Управление динамическими системами

Лекция 5

Математическая модель управляемого динамического объекта

В задачах астродинамики и космонавтики управляемым динамическим объектом является космический аппарат (спутник, космический телескоп, межпланетная станция и т.п.), который имеет все характеристики твёрдого тела (масса, момент инерции …). Движение может быть записано в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений. Эти уравнения включают в себя компоненты вектора состояния и вешние силы (гравитационные, силы трения, силы светового давления), которые являются функциями компонент вектора состояния. Кроме того, уравнения включают в себя и активные силы (тягу), которые мы называем управлениями. В общем виде, уравнения можно записать так

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \dots x_n; u_1, u_2, \dots u_l) \quad j = \overline{1, n} \ . \tag{5.1}$$

Используя векторно-матричную запись, эту систему можно записать короче

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

(5.2)

Как мы уже договорились, в дальнейшем, векторно-матричные величины и функции мы не будем выделять жирным шрифтом.

В общем виде получить решение системы нелинейных уравнений, а значит и отклик управляемого динамического объекта на действия сил управления невозможно. На практике, если такое решение необходимо, прибегают к приёмам численного интегрирования. Однако, в ряде важных частных случаев эту систему можно упростить, и получить все необходимые сведения о требуемом законе управления и об управляемости системы.

Импульсное управление

В астродинамических задачах построения траекторий межпланетных перелётов чаще всего пользуются импульсным воздействием на летательный аппарат. В точке космического пространства, где необходимо изменить величину скорости и/или направления полёта, на короткое время включается двигатель. Продолжительностью работы двигателя можно регулировать степень воздействия на управляемый объект. Поскольку время работы двигателя достаточно мало по сравнению с отрезками времени, за которые изменения координат можно считать существенным, можно говорить о бесконечно малой продолжительности с бесконечно большой амплитудой управляющего воздействия. Другими словами, сигнал управления можно считать δ-функцией. Пусть $u(t) = u(k)\delta(t - t_k)$ Момент t_k будем включать в область определения δ-функции, так что $\int\limits_{t_K}^{t_K + \Delta t} \varphi(\xi)\delta(\xi - t_k)d\xi = \varphi(t_k)$.

Предположим, что управление линейной системой осуществляется последовательными импульсами в моменты $t_0, t_1, t_2, \dots t_k, \dots$ Построим решение системы – фазовую траекторию, составленную из отдельных отрезков

$$t_0 < t < t_1 \quad x(t) = \Phi(t, t_0)x(0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \xi)F(\xi)\, u(0)\delta(\xi - t_0)d\xi ,$$

$$t_1 < t < t_2 \quad x(t) = \Phi(t, t_1)x(1) + \int\limits_{t_1}^{t} \Phi(t, \xi)F(\xi)u(1)\delta(\xi - t_1)d\xi$$, и вообще

$$t_k < t < t_{k+1} \quad x(t) = \Phi(t,t_k)x(k) + \int\limits_{t_k}^{t} \Phi(t,\xi)F(\xi)u(k)\delta(\xi - t_k)d\xi . \qquad (5.3)$$

Очевидно, что $\int\limits_{t_j}^{t} \Phi(t,\xi)F(\xi)u(j)\delta(\xi - t_j)d\xi = \Phi(t,t_j)F(t_j)u(j),$ поэтому

$$x(t) = \begin{cases} \Phi(t,t_0)[x(0) + F(t_0)u(0)], \; t_0 < t < t_1, \\ \Phi(t,t_1)[x(1) + F(t_1)u(1)], \quad t_1 < t < t_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi(t,t_k)[x(k) + F(t_k)u(k)], t_k < t < t_{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

(5.4)

Если нас интересуют значения вектора состояния только в моменты действия импульса на управляемый объект, то полагая

$$x(t_k) = x(k),$$

$$\Phi(t_{k+1},t_k) = A(k),$$

$$\Phi(t_{k+1},t_k)F(t_k) = B(k),$$

получим уравнение дискретной системы

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

(5.5)

Дискретизация непрерывного управления

Непрерывную систему можно представить дискретной путём квантования непрерывного сигнала управления по времени. Полагая *u(t)* на отрезке (t_k, t_{k+1}) постоянной величиной, равной *u(k)* получим

$$x(t) = \Phi(t,t_k)x(k) + \int\limits_{t_K}^{t} \Phi(t,\xi)F(\xi)u(k)d\xi$$

(5.6)

Обозначив $B(k) = \int\limits_{t_K}^{t_{K+1}} \Phi(t,\xi)F(\xi)d\xi,$ будем иметь

(5.7)

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

Полученное уравнение по форме совпадает с (5.5) , но входная матрица *B(к)* в последнем уравнении имеет другой смысл. В данном представлении наименее обоснованным является выбор значения *u(k)* на каждом элементарном отрезке времени. Потеря точности, которая неизбежно имеет место при замене непрерывно изменяющего сигнала на постоянную величину, чем меньше шаг разбиения фазовой траектории на элементарные отрезки.

Вернёмся к исходному уравнению системы с непрерывным временем:

$$\dot{x}(t) = G(t)x(t) + F(t)u(t)$$

Пусть на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ мы можем заменить производную отношением элементарных приращений. Тогда для малых значений $T = t_{k+1} - t_k$ будем иметь $x(t_{k+1}) - x(t_k) \approx T[G(t_k)x(t_k) + F(t_k)u(t_k)]$. Полученное уравнение есть уравнение дискретной системы. Однако, чтобы привести его к принятой в нашем изложении форме, нужно обозначить

$$A(k) = E + TG(t_k),$$
$$B(k) = TF(t_k)$$

(5.8)

Управление дискретной системой

Рассмотрим дискретную систему

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k),$$

решение которой определяется, как мы видели, выражением

$$x(k) = \Phi(k,k_0)x(k_0) + \sum_{j=0}^{k-1}\Phi(k,j+1)B(j)u(j).$$

Выберем для вектора состояния систему отсчёта таким образом, чтобы выполнялось равенство $x(k_0) = 0.$ В принципе, это требование можно и не выдвигать, если от вектора $x(k)$ перейти к вектору $\bar{x}(k) = x(k) - \Phi(k,k_0)x(k_0)$. Таким образом не в ущерб строгости последовательность значений вектора состояния можно определить формулой

$$x(k) = \sum_{j=0}^{k-1}\Phi(k,j+1)B(j)u(j).$$

(5.9)

Представим себе, что на *N*-ом шаге достигается цель управления: вектор состояния принимает заданное значение

$$x(N) = \sum_{j=0}^{N-1}\Phi(N,j+1)B(j)u(j).$$

(5.10)

В полученной системе уравнений неизвестными являются только члены последовательности вектора управления. Если размерность вектора состояния равна n, а размерность вектора управления – l, то число уравнений в этой системе равно n, а число неизвестных - Nl. Если решение этой системы существует, то должно выполняться условие $n \le Nl$, то есть число неизвестных должно быть не меньше числа уравнений. В противном случае система может быть несовместной. Если выполняется строгое равенство числа уравнений и неизвестных, то решение может быть единственным. При $n<Nl$ существует бесчисленное множество решений, переводящих систему из состояния $x(0)$=0 в состояние $x(N)$ за N шагов.

Пример 1

Дана дискретная система

$$x_1(k+1) = x_2(k),$$
$$x_2(k+1) = -x_1(k) + x_3(k),$$
$$x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + u(k).$$

Начальные условия: $x_1(0) = 0,\ \ x_2(0) = 1,\ \ x_3(0) = 2.$ Требуется выбрать управления таким образом, чтобы за N шагов перевести систему из начального состояния заданную точку на фазовой траектории: $x_1(N) = 2, x_2(N) = 1, x_3(N) = 0.$

Для однозначного решения требуется 3 шага, так как имеем дело с тремя уравнениями и одной компонентой управления : $n=3,\ l=1$. Определим матрицы A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Вычислим переходные матрицы:

$\Phi(3,3)=E,\ \Phi(3,2)=A,\ \Phi(3,1)=A^2,\ \Phi(3,0)=A^3$ Выполним необходимые вычисления

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&2&2\end{pmatrix},\qquad A^3=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\0&2&4\end{pmatrix}$$

Следовательно, для определения последовательности $u(0),u(1),u(2),$ имеем систему из трех уравнений, которая в матричной форме выглядит так

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u(1)+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u(2)$$ После элементарных выкладок, получим $u(0)=0,\ \ u(1)=-3,\ \ u(2)=-7$

Число шагов в задаче управления может быть любым, но не меньше, чем *n/l*. При *N>n/l* возникает проблема неоднозначности решения задачи управления. Эта проблема может быть преодолена , если будем искать решение с дополнительным условием, например, с минимальной нормой. По сути это означает , что энергия управления будет минимальной.

Критерии управляемости

Управляемость линейной нестационарной системы

Линейная нестационарная система в непрерывном времени подчиняется уравнению: $\dot{x}(t)=G(t)x(t)+F(t)u(t),$ а дискретная – уравнению в конечных разностях: $x(k+1)=A(k)x(k)+B(k)u(k).$ Мы видели, что второй тип динамической системы можно рассматривать как частный случай первого, поэтому в дальнейшем мы чаще всего будем обращаться к системе с непрерывным временем.

Динамическая система называется управляемой в момент $t_0\,(k_0)$, *если найдётся такое значение* $t_1>t_0(k_1>k_0)$ *и такая функция u(t)* (*последовательность {u(k)}*) *на интервале* $[t_0,t_1]([k_0,k_1])$, *которая переводит систему из состояния* $x(t_0)(x(k_0))$ *в любое заданное состояние* $x(t_1)(x(k_1))$.

Система, управляемая для любого момента времени в указанном интервале, называется *вполне управляемой*.

Рассмотрим линейную систему, решение которой имеет вид

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\xi)F(\xi)u(\xi)d\xi$$

(5.11)

Если задано управление *u*(*t*), то имеем дело с прямой задачей динамики, которая сводится к интегрированию дифференциального уравнения. В задаче управления, напротив, нам известны начальное и конечное значения вектора состояния, а определить требуется действующую на объект силу. Поиск управления является обратной задачей динамики.

Интуитивно легко понять, что поскольку нам заданы только начальная и конечная точки фазовой траектории, то, возможно, существуют множество траекторий, соединяющих эти точки, а следовательно и множество функций *u*(*t*). Таким образом, интегральное уравнение для *u*(*t*):

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,\xi)F(\xi)u(\xi)d\xi=x(t_1)-\Phi(t_1,t_0)x(t_0)$$

(5.12)

имеет множество решений. Попробуем определить такой закон управления, который соответствовал бы минимальной затрате энергии.

Вектор *u*(*t*) имеет *l* компонент:

$u(t) = (u_1(t), \quad u_2(t), \ldots \quad u_{l-1}(t), \quad u_l(t))^T$. Энергией управления называется интеграл от суммы квадратов составляющих вектора управления

$$\mathrm{E} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^{l} u_s{}^2(\xi) d\xi = \int_{t_0}^{t_1} u^T(\xi) u(\xi) d\xi.$$

(5.13)

Варьируя составляющие вектора управления, определим минимум функционала Е при условии, что управление строго подчиняется интегральному уравнению (5.12). Другими словами, решим задачу на условный экстремум.

Образуем функционал

$$J = \mathrm{E} + 2\lambda^T \left(\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\xi) F(\xi) u(\xi) d\xi - [x(t_1) - \Phi(t_1,t_0) x(t_0)] \right),$$ где λ векторный множитель Лагранжа. Теперь, чтобы определить *u*(*t*), нам нужно продифференцировать скалярную величину *J* по вектору *u*.

Напомним основные правила дифференцирования скалярной величины по вектору. Рассмотри величину *y*, которая представляет собой скалярное произведение вектора *a* на вектор *x* :

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{a}$$

Продифференцируем ***y*** по каждой составляющей вектора ***x***, а результат расположим в виде столбца (форма записи вектора)

$$\frac{dy}{d\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy}{dx_1} \\ \vdots \\ \dfrac{dy}{dx_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}$$

Итак, если дифференцируемая переменная стоит справа от множителя (матрицы-строки), то эта матрица транспонируется, если слева - записывается без изменений.

Следуя этому правилу, получим

$$\frac{dJ}{du} = \frac{d\mathrm{E}}{du} + 2\int_{t_0}^{t_1} F^T(\xi) \Phi^T(t_1,\xi) \lambda \, d\xi = 0$$

$$\frac{d\mathrm{E}}{du} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{du}\left(u^T(\xi) u(\xi) \right) d\xi = 2\int_{t_0}^{t_1} u(\xi) d\xi$$

Следовательно

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(u(\xi) + F^T(\xi) \Phi^T(t_1,\xi) \lambda \right) d\xi = 0$$

Равенство нулю приведённого интеграла обязательно будет иметь место, если подынтегральное выражение тождественно равно нулю (условие достаточное, но не необходимое). При этом

$$u(t) = -F^T(t)\Phi^T(t_1, t)\lambda \quad .$$

(5.14)

Остаётся определить множитель Лагранжа. Поставляя полученное выражение в уравнение (5.12) , будем иметь

$$-\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \xi) F(\xi) F^T(\xi) \Phi^T(\xi) d\xi \ \lambda = x(t_1) - \Phi(t_1, t_0) x(t_0)$$

Введём обозначение

$$W(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \xi) F(\xi) F^T(\xi) \Phi^T(\xi) d\xi$$

(5.15)

Нетрудно убедиться, что эта матрица квадратная размера (nxn) и симметрическая. Если её определитель не равен нулю, то она неособая. В таком случае она обращается, что позволяет определить множитель Лагранжа

$$\lambda = -W^{-1}(t_1, t_0)\left[x(t_1) - \Phi(t_1, t_0) x(t_0)\right]$$

Следовательно, управление, соответствующее минимальной энергии согласно (5.14), имеет вид

$$u(t) = F^T(t)\Phi^T(t_1, t) W^{-1}(t_1, t_0)\left[x(t_1) - \Phi(t_1, t_0) x(t_0)\right] \qquad (5.16)$$

Таким образом, управление, переводящее динамическую систему из состояния $x(t_0)$ в состояние $x(t_1)$ существует, то есть система *управляема*, если матрица (5.15), которую мы называем *грамианом управляемости,* - неособая .

Математические исследования показали, что грамиан управляемости позволяет судить не только о принципиальной возможности управления системой, но и о качестве управления.

Поставляя найденный вектор управления в формулу для энергии управления (5.13), после необходимых выкладок, получим

$$E_{\min} = \left[x(t_1) - \Phi(t_1, t_0) x(t_0)\right]^T W^{-1}(t_1, t_0)\left[x(t_1) - \Phi(t_1, t_0) x(t_0)\right] \qquad (5.17)$$

Теорема Для того, чтобы нестационарная система была вполне управляемой необходимо и достаточно, чтобы нашёлся такой момент $t_1 > t_0$, для которого определитель грамиана отличен от нуля.

Достаточность мы уже доказали, а необходимость в данном изложении мы доказывать не будем. Скажем лишь, что доказательство ведётся от противного: предполагается, что определитель равен нулю, но система вполне управляема. Рассуждения приводят к противоречию: сумма квадратов составляющих вектора равна нулю, что невозможно, если этот вектор не тождественно равен нулю, что противоречит условию теоремы.