Многоканальные динамические системы

Лекция 3

Передаточная функция многоканальной системы

В качестве выходной координаты многоканальной системы следует считать вектор состояния, а входной – вектор управления. Такая динамическая система подчиняется матрично-векторному дифференциальному уравнению.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}\mathbf{u}(t)$$

(3.1)

Своеобразным “портретом” такой системы может служить матричная передаточная функция. Как мы видели, для стационарной системы она имеет вид

$$\mathbf{W}(D) = (\mathbf{E}D - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{F}$$

(3.2)

Понятия частотных характеристик применимы и для многоканальных систем. Так же, как и для одноканальной системы, на нужно оператор дифференцирования заменить мнимой частотой. Тогда комплексной частотной характеристикой будет матрица

$$\mathbf{W}(i\omega) = (i\omega\mathbf{E} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{F}$$

(3.3)

Предположим, например, что мы имеем дело с динамической системой второго порядка, то есть

$$\dot{x}_1(t) = g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + f_{11}u_1 + f_{12}u_2,$$
$$\dot{x}_2(t) = g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + f_{21}u_1 + f_{22}u_2.$$

Тогда $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$.

Передаточной функцией этой системы будет матрица

$$\mathbf{W}(D) = \begin{pmatrix} D - g_{11} & -g_{12} \\ -g_{21} & D - g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}. \qquad (3.4)$$

Проделаем необходимые выкладки. Обозначим элементы обратной матрицы через q_{ij}, то есть

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D - g_{11} & -g_{12} \\ -g_{21} & D - g_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

Вычислим определитель характеристической матрицы

$$\Delta = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} D - g_{11} & -g_{12} \\ -g_{21} & D - g_{22} \end{pmatrix} = (D - g_{11})(D - g_{22}) - g_{12}g_{21}.$$

Согласно правилу обращения матриц, получим

$$q_{11} = \frac{D - g_{22}}{\Delta}, q_{12} = \frac{g_{12}}{\Delta}, q_{21} = \frac{g_{21}}{\Delta}, \; q_{22} = \frac{D - g_{11}}{\Delta}.$$

Перемножая матрицы **Q** и **F**, вычислим элементы матричной передаточной функции **W**(D):

$$\begin{aligned}
W_{11}(D) &= q_{11}f_{11} + q_{12}f_{21} = \frac{1}{\Delta}\left[(D - g_{22})f_{11} + g_{12}f_{21}\right], \\
W_{12}(D) &= q_{11}f_{12} + q_{12}f_{22} = \frac{1}{\Delta}\left[(D - g_{22})f_{12} + g_{12}f_{22}\right], \\
W_{21}(D) &= q_{21}f_{11} + q_{22}f_{21} = \frac{1}{\Delta}\left[(D - g_{11})f_{21} + g_{21}f_{11}\right], \\
W_{22}(D) &= q_{21}f_{12} + q_{22}f_{22} = \frac{1}{\Delta}\left[(D - g_{11})f_{22} + g_{21}f_{12}\right].
\end{aligned} \qquad (3.5)$$

Прохождение сигнала по каждому каналу можно записать так:

$$x_1(t) = W_{11}(D)\{u_1(t)\} + W_{12}(D)\{u_2(t)\},$$
$$x_2(t) = W_{21}(D)\{u_1(t)\} + W_{22}(D)\{u_2(t)\}$$

(3.6)

Таким образом, $W_{11}(D)$ есть оператор преобразования первой составляющей вектора управления по первому каналу, $W_{12}(D)$ - оператор преобразования второй составляющей вектора управления по первому каналу. В принятой нами системе обозначений, первый индекс обозначает номер канала, а второй – номер составляющей вектора управления. Вообще, $W_{ij}(D)$ - оператор преобразования *j*-той компоненты сигнала управления по *i* –тому каналу.

Решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

Не останавливаясь подробно на выводе, который можно найти в соответствующих курсах математики, запишем общий вид решения системы

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\xi)\mathbf{F}(\xi)\mathbf{u}(\xi)d\xi ,$$

(3.7)

где $\Phi(t,t_0)$ носит название *переходной матрицы системы* или *фундаментальной матрицы*. Первое слагаемое в формуле (3.7) есть решение системы уравнений без правой части, то есть однородного уравнения:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t)$$

(3.8)

Переходная матрица образуется следующим образом. Пусть $\Theta(t)$ есть фундаментальная матрица решений, каждый столбец которой представляет собой решение системы (3.8). Всего можно образовать *n* независимых решений, которые и образуют фундаментальную систему. Тогда переходная матрица может быть представлена следующим образом

(3.9)

$$\Phi(t,t_0) = \Theta(t)\Theta^{-1}(t_0)$$

Фундаментальная матрица решений определяется так

$\Theta(t) = \mathbf{H}\varphi(t)c,$ где *c* произвольная постоянная, а $\varphi(t)$ – диагональная матрица, которая в случае простых корней характеристического многочлена $\Delta(\lambda) = |\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{G}| = 0$ имеет вид

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \qquad (3.10)$$

а $\mathbf{H}$ – матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы **G.**

Свойства переходной матрицы.

1) При совпадении значений двух аргументов, переходная матрица обращается в единичную. Из формулы (3.7) следует, что решением однородного уравнения будет

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0).$$

При $t = t_0$, первое свойство очевидно. Оно также следует из формулы (3.9), определяющей переходную матрицу.

2) Переходная матрица подчиняется однородной системе уравнений. Это свойство также следует из определения переходной матрицы Проиллюстрируем сказанное примерами.

Пример 1

Решим однородную систему уравнений

$$\dot{x}_1(t) = nx_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = -nx_1(t).$$

. В данном случае

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим переходную матрицу. Строить переходную матрицу можно двумя способами.
Первый способ. Воспользуемся формулой (3.9)

Прежде всего, нам нужно определить фундаментальную матрицу решений. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda & -n \\ n & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + n^2 = 0$$

Следовательно, $\lambda_1 = in,\ \lambda_2 = -in$ Это, так называемые собственные значения матрицы $\mathbf{G}$. Найдём теперь собственные векторы. Найдём, сначала, первый столбец матрицы $\mathbf{H}$. Он определяется из решений уравнений

$$\begin{pmatrix} in & -n \\ n & in \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} = 0$$

Отсюда имеем $h_{11} = 1,\ \ h_{21} = i$

Второй столбец получим аналогично

$$\begin{pmatrix} -in & -n \\ n & -in \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Решая, получим $h_{12} = 1,\ \ h_{22} = -i$.

Отсюда следует, что фундаментальная матрица решений имеет вид

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{int} & 0 \\ 0 & e^{-int} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{int} & e^{-int} \\ ie^{int} & -ie^{-int} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица имеет вид

$$\Theta^{-1}(t_0) = -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -ie^{-int_0} & -e^{-int_0} \\ -ie^{int_0} & e^{int_0} \end{pmatrix}$$

Используя формулу (3.9),поле необходимых выкладок, получим переходную матрицу

$$\Phi(t,t_0) = \Theta(t)\Theta^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} \cos n(t-t_0) & \sin n(t-t_0) \\ -\sin n(t-t_0) & \cos n(t-t_0) \end{pmatrix}$$

Второй способ.

Поскольку переходная матрица подчиняется однородной системе дифференциальных уравнений, то её столбцы суть решения этой системы. В данном случае, если

$$\Phi(t,t_0) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t,t_0) & \varphi_{12}(t,t_0) \\ \varphi_{21}(t,t_0) & \varphi_{22}(t,t_0) \end{pmatrix},$$

учитывая, что корни характеристического многочлена суть *in* и *-in*, решения системы дифференциальных уравнений представляют собой линейные комбинации вида $A\cos n(t-t_0) + B\sin n(t-t_0)$. Определим $\varphi_{11}(t,t_0)$ и $\varphi_{21}(t,t_0)$ так, чтобы они удовлетворяли начальным условиям и дифференциальным уравнениям. Пусть $\varphi_{11}(t-t_0) = A\cos n(t-t_0) + B\sin n(t-t_0)$. Вторая компонента вектора решения может быть определена из первого уравнения системы, то есть

$$\varphi_{21}(t-t_0) = -A\sin n(t-t_0) + B\cos n(t-t_0).$$

Начальным условиям : $\varphi_{11}(0) = 1,\ \varphi_{21}(0) = 0$ удовлетворяют следующие значения постоянных A=1, B=0. Таким образом, получим

$$\varphi_{11}(t,t_0) = \cos n(t-t_0),$$

$$\varphi_{21}(t,t_0) = -\sin n(t-t_0).$$

Поступая точно так же, получим и второй столбец переходной матрицы

$$\varphi_{12}(t,t_0) = \sin n(t-t_0),$$

$$\varphi_{22}(t,t_0) = \cos n(t-t_0).$$

Если первый путь вычисления переходной матрицы связан с процедурой обращения матриц, то второй петь, на наш взгляд, предпочтительнее.

Решение системы уравнений с правой частью

Займёмся теперь вторым членом в решении (3.7), который представляет собой частное решение системы дифференциальных уравнений с учётом правой части. Он также обязан подчиняться системе дифференциальных уравнений. Проверим это. Имеем

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t,\xi)\mathbf{F}(\xi)\mathbf{u}(\xi)d\xi\right) = \mathbf{\Phi}(t,t)\mathbf{F}(t)\mathbf{u}(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{d\mathbf{\Phi}(t,\xi)}{dt}\mathbf{F}(\xi)\mathbf{u}(\xi)d\xi.$$

Из первого и второго свойства переходной матрицы следует $\mathbf{\Phi}(t,t) = \mathbf{E}$, $\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}(t,\xi)}{dt} = \mathbf{G}(t)\mathbf{\Phi}(t,\xi)$, следовательно

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{u}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{G}(t)\mathbf{\Phi}(t,\xi)\mathbf{u}(\xi)d\xi = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{u}(t)$. Полученное выражение совпадает с исходным векторно-матричным уравнением, что и убеждает нас в том, второй член в формулу (3.7) есть решение нашей системы. Для иллюстрации сказанного снова обратимся к примеру.

Пример 2

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - 3x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_3 - 2x_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + u. \end{aligned} \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определим собственные значения матрицы **G**. Характеристический многочлен имеет вид $\Delta(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$. Следовательно, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$. Фундаментальная матрица решений будет иметь вид

$\Theta(t) = \mathbf{H}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} = (\mathbf{h}^1 e^{-t} \quad \mathbf{h}^2 e^{-2t} \quad \mathbf{h}^3 e^{-3t})$, где $\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \mathbf{h}^3$ – собственные векторы матрицы **G**. Последние определяются из путем решения однородной системы уравнений $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{G})\mathbf{H} = 0$. Выпишем эти уравнения

$$\begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} = 0$$

Для определения первого собственного вектора нам нужно в левую часть написанных уравнений подставить первое собственное значение $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{pmatrix} = 0,$$

Полагая, например, $h_{11} = 1$, получим $h_{21} = 2$, $h_{31} = 2$. При $\lambda_2 = -2$, будем иметь

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \end{pmatrix} = 0.$$

Снова зададим значение одному из неизвестных, например, $h_{12} = 1$, получим $h_{22} = 1$, $h_{32} = 0$.

Наконец, для определения третьего собственного вектора, положим $\lambda_3 = -3$. Уравнения принимают вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{13} \\ h_{23} \\ h_{33} \end{pmatrix} = 0$$ Откуда получим $h_{13} = 1, h_{23} = 0, h_{33} = 0$. Итак, матрица, составленная из собственных векторов, имеет вид

$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а фундаментальная матрица решений $\Theta(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} & e^{-3t} \\ 2e^{-t} & e^{-2t} & 0 \\ 2e^{-t} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Положим $t_0 = 0$ и вычислим переходную матрицу

$$\mathbf{\Phi}(t,0) = \Theta(t)\Theta^{-1}(0)$$

После выполнения необходимых выкладок, получим

$$\mathbf{\Phi}(t,0) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} & \frac{1}{2}(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}) \\ 0 & e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Окончательный вид решения можно записать так

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(t,0)\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t,\xi)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(\xi)d\xi$$

Дискретные системы

Линейная нестационарная система

В отличие от систем с непрерывным временем вектор состояния дискретной системы может быть описан уравнениями в конечных разностях. Аргументом дискретной функции обычно служат целые числа. Например, если *f(t)* – функция непрерывного времени , то для моментов $t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots,\ t_k \ldots$ взятых с постоянным шагом *T*= $t_{k+1} - t_k$, мы будем иметь числовую последовательность $\{f_k\} = f(k_0), f(k_1), f(k_2)\ldots$ Понятие производной для числовых последовательностей не существует и вместо системы дифференциальных уравнений типа $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{u}(t)$ берут рекуррентное соотношение

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \qquad ,$$

(3.11)

с помощью которого по предыдущим значениям вектора состояния и сигнала управления определяются все последующие значения вектора состояния. Таким образом, динамическая система, определённая уравнением (3.11), относится к типу каузальных систем.

Поскольку всё дальнейшее изложение связано с векторно-матричными величинами, мы не будем их специально выделять жирным шрифтом, принимая их “по умолчанию” векторами или матрицами, если нет специальной оговорки.

Используя (3.11) как рекуррентную формулу, вычислим вектор состояния x для произвольного дискретного момента времени k . Полагая начальное значение вектора состояния $x(k_0)$ известным , будем считать известными также все значения вектора управления, из уравнения (3.11) получим

$$x(k_0 + 1) = A(k_0)x(k_0) + B(k_0)u(k_0),$$

$$x(k_0 + 2) = A(k_0 + 1)x(k_0 + 1) + B(k_0 + 1)u(k_0 + 1) =$$

$$= A(k_0 + 1)A(k_0)x(k_0) + A(k_0 + 1)B(k_0)u(k_0) + B(k_0 + 1)u(k_0 + 1)$$

$$
\begin{aligned}
x(k_0+3) &= A(k_0+2)x(k_0+2)+B(k_0+2)u(k_0+2) = \\
&= A(k_0+2)A(k_0+1)A(k_0)x(k_0)+A(k_0+2)A(k_0+1)B(k_0)u(k_0)+ \\
&+ A((k_0+2)B(k_0+1)u(k_0+1)+B(k_0+2)u(k_0+2).
\end{aligned}
$$

В общем случае $x(k)=$

$$
\begin{aligned}
&= A(k-1)A(k-2)\ldots A(k_0)x(k_0)+ \\
&+ A(k-1)A(k-2)\ldots A(k_0+1)B(k_0)u(k_0)+ \\
&+ A(k-1)A(k-2)\ldots A(k_0+2)B(k_0+1)u(k_0+1)+ \\
&+ A(k-1)A(k-2)\ldots A(k_0+3)B(k_0+2)u(k_0+2)+\ldots
\end{aligned}
$$

Введём обозначения

$$
\varPhi(k,k_0)=\begin{cases} E, & k=k_0, \\ A(k-1)A(k-2)\ldots A(k_0), & k>k_0 \end{cases}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
x(k) &= \Phi(k,k_0)x(k_0)+\Phi(k,k_0+1)B(k_0)u(k_0)+ \\
&+ \Phi(k,k_0+2)B(k_0+1)u(k_0+1)+\ldots+ \\
&+ \Phi(k,k+1)B(k-2)u(k-2)+\Phi(k,k)B(k-1)u(k-1),
\end{aligned}
$$

или

$$
x(k)=\Phi(k,k_0)x(k_0)+\sum_{j=k_0}^{k-1}\Phi(k,j+1)B(j)u(j) \qquad (3.12)
$$

Сравним полученный результат с решением непрерывной линейной системы

$$
x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\xi)F(\xi)u(\xi)d\xi,
$$

видим их полную аналогию. Функция дискретных аргументов $\Phi(k,k_0)$ есть не что иное, как *переходная матрица системы с дискретным временем.* Отметим некоторые её свойства.

1) $\Phi(k,k)=E$ (по определению)
2) $\Phi(k,m)\Phi(m,l)=\Phi(k,l)$ Доказательство справедливости этого равенства очевидно:

$$
\Phi(k,l)=\big(A(k-1)A(k-2)\ldots A(m)\big)\big(A(m-1)A(m-2)\ldots A(l)\big)=\Phi(k,m)\Phi(m,l)
$$

3) Переходная матрица удовлетворяет матричному уравнению однородной системы: $\Phi(k+1,k_0)=A(k)\Phi(k,k_0)$

Доказательство этого утверждения также следует из определения переходной матрицы:

$$
\Phi(k+1,k_0)=A(k)\big(A(k-1)A(k-2)\ldots A(k_0)\big)=A(k)\varPhi(k,k_0)
$$

Стационарные системы.

Так же, как и системы с непрерывным временем, система с дискретным временем называется стационарной, если её векторно-матричное уравнение содержит постоянные, не зависящие от времени матричные коэффициенты. Таким образом, вектор состояния стационарной дискретной системы определяется уравнением

$$
x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)
$$

(3.13)

Легко показать, что переходная матрица зависит лишь от разности аргументов. В данном случае

$$
\begin{aligned}
&\Phi(k_0,k_0)=E \\
&\Phi(k_0+1,k_0)=A \\
&\Phi(k_0+2,k_0)=A^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Phi(k_0+l,k_0)=A^l
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$
\Phi(k,k_0)=A^{k-k_0}
$$

Решение системы (формула (3.12)) принимает вид

$$x(k) = A^{k-k_0} x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-(j+1)} Bu(j) \qquad (3.14)$$

При $k_0 = 0,$ имеем

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-(j+1)} Bu(j) \quad .$$

(3.15)

Введём обозначение

$$w(k) = \begin{cases} A^{k-1}B & k > 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

Теперь решение запишется так

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} w(k-j)u(j)$$

(3.16)

Последнее слагаемое в равенстве (3.16) есть цифровая свёртка весовой функции- матрицы *w(k)* – и вектора управления *u(k)* . Иначе, свёртку записывают так

$$w(k) * u(k) = \sum_{j=0}^{k} w(k-j)u(j)$$

(3.17)

Заметим, что свёртываемые функции можно переставлять местами.