Оптимальное управление

Лекция 7

Классификация задач оптимального управления

В общем случае задачу управления нельзя ограничивать только достижением некоторого значения вектора состояния $x(t_1)$. Может оказаться, что в таком строгом достижении этого состояния и нет необходимости: важно, чтобы состояние динамической системы не вышло из некоторой области, определяющей многообразие допустимых значений вектора состояния. Естественно, каждому заданному закону управления соответствует закон изменения координат вектора состояния, то есть траектория “движения” управляемого объекта в фазовом пространстве. Зачастую процесс управления осуществляется с “ограниченными ресурсами”, то есть закон управления не может быть произвольным, а должен выбираться из некоторого множества Ω. Математически задача оптимального управления может быть сформулирована так. Дан управляемый динамический объект, вектор состояния которого подчиняется системе уравнений (7.1)

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \qquad u \in \Omega.$$

Информацию о текущем векторе состояния $x(t)$ мы получаем из наблюдений

$z = f(x)$.

Закон управления $u(t)$ определяется с помощью процедуры минимизации функционала вида

$Q(x, z, u; t)=\min$.

Этот функционал и определяет цель управления.

Пусть $x(t_0)$ дано. Задача формулируется так, что окрестность $x(t_1)$ достигается за некоторый фиксированный отрезок времени $T=t_1-t_0$. Тогда задачу относят к типу задач *с фиксированным временем и свободным концом траектории.*

Другая постановка. Конец траектории строго фиксирован, то есть $x(t_1)$ задано. Требуется найти такое управление u, которое сообщает динамическому объекту траекторию, минимизирующую функционал Q. Время перехода от начального состояния к конечному не фиксировано. Тогда это задача *с закрепленными концами фазовой траектории и свободным временем*.

В частном случае, взяв в качестве функционала время T, получим задачу на *максимальное быстродействие.*

Например, задача управления состоит в том, чтобы перевести космический аппарат с одной круговой орбиты на другую, тоже круговую, но более высокую. Такой перевод может быть осуществлен с помощью двух импульсов управления. Если высота новой орбиты задана, то время такого перевода не фиксировано. Имеем задачу со свободным временем и закрепленными концами.

Второй вариант – запуск искусственного спутника Луны. С круговой орбиты около Земли космический аппарат с помощью импульса переводится на орбиту, вытянутую в сторону Луны. По достижении космическим аппаратом окрестности Луны необходимо скорректировать орбиту и превратить ее в круговую около Луны. Эту коррекцию можно выполнить различными способами. Возникает задача: как сэкономить топливо? Здесь концы траектории не закреплены, а ведется поиск закона управления с минимальной энергией, решающего задачу достижения результата за ограниченное допустимое время.

Минимизация функционала – классическая задача вариационного исчисления. В разных прикладных задачах те или иные преимущества имеют:

а) метод динамического программирования Р. Беллмана,

б) метод, основанный на “принципе максимума” Л. Понтрягина.

Последний – более распространен в небесной механике и астродинамике.

3.3.2. Принцип максимума

Запишем систему дифференциальных уравнений – математическую модель управляемого динамического объекта (ограничимся автономными системами)

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, ..., x_n; u_1, ... u_l), \ u_r \in \Omega, \ \ j = \overline{1, n}, \ \ r = \overline{1, l}.$$

Компоненты вектора управления u_r нужно выбрать так, чтобы минимизировать функционал Q, который запишем в виде

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\xi), u(\xi) d\xi.$$

Введем $n+1$-ю компоненту вектора состояния x следующим образом

$$x_0(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(x(\xi), u(\xi)) d\xi,$$

так что

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f_0(x_1, ... x_n; u_1, ... u_l).$$

Очевидно, что начальные условия для компоненты x_0 имеют вид $x_0(t_0) = 0$, а цель управления $x_0(t_1) = Q$. Теперь расширенная система уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

где

$$x = (x_0, x_1, ... x_n)^T,$$

$$u = (u_1, u_2, ... u_l)^T$$

Пусть u^0 и x^0 – оптимальное управление и оптимальная траектория. Тогда для любого, мало отличающегося от оптимального процесса можно написать уравнение в вариациях

$$\delta\dot{x} = \frac{\partial f(x^0, u^0)}{\partial x} \delta x$$

и сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f(x^0, u^0)}{\partial x}\right)^T \psi, \ \ \psi = (\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n)^T.$$

Заметим, что $\frac{\partial f}{\partial x}$ – квадратная матрица.

Определим функцию Понтрягина (расширенную функцию Гамильтона)

$$\widetilde{H}(\psi, x, u) = \psi^T f(x, u).$$

Теперь нашу систему можно записать в канонической форме

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \psi_j}, \ \ j = 0, 1, ... n;$$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x_j},$$

ибо

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \psi_j} = \frac{\partial}{\partial \psi_j}\left(\sum_{k=0}^{n} \psi_k f_k\right) = f_j(x,u),$$

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x_j} = \sum_{0}^{n} \psi_k \frac{\partial f_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial \psi_j}{\partial t}.$$

Л.С. Понтрягиным доказано, что оптимальное управление $u = u^0$ достигается при максимуме функции $\widetilde{H}(\psi, x, u)$:

$$\widetilde{M}(\psi, x^0) = \sup_{u \in \Omega} \widetilde{H}(\psi, x, u).$$

Сформулируем теперь принцип максимума так, как он изложен в книге Я.Н. Ройтенберга "Автоматическое управление".

Пусть $u(t)$ $(t_0 \le t \le t)$ – такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $x(t)$, исходящая в момент t_0 из точки $x(t_0)$, проходит в момент t_1 через точку $x(t_1)$. Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, что

1^0 – для любого момента $t \in [t_0, t_1]$, являющегося точкой непрерывности управления $u(t)$, если канонические уравнения удовлетворены, функция $\widetilde{H}(\psi, x, u)$ переменной $u \in \Omega$ достигает в точке $u = u^0$ максимума;

2^0 – в конечный момент t_1 выполнены соотношения

$$\widetilde{M}(\psi(t_1), x(t_1)) = 0, \ \psi_0(t_1) \le 0.$$

Замечание: в любой момент t, если канонические уравнения удовлетворены.

Пример1. "Мягкая посадка".

В начале главы мы описали задачу "мягкой посадки" на поверхность планеты. Пренебрежем влиянием атмосферы (допустим, что это поверхность Луны), кроме того не будем учитывать зависимость силы тяжести от высоты. Тогда уравнения, связывающие высоту *h* над поверхностью, вертикальную скорость *v* и массу *m,* имеют вид

$$\dot{h} = v; \ \dot{v} = -g - \mu \frac{\dot{m}}{m},$$

где μ – скорость истечения газов относительно ракеты, $\mu\dot{m}$ – "тяга". Примем, что в начальный момент $t_0 = 0$ ракета имела высоту h_0 и скорость v_0. В момент посадки $t = t_1$ и высота, и скорость должны быть нулевыми: $h(t_1) = 0, \ v(t_1) = 0$. Определим оптимальной управление ракетой при условии наименьшего расхода топлива

$$Q = \int_0^{t_1} \dot{m} dt = \min .$$

Введем стандартные обозначения $x_1 = h, \ x_2 = v$ и, как это требуется в методе Понтрягина, дополнительную координату $\dot{x}_0 = \dot{m}(t)$, $x_0 = m(t)$, причем $x_0(0) = m_0, x_0(t_1) = m(t_1)$. Управлением является $u = -\dot{m}$ – величина, пропорциональная скорости изменения массы ракеты. Итак, уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -u, & f_0 &= -u, \\ \dot{x}_1 &= x_2, & f_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -g + \mu \frac{u}{x_0}, & f_2 &= \mu \frac{u}{x_0} - g. \end{aligned}$$

Построим функцию Понтрягина

$$\widetilde{H} = -\psi_0 u + \psi_1 x_2 + \psi_2\left(\mu\frac{u}{x_0} - g\right) = \psi_1 x_2 - \psi_2 g + \left(\psi_2\frac{\mu}{x_0} - \psi_0\right)u,$$

где ψ_0, ψ_1, ψ_2 – переменные сопряженной системы

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial x_0} = \mu\frac{u}{x_0^2}\psi_2,$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = -\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial x_2} = -\psi_1.$$

Таким образом, функция Понтрягина – линейная функция относительно u. Максимального значения она достигает лишь на границе области определения. Остается выяснить, как ведет себя множитель, стоящий перед u,

$$\alpha = \psi_2\frac{\mu}{x_0} - \psi_0.$$

Рассмотрим производную

$$\dot{\alpha} = \left(\psi_2\frac{\mu}{x_0}\right) = \dot{\psi}_2\frac{\mu}{x_0^2}(-u) - \mu\frac{u}{x_0^2}\psi_2 = -\psi_1\frac{\mu}{x_0}.$$

Поскольку $\dot{\alpha}$ в нуль не обращается ($\psi_1 = \text{const}$), этот множитель изменяется монотонно, не имеет ни максимума, ни минимума.

Как правило, режим работы двигателя следующий: если он включен, то тяга постоянна и равна u_0, если выключен – тяга равна нулю. Поэтому $\widetilde{H}$ имеет максимальное значение при $\psi_1 < 0,\ \dot{\alpha} > 0$

$$u = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \xi_0, \\ u_0, & \xi_0 \le t < t_1. \end{cases}$$

Задача оптимального управления мягкой посадкой, таким образом, сводится к определению момента включения двигателя ξ_0 и момента посадки t_1.

Чтобы эти моменты определить, проинтегрируем дифференциальные уравнения.
При $0 \le t < \xi_0$ имеем.

$$u = 0,\ x_2(t) = \int_0^t -g d\xi + x_2(0),\ x_2(0) = v_0,\ x_2(t) = v_0 - gt,$$

$$x_1(t) = \int_0^t x_2(\xi)d\xi + x_1(0) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

На следующем отрезке времени $\xi_0 \le t \le t_1$ получим

$$u = u_0,\ x_0(t) = -\int_{\xi_0}^{t} u_0 d\xi + x_0\xi_0 = -u_0(t-\xi_0) + m_0,$$

$$x_2(t) = \int_{\xi_0}^{t} \left(-g + \mu \frac{u_0}{x_0(\xi)} \right) d\xi + x_2(\xi_0) = x_2(\xi_0) - g(t-\xi_0) + \mu \int_{\xi_0}^{t} \frac{u_0 d\xi}{m_0 - u_0(\xi - \xi_0)} =$$

$$x_0(\xi_0) - g(t-\xi_0) + \mu \int_{\xi_0}^{t} \frac{u_0 d\xi}{m_0 - u_0(\xi-\xi_0)} = x_2(\xi_0) - g(t-\xi_0) - \mu \ln\left(1 - \frac{u_0(t-\xi_0)}{m_0}\right),$$

$$x_1(t) = x_1(\xi_0) + \int_{\xi_0}^{t} x_2(\xi) d\xi = x_1(\xi_0) + x_2(\xi_0)(t-\xi_0) - \frac{g}{2}(t-\xi_0)^2 - \mu \int_{\xi_0}^{t} \ln\left(1 - \frac{u_0}{m_0}(\xi - \xi_0)\right) d\xi.$$

Возьмем интеграл, для чего воспользуемся равенством

$$\int_0^x \ln(a - bx)dx = -\frac{1}{b}(a - bx)(\ln(a - bx) - 1).$$

Отсюда

$$x_1(t) = x_1(\xi_0) + x_2(\xi_0)(t-\xi_0) - \frac{g}{2}(t-\xi_0)^2 +$$

$$\mu \frac{m_0}{u_0}\left[\left(1 - \frac{u_0(t-\xi_0)}{m_0}\right)\ln\left(1 - \frac{u_0(t-\xi_0)}{m_0}\right) + \frac{u_0}{m_0}(t-\xi_0)\right].$$

Краевое условие $x_1(t_1) = 0,\ x_2(t_1) = 0$ приводит к следующим трансцендентным уравнениям, определяющим ξ_0 и t_1:

$$x_1(\xi_0) + x_2(\xi_0)\xi_1 - g\frac{\xi_1^2}{2} + \mu \frac{m_0}{u_0}\left[\left(1 - \frac{u_0\xi_1}{m_0}\right)\ln\left(1 - \frac{u_0\xi_1}{m_0}\right) + \frac{u_1\xi_1}{m_0}\right] = 0,$$

$$x_2(\xi_0) - g\xi_1 - \mu \ln\left(1 - \frac{u_0\xi_1}{m_0}\right) = 0,$$

где $x_2(\xi_0) = v_0 - g\xi_0,\ x_1(\xi_0) = h_0 + v_0\xi_0 - g\frac{\xi_0^2}{2},\ \xi_1 = t_1 - \xi_0.$

Итак, чтобы совершить мягкую посадку, необходимо на космическом корабле иметь измерительные устройства, дающие информацию о высоте, скорости и массе. Вычислительное устройство по заданным параметрам g, μ и u_0 находит момент включения двигателя.

Пример 2. Ориентация космического аппарата

Рассмотрим задачу на управление ориентацией космического аппарата (КА). Для упрощения мы будем рассматривать лишь плоский вариант: поворот КА производится лишь в одной плоскости за счёт вращения маховика установленного внутри КА. На вал маховика подаётся вращательный момент M , который сообщает ему угловое ускорение $\ddot{\theta}$. Таким образом $J_M\ddot{\theta} = M$, где J_M – момент инерции маховика. Согласно закону сохранения кинетического момента КА

$\frac{d}{dt}\left(J_M\dot{\theta} + J_0\dot{\varphi}\right) = 0,$ где J_0 –момент инерции КА, φ - угол ориентации . Из последнего равенства следует, что

$$J_M\ddot{\theta} = -J_0\ddot{\varphi} = M$$

Величину, пропорциональную вращательному моменту M , взятую с обратным знаком , примем за сигнал управления u

$$u = -\frac{M}{J_0}$$

Введём обозначения для составляющих вектора состояния

$$x_1(t) = \varphi$$
$$x_2(t) = \dot{\varphi},$$

следовательно
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t).$$

Согласно теории Л.С. Понтрягина, введём третью составляющую вектора состояния

$$\dot{x}_0(t) = u^2(t).$$

Очевидно, что $f_0(t) = u^2(t),\ f_1(t) = x_2(t),\ f_2(t) = u(t).$ Функция Понтрягина имеет вид

$$\widetilde{\mathrm{H}} = \psi_0 u^2(t) + \psi_1 x_2(t) + \psi_2 u(t), \quad \psi_0 < 0.$$

Верхняя граница этой функции достигается в точке, где $\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial u} = 0,$ то есть $u = -\frac{\psi_2}{2\psi_0}.$ Функции $\psi_0(t),\ \psi_1(t),\ \psi_2(t)$ определим из канонических уравнений

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x_0} = 0, \quad \psi_0 = const$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x_1} = 0, \quad \psi_1 = const$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x_2} = \psi_1.$$

$$\psi_2(t) = -\psi_1(t - \mathrm{t}_0),$$

Следовательно $u(t) = \frac{\psi_1}{2\psi_0}(t - t_0).$ Видим, что управление космическим аппаратом есть линейная функция времени вида $u(t)=-at+b$.

Теперь обратимся к нашим исходным уравнениям и проинтегрируем их

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -at + b,$$
$$x_2(t) = -\frac{at^2}{2} + bt + x_2(0),$$
$$x_1(t) = -\frac{at^3}{6} + \frac{bt^2}{2} + x_2(0)t + x_1(0).$$

Допустим, что в начальный момент $\varphi = 0,\ \dot{\varphi} = 0$, а в конечный момент $t = t_1$

$x_1(t_1) = \varphi_0,\ \ x_2(t_1) = 0.$ Для определения постоянных a и b имеем два уравнения

$$\frac{at_1^2}{2} - bt_1 = 0,$$

$$-\frac{at_1^3}{6} + b\frac{t_1^2}{2} = \varphi_0.$$

Следовательно $a = \frac{12\varphi_0}{t_1^3}$, $b = \frac{6\varphi_0}{t_1^2}$. Здесь b – удельный вращательный момент на валу маховика в начальный момент, а постоянная a равна начальной скорости изменения угла ориентировки КА .