридиан, проходящий через Гринвичскую обсерваторию. Малые круги, параллельные плоскости экватора, называются параллелями. Отстоящие от экватора на $23°27'$ параллели называются тропиками, на $66°33'$ — полярными кругами.

На рис. 3.2 изображен эллипс (меридиональное сечение эллипсоида), наблюдатель находится в точке P, а P' — точка эллипсоида такая, что PP' есть нормаль к эллипсоиду.

Координаты точки P на поверхности Земли можно задать в виде:
а) геоцентрических экваториальных прямоугольных координат: x, y, z;
б) геоцентрической широты, долготы и расстояния: $\varphi_g, \lambda_g, \rho$;
в) геодезической широты, долготы и высоты: φ_s, λ_s, h;

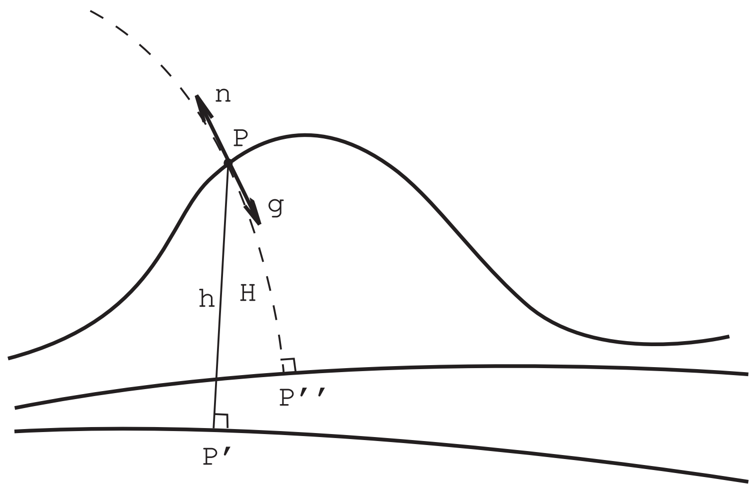

Рис. 3.3: Высота геоида

На рис. 3.3 показаны топографическая поверхность, а также геоид и референц-эллипсоид. Показаны также силовая линия, проходящая через точку P, направление силы тяжести и отвесной линии. Дуга PP'' называется ортометрической высотой H. С достаточной степенью точности получим

$$N = h - H, \tag{3.16}$$

где N — высота геоида, h — геодезическая высота, равная отрезку PP'. Отклонение геоида от эллипсоида составляет примерно ± 50 м (рис. 3.4).

Введем оси x (с ортом $\mathbf{i}_s$) и z (орт $\mathbf{k}_s$), направленные по большой и малой полуосям эллипса. Орт $\mathbf{e}$ направим вдоль перпендикуляра PP', т.е. $\mathbf{e}$ является нормалью в точке P', направленной наружу. Тогда $\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{e} = \sin\varphi_s$, где угол φ_s называется *геодезической широтой* точки P (и P').

Пусть теперь ось x лежит в плоскости нулевого меридиана. На рис. 3.5 показана плоскость экватора, видимая с северного полюса (из точки N).

Направление оси y определяется уравнением:

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{k}_s \times \mathbf{i}_s.$$

Назовем геодезической долготой λ двугранный угол между плоскостями нулевого меридиана и меридиана точки P. Геодезическая и геоцентрическая долготы точки P равны, так как векторы $\mathbf{r}_P = \overrightarrow{OP}$ и $\mathbf{r}'_P = \overrightarrow{OP'}$ лежат в одной меридиональной плоскости: $\lambda_s = \lambda_g$. Координаты точки P можно выразить через элементы геодезического базиса

$$\mathbf{r}'_P = (\mathbf{i}_s\ \mathbf{j}_s\ \mathbf{k}_s)\begin{pmatrix}\cos\varphi_s\cos\lambda_s\\ \cos\varphi_s\sin\lambda_s\\ \sin\varphi_s\end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Рис. 3.4: Отклонение геоида от гидростатического эллипсоида со сжатием f=1/298.257 (в м)(Разложение до 5-ой степени)

Аналогичным образом координаты точки P можно выразить через географические (геоцентрические) координаты точки P: широту φ_g и долготу λ_g:

$$\mathbf{r}_p = (\mathbf{i}_g\ \mathbf{j}_g\ \mathbf{k}_g) \begin{pmatrix} \cos\varphi_g \cos\lambda_g \\ \cos\varphi_g \sin\lambda_g \\ \sin\varphi_g \end{pmatrix} . \tag{3.18}$$

Вектор $\mathbf{r}'_P$ определяет геодезический зенит, а $\mathbf{r}_P$ — геоцентрический зенит. Оба этих направления не совпадают с астрономическим зенитом, то есть с направлением отвесной линии. Геодезический зенит был бы астрономическим зенитом, если бы геоид точно совпадал бы с референц-эллипсоидом и не было бы локальных гравитационных аномалий. Отклонение отвесной линии от нормали к эллипсоиду характеризуется двумя малыми углами ξ и η, составляющими *уклонение отвесной линии*. Астрономический зенит Z — проекция отвесной линии на небесную сферу - имеет координаты: астрономические широту φ и долготу λ (рис. 3.6). Геодезический зенит Z' — проекция нормали к референц-эллипсоиду на небесную сферу - имеет координаты

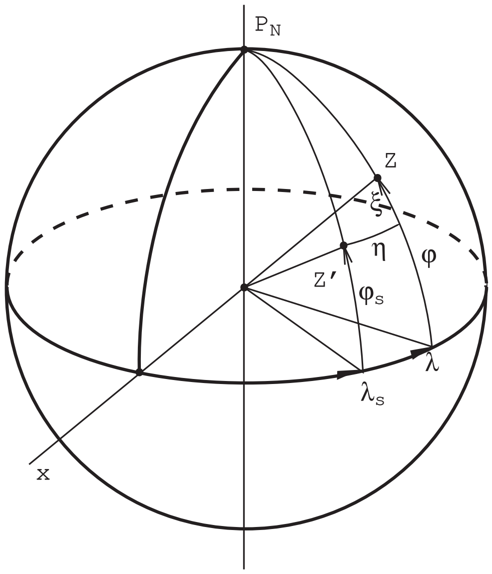

Рис. 3.6: Отличие астрономических координат от геодезических

φ_s и λ_s. Из рис. 3.6 находим, что уклонения отвесной линии равны

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi - \varphi_s, \\ \eta &= (\lambda - \lambda_s) \cos \varphi_s. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Астрономические координаты телескопа могут значительно отличаться (до $1'$) от его геодезических координат, которые требуется знать для вычисления геоцентрических координат. Величину и направление уклонения отвесной линии можно определить по измерениям силы тяжести в месте расположения телескопа. Уклонение отвесной линии влияет не только на широту, но и на долготу, то есть на определение местного времени (см. §...). Астрономические координаты меняются также вследствие движения полюса (§...). Геоцентрические координаты, как мы увидим ниже, входят в формулы для учета суточного параллакса.

Уравнения (3.16) и (3.19) связывают геодезические и астрономические координаты через уклонение отвеса и высоту геоида. Геодезические координаты φ_s, λ_s, h и геоцентрические φ_g, λ_g, $OP = a\rho$ связаны с декартовыми посредством формул:

$$\begin{aligned} x = a\rho \cos \varphi_g \cos \lambda_g &= (aC + h) \cos \varphi_s \cos \lambda_s, \\ y = a\rho \cos \varphi_g \sin \lambda_g &= (aC + h) \cos \varphi_s \sin \lambda_s, \\ z = a\rho \sin \varphi_g &= (aS + h) \sin \varphi_s, \end{aligned}$$

где a —экваториальный радиус, ρ — геоцентрический радиус (в единицах экваториального радиуса), C, S — вспомогательные функции, зависящие от сжатия f и геодезической широты φ_s:

$$C = [\cos^2 \varphi_s + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_s]^{-1/2}, \qquad S = (1-f)^2 C.$$

Обратное преобразование от x, y, z к φ_s, λ_s, h может быть выполнено по программе, приведенной в IERS Technical Note 21. Разность геодезической и геоцентрической широт $\varphi_s - \varphi_g$ не превышает $11'$ и максимальна при $\varphi_g = 45°$.

Поясним на примере необходимость введения трех систем координат: астрономической, геодезической и геоцентрической и преобразования координат вектора из одной системы в другую. Допустим, что на телескопе с горизонтальной установкой наблюдаются спутники Земли. Согласно определению, основной осью горизонтальной системы является ось, совпадающая с отвесной линией. Поэтому координаты при наблюдениях спутников определяются в топоцентрической экваториальной системе. Координаты телескопа выражены относительно принятого референц-эллипсоида (то есть заданы геодезические широта, долгота и высота телескопа над эллипсоидом). Так как спутники обращаются относительно центра масс Земли, который совпадает с точкой O (рис. 3.2) или геоцентром, то эфемериды спутников вычисляются в геоцентрической системе. Следовательно, топоцентрические координаты спутников сначала должны быть преобразованы в геодезическую систему, а затем в геоцентрическую систему. На практике вычисляется разность наблюденных и вычисленных координат спутников. Она служит основой для уточнения элементов орбиты спутников, параметров вращения Земли, ее гравитационного поля и т.д.

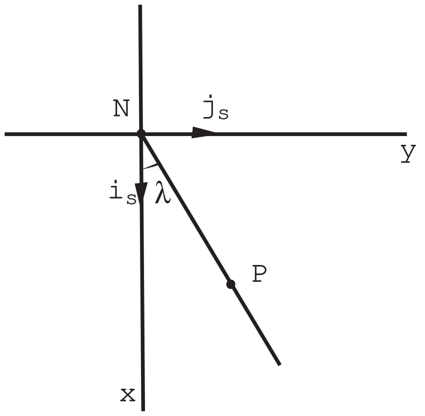

Рис. 3.5: Определение долготы

3.4 Барицентрическая система координат

Геоцентрическая система не является инерциальной. Как уже говорилось выше одной из главных задач сферической астрономии является преобразование координат в барицентрическую систему. Принятая МАС небесная система координат, определяемая точными положениями внегалактических радиоисточников, находится в покое относительно барицентра солнечной системы. На уровне современной точности наблюдений небесная система координат ICRS не имеет вращения и может считаться инерциальной. Поэтому главную задачу можно сформулировать в общем виде следующим образом. Необходимо найти положение небесного тела, задаваемого вектором $\mathbf{r}(t)$ относительно барицентра солнечной системы как функцию времени, которое измеряется в этой же системе. Так как наблюдения проводятся в геоцентрической системе, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно барицентра, то радиус-вектор небесного тела из-за лоренцева сокращения равен $\mathbf{r}'(t')$. Положение тела измеряется как функция земного времени t'.

Таким образом преобразование координат включает перенос осей, лоренцево сокращение радиус-векторов и времени, а также изменение скорости течения времени из-за изменения гравитационного потенциала.

Положение и скорость центра Земли относительно барицентра вычисляется на основе эфемерид. Как говорилось выше, в настоящее время широко используются эфемериды Лаборатории реактивного движения DE200 и DE403. Основное отличие между ними — это изменение масс планет, которое было определено по результатам пролетов космических аппаратов, учет масс некоторых астероидов. Положение и скорость центра Земли, задаваемые векторами $\mathbf{R}_E$ и $\mathbf{V}_E$ относительно барицентра равны:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_E &= \sum m_i \mathbf{R}_i / \sum m_i, \\ \mathbf{V}_E &= \sum m_i \mathbf{V}_i / \sum m_i, \end{aligned}$$

где m_i — масса i—го тела, и суммирование предполагается по всем телам солнечной системы. Изменение масс планет и астероидов приводит к изменению координат и скорости центра Земли относительно барицентра. С помощью РСДБ наблюдений космических аппаратов, радиолокации планет эфемериды DE403 согласованы с системой ICRS, тогда как оси системы, задаваемой эфемеридами DE200, повернуты на несколько мс дуги.

3.5 Земная система координат

Земная система координат, по определению, есть геоцентрическая система с центром в центре масс Земли, включая океаны и атмосферу. Земная система координат реализуется декартовыми координатами X, Y, Z ряда пунктов. Если необходимо получить географические координаты, то согласно стандартам Международной службы вращения Земли необходимо использовать референц-эллипсоид GRS80.

Точность наблюдений современными средствами настолько высока, что позволяет определить скорости пунктов, то есть изменение их координат из-за тектонических движений, в течение достаточно короткого промежутка времени (порядка года). Так как оси системы координат определяются координатами пунктов, то изменение последних может привести к повороту системы координат. Чтобы этого не было (непредсказуемое вращение системы координат может быть интерпретировано как изменение параметров вращения Земли), на скорости пунктов накладывается дополнительное условие: кора Земли не должна иметь вращения относительно земной системы координат. Математически это условие можно записать в виде:

$$\int_V \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \Omega \times \mathbf{r} \right|^2 dM = \min, \tag{3.20}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор элемента массы dM, Ω — вектор мгновенной угловой скорости вращения Земли. Интегрирование проводится по объему V деформируемой части

Рис. 3.7: Карта тектонических плит

Земли. Во вращающейся системе имеем:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \Omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости деформации. Поэтому уравнение (3.20) эквивалентно выражению:

$$\int_V |\mathbf{v}|^2 dM = \min.$$

Оси выбранной таким образом системы называются *осями Тиссерана.*

Вектор скорости отдельного пункта равен:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v},$$

где $\mathbf{V}_0$—вектор скорости, определяемый тектоническим движением плиты, на которой располагается пункт наблюдения, $\delta\mathbf{v}$—вектор остаточной скорости. Согласно кинематической модели движения плит NNR-NUVEL-1A, вся поверхность Земли разбита на 16 плит(рис. 3.7), каждая из которых вращается, но суммарное вращение равно нулю. Тогда преобразование координат $\mathbf{R}_i = (X, Y, Z)_i$ i-го пункта наблюдения выполняется по формуле:

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}_i^0 + \mathbf{V}_i^0(t - t_0) + \Delta\mathbf{R}_i(t), \tag{3.21}$$

где $\mathbf{R}_i^0, \mathbf{V}_i^0$—положение и скорость телескопа на момент наблюдения t_0, расположенного в i-м пункте. Поправки $\Delta\mathbf{R}_i(t)$ к координатам пункта вычисляются на основе моделей приливов в твердой Земле и океанических приливов, переменной атмосферной нагрузки на кору Земли, термического расширения телескопа и т.д. В декартовых координатах изменение координат i-го пункта, расположенного на j-ой плите (3.21), записывается в виде:

$$\begin{aligned}
X_i &= X_i^0 + (\omega_y^j Z_i^0 - \omega_z^j Y_i^0)(t - t_0) + \Delta X_i, \\
Y_i &= Y_i^0 + (\omega_z^j X_i^0 - \omega_x^j Z_i^0)(t - t_0) + \Delta Y_i, \\
Z_i &= Z_i^0 + (\omega_x^j Y_i^0 - \omega_y^j X_i^0)(t - t_0) + \Delta Z_i,
\end{aligned}$$

где $\omega_x^j, \omega_y^j, \omega_z^j$—компоненты угловой скорости j-ой плиты. Угловые скорости плит (модель NNR-NUVEL-1A) показана в таблице 3.2.

Таблица 3.2: Угловые скорости вращения плит (в 10^{-9} рад/год): модель NNR-NUVEL-1A

Плита	ω_x	ω_y	ω_z
Африканская	0.891	-3.099	3.922
Антарктическая	-0.821	-1.701	3.706
Арабская	6.685	-0.521	6.760
Австралийская	7.839	5.124	6.282
Карибская	-0.178	-3.385	1.581
Кокос	-9.705	-21.605	10.925
Евразийская	-0.981	-2.395	3.153
Индийская	6.670	0.040	6.790
Хуан де Фука	5.200	8.610	-5.820
Наска	-1.532	-8.577	9.609
Североамериканская	0.258	-3.599	-0.153
Тихоокеаническая	-1.510	4.840	-9.970
Филиппинская	10.090	-7.160	-9.670
Ривера	-9.390	-30.960	12.050
Скотиа	-0.410	-2.660	-1.270
Южноамериканская	-1.038	-1.515	-0.870