Линейные дифференциальные уравнения

Лекция 2

Одноканальная динамическая система

Прежде, чем перейти к изучению управления и управляемости, нам необходимо вспомнить основные правила построения решения линейных дифференциальных уравнений и систем, содержащих *n* уравнений первого порядка

Рассмотрим линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = u(t)$$

(2.1)

Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение уравнения складывается из общего решения однородного уравнения (без правой части) и частного решения неоднородного. Однородное уравнение

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0$$

(2.2)

имеет решение, которое можно записать в виде линейной комбинации экспоненциальных функций $\exp(\lambda_j t)$, где λ_j - корень характеристического уравнения

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (2.3)$$

Это уравнение имеет *n* корней. Пусть среди них имеется *m* действительных и *n-m* комплексно-сопряжённых:

$$\lambda_j = -\alpha_j, \qquad j = \overline{1,m}$$
$$\lambda_{k+m} = -\beta_k + i\gamma_k$$
$$\lambda_{k+\frac{n+m}{2}} = -\beta_k - i\gamma_k, \qquad k = \overline{1,\frac{n-m}{2}}$$

(2.4)

Решение однородного уравнения, в этом случае, можно представить суммой

$$x_0(t) = \sum_{j=1}^{m} C_j e^{-\alpha_j t} + \sum_{k=m+1}^{\frac{n+m}{2}} e^{-\beta_k t}\left(A_k \cos\gamma_k t + B_k \sin\gamma_k t\right). \qquad (2.5)$$

Постоянные A_k, B_k, C_j определяются из начальных условий общего решения уравнения (2.1)

Динамическая система, которая подчиняется дифференциальному уравнению (2.1) является асимптотически устойчивой, если его решение при любых начальных условиях при отсутствии внешнего возбуждения асимптотически стремится к нулю. Отсюда следует, что условие асимптотической устойчивости эквивалентно требованию $\alpha_j > 0, \quad \beta_k > 0$ или, что то же самое, $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Частное решение уравнения с правой частью при нулевых начальных условиях определяет интеграл-свёртка

$$x(t) = \int_0^t h(\xi)u(t-\xi)d\xi,$$

(2.6)

где $h(\xi)$ – функция, которая зависит только от коэффициентов дифференциального уравнения, носит название *импульсной характеристики*. Это название объясняется тем, что при воздействии на систему единичного импульса её отклик будет тождественен импульсной характеристике.

Пусть $u(t) = \delta(t)$, тогда

$$x(t) = \int_0^t h(\xi)\delta(t-\xi)d\xi = h(t)$$

Нетрудно установить, что импульсная характеристика подчиняется однородному дифференциальному уравнению системы

$$a_0 h^{(n)}(t) + a_1 h^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n h(t) = 0 \qquad (2.7)$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$h(0) = \dot{h}(0) = \ddot{h}(0) = \ldots = h^{(n-2)}(0) = 0, \quad h^{(n-1)}(0) = 1/a_0 .$$

Итак, общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$x(t) = x_0(t) + \int_0^t h(\xi) u(t-\xi) d\xi .$$

(2.8)

При асимптотической устойчивости выполняется условие

$$\lim_{t \to \infty} x_0(t) = 0$$

Таким образом, с увеличением времени влияние начальных условий на решение ослабевает. В результате получим решение, которое зависит только от функции внешнего воздействия (управления)

$$x(t) = \int_0^\infty h(\xi) u(t-\xi) d\xi$$

(2.9)

Такое решение носит название *стационарного* (установившегося).

Рассмотрим один важный частный случай. Пусть $u(t) = \exp pt$, найдём стационарное решение

$$x(t) = \int_0^\infty h(\xi) \exp p(t-\xi) d\xi = \exp pt \int_0^\infty h(\xi) \exp(-p\xi) d\xi$$

Полученный интеграл известен как преобразование Лапласа.

$$H(p) = \int_0^\infty h(\xi) e^{-p\xi} d\xi$$

(2.10)

Таким образом, стационарное решение уравнения (2.1) при экспоненциальном возбуждении имеет также экспоненциальный вид

$$x(t) = H(p) e^{pt} .$$

Полагая *u(t)=exp(pt),* $a_0 = 1$, подставим полученные выражения в уравнение (2.1). Получим $H(p)(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) e^{pt} = e^{pt}$. Отсюда

$$H(p) = (p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)^{-1} .$$

Любопытно, что точно такой же вид имеет и передаточная функция нашей динамической системы.

$$W(D) = (D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n)^{-1}$$

Это следует из того, что при дифференцировании экспоненциальная функция приобретает только множитель, а сама функция не меняется:

$$D\{e^{pt}\} = \frac{d}{dt} e^{pt} = p e^{pt}$$

Параметр p преобразования Лапласа выполняет ту же функцию, что и оператор дифференцирования. Поэтому передаточная функция определяется через импульсную характеристику простой заменой p на D:

$$W(D) = \int_0^{\infty} h(\xi) e^{-D\xi} d\xi$$

(2.11)

Для прямого и обратного преобразования Лапласа принято пользоваться стандартными обозначениями

$$W(D) = L\{h(t)\},$$

$$h(t) = L^{-1}\{W(D)\}.$$

(2.12)

Кроме того, существуют специальные таблицы, облегчающие вычисление прямого и обратного преобразования Лапласа.

Одноканальная динамическая система общего типа

Зададим связь между входным сигналом (управлением) и выходным сигналом (вектором состояния) в виде двустороннего интеграла свёртки в бесконечных пределах

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) u(t-\xi) d\xi$$

(2.13)

Частными случаями этой формулы можно считать интегралы (2.6) и (2.9). Свертку типа (2.6) получим, полагая

$$h(\xi) = \begin{cases} h(\xi), & 0 \le \xi \le t, \\ 0, & \xi < 0,\ \xi > \mathrm{t}, \end{cases}$$

а свёртку типа (2.9) - , полагая

$$h(\xi) = \begin{cases} h(\xi), & \xi \ge 0 \\ 0 & \xi < 0. \end{cases}$$

Динамические системы, выходные координаты которых формируются внешним воздействием за время, предшествующее текущему моменту, называются *каузальными.* Они не могут реагировать на “будущие” значения внешнего воздействия. Математически это означает, что импульсная характеристика для отрицательного аргумента равна нулю.

Динамическая система, выходная координата которой формируется на основе свертки типа (2.13), не является каузальной, ибо она преобразует функцию *u(t)* не только для моментов, предшествующих текущему, но и “будущие” значения этой функции. Такую систему нельзя реализовать *физически*, то есть она не будет работать в *реальном* времени. Однако алгоритмически её осуществить можно, если будут доступны все значения функции внешнего воздействия, как в прошлом, так и в будущем. Например, если за текущий момент взять середину интервала, на котором информация сглаживается путём интегрального осреднения, то

$$x(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t-\xi) d\xi,$$

$$h(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2T}, & \mathrm{-T} \le \xi \le \mathrm{T} \\ 0 & \xi < \mathrm{-T}, \xi > \mathrm{T} \end{cases}$$

Сглаживание можно выполнять и с весовой функцией (*окном*). Так, например, при окне $h(\xi) = \frac{1}{2T}(1 + \cos\frac{\pi\xi}{T}), \quad \xi \in [-T, T]$ и $h(\xi) = 0, \ \ \xi \notin [-T, T]$ получим среднее взвешенное

$$x(t) = \bar{u}(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (1 + \cos\frac{\pi\xi}{T}) u(t-\xi) d\xi$$

Передаточную функцию линейных стационарных систем общего типа можно вычислить по формуле, аналогичной той, которую мы получили для каузальной системы (формула (2.11)). В данном случае будем иметь дело с двусторонним преобразованием Лапласа

$$W(D) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)e^{-D\xi}d\xi.$$

(2.14)

В качестве примера, вычислим передаточную функцию скользящего среднего

$$W(D) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-D\xi}d\xi = \frac{1}{2TD}(e^{TD} - e^{TD}) = \frac{\mathrm{sh}TD}{TD}.$$

В этом случае оператор дифференцирования *D* входит как аргумент трансцендентной функции.

Характеристики одноканальной динамической системы

Ранее мы видели, что для однозначного определения динамической системы нужно иметь либо дифференциальное уравнение, либо передаточную функцию, либо импульсную характеристику (весовую функцию). Все эти способы задания динамической системы эквивалентны. Для определения импульсной характеристики нам понадобилось ввести в качестве функции внешнего воздействия импульс или функцию Дирака. Передаточная функция определена через экспоненциальную функцию. Функции δ (*t*) и exp(*Dt*), в данном случае, являются *тестовыми функциями*.

На практике применяются и другие тестовые функции. В частности, функция Хевисайда или функция единичного скачка

$$\mathbf{1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

определяет *переходную функцию*

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\mathbf{1}(t-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{t} h(\xi)d\xi$$

Для каузальной системы импульсная характеристика при отрицательных значениях аргумента равна нулю, поэтому в этом случае

$$H(t) = \int_{0}^{t} h(\xi)d\xi$$

(2.15)

Комплексная единичная гармоника, взятая в качестве тестовой функции, определяет частотные характеристики линейной стационарной системы

$$u(t) = e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t,$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)e^{i\omega(t-\xi)}d\xi = e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\xi}h(\xi)d\xi$$

Сравнивая полученную формулу с формулой(2.14) для передаточной функции, видим, что множитель, стоящий перед единичной гармоникой, есть передаточная функция, в которой оператор дифференцирования заменён на мнимую частоту

$$W(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi$$

(2.16)

Таким образом, если известна передаточная функция линейной системы, то для определения *амплитудно-фазовой частотной характеристики* достаточно заменить её аргумент D на $i\omega$.

Модуль этой комплексной функции носит название *амплитудной частотной характеристики* (АЧХ), а аргумент – *фазовой частотной характеристики* (ФЧХ). Пусть $W(i\omega) = \mathrm{Re}\,W(i\omega) + i\,\mathrm{Im}\,W(i\omega)$, тогда АЧХ имеет вид

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,W(i\omega))^2 + (\mathrm{Im}\,W(i\omega))^2},$$

а фазовая характеристика

$$\psi(\omega) = \arg W(i\omega) = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{Im}\,W(i\omega) / \mathrm{Re}\,W(i\omega)\right).$$

Например, если передаточная функция системы равна

$$W(D) = (1 + T_1 D + T_2^2 D^2 + T_3^3 D^3)^{-1}, \quad \text{то}$$

$$A(\omega) = \left[(1 - T_2^2\omega^2)^2 + (T_1 - T_3^3\omega^2)^2\omega^2\right]^{-1/2},$$

$$\psi(\omega) = -\mathrm{arctg}\frac{(T_1 - T_3^2\omega^2)\omega}{1 - T_2^2\omega^2}.$$

Если возбуждающая функция есть $u(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$, то установившимся решением будет $x(t) = aA(\omega)\cos(\omega t + \varphi + \psi(\omega))$.

Зависимость выходного сигнала от частоты входного сигнала используют в задачах частотной фильтрации.

В заключение приведем сводку характеристик стационарных линейных систем

Таблица

Характеристика	Обозначение	Тестовая функция
Передаточная функция	W(D)	exp(*Dt*)
Импульсная характеристика	*h*(*t*)	δ(*t*)
Переходная функция	*H*(*t*)	**1**(*t*)
Частотная характеристика	*W*(*iω*)	exp(*iωt*)
АЧХ	*A*(ω) = |*W*(*iω*)|	
ФЧХ	ψ(ω)=arg*W*(*iω*)	

.