Лекция 4

Устойчивость стационарных дискретных систем

Дискретная система будет асимптотически устойчивой, если найдётся такое *K*, что при всех *к>K* решение системы будет мало отличаться от стационарного (установившегося) решения. Другими словами, при $k \to \infty$ матрица A^k устойчивой системы будет стремится к нуль-матрице. В теории матриц показано, что этому условию лишь те матрицы, у которых все собственные значения меньше единицы.

Пример

Дана система

$$x_1(k+1) = \alpha x_2(k),$$
$$x_2(k+1) = -\alpha[x_1(k) + 2x_2(k)].$$

При каком значении α система устойчива? Определим сначала собственные значения матрицы системы $A = \alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Имеем характеристический многочлен det($\lambda E - A) = 0$, то есть $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2 = 0$. Решая это уравнение, получим $\lambda_{1,2} = -\alpha$. Согласно условию асимптотической устойчивости должно быть $|\lambda| <1$, то есть $|\alpha| <1$.

Построим решение этой системы. Поскольку она – стационарная, то

$$\Phi(k,k_0) = A^{k-k_0} = \alpha^{k-k_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{k-k_0}.$$

Вычислим первые несколько степеней матрицы *A*. Имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^k = (-1)^k\begin{pmatrix} 1-k & -k \\ k & 1+k \end{pmatrix}$$

Полагая $k_0 = 0$, получим

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = (-1)^k\alpha^k\begin{pmatrix} 1-k & -k \\ k & 1+k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

Видим, что модули координат убывают как $k\alpha^k$. Координаты осциллируют: вначале наблюдается “раскачка”, затем, после $k > -1/\ln\alpha$, огибающая этих координат постепенно убывает. Так, при α=0,9, координаты будут отличаться от нуля на 1% и меньше только для *к*> 86 . Следовательно, это очень медленно убывающее решение.

Установившееся решение

Асимптотически устойчивые дискретные системы имеют установившееся (стационарное) решение, определяемое исключительно сигналом управления *u(k)*. Вернёмся снова к решению стационарной дискретной системы (формула (3.15)):

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k} w(j)u(k-j) \quad . \qquad (4.1)$$

При больших значениях *k* матрица A^k стремится к нулю, и стационарное решение можно записать в виде

$$x(k) = \sum_{j=0}^{\infty} w(j)u(k-j)$$

(4.2)

Приведённая формула показывает, что значения вектора состояния зависят только от вектора управления, предшествующих “текущему” моменту “*к”*. Для непрерывных систем мы назвали их *каузальными*. Очевидно, что это же определение может быть использовано и для дискретных систем

Вектор состояния дискретной линейной системы может быть определён двусторонней цифровой сверткой

$$x(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} w(j)u(k-j).$$

(4.3)

Здесь текущее значение вектора состояния определяют и прошлые и будущие значения входного сигнала: $x(k) = \ldots + w(-2)u(k+2) + w(-1)u(k+1) + w(0)u(k) + w(1)u(k-1) + w(2)u(k-2) + \ldots$

Весовая функция $w(k)$ образует так называемое *окно*, через которое пропускается информация. В задачах *сглаживания* значения $w(k)$ должны быть выбраны так, чтобы постоянные величины проходили через это окно без искажения. В случае, когда *u(k)* – скалярная функция , условие *x(k)=u(k)* влечёт за собой условие $\sum_{j=-\infty}^{\infty} w(j) = 1$. Например, сглаживание “по тройкам” этому условию удовлетворяет равенство $x(k) = 0{,}23u(k-1) + 0{,}54u(k) + 0{,}23u(k+1)$

Характеристики дискретной системы

Для определения какой-либо характеристки системы с непрерывным временем мы пользовались тестовыми функциями, как то: экспоненциальной, для определения передаточной функции, единичной гармоники для определения частотных характеристик, δ-функции для импульсной характеристики, и единичным скачком – для переходной функции .

Передаточную функцию дискретной системы можно определить так же – по экспоненциальной функции. Рассмотрим дискретную систему, у которой вектор состояния *x(k)* определяется через вектор управления *u(k)* дискретной свёрткой

$$x(k) = \sum_{j=-N_1}^{N_2} w(j)u(k-j),$$

(4.4)

где $[-N_1, N_2]$ – область определения весовой функции. Возьмём в качестве тесовой функции для $u(k)$ экспоненциальную функцию e^{kpT}, тогда

$$x(k) = \sum_{j=-N_1}^{N_2} w(j)e^{(k-j)pT} = e^{kpT}\sum_{j=-N_1}^{N_2} w(j)e^{-jpT}.$$

Обозначим $W(p) = \sum_{j=-N_1}^{N_2} w(j)e^{-jpT}$,(4.5)тогда $x(t_k) = W(p)\exp(pt_k)$

Полученная функция *W(p)* есть не что иное, как *передаточная функция дискретной системы.*

Полагая $p = i\omega$, получим амплитудную и фазовую частотные характеристики

$$A(\omega) = |W(i\omega)|,$$

$$\psi(\omega) = \arg W(i\omega) = arctg \frac{\operatorname{Im} W(i\omega)}{\operatorname{Re} W(i\omega)}.$$

(4.6)

Заметим, что аргумент p передаточной функции входит лишь в показатель степени экспоненты, поэтому замена p на $i\omega$ приводит к периодическим частотным характеристикам.

$$W(i\omega) = \sum_{j=-N_1}^{N_2} w(j)(\cos j\omega T - i\sin j\omega T)$$

(4.7)

Легко видеть, что период зависимости $W(i\omega)$ от частоты равен $\Omega=2\pi/T$, где T-шаг квантования отсчётов по времени.

Пример

Одноканальная система задана уравнением

$$x(k+1) = \alpha x(k) + (1-\alpha)u(k).$$

Определить:

1) решение системы,
2) весовую и передаточную функции,
3) частотные характеристики.

Решение. $A=\alpha$, $B=1-\alpha$.

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j) = \alpha^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j-1}(1-\alpha)u(j)$$

Весовая функция

$$w(k) = \begin{cases} (1-\alpha)\alpha^{k-1}, k. > 0 \\ 0 \quad , k = 0 \end{cases} \quad \text{(по определению)}$$

Передаточная функция

$$W(p) = \sum_{j=1}^{\infty} w(j) e^{-jpT} = (1-\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{j-1} e^{-jpT}$$

Полученное выражение есть не что иное, как геометрическая прогрессия, сумму которой можно получить в замкнутой форме. Отношение двух рядом стоящих членов прогрессии равно $q = \dfrac{\alpha^k e^{-(k+1)pT}}{\alpha^{k-1} e^{-kpT}} = \alpha e^{-pT}$

Согласно известным формулам, вычислим сумму бесконечной прогрессии

$$W(p) = (1-\alpha)\frac{e^{-pT}}{1-q} = \frac{(1-\alpha)e^{-pT}}{1-\alpha e^{-pT}}$$

Частотные характеристики

Полагая $p = i\omega$, получим искомые частотные характеристики:

$$e^{-i\omega T} = \cos\omega T - i\sin\omega T,$$

$$W(i\omega) = \frac{(1-\alpha)(\cos\omega T - i\sin\omega T)}{(1-\alpha\cos\omega T) + i\alpha\sin\omega T},$$

$$A(\omega) = \frac{1-\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\cos\omega T + \alpha^2}}, \quad \psi(\omega) = -T\omega - arctg\frac{\alpha\sin\omega T}{1-\alpha\cos\omega T}.$$

Z-преобразование числовой последовательности

Рассмотрим каузальную систему, связывающую скалярный входной сигнал *u(k)* с выходным сигналам *x(k)* соотношением

$$x(k) = \sum_{j=0}^{\infty} w(j)u(k-j).$$

Передаточная функция такой системы, согласно вышеизложенному, имеет вид

$$W(p) = \sum_{j=0}^{\infty} w(j)e^{-jpT}.$$

(4.8)

Сравним эту формулу с её аналогом для системы с непрерывным временем, то есть с преобразованием Лапласа

$$W(p) = \int_0^{\infty} h(\xi)e^{-p\xi}d\xi.$$

Видим, что в дискретной системе интеграл заменяет сумма, а роль импульсной характеристики играет весовая функция. Таким образом, преобразование весовой функции по формуле (4.8) является дискретным аналогом преобразования Лапласа и может быть названо *дискретным преобразованием Лапласа* (ДПЛ).

Ранее мы видели, что параметр Лапласа *p* играет ту же роль, что и оператор дифференцирования *D*. Рассмотри теперь, какое преобразование выполняет оператор e^{-jDT}. Разложим этот оператор формально в ряд Тейлора по степеням *DT*: $e^{-DT} = 1 - DT + \frac{1}{2!}D^2T^2 - \frac{1}{3!}D^3T^3 + \ldots$, следовательно

$$e^{-DT}\{u(t)\} = u(t) - T\dot{u}(t) + \frac{T^2}{2}\ddot{u}(t) - \frac{T^3}{6}\dddot{u}(t) + \ldots = u(t-T)$$

иными словами оператор e^{-DT} смещает аргумент функции *назад* на время, указанное в показателе экспоненциальной функции. Итак, это – оператор сдвига по времени на один шаг. Обозначим его через z, тогда в качестве передаточной функции дискретной системы примем

$$\widetilde{W}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} w(j)z^{-j}$$

(4.9)

В приведённой формуле *w(j)* – числовая последовательность, а $\widetilde{W}(z)$ - Z-преобразование этой числовой последовательности. Это преобразование в анализе дискретных систем играет ту же роль, что и преобразование Лапласа для непрерывных систем.

Итак, числовая последовательность *f* (0), *f* (1),*f*(2), . . . *f* (k), . . . имеет образ, являющийся функцией z и называемый Z-преобразованием:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

(4.10)

При этом предполагается, что все члены последовательности с отрицательным аргументом равны нулю.

Существует прямое и обратное Z-преобразование:

$$Z\{f(k)\} = F(z),$$

$$f(k) = Z^{-1}\{F(z)\}$$

Свойства Z-преобразования.

1). *Линейность*

$Z\{af(k)+b\varphi(k)\}=aZ\{f(k)\}+bZ\{\varphi(k)\}$ Это свойство не требует доказательства. Оно следует из определений.

2) *Смещение аргумента на m тактов назад эквивалентно умножению Z-преобразования на* z^{-m}:

Пусть $Z\{f(k-m)\}=\sum_{k=0}^{\infty} f(k-m)z^{-k}=z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty} f(k-m)z^{-(k-m)}$. Заменим $k-m$ на k'. Тогда

$$Z\{f(k-m)\}=z^{-m}\sum_{k'=-m}^{\infty} f(k')z^{-k'}=z^{-m}\sum_{k'=0}^{\infty} f(k')z^{-k'}=z^{-m}Z(f(k)\}$$

Замена нижнего предела “*-m*” на 0 оправдана тем, что при отрицательных значениях аргумента функция, образующая последовательность, равна нулю (из определения Z-преобразования).

4) *Z-преобразование дискретной свёртки двух последовательностей равно произведению Z- преобразований этих последовательностей.*

Рассмотрим две последовательности $\{h(j)\}$ и $\{g(k)\}$. Z-преобразование числовой свёртки этих последовательностей имеет вид

$$Z\left\{\sum_{j=0}^{\infty} h(j)g(k-j)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} h(j)g(k-j)\right)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} h(j)z^{-j}g(k-j)z^{-(k-j)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} h(j)z^{-j}\sum_{k=0}^{\infty} g(k-j)z^{-(k-j)}=\sum_{j=0}^{\infty} h(j)z^{-j}\sum_{k'=0}^{\infty} g(k')z^{-k'}=H(z)G(z).$$

Здесь мы снова воспользовались тем, что $g(k)=0$ при $k<0$. Итак, если

$$f(k)=\sum_{j=0}^{\infty} h(j)g(k-j)=\sum_{j=0}^{\infty} g(j)h(k-j), \text{то} \quad F(z)=H(z)G(z) \qquad (4.11)$$

Воспользуемся Z-преобразованием для решения дискретной системы. Пусть $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$, очевидно, что в этом случае справедливо равенство

$$x(k)=Ax(k-1)+Bu(k-1),$$

где $x(k)$ и $u(k)$ – вектора, а A и B – матрицы. Используя свойство линейности, получим $X(z)=z^{-1}AX(z)+z^{-1}BU(z)$, или

$$zX(z)-AX(z)=BU(z).$$

Решим полученное векторно-матричное равенство относительно $X(z)$

$$X(z)=(zE-A)^{-1}BU(z)$$

(4.12)

Полученная формула является точной аналогией операторного представления решения для систем с непрерывным временем. В данном случае передаточной функцией будет

$$\widetilde{W}(z)=(zE-A)^{-1}B,$$

(4.13)

так что $X(z)=\widetilde{W}(z)U(z)$

(4.14)

Обратное преобразование даёт решение функцию дискретного времени в виде свёртки $x(k)=\sum_{j=0}^{\infty} w(j)u(k-j)$, где

$x(k) = Z^{-1}\{X(z)\},\ w(k) = Z^{-1}\{W(z)\},\ u(k) = Z^{-1}\{U(z)\}$. Для практического использования аппарата Z- преобразования существуют специальные таблицы , позволяющие определять прямые и обратные Z- преобразования.

Пример

Определить Z-преобразование последовательности

$$\{T^k\} = 1, T,\ T^2, T^3, \dots T^k \dots$$

Решение : $Z\{T^k\} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k z^{-k} = \dfrac{1}{1 - Tz^{-1}}$, (геометрическая прогрессия)

Пример

Определить Z-преобразование последовательности

$$\{k\} = 1,\ 2,\ 3, \dots k \dots$$

Решение: $Z\{k\} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kz^{-k}$. Рассмотрим, сначала, функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-k}}.$$

Очевидно, что $\dfrac{df(z)}{dz} = -z^{-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = -z\dfrac{df(z)}{dz} = \dfrac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$.

Для определения частотных характеристик достаточно величину z^{-1} заменить на $e^{-i\omega T} = \cos\omega T - i\sin\omega T$.Например, передаточная функция дискретной системы $x(k+1) = \alpha x(k) + (1-\alpha)u(k)$ имеет вид

$\widetilde{W}(z) = \dfrac{(1-\alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$, а комплексная амплитудно-фазовая частотная характеристика - $W(i\omega) = \dfrac{(1-\alpha)(\cos\omega T - i\sin\omega T)}{(1 - \alpha\cos\omega T) + i\alpha\sin\omega T}$. Сравнивая полученные формулы с формулами предыдущего раздела, мы видим их полное тождество.