

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
Государственный астрономический институт  
имени П.К. Штернберга

Л.В. Зотов

**ТЕОРИЯ ФИЛЬТРАЦИИ  
И ОБРАБОТКА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

Курс лекций

Москва  
2010

УДК 51-73

**Зотов Л.В. Теория фильтрации и обработка временных рядов.** Курс лекций. – М: Физический факультет МГУ, 2010. - 200 с.

ISBN 978-5-8279-0089-4

Рассматриваются методы анализа и обработки сигналов и математическая теория фильтрации. Даются основы классического спектрального анализа, вейвлет-анализа, сингулярного спектрального анализа. Приводятся характеристики линейных фильтров, основы винеровской и калмановской фильтрации. Внимание уделено также нейронным сетям и роли фильтрации в решении обратных задач.

Курс лекций, разработан для студентов и аспирантов Астрономического отделения физического факультета МГУ. Он может быть полезен работающим в астрономии и геофизике, технике и экономике, биологии и медицине. Всем, так или иначе использующим в своей работе методы прикладной математики.

Р е ц е н з е н т ы:

кандидат физико-математических наук Сергей Леонидович Пасынок,  
кандидат физико-математических наук Ольга Сергеевна Сажина.

ISBN 978-5-8279-0089-4



© Л.В. Зотов

© Физический факультет МГУ

имени М.В. Ломоносова, 2010 г.

# Содержание

<b>Предисловие</b>	<b>6</b>
<b>Введение</b>	<b>8</b>
<b>1 Фурье-анализ</b>	<b>15</b>
1.1 История создания . . . . .	15
1.2 Ряд Фурье . . . . .	16
1.3 Геометрический смысл Фурье-анализа . . . . .	18
1.4 Преобразование Фурье . . . . .	20
1.5 Принцип неопределённости Гейзенберга . . . . .	23
1.6 Дискретное преобразование Фурье . . . . .	24
1.7 Быстрое преобразование Фурье . . . . .	25
1.8 Принцип Котельникова-Шеннона . . . . .	26
1.9 Характеристики случайных процессов . . . . .	28
1.10 Спектральный анализ случайных процессов . . . . .	30
1.11 Спектральный анализ с окном . . . . .	31
1.12 Кросскорреляционный анализ . . . . .	33
1.13 Многомерный анализ . . . . .	34
<b>2 Вейвлет-анализ</b>	<b>37</b>
2.1 Оконное преобразование . . . . .	39
2.2 Непрерывный вейвлет-анализ . . . . .	41
2.3 Вейвлет-анализ как фильтрация . . . . .	44
2.4 Анализ сигналов с использованием вейвлетов . . . . .	45
2.5 Дискретное вейвлет-преобразование . . . . .	49
2.6 Каскады зеркальных фильтров . . . . .	50
2.7 Кратно-масштабный анализ . . . . .	53
2.8 Многомерный вейвлет-анализ . . . . .	54
<b>3 Сингулярный спектральный анализ</b>	<b>57</b>
3.1 Алгоритм ССА . . . . .	57

3.2	Разделимость . . . . .	59
3.3	Группировка . . . . .	61
3.4	Многомерный ССА . . . . .	61
3.5	Особенности ССА . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Постановка задачи фильтрации, характеристики линейных фильтров</b>	<b>68</b>
4.1	Основные характеристики линейных фильтров . . . . .	68
4.2	Стационарная динамическая система как фильтр . . . . .	71
4.3	Распространение на двумерный случай . . . . .	74
4.4	Дискретные фильтры . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Оптимальная фильтрация Винера-Колмогорова</b>	<b>82</b>
5.1	Общие положения . . . . .	82
5.2	Начальные моменты СПМ . . . . .	84
5.3	Факторизация СПМ, формирующий фильтр . . . . .	85
5.4	Постановка задачи оптимальной фильтрации . . . . .	88
5.5	Вывод уравнения Винера-Хопфа . . . . .	89
5.6	Решение уравнения Винера-Хопфа в спектральной области	90
5.7	Решение уравнения Винера-Хопфа методами ТФКП . . . . .	92
5.8	Многомерный случай . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Фильтрация Калмана-Бьюсси</b>	<b>100</b>
6.1	Динамические системы . . . . .	100
6.2	Модель наблюдений и состояний . . . . .	102
6.3	Операционный подход. Характеристики многоканальной системы. . . . .	102
6.4	Предварительные соглашения . . . . .	106
6.5	Уравнение Винера-Хопфа в нестационарном случае, принцип ортогональности. . . . .	108
6.6	Вывод уравнений непрерывного фильтра Калмана-Бьюсси	109
6.7	Вывод соотношений дискретного фильтра Калмана . . . . .	114
6.8	Алгоритм дискретной фильтрации Калмана . . . . .	117
6.9	Нелинейный фильтр Калмана . . . . .	118
<b>7</b>	<b>Нейронные сети и методы оптимизации</b>	<b>123</b>
7.1	Модели нейрона, персептрон . . . . .	123
7.2	Многослойные нейронные сети . . . . .	126
7.3	Теорема об аппроксимации . . . . .	127
7.4	Обучение . . . . .	128
7.5	Алгоритм обратного распространения ошибки . . . . .	130

7.6	Погрешность и структура НС . . . . .	132
7.7	Другие виды НС . . . . .	134
7.8	НС, обучающиеся без учителя . . . . .	136
7.9	Модульные сети. Области применения НС. . . . .	137
7.10	Методы оптимизации . . . . .	138
7.11	Методы наискорейшего спуска . . . . .	138
7.12	Ньютоновские методы . . . . .	139
7.13	Метод Левенберга-Марквардта . . . . .	140
7.14	Квазиньютоновские методы . . . . .	141
7.15	Условная оптимизация . . . . .	143
7.16	Популяционные алгоритмы . . . . .	145
<b>8</b>	<b>Фильтрация и решение обратных задач</b>	<b>148</b>
8.1	Совместность СЛАУ . . . . .	150
8.2	Обусловленность . . . . .	152
8.3	Псевдорешения . . . . .	153
8.4	SVD-разложение . . . . .	155
8.5	Геометрия псевдорешения . . . . .	158
8.6	Обратные задачи для дискретных моделей наблюдений . . . . .	158
8.7	Модель в спектральной области . . . . .	161
8.8	Регуляризация плохо обусловленных систем . . . . .	162
8.9	Общие замечания, дилемма смещения и дисперсии . . . . .	162
8.10	Модели на основе интегральных уравнений . . . . .	165
8.11	Корректирующая фильтрация Пантелеева . . . . .	165
8.12	Регуляризация Филлипса-Тихонова . . . . .	167
	<b>Заключение</b>	<b>175</b>
	<b>Приложения</b>	<b>178</b>
	Приложение А . . . . .	178
	Приложение Б . . . . .	180
	Приложение В . . . . .	181
	Приложение Г . . . . .	183
	Приложение Д . . . . .	187
	Приложение Е . . . . .	189
	<b>Список литературы</b>	<b>192</b>
	Русскоязычные источники . . . . .	192
	Англоязычные источники . . . . .	196
	Список дополнительных статей с примерами . . . . .	197