Управляемость линейных стационарных систем

Лекция 6

Непрерывные стационарные системы

Рассмотрим сначала простейшее дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t) = gx(t) + fu(t). \tag{6.1}$$

Решением его будет функция

$$x(t) = e^{g(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{g(t-\xi)} fu(\xi)d\xi, \tag{6.2}$$

в чём нетрудно убедиться, продифференцировав это выражение по времени

$$\dot{x}(t) = ge^{g(t-t_0)}x(t_0) + e^{g(t-t)}fu(t) + \int_{t_0}^{t} ge^{g(t-\xi)} fu(\xi)d\xi =$$

$$= g\left[e^{g(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{g(t-\xi)} fu(\xi)d\xi \right] + fu(t) = gx(t) + fu(t).$$

Решение векторно-матричного уравнения

$$\dot{x}(t) = Gx(t) + Fu(t) \tag{6.3}$$

запишем формально в такой же форме

$$x(t) = e^{G(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{G(t-\xi)} Fu(\xi)d\xi \tag{6.4}$$

где $e^{G(t-t_0)}$ - экспоненциальная функция матричного аргумента. Таким образом, в случае стационарной системы переходную матрицу можно записать в виде $\Phi(t,t_0) = \exp(G(t-t_0))$.

В теории матриц доказано, что матричную экспоненту можно представить в виде степенного полинома от матрицы дифференциального уравнения G: $e^{Gt} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(t) G^k$, где $\alpha_k(t)$ – функции, содержащие члены вида $t^j \exp(\lambda_k t)$, где λ_k – , собственные числа матрицы G, а степени j зависят от кратности корней характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - G) = 0$$

Параметр m – степень так называемого минимального многочлена $\psi(\lambda)$, который определяется следующим образом: $\psi(\lambda) = \Delta(\lambda) / d(\lambda)$, где $d(\lambda)$ - наибольший общий делитель всех миноров матрицы $F(\lambda) = \lambda E - G$. Миноры матрицы F^T образуют присоединённую матрицу B, причём $F(\lambda)B(\lambda) = \Delta(\lambda)E$.

Поскольку $d(\lambda)$ – наибольший общий делитель присоединённой матрицы, её можно записать так $B(\lambda)=d(\lambda)C(\lambda)$. Очевидно, что, $m \le n$, где n – степень характеристического многочлена, равная размерности вектора состояния.

Не углубляясь в теорию матриц(её можно найти в специальной литературе), отметим лишь то, что матричная экспонента может быть представлена линейной комбинацией степеней матрицы G.

Умножим левую часть и правую часть формулы (6.4) на $e^{-G(t-t_0)}$, получим

$$e^{-G(t-t_0)}x(t)-x(t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{-G(\xi-t_0)}Fu(\xi)d\xi .$$

Не нарушая общности, примем за начало отсчёта времени точку $t_0=0,$ тогда

$$\int_0^t e^{-G\xi}Fu(\xi)d\xi=e^{-Gt}x(t)-x(0) \qquad (6.5)$$

Мы получили интегральное уравнение для функции управления, если задан вектор состояния (фазовая траектория). Поскольку целью управления является достижение заданных значений вектора состояния в момент t_1, то правую часть интегрального уравнения можно считать известной лишь для начального и конечного момента. Таким образом, проблема управляемости свелась к проблеме существования решения интегрального уравнения (6.5).

Введём обозначение для вектора, образующего правую часть уравнения (6.5)

$$L=e^{-Gt_1}x(t_1)-x(0).$$

Выразим матричную экспоненту через степени матрицы *G:*

$$e^{-G\xi}=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k(-\xi)G^k ,$$

получим

$$\int_0^{t_1}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k(-\xi)G^k\right)Fu(\xi)d\xi=L .$$

Поскольку $\alpha_k(-\xi)-$ скалярная функция, её можно перенести на конец подынтегрального выражения

$$\sum_{k=0}^{m-1}G^kF\int_0^{t_1}u(\xi)\alpha_k(-\xi)d\xi=L \quad . \qquad (6.6)$$

Распишем приведённую подробнее:

$$F\int_0^{t_1}u(\xi)\alpha_0(-\xi)d\xi+GF\int_0^{t_1}u(\xi)\alpha_1(-\xi)d\xi+\ldots+G^{m-1}F\int_0^{t_1}u(\xi)\alpha_{m-1}(-\xi)d\xi=L$$

Каждое из слагаемых приведённой формулы является n-мерным вектором. Введём матрицы-столбцы Λ и W следующим образом

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\int_0^{t_1}u(\xi)\alpha_0(-\xi)d\xi\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \int_0^{t_1}u(\xi)\alpha_{m-1}(-\xi)d\xi\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{W}=\left(F,GF,G^2F,G^3F,\ldots G^{m-1}F\right)$$

и перепишем уравнение (6.6) в виде

$$\mathrm{W}\Lambda=\mathrm{L} \qquad (6.6а)$$

Напомним, что u – вектор, размерности l , F – матрица, размера (nxl), поэтому Λ - блочная (коагулированная) матрица (mx1). С учётом размерности вектора u,
получим размерность матрицы Λ равную (mlx1). Блочная матрица W имеет размерность (1xm), а с учётом размерности элементов - (nxml).

Распишем полученное матричное уравнение по строкам. Поскольку

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} W_{11} \ldots W_{1q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_{n1} \ldots W_{nq} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_q \end{pmatrix}, \text{где} \quad q = ml, \text{ то}$$

$$\begin{cases} W_{11}\Lambda_1 + W_{12}\Lambda_2 + \ldots + W_{1q}\Lambda_q = e^{-Gt_1} x_1(t_1) - x_1(0) \\ W_{21}\Lambda_1 + W_{22}\Lambda_2 + \ldots + W_{2q}\Lambda_q = e^{-Gt_1} x_2(t_1) - x_2(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_{n1}\Lambda_1 + W_{n2}\Lambda_2 + \ldots W_{nq}\Lambda_q = e^{-Gt_1} x_n(t_1) - x_n(0) \end{cases} \tag{6.7}$$

Пусть $q \geq n$. Введём вектор-столбец коэффициентов приведённой системы уравнений $W_k = (W_{1k}, W_{2k}, \ldots W_{nk})^T$ и n-мерный вектор, образующий правую часть в системе (6.7):

$$\tilde{x}(t_1) = \begin{pmatrix} e^{-Gt_1} x_1(t_1) - x_1(0) \\ e^{-Gt_1} x_2(t_1) - x_2(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{-Gt_1} x_n(t_1) - x_n(0) \end{pmatrix},$$

тогда систему уравнений (6.7) можно записать так $\tilde{x}(t_1) = \sum_{k=1}^{q} W_k \Lambda_k$, причём $q \geq n.$ Таким образом, вектор $\tilde{x}(t_1)$ представлен в виде линейной комбинации составляющих другого, q- мерного вектора Λ. Для того, чтобы таким образом представить любой n- мерный вектор, достаточно иметь n независимых векторов W_k. А это означает, что ранг матрицы

$$\mathrm{W} = (W_1, W_2, \ldots W_q) = (F, GF, G^2 F, \ldots G^{m-1} F)$$

равен n . Итак *условие управляемости для линейных стационарных систем*:

$$rang\left(F, GF, G^2 F, \ldots G^{m-1} F\right) = n \tag{6.8}$$

Заметим, что при скалярном управлении ($l=1$) управляемость возможна лишь при $m=n$. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 1

Является ли управляемой система $\begin{matrix} \dot{x}_1 = ax_1 + u, \\ \dot{x}_2 = bx_2. \end{matrix}$? В данном случае имеем

$G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Матрица управляемости имеет вид $\mathrm{W} = (F, GF) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг этой матрицы меньше двух (он равен единице), поэтому данная система неуправляема.

Пример 2

Каким условиям должны подчиняться постоянные a, b, c, чтобы динамическая система была управляемой, если

$\begin{matrix} \dot{x}_1 = ax_1 + u, \\ \dot{x}_2 = bx_2 + cx_1, \end{matrix}$? Имеем $G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $\det W = c \neq 0$.

Вывод: ранг матрицы управляемости равен 2, но поскольку управление скалярное, для управляемости необходимо чтобы степень минимального многочлена тоже была равна двум. Проверим это.

Определим характеристический многочлен: det(λE-G)= $(\lambda - a)(\lambda - b)$. Определим присоединённую матрицу:

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - b & c \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda - b & 0 \\ c & \lambda - a \end{pmatrix}.$$

Наибольший общий делитель этой матрицы равен 1, поэтому минимальный многочлен выглядит так: $\psi(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)$. Следовательно, степень минимального многочлена равна двум. *Система управляема.*

Определим управление $u(t)$ для частного случая, когда a=b=0, c=1. Тогда, как нетрудно проверить, система остаётся управляемой. Дифференциальные уравнения для этой системы упрощаются:

$$\dot{x}_1 = u(t),$$
$$\dot{x}_2 = x_1(t).$$

Определим управление, переводящее систему из начального состояния $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0$ в состояние $x_1(t_1) = l_1,\ \ x_2(t_1) = l_2$. Очевидно, что

$$x_1(t_1) = \int_0^{t_1} u(\xi)d\xi = l_1,$$

$$x_2(t_1) = \int_0^{t_1}\int_0^{\xi} u(\eta)d\eta d\xi = l_2.$$

Нетрудно видеть, что задача не имеет однозначного решения. Если принять, например,$u(t)$ = const, получим $x_1(t_1) = ut_1 = l_1,\ x_2(t_1) = \frac{1}{2}ut_1^2 = l_2$. Таким образом, мы получили два уравнения, однозначно определяющие управление u и время управления t_1: $u = l_1^2 / 2l_2^2,\ t_1 = 2l_2 / l_1$.

Предлагаем самостоятельно показать, существует ли линейное (двухпараметрическое) управление для перевода вектора состояния из начального в состояние $x(t_1)$ для произвольного момента времени t_1.

Пример 3

Определить, обладает ли свойством управляемости система, подчиняющаяся матричному дифференциальному уравнению $\dot{x} = Gx + Fu$, где матрицы G и F имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Определим минимальный многочлен

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - G) = \begin{pmatrix} \lambda + 3 & -3 & 2 \\ -1 & \lambda + 5 & -2 \\ -1 & 3 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 2)^2(\lambda + 4).$$

Присоединённая матрица имеет вид

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}(\lambda+2)(\lambda+3) & 3(\lambda+2) & -2(\lambda+2)\\ \lambda+2 & (\lambda+2)(\lambda+1) & 2(\lambda+2)\\ \lambda+2 & -3(\lambda+2) & (\lambda+2)(\lambda+6)\end{pmatrix}$$

Общий делитель присоединённой матрицы есть двучлен (λ+2), поэтому минимальный многочлен имеет вид

$$\psi(\lambda)=\frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}=\frac{(\lambda+2)^2(\lambda+4)}{\lambda+2}=(\lambda+2)(\lambda+4).$$

Таким образом, степень минимального многочлена равна 2 . Имеем матрицу управляемости: $\mathrm{W}=(F, GF)$, то есть

$$\mathrm{W}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы равен трём. Так что система *управляема.* Однако, в случае, когда хотя бы один из независимых сигналов управления равен нулю, система неуправляема.

Управляемость стационарных линейных систем

Вектор состояния дискретной системы, удовлетворяющей уравнению

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k),$$

определяется формулой

$$x(k)=\Phi(k,k_0)x(k_0)+\sum_{j=0}^{k-1}\Phi(k, j+1)Bu(j),$$

где переходная матрица определяется степенью матрицы A :

$$\Phi(k,k_0)=A^{k-k_0}$$

не нарушая общности, примем k_0 =0. Тогда в "момент" k=k_1 ,будем иметь

Для определения *u(j)* мы имеем систему алгебраических уравнений. Существование

$$\sum_{j=0}^{k_1-1}A^{k_1-j-1}Bu(j)=x(k_1)-A^{k_1}x(0).$$

$$\sum_{s=0}^{k_1-1}A^{s}Bu(k_1-s-1)=x(k_1)-A^{k_1}x(0)$$

решения этой системы и определяет ее управляемость.

Заменим параметр *j* на *s* следующим образом: $j=k_1-s-1$. Теперь

Согласно теореме Гамтильтона-Кэли, любую степень матрицы можно выразить в

$$A^s=\sum_{r=0}^{m-1}\alpha_r(s)A^r,$$

виде линейной комбинации степеней вплоть до степени минимального полинома минус единица, то есть

где $\alpha_r(s)$ скалярная функция. Следовательно

$$\sum_{s=0}^{k_1-1}A^sBu(k_1-s-1)=\sum_{s=0}^{k_1-1}\left(\sum_{r=0}^{m-1}\alpha_r(s)A^r\right)Bu(k_1-s-1)=\sum_{r=0}^{m-1}A^rB\sum_{s=0}^{k_1-1}\alpha_r(s)u(k_1-s-1)=$$

$$=x(k_1)-\Phi(k_1,0)x(0)$$

Пусть

$$\Lambda_r = \sum_{s=0}^{k_1-1} \alpha_r(s) u(k_1 - s - 1), \qquad r = 0, 1,\ 2,\ \dots m-1$$

Тогда

$$\sum_{r=0}^{m-1} A^r B \Lambda_r = x(k_1) - \Phi(k_1, 0) x(0)$$

Для существования решения относительно вектора Λ необходимо, чтобы матрица

$$W = (B, AB, A^2B, \dots, A^{m-1}B)$$

имела ранг, равный размерности вектора состояния. Таким образом, критерии управляемости непрерывной и дискретной систем совпадают.