

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ имени М.В. ЛОМОНОСОВА
КАФЕДРА АСТРОФИЗИКИ И ЗВЕЗДНОЙ АСТРОНОМИИ
КАФЕДРА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ АСТРОНОМИИ

Составители:

Проф. А.С. РАСТОРГУЕВ

К.ф.-м.н., ст.н.с. М.В. ЗАБОЛОТСКИХ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТ СПЕКТРАЛЬНО-ДВОЙНЫХ
ЦЕФЕИД И МАСС ИХ СПУТНИКОВ**

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

По мнению многих исследователей, доля звезд, входящих в двойные и кратные системы, составляет примерно 70%. При этом доля спектрально-двойных звезд (далее SB – spectral binary) (т.е. двойных, проявляющих свою двойственность через периодические изменения лучевой скорости), по некоторым оценкам, может достигать 30%. Очевидно, что компоненты SB близки в пространстве, поскольку орбитальная скорость выявленных SB имеет порядок от единиц до более сотни км/с. Разумеется, подавляющее большинство таких звезд не разрешается на компоненты при оптических наблюдениях.

Изучение двойных звезд различных типов приносит богатую астрофизическую информацию. Хорошо известно, что двойные звезды с известными линейными размерами орбит компонентов – самый надежный источник данных о массах звезд [1,2]. Для них удается определить массы двух компонентов. Как правило, спектрально-двойные звезды не дают такой возможности уже из-за того, что наклон орбитальной плоскости к лучу зрения известен для них лишь в исключительных случаях (например, когда система одновременно является затменной двойной, т.е. луч зрения лежит почти в плоскости орбиты). Поэтому для них может быть определена минимальная масса компонентов. Для SB, в спектре которых присутствуют линии обоих компонентов (их называют также SB2), по амплитудам лучевых скоростей компонентов K_1 и K_2 может быть определено отношение их масс:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{K_2}{K_1}.$$

Массы компонентов SB, в спектре которых видны линии лишь одного компонента (их называют SB1; таких спектрально-двойных большинство) могут быть оценены лишь с привлечением косвенных данных, например, о классе светимости звезд. Именно к такому классу двойных относятся спектрально-двойные цефеиды. Вследствие огромных линейных размеров звезд (достигающих а.е.) их орбиты должны быть велики и, следовательно, орбитальные периоды составляют сотни и даже тысячи суток. Следует ожидать существования слабой корреляции между периодом пульсаций (и, следовательно, светимостью) и орбитальным периодом.

Вряд ли у долгопериодических цефеид могут быть встречены короткие орбитальные периоды. Самые короткие орбитальные периоды известны у цефеид AU Peg (53.3 сут.) и TX Del (133.4 сут.). Интересно, что на основании других данных ряд исследователей относит обе эти звезды к числу цефеид сферической составляющей (типа W Vir), находящихся на совершенно другой стадии эволюции и обладающих в среднем меньшей светимостью при тех же значениях периода.

Известно, что цефеиды являются сверхгигантами или яркими гигантами (что соответствует классам светимости I-II). Их массы можно оценить по светимости, которая сама связана с периодом пульсаций *зависимостью "период - светимость"* [3,4] типа

$$\langle M_V \rangle_I = -1.01^m - 2.87^m \cdot \lg P \text{ (в сутках)}$$

где $\langle M_V \rangle_I$ - средняя по периоду пульсаций абсолютная величина цефеиды в лучах (усреднение производится не в шкале звездных величин, а в *единицах интенсивности потока излучения*), P – период пульсаций. Масса цефеиды может быть оценена по $\langle M_V \rangle_I$ с использованием эволюционных треков (например, [5]) для массивных звезд с возрастом менее 150 млн. лет. Определение параметров орбиты двойной цефеиды позволяет решить три задачи. **Во-первых**, найти V_g - среднюю скорость, или скорость центра масс двойной системы, используемую, например, для изучения кинематики диска Галактики. **Во-вторых**, определить минимальную массу ее спутника и всей системы, что наряду с физическими параметрами орбит представляется важным для изучения морфологии и эволюции двойных звезд. И, **в-третьих**, отделить вклад орбитального движения от пульсационного и выделить пульсационную кривую лучевых скоростей, которую можно использовать, в частности, для определения радиуса цефеиды *методом Бааде – Беккера – Весселинка* [6]. Решению этих задач способствует быстрое накопление высокоточных данных о лучевых скоростях цефеид, полученных, главным образом с помощью *корреляционных спектрографов* (см., например, [7]).

2. НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ И ЕГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ.

Практически все опубликованные измерения лучевых скоростей цефеид приводятся в базе данных Л.Н. Бердникова [8]. Для многих цефеид уже накоплены ряды, содержащие от многих десятков до двух сотен индивидуальных измерений лучевых скоростей. Наблюдения, выполненные разными авторами, характеризуются разной точностью. Например, точность измерения лучевых скоростей, достигаемая традиционной спектроскопической методикой (по фотографическим измерениям отдельных спектральных линий) составляет примерно 5 км/с. Она несколько выше для ярких цефеид. Корреляционные измерения имеют точность порядка 0.5 – 1 км/с и представляют для данной задачи наибольший интерес. За 2 последних десятилетия накоплены обширные и однородные ряды высокоточных корреляционных лучевых скоростей более 200 цефеид.

Примечание: Многие цефеиды показывают заметные эволюционные изменения пульсационных периодов в течение всего времени наблюдений. Это

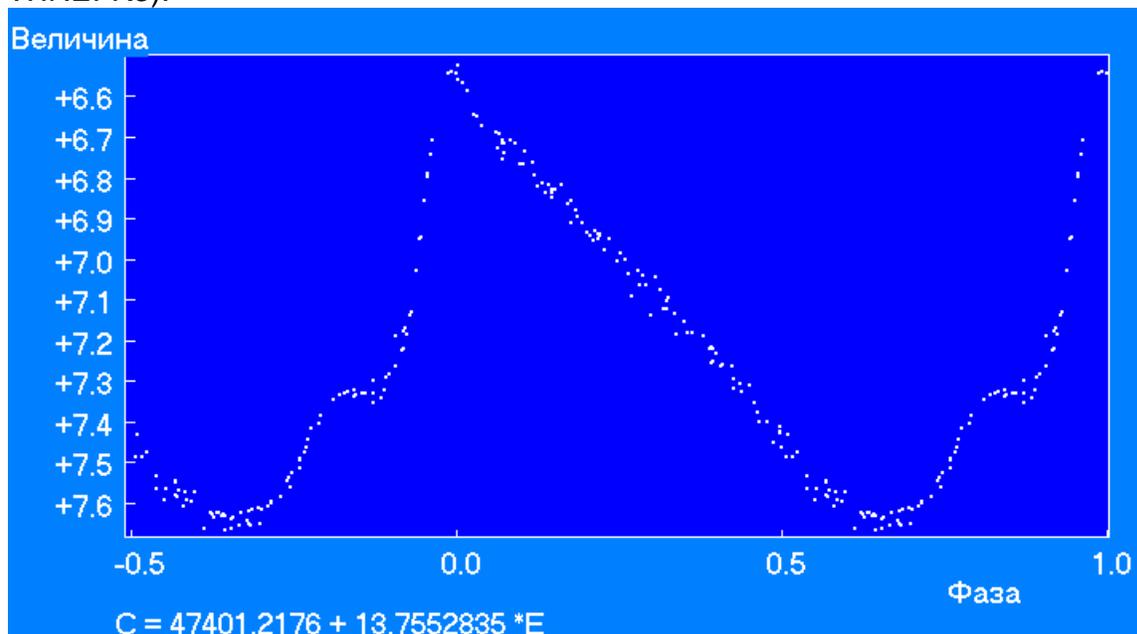
приводит к тому, что весь ряд уже не может описываться единой пульсационной кривой с одним значением периода. Прежде чем приступить к вычислению орбиты, следует выяснить, можно ли использовать единое значение периода для представления пульсационной кривой V_r во всем интервале дат. Реализованный в данной практической работе метод применяется именно к таким рядам наблюдений.

Для проверки следует воспользоваться данными фотоэлектрической фотометрии, приведенными в упомянутой базе данных [8]. Выберите фотометрические ряды, заполняющие тот же интервал дат, что и ряды измерений V_r . Рассчитав по приводимой ниже формуле (1) пульсационные фазы, постройте сводную *кривую блеска* (или фазовую кривую) для всего интервала дат. В расчетах орбиты следует использовать только те ряды измерений V_r , для которых пересекающиеся по датам фотометрические данные хорошо ложатся на сводную кривую блеска, построенную по всем рядам.

$$f_{pls} = \text{Frac}[(t_i - t_0) / P_{pls}], \quad (1)$$

где t_i – момент наблюдений, t_0 – так наз. *начальная эпоха* (момент максимального блеска), P_{pls} – период пульсаций, Frac – оператор вычисления дробной части. Два параметра (начальную эпоху и период) можно взять из Общего каталога переменных звезд [9]. Кроме того, постоянство пульсационного периода на всём интервале или его части можно проверить с помощью популярной программы исследования временных рядов WINEFK3 (Программа В.П. Горанского WINEFK3 при необходимости может быть получена у автора задачи А.С. Расторгуева (alex.rastorguev@gmail.com)). Приёмы работы с этой программой подробно даны в описании задачи практикума №11, доступной по адресу https://www.sai.msu.ru/ao/speccourses/posobiya/z11_rastor.pdf).

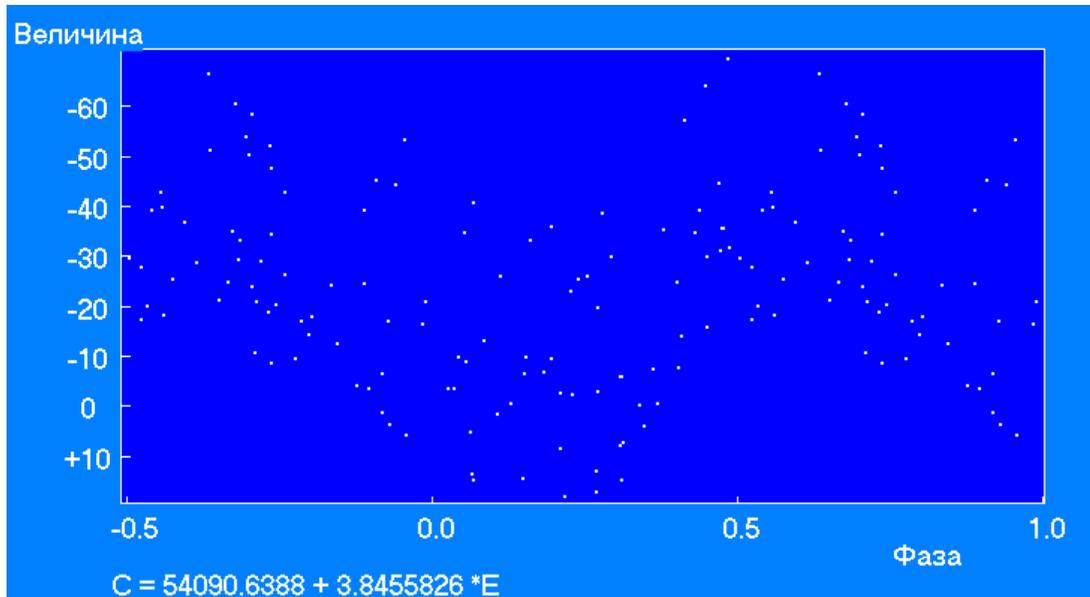
Если изменениями периода можно пренебречь, индивидуальные измерения блеска и цвета будут хорошо (т.е. с малым рассеянием) «ложиться» на фазовую кривую, например, так, как показано на следующем рисунке (окно программы WINEFK3):



В подобных случаях для решения задачи можно использовать приведённый в ОКПЗ или самостоятельно определённый по фотометрическим данным период (с помощью какой-либо из рекомендованных программ).

Примечание: в данной задаче студентам даётся значение периода.

Фазовая кривая изменения лучевых скоростей, «свёрнутая» с пульсационным периодом, показана на следующем рисунке (окно программы WINEFK3):



Вертикальное рассеяние обусловлено, как легко сообразить, орбитальным движением цефеиды, «размах» которого, как видно из диаграммы для этой цефеиды, достигает 60 км/с.

Зачастую измерения лучевых скоростей проводились разными исследователями. В исходном файле отдельным сетам данных приписываются свои номера. Как правило, отдельные сетки *неравноточные*. При наличии не только случайных, но и систематических ошибок измерений ошибки измерений скорости, ошибки скорости, приводимые отдельными авторами, могут быть не вполне точны. Поэтому объективной интегральной (т.е. относящейся ко всему сету) характеристикой точности служит рассеяние отдельного сета наблюдений (присвоим ему условный номер j) относительно общего решения для орбитальной и пульсационной кривых, что и позволяет, в конечном счете, приписать сету определенный вес (в первом приближении обратно пропорциональный сумме квадратов остаточных уклонений):

$$W_j = \frac{1}{s_j^2}, \quad s_j^2 \approx \frac{1}{L_j} \sum_{k=1}^{L_j} (V_k^j - V_k^{mod})^2 \quad (2)$$

где V_k^j, V_k^{mod} – соответственно измеренная скорость j -го сета и модельная скорость

для текущей даты измерений (4), найденная предыдущей итерацией, L_j – число измерений в j -м сете измерений V_r . Поскольку определение параметров орбит проводится итерационным методом, то вес сета наблюдений, оцененный после предыдущей итерации, будет использоваться на следующем шаге. Опыт показывает, что итерационное вычисление весов отдельных сетов быстро сходится. В качестве априорной оценки веса может быть использована величина характерной ошибки измерения лучевой скорости, приводимая в оригинальных работах.

В случае, когда информация об ошибках измерений V_r отсутствует или сделать независимую оценку веса сета не удастся, следует в первом приближении приписать всем наблюдениям равный вес (как правило, различия весов будут видны уже после первой итерации). Итак, i -я строка файла (массива) исходных данных после предварительного анализа наблюдений включает в себя следующую информацию:

- 1) t_i – гелиоцентрическая юлианская дата измерения ($JD_{hel} - 2400000$);
- 2) $V_r(i)$ – измеренная гелиоцентрическая лучевая скорость в км/с;
- 3) j – номер сета наблюдений.

3. МЕТОД РАСЧЕТА ОРБИТЫ И ПУЛЬСАЦИОННОЙ КРИВОЙ.

Орбита двойной цефеиды описывается следующими пятью элементами:

T_0 – момент прохождения перицентра орбиты;

P_{orb} – орбитальный период (в сутках);

e – эксцентриситет орбиты;

ω – долгота перицентра орбиты;

K – полуамплитуда орбитальной лучевой скорости.

Наблюдаемая лучевая скорость цефеиды представляется в виде суммы модельной скорости $V_r^{mod}(i)$ и невязки $\delta V_r(i)$:

$$V_r(i) = V_r^{mod}(i) + \delta V_r(i) \quad (3)$$

Здесь модельная скорость – сумма трёх компонентов

$$V_r^{mod}(i) = V_g + V_{orb}(i) + V_{pls}(i) \quad (4)$$

где V_g – скорость центра масс системы; V_{orb} – орбитальная скорость цефеиды; V_{pls} – пульсационный вклад в лучевую скорость. Скорость орбитального движения выражается в стандартном виде через *элементы орбиты* (формула (6.16) на стр. 118 в [2]):

$$V_{orb}(i) = K \cdot [e \cdot \cos(\omega) + \cos(v_i + \omega)], \quad (5)$$

где $v(i)$ – *истинная аномалия*. Для описания пульсационного вклада в лучевую скорость рекомендуется использовать разложение в тригонометрический ряд:

$$V_{pls}(i) = \sum_{k=1}^N [A_k \cdot \sin(2\pi \cdot k \cdot \frac{t_i - t_0}{P_{pls}}) + B_k \cdot \cos(2\pi \cdot k \cdot \frac{t_i - t_0}{P_{pls}})], \quad (6)$$

где P_{pls} - пульсационный период, а t_0 - эпоха максимума блеска (взяты из ОКПЗ [9]; см. выше); N - порядок разложения.

Задача определения параметров орбиты и коэффициентов тригонометрического ряда (6) $\{A_k, B_k\}$ сводится, таким образом, к решению *системы условных уравнений* (3) с весами (2) с помощью одного из *оптимизирующих методов*, например, МНК. Неизвестные параметры $\{A_k, B_k\}, V_g, K$ входят в эти уравнения *линейно*, тогда как элементы орбиты T_0, P_{orb}, e, ω – *нелинейно*, в том числе и через истинную аномалию $v(i)$; это легко видеть из выражения (5).

Вспомним связь истинной аномалии с элементами орбит и способ ее вычисления. Приводим вспомогательные формулы, которые должны последовательно использоваться для вычисления истинной аномалии:

– *среднее движение*:
$$m = \frac{2\pi}{P_{orb}}$$

– *средняя аномалия (в радианах)*:
$$M(i) = m \cdot (t_i - t_0) \quad (7)$$

– *эксцентрисическая аномалия (в радианах)*:
$$E(i) = M(i) + e \cdot \sin(E(i)) \quad (8)$$

– *истинная аномалия (в радианах)*:
$$tg \frac{v(i)}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot tg \frac{E(i)}{2}. \quad (9)$$

Практическая рекомендация #1: найденные значения углов M, E, v на каждом шаге вычислений рекомендуется привести к фазовому интервалу $[0, 2\pi]$.

Для решения уравнения (8) (его называют *уравнением Кеплера*) относительно эксцентрисической аномалии E обычно используют *метод итераций* по j в виде

$$E_{j+1} = M + e \cdot \sin E_j \quad (10)$$

где E_j, E_{j+1} - последовательные значения E . В качестве первого приближения удобно принять $E_1 = M$. Условием прекращения итераций может стать требование малости разности $|E_{j+1} - E_j| < \varepsilon$. При малых значениях эксцентриситета e процесс итераций быстро сходится. Однако для некоторых орбит с большим эксцентриситетом, а также при использовании методов оптимизации, где используется перебор значений отыскиваемых параметров (например, в *методе деформируемых многогранников Нелдера-Мида*), возможно замедление работы программ из-за медленной сходимости итераций.

Практическая рекомендация #2: чтобы сохранить физический смысл отыскиваемых параметров, следует постоянно контролировать в ходе вычислений неотрицательность текущих значений эксцентриситета e и среднего движения m (или, что одно и то же, орбитального периода P_{orb}), в особенности если

используются методы оптимизации с последовательным перебором значений нелинейных параметров.

Решение системы условных уравнений (4) сводится, таким образом, к минимизации функции

$$S = \sum_{i=1}^L [V_r(i) - V_g - V_{orb}(i) - V_{pls}(i)]^2 \cdot W_i, \quad (11)$$

где суммирование производится по отдельным наблюдениям и L – их полное число наблюдений. Сделать это можно с помощью любого из известных оптимизирующих алгоритмов, реализации которых существуют для популярных языков программирования (Fortran, Pascal, C++ и др.) и вычислительных сред (например, MATLAB, SCILAB, PYTHON и т.п.). Проще всего использовать линейный МНК для линеаризованной задачи (11).

Практическая рекомендация #3: Можно поступить по-другому, фактически разделив наборы линейных $\{A_k, B_k\}, V_g, K$ и нелинейных T_0, P_{orb}, e, ω неизвестных параметров. Очевидно, что при фиксированных значениях четырех нелинейных параметров T_0, P_{orb}, e, ω линейные параметры могут быть найдены с помощью несложно реализуемого линейного МНК. Поскольку многие методы решения нелинейных систем условных уравнений используют в той или иной степени именно «перебор» текущих значений нелинейных неизвестных, этот прием позволяет понизить порядок системы до 4-го и заметно уменьшить вычислительные затраты.

Весьма удобен для решения задачи метод деформируемых многогранников (или *Симплекс-алгоритм*), не требующий вычисления производных и при небольшом (до 6 – 7) числе неизвестных эффективно отыскивающий решение (см., например, [10]). Для упомянутых языков имеются готовые подпрограммы с этим алгоритмом.

Начальную оценку основных орбитальных элементов – периода и эксцентриситета – можно произвести одним из следующих двух способов (рекомендуется первый из них):

(1) В лучших программах анализа периодичностей (например, в WINEFK3) предусмотрена возможность «снять» с наблюдаемого ряда измерений уже известный пульсационный период, другими словами, выполнить «отбеливание» ряда, и найти период остаточных уклонений, связанный именно с орбитальным движением. Как показывает опыт, найденный период можно использовать в качестве первого приближения P_{orb} , и по форме «орбитальной кривой» V_r , как и в предыдущем случае, несложно оценить и начальный эксцентриситет орбиты.

(2) Выберем короткий (по возможности, не длиннее 30-40 суток, чтобы за это время эффект изменений скорости за счёт орбитального движения практически не был замечен) и плотный ряд наиболее точных измерений лучевой скорости и представим его в виде тригонометрического, аналогичного (6), но с добавлением константы V_0 (отражающей сумму орбитальной скорости для текущего интервала наблюдений и гамма-скорость системы):

$$V_{pls}(i) = V_0 + \sum_{k=1}^N [A_k \cdot \sin(2\pi \cdot k \cdot \frac{t_i - t_0}{P_{pls}}) + B_k \cdot \cos(2\pi \cdot k \cdot \frac{t_i - t_0}{P_{pls}})], \quad (12)$$

т.е. фактически сделаем предварительную оценку формы пульсационной кривой. Определив с помощью линейного МНК коэффициенты этого ряда, вычислим по формуле (12) для каждого момента t_i приближенный пульсационный вклад $V_{pls}(i)$. Очевидно, что разность $\Delta V_r(i) = V_r(i) - V_{pls}(i)$ является грубым представлением орбитального движения. Остаточные уклонения $\Delta V_r(i)$ можно проанализировать с целью поиска периодичности с помощью одной из уже упомянутых популярных программ анализа периодичностей. Следует выбирать интервал поиска периодов в пределах от 300 до 2000 суток – это типичный интервал орбитальных периодов для двойных цефеид. Найдя пик на периодограмме, можно просмотреть фазовую кривую и, если она асимметрична, сделать вывод об эксцентриситете орбиты.

Примечание: По физическому смыслу задачи полуамплитуда орбитальной скорости K положительна; если в результате решения получилось $K < 0$, следует поменять его знак и одновременно сделать замену $\omega \rightarrow \omega + \pi$. Уравнение (5) это допускает.

По найденным орбитальным параметрам и коэффициентам пульсационной кривой A_k, B_k с помощью формул (5,6) можно рассчитать орбитальную и пульсационную лучевую скорость для каждого момента времени и найти невязки

$$\delta V_r(i) = V_r(i) - V_g - V^c_{orb}(i) - V^c_{pls}(i),$$

где V^c_{orb} и V^c_{pls} - вычисленные по формулам (5, 6) скорости. Функции

$$V^o_{orb}(i) = V^c_{orb}(i) + \delta V_r(i) / 2, \quad (13)$$

$$V^o_{pls}(i) = V^c_{pls}(i) + \delta V_r(i) / 2, \quad (14)$$

где невязки поровну делятся между орбитальным и пульсационным изменением лучевой скорости, можно интерпретировать соответственно как «наблюдаемые» орбитальные и пульсационные кривые, обремененные ошибками (хотя и введенными в предположении, что «точность» представления орбитального движения и пульсаций одинакова). Их графики строятся на интервалах $[0,1]$ для орбитальной и пульсационной фаз соответственно:

$$f_{orb} = \text{Frac} \frac{t_i - t_0}{P_{orb}},$$

$$f_{pls} = \text{Frac} \frac{t_i - t_0}{P_{pls}},$$

Средние квадраты невязок для отдельных рядов измерений L_j , вычисленные по формулам (где L_j - число измерений в j -м ряде, а M - полное число отыскиваемых параметров)

$$s_j^2 = \frac{1}{L_j - M} \cdot \sum_{i=1}^{L_j} \delta V_r(i)^2 \quad (15)$$

являются их мерой точности и могут быть использованы для уточнения весов W_j , после чего вся процедура расчета элементов орбиты повторяется.

Рисунки с фазовыми кривыми – орбитальной и пульсационной – и нанесёнными на них оригинальными измерениями следует приложить к отчёту о решении задачи практикума.

4. ОЦЕНКА МАССЫ ЦЕФЕИДЫ И ЕЕ СПУТНИКА.

4.1. Определение массы цефеиды.

Масса цефеиды определяется по её положению в *полосе неустойчивости* на диаграмме Герцшпрунга–Рессела (или диаграмме «цвет–величина»), области, где звезды неустойчивы по отношению к радиальным пульсациям. Цефеидами становятся самые массивные звезды поля или молодых рассеянных скоплений, смещающиеся вдоль эволюционного трека от главной последовательности в область, занимаемую красными звездами, или обратно. Подавляющее большинство цефеид находится на эволюционной стадии «горения» гелия в ядре, т.е. **на втором или третьем пересечении полосы неустойчивости** (первое пересечение – трек от главной последовательности в сторону красных сверхгигантов – цефеиды проходят очень быстро и их практически не наблюдают на этой стадии). В области пересечения с полосой неустойчивости эволюция звезды происходит практически без изменения ее светимости, поэтому с необходимой точностью достаточно определить светимость и показатель цвета цефеиды по полуэмпирическим зависимостям «период–светимость» и «период–цвет». Можно воспользоваться, например, зависимостью «период–светимость», приведенной в 1-м разделе, а в качестве зависимости «период–цвет» использовать зависимость [3]:

$$\langle B_0 - V_0 \rangle_I = 0.28^m + 0.47^m \cdot \lg P_{pls} \text{ (в сутках)}$$

Для цели, поставленной в данной практической работе, достаточно использовать изохроны (т.е. линии равного возраста звёзд), построенные для солнечных содержаний тяжёлых химических элементов ($Z=0.019$) и первичных нуклидов (α -элементов). Эти таблицы изохрон, рассчитанных Падуанской группой [5], прилагаются к описанию данной практической работы.

Построив изохроны для набора значений возрастов в координатах «цвет–абсолютная величина» $M_V - (M_B - M_V)$ (для этого используются столбцы B, V) таблицы изохрон) подберите изохрону, проходящую вблизи рассчитанного положения цефеиды на этой диаграмме. В 3-м столбце таблицы изохрон, примерно соответствующей вычисленному цвету (B-V) и вычисленной абсолютной величине M_V , будет указана текущая масса звезды вблизи данного положения на диаграмме «цвет–величина»; эту массу можно считать очень близкой к искомой массе цефеиды.

4.2. Функция масс.

Зная элементы орбит, можно рассчитать *функцию масс* для двойной системы, содержащей цефеиду:

$$f(M_1, M_2) = \frac{M_2^3 \cdot \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = 1.038 \cdot 10^{-7} \cdot K^3 \cdot P_{orb} \cdot (1 - e^2)^{3/2}, \quad (16)$$

а также величину

$$a \cdot \sin i = 86400 \cdot K \cdot P_{orb} \cdot (1 - e^2)^{1/2}, \quad (17)$$

где i – угол наклона орбиты к картинной плоскости, a – большая полуось орбиты цефеиды относительно центра масс системы, выраженная в а.е.; K и P_{orb} выражены соответственно в км/с и сутках.

Обычно угол наклона орбиты i неизвестен (только для затменно-двойных звезд, как легко понять, он близок к 90°). Однако, полагая $\sin i = 1$, мы можем оценить *минимальную* массу спутника цефеиды. Для этого нужно вычислить функцию масс $f(M_1, M_2)$ и, подставив массу цефеиды M_1 , найденную по изохронам, а также приняв $\sin i = 1$, найти минимальную массу спутника M_2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Курс астрофизики и звездной астрономии. 1962. Т.2. С.87. М.: ГИФМЛ.
2. Куто П. Наблюдения визуально-двойных звезд. М.: Мир, 1981.
3. Бердников Л.Н., Ефремов Ю.Н. // Астрон. цирк. 1985. No.1388.С.1-3.
4. Бердников Л.Н., Возякова О.В., Дамбис А.К. // Письма в астрон. журнал. 1996.
5. Girardi L., Bertelli G., Bressan A., et al. // Astronomy and Astrophysics. 2002. V.391. Pp.195-212.
6. Baade W. // Astr. Nachr. 1926. V.228. P.359.
7. Токовинин А.А. // Астрон. журн. 1987. Т.63. С.196-202.
8. Бердников Л.Н. // ASP Conference Series. 1995. V.83. P.349.
9. Общий каталог переменных звезд. Т. I-IV. М.: Наука. 1985 - 1990.
10. Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. Numerical Recipes (The art of Scientific Computing). Cambridge: Cambridge University Press. 1997. P.289.

Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2002–2024.