

Моделирование оптической атмосферной турбулентности и некоторые его результаты

Курсовая работа
студента 436 группы
Сафонова Б.С.
Научный руководитель
к.ф.—м.н
Корнилов Виктор Геральдович
Рецензент
к.ф.—м.н
Потанин Сергей Александрович

Содержание

1	Введение	2
2	Численная модель распространения света в турбулентной атмосфере	3
2.1	Искажение в турбулентном слое	3
2.2	Распространение	6
2.3	Построение изображения и расчет качества изображения	6
2.4	Технические характеристики	7
3	Статистическое исследование мерцаний. Моделирование MASS.	7
3.1	Моделирование	8
3.2	Статистический анализ модельных данных	9
3.3	Сравнение с экспериментальными данными	13
3.4	Выводы	15
4	Проверка алгоритмов MASS и DIMM в условиях сильной турбулентности.	15
4.1	Модель MASS и DIMM	16
4.2	Алгоритмы DIMM и MASS	17
4.3	Результаты	18
5	Моделирование спекл-интерферометра	19
5.1	Моделирование наблюдательных данных.	19
5.2	Метод спекл-интерферометрии	21
5.3	Анализ	23
6	Выводы	24
A	Уровни значимости	26

1 Введение

Атмосфера земли — очень беспокойное место. Все время в ней то тут, то там возникает разница давлений. А там где есть разница давлений — там есть течение — ветер. Параметры этих течений таковы, что в них неизбежно возникает турбулентность. Например, клочковатая форма облаков и дыма из труб свидетельствует о наличии турбулентности в атмосфере. Турбулентный характер течения и неизотермичность атмосферы приводят к появлению флуктуаций температуры, а следовательно, и показателя преломления. Свет далеких звезд, распространяясь сквозь них, случайным образом преломляется и изображение звезды дрожит и расплывается. И хоть флуктуации эти ничтожны, так как показатель преломления воздуха мало отличается от единицы, но благодаря большой толщине турбулентной атмосферы и высокой разрешающей силе современных телескопов они становятся основным фактором ограничивающим возможности крупных наземных телескопов. Какой большой телескоп мы бы ни взяли, без применения специальных методов на нем нельзя будет добиться разрешения лучше 0.5—1.0 угловой секунды, да и то в лучших местах.

Турбулентность — процесс стохастических и нестационарный, и поэтому очень сложный для точного аналитического описания. Полностью задача о турбулентности не решена до сих пор, хотя построено немало моделей, неплохо описывающих реальность. Например, Колмогоров А.Н., исходя из законов подобия, в 1941 году предложил структурную функцию флуктуаций температуры — зависимость среднего квадрата разности температур от расстояния между точками, для которых эта разность измеряется. С помощью неё можно вычислить структурную функцию для показателя преломления, а она, в свою очередь, вместе с предположением о распространении света в атмосфере по Френелю, позволяет решить задачу о распространении света в турбулентной атмосфере [8]. Данная теория является статистической, так как изучаемый процесс стохастический и многие её результаты получаются только после дополнительных приближений, таких как приближение стационарных приращений, приближение плавных возмущений и так далее. Единственная возможность независимо проверить область применений этих приближений — численно смоделировать процесс распространения, отказавшись от них. Кроме того, подобная модель имела бы ряд интересных применений, таких, как моделирование астрономических приборов, результаты работы которых существенно зависят от размывания изображений атмосферой.

Глава 2 данной работы посвящена построению такой численной модели. Эта модель основывается на следующих предположениях о распространении света:

1. Турбулентность в атмосфере сосредоточена в нескольких слоях, толщиной которых по сравнению с расстоянием между ними можно пренебречь.
2. Турбулентность стационарна и изотропна. Спектр мощности флуктуаций показателя преломления соответствует модели Колмогорова $D r^{2/3}$
3. Световая волна между этими слоями распространяется в приближении Френеля

Такая модель имеет ряд интересных применений в первую очередь в области моделирования астрономической аппаратуры. Актуальность такой работы подтверждается появлением в последнее время статей о похожих моделях, созданных специально для моделирования адаптивной оптики [12], [13].

За последние 30—40 лет было придумано немало методов измерения атмосферной турбулентности. Построенная модель предоставляет хорошую возможность проверить их работоспособность. Для примера мы взяли широкораспространенный прибор для измерения профиля атмосферной турбулентности — MASS (MultiAperture Stintillation Sensor). Принцип действия этого прибора основан на измерении мерцаний звезд. Причем его алгоритм предполагает выполнение так называемое приближения плавных возмущений [8]. В главе 3 мы проверим некоторые статистические свойства мерцаний, которые предсказывает приближение плавных возмущений. А затем в главе 4 мы проверим работоспособность алгоритма MASS. Еще один

прибор, работу который мы моделировали — DIMM — измеряет текущее качество изображения (seeing) по дифференциальному дрожанию изображений звезды. Его алгоритм также тесно связан с приближением малых возмущений. В главе мы оцениваем систематические ошибки DIMM, которые появляются только за счет некорректного применения этого приближения.

Также наша модель является хорошим инструментом при моделировании аппаратуры, позволяющей добиться дифракционного разрешения на крупном телескопе, ведь задача этих приборов сводится к борьбе с атмосферой. В главе 5 мы моделировали спекл—интерферометр. Точнее, нас интересовало, как зависят погрешности метода от качества изображения.

Вообще, каждую из этих задач моделирования можно разделить на прямую и обратную. Обычно природа сама "решает" прямую задачу а человек старается по проявлениям этого решения узнать начальные условия — решить обратную задачу. Когда же мы моделируем весь процесс, то можно сказать, что мы сами себе задаем загадку, а потом сами же её и решаем. Причем и то и другое — достаточно ресурсоемкие процессы. На самом деле, подобное моделирование дает огромные возможности проверки алгоритмов решения обратных задач (в реальности такой возможности не будет!), так как мы можем смоделировать произвольные начальные условия. В целом можно сказать, численное моделирование призвано помочь человеку заглянуть в области недоступные ни теории, ни опыту. Хотя, по сути, это всего лишь выполнение огромного числа арифметических операций...

2 Численная модель распространения света в турбулентной атмосфере

Алгоритм модели основан на принципах изложенных в [1] и реализован на языке с++. Световая волна в этой модели задается дискретным образом, т.е. в виде массива комплексных чисел. Числа имеют смысл комплексной амплитуды световой волны. Например, неискаженный волновой фронт от удаленной звезды можно считать абсолютно плоским. Следовательно, весь массив заполняется числами $[1, 0]$. Такой выбор представления связан с тем, что к подобным массивам применим алгоритм быстрого преобразования Фурье (отсюда также идет требование к размеру массивам — он должен быть степенью двойки — 256, 512, 1024 и так далее). В модели часто возникает потребность применять преобразование Фурье к световой волне, а БПФ — наиболее экономичный алгоритм, реализующий это преобразование. Правда, у этого алгоритма есть существенный минус — на пространственных периодах, сравнимых с размерами массива или с размерами одного пиксела он дает неверные результаты. Это связано с тем, что алгоритм БПФ воспринимает исходную волну (и её спектр тоже), как *периодическую* с периодом равным размеру массива, что дает неверную структурную функцию фазового экрана. Эта, на первый взгляд неприятная, особенность пригодится при дальнейшем моделировании. Кроме того, в данном случае она не слишком существенна, так как изучаемые пространственные периоды находятся далеко от размеров массива и размеров пиксела (об этом подробнее в [1]). Важно, что все операции со световой волной, описанные ниже, не влияют на её периодичность.

Мы предполагали, что атмосферная турбулентность в модели присутствует в нескольких тонких слоях. В атмосфере к волновому фронту применяются две основные операции — прохождение через турбулентный слой (раздел 2.1) и распространение в однородной среде (раздел 2.2).

2.1 Искажение в турбулентном слое

В процессе прохождения через турбулентный слой волновой фронт испытывает чисто фазовые искажения $F(x, y)$ ($F(x, y)$ — действительная функция). Причем, эти искажения имеют Колмогоровский спектр мощности [1].

$$\tilde{P}(f_x, f_y) = 0.023r_0^{-\frac{5}{3}}|f|^{-\frac{11}{3}}, \quad (1)$$

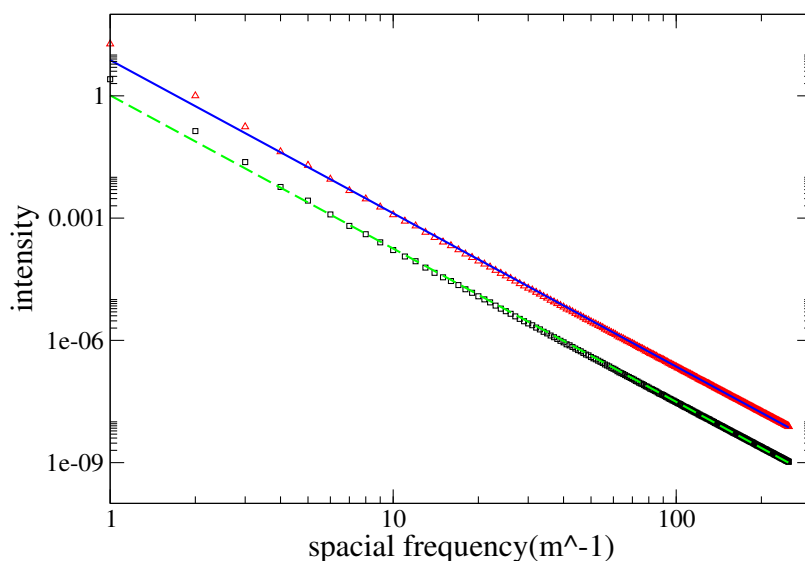


Рис. 1: Пример спектра мощности фазового экрана. Квадраты — модельные точки для начального радиуса Фрида 0.1м, треугольники — для радиуса Фрида 0.03. Прямые - аппроксимация степенной зависимостью. Верхняя прямая $y = 7.55x^{-3.8}$, нижняя — $y = 1.03x^{-3.8}$.

где r_0 — радиус Фрида, параметр, определяющий интенсивность турбулентности для данного слоя, а $|f|$ — модуль пространственной частоты. В модели сначала строится случайный спектр фазовых искажений $\tilde{F}(f_x, f_y)$, соответствующий спектру мощности $(1)\tilde{P}(f_x, f_y) = \tilde{F}^2(f_x, f_y)$. (далее тильдой будет обозначаться Фурье-образ соответствующей функции) Каждый пиксел спектра — случайное число, распределенное по нормальному закону $N(0, \tilde{P}(f_x, f_y))$ Затем к этому спектру применяется обратное преобразование Фурье и, как результат, получается фазовый экран — массив действительных чисел $F(x, y)$.

Дабы убедиться в том, что полученный фазовый экран соответствует модели Колмогорова, мы строили его спектр мощности и проверяли, как хорошо он аппроксимируется формулой (1) (см. рис. 1). Это операция также позволяет определить значение радиуса Фрида r_0 для со-

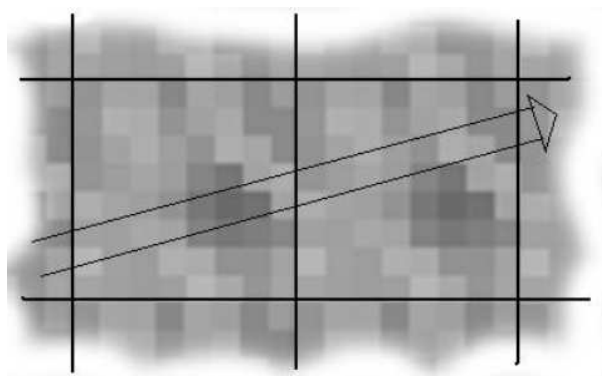


Рис. 2: Периодическая структура фазового экрана. Стрелка показывает изучаемую область (например, через эту область проходит часть световой волны, которая потом попадает в апертуру). Видно, что можно существенно увеличить расстояние, на которое переносится фазовый экран ветром за счет его периодичности!

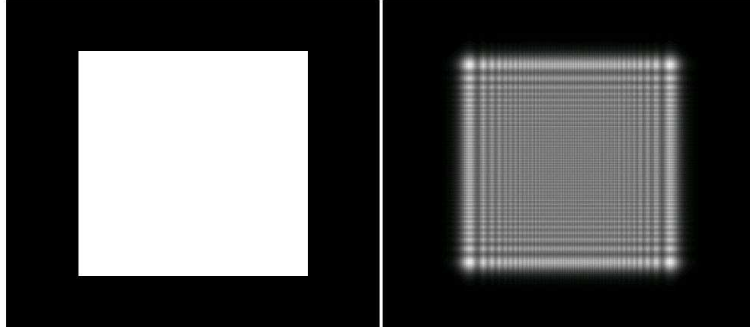


Рис. 3: Дифракция на краях массива (дистанция 1 км). Видно, что если бы *вне* массива света бы не было, первоначальная картина *внутри* была бы сильно искажена даже при распространении на незначительную дистанцию.

ответствующего экрана, что является необходимым по следующим причинам. В связи с трудностями правильной нормировки при преобразованиях Фурье получающиеся значения r_0 не совпадают с теми, которые были подставлены в (1) (будем называть их начальными). Поэтому приходится сначала генерировать фазовый экран, а потом "измерять" его истинный радиус Фрида. Для этого спектр мощности фазового экрана аппроксимируется функцией $Ax^{-11/6}$, а затем из коэффициента A вычисляется истинное r_0 (при помощи (1)). Например, при моделировании MASS (см. раздел 3.1) использовались фазовые экраны с начальными радиусами Фрида 3, 6 и 12 см, соответствующие истинные значения составили 2.45, 4.83, 9.83 (видно, что истинные значения r_0 пропорциональны начальным с коэффициентом 0.82 ± 0.01).

Отметим, что если попытаться взять интеграл по спектру (1) от нуля до бесконечности, то он не сойдется. Этот парадоксальный факт отнюдь не свидетельствует о том, что в турбулентных течениях содержится бесконечная энергия. Просто в реальности существуют некоторые пределы применимости Колмогоровской модели — так называемый внешний (30 м) и внутренний (2–5 мм) масштабы. В модели их роль играют соответственно размер всего раstra (5 м) и размер пиксела (5). Именно вследствие несоответствия этих масштабов и появляется небольшое различие в начальных и истинных радиусах Фрида.

Эту часть модели можно назвать генератором случайных фазовых экранов. Световая волна после прохождения фазового экрана будет выглядеть следующим образом:

$$A_b(x, y) = A_a(x, y)e^{iF(x, y)}, \quad (2)$$

где A_a — световая волна до фазировки, а A_b — после.

При моделировании также большое значение имеет изменение световой волны со временем. В реальности причина этих изменений в том, что турбулентный слой переносится ветром. При моделировании мы также перемещали фазовый экран с заданной скоростью в заданном направлении, причем предполагалось, что флуктуации показателя преломления при этом не эволюционируют (На самом деле они эволюционируют, но на значительно больших временах - это так называемая гипотеза замороженности). Подсчитаем, сколько времени можно использовать один фазовый экран. Принимая скорость ветра 10 м/с и размер фазового экрана 5 м получим 0.5 секунды, что не очень много. Это время можно увеличить, приняв во внимание, что рассматриваемый нами растр — лишь один период бесконечной световой волны и то, что одновременно используется лишь небольшая его часть, вырезаемая "апертурой". Если фазовый экран двигать под небольшим углом к оси ОХ, то "апертура" будет каждый раз проходить по новым участкам фазового экрана. Рисунок 2 иллюстрирует сказанное.

2.2 Распространение

Как уже говорилось, распространение света в модели описывается в приближении Френеля. Для этого образ Фурье световой волны домножается на так называемый фильтр Френеля:

$$\tilde{A}_b(f_x, f_y) = \tilde{A}_a(f_x, f_y)e^{i\pi z\lambda|f|^2}, \quad (3)$$

где z — дистанция распространения, λ — длина волны, $|f|$ — модуль пространственной частоты. Далее применяем обратное преобразование Фурье и получаем световую волну после распространения.

В операции распространения ключевую роль играет то, что находится *за краями* массива. Если бы там интенсивность световой волны была бы равна нулю, то вблизи краев после распространения возникали бы сильные дифракционные эффекты, которые бы исказили всю картину (см. рис. 3). То же самое бы имело место, будь на краю любой скачок комплексной амплитуды. Один из случаев, в котором этих скачков нет — это случай периодического фронта. Поэтому понимание растра как лишь одного периода бесконечного (периодического) световой волны оказывается очень полезным, так как позволяет преодолеть эту трудность.

Итак, распространение световой волны в атмосфере моделируется путем последовательно применения к нему операций фазировки и распространения. На рисунке 4 приведен пример световой волны искаженного одним турбулентным слоем и претерпевшего затем распространение на различные дистанции.

2.3 Построение изображения и расчет качества изображения

При астрономических наблюдениях, как правило, оперируют не непосредственно со световой волной, а с изображением звезды, построенным телескопом. Модели, о которых пойдет речь далее (см. главы 4 и 5) также имеют дело в основном с изображением объекта в фокальной плоскости телескопа. Амплитуда световой волны в фокальной плоскости и в плоскости объектива телескопа связаны преобразованием Фурье:

$$I(\omega_x, \omega_y) = A(x, y)\widetilde{T}(x, y), \quad (4)$$

где $T(x, y)$ — функция зрачка, описывающая прохождение световой волны через апертуру телескопа. В качестве примера приведем изображения, построенные круглой апертурой и квадратной (рис. 5). Также в главе 5 приведен пример изображения звезды, искаженного атмосферой (рис. 12).

Если просуммировать достаточно много мгновенных изображений звезды в разные моменты времени, то получится размытое пятно, характерное для обычных астрономических наблюдений. По этому пятну можно независимо определить качество изображения. Для этого нужно аппроксимировать распределение интенсивности в пятне функцией Гаусса:

$$G(\omega_x, \omega_y) = A \exp \frac{-(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{2\sigma^2}. \quad (5)$$

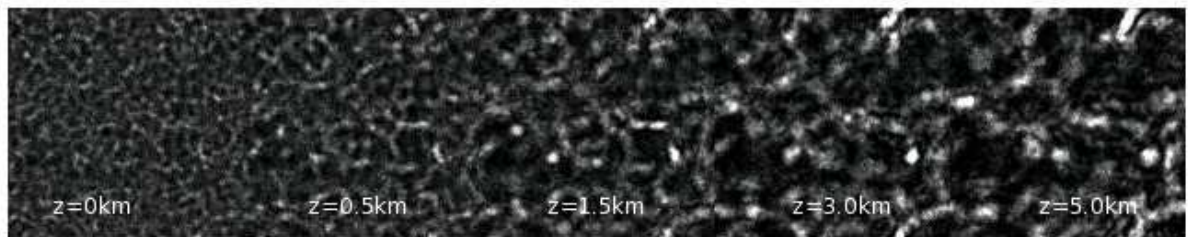


Рис. 4: Распределение интенсивности в искаженной световой волне после распространения на различные дистанции. Яркость пиксела пропорциональна интенсивности света. Видна характерная картина увеличения флуктуаций интенсивности с распространением.

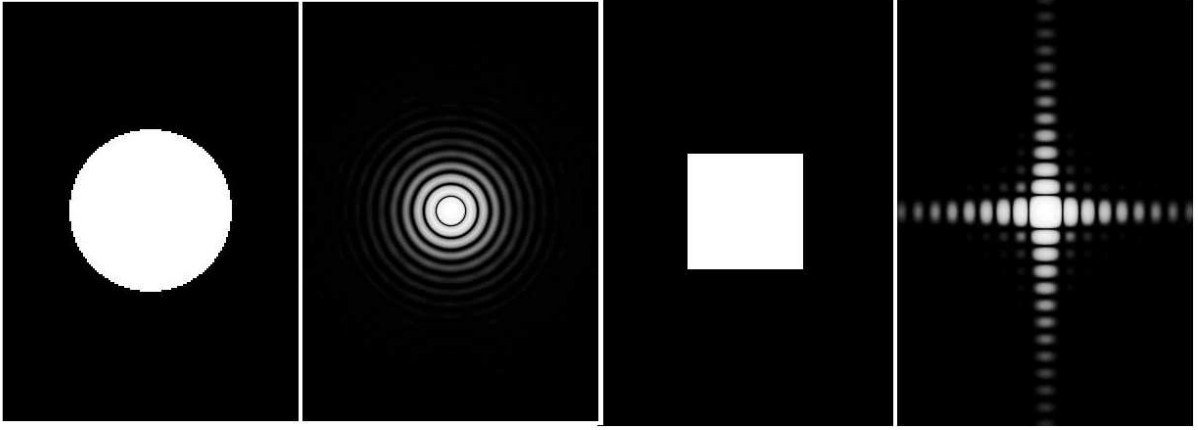


Рис. 5: Слева изображена круглая апертура и изображение, построенное с её помощью — так называемая функция Эйри. Справа то же для квадратной апертуры.

Полуширина этой гауссианы σ — и есть качество изображения β_0 - качество изображения в случае длинной экспозиции. Такой способ определения β_0 мы применили в главе 5. Качество изображения связано с r_0 формулой:

$$\beta_0 = 0.98 \frac{\lambda}{r_0} \quad (6)$$

2.4 Технические характеристики

Вышеописанная модель распространения света имеет базовые параметры, различные для разных задач. Для каждого случая они будут приведены отдельно в следующем формате:

```

nx = 1024 pix размер растра в пикселах
angular scale = 0.0167 arcsec/pix угловой размер пиксела растра в фокальной плоскости
linear scale = 0.0061 m/pix линейный размер пиксела в плоскости объектива
lambda = 5e-7 m длина волны
aperrad = 0.75 m (телескоп диаметром 1.5 метра)
layer1:angle = 15 deg направление ветра в турбулентном слое
layer1:wind = 10 m/s скорость ветра в турбулентном слое
layer1:height = 5000 m высота турбулентного слоя
layer1:friedrad = 0.025 m начальный радиус Фрида турбулентного слоя
layer2:angle = 85 deg аналогичные параметры для второго турбулентного слоя (если он есть)
layer2:wind = 10 m/s
layer2:height = 10000 m
layer2:friedrad = 0.025 m

```

Если какие-то параметры варьировались в процессе моделирования, то они будут обсуждены отдельно. В каждом конкретном случае мы выбирали линейный масштаб растра так, чтобы он был заведомо меньше характерного размера апертуры, и чтобы соответствующий размер растра был заведомо больше размера апертуры.

3 Статистическое исследование мерцаний. Моделирование MASS.

Аббревиатура MASS расшифровывается как многоапертурный детектор мерцаний. Этот прибор предназначен для построения профиля турбулентности атмосферы путем статистического анализа мерцаний. Общепринятая в данный момент теория атмосферной турбулентности

предсказывает, что мерцания распределены по логарифмически нормальному закону [8]. В ходе многолетних измерений с помощью MASS в разных обсерваториях возникло подозрение, что в случае сильных мерцаний распределение мерцаний отличается от логнормального.

Целью данной главы была проверка этого факта. Во-первых, было проведено численное моделирование мерцаний в рамках обычной теории турбулентности (раздел 3.1).

Далее мы провели более подробный статистический анализ данных, полученных в ходе моделирования. (раздел 3.2) Сначала мы построили зависимость асимметрии распределения (третьего центрального момента) от дисперсии и сравнивали её с аналогичной зависимостью для логнормального распределения. Также мы сравнивали модельное и теоретическое распределение по критерию Колмогорова-Смирнова.

В разделе 3.3, мы сравнили теорию и модель с экспериментальными данными, полученными в реальных наблюдениях, чтобы выяснить, что лучше их аппроксимирует. Для этого мы построили зависимость асимметрии от дисперсии для экспериментальных данных. Также мы сравнили для примера одно экспериментальное и одно модельное распределения по критерию Колмогорова-Смирнова.

3.1 Моделирование

Как уже говорилось в главе 2, свет испытывает в турбулентном слое чисто фазовые искажения. А флуктуации интенсивности в световой волне возникают уже после распространения его на значительную дистанцию z (несколько километров) (см. рис. 4). Эта дистанция зависит от диаметра апертуры, в которой интегрируются флуктуации интенсивности: $z = \frac{r_k^2}{\lambda}$ (в соответствии с распространением по Френелю). Эти флуктуации мы и воспринимаем как мерцания. Т.е. сам факт существования мерцаний говорит о том, что турбулентность в атмосфере присутствует и на большой высоте, а не только в приземном слое. С этим, в частности связано то, что MASS нечувствителен к приземной турбулентности. В нашем моделировании для простоты анализа мы рассматривали один турбулентный слой при разных значениях радиуса Фрида и на разных высотах. Технические характеристики модели:

```

nx = 1024 pix
angular scale = 0.2037 arcsec/pix
linear scale = 0.0050 m/pix
lambda = 5e-7 m
layer1:angle = 15 deg
layer1:wind = 10 m/s

```

Итак, у нас есть световая волна, искаженная атмосферной турбулентностью, да еще и распространяющаяся в ней. В модели "измерение" мерцаний реализовано следующим образом. Интенсивность интегрируется в апертурах MASS. Затем световая волна сдвигается (переносится ветром) и снова производится интегрирование. В выходной файл пишутся 4 столбца потоков через эти апертуры.

Для изучения статистических характеристик модельных мерцаний и их зависимости от интенсивности и высотности турбулентности были проведены 6 серий моделирования с разными параметрами. В первых 3 сериях моделировался один слой с различными истинными радиусами Фрида (см. главу 2) : в первой серии — $r_0 = 2.45$, во второй — $r_0 = 4.83$, в третьей — $r_0 = 9.83$. Серия включает 16 подходов, в каждом подходе световая волна распространяется на разное расстояние $h = 500 \times \sqrt{2}^n$, где n — это номер подхода (от 0 до 15). Одному подходу соответствует один выходной файл. В итоге, для фиксированного профиля турбулентности (1 подход) получено 50000 отсчетов потока в каждой апертуре. Последние 3 серии отличались от первых только тем, что в них моделировались 3 турбулентных слоя с одинаковыми r_0 (такими же, как в первых трех сериях) Высоты слоев составили соответственно $h = 500 \times \sqrt{2}^{n-4}$, $h = 500 \times \sqrt{2}^{n-2}$, $h = 500 \times \sqrt{2}^n$. Вычисления были выполнены на двух персональных компьютерах в ГАИШ (достаточно мощных). Суммарное время вычислений составило 16 суток.

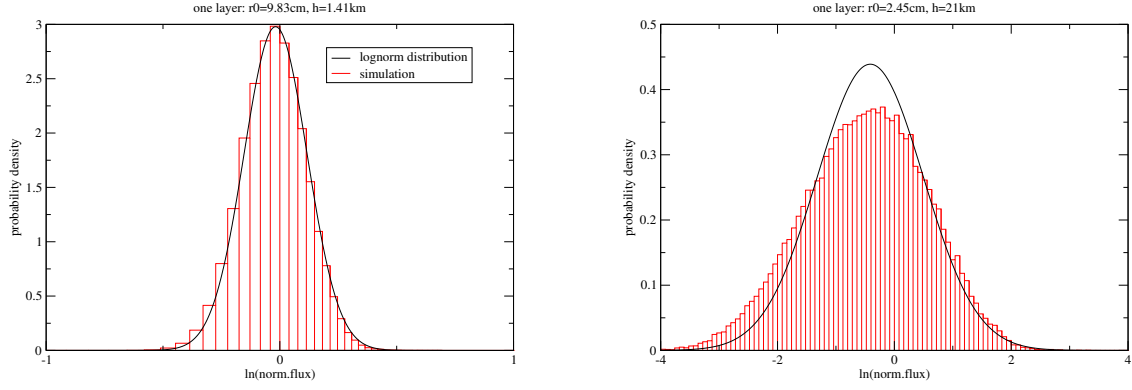


Рис. 6: Распределения мерцаний построенные по модельным данным. Для сравнения приведены теоретические распределения. Их параметры определены по индексу мерцаний в соответствии с формулой (9)

3.2 Статистический анализ модельных данных

Общепризнанная теория мерцаний предсказывает, что флуктуации потока x от звезды через какую-либо апертуру должны подчиняться логарифмически нормальному распределению.

$$P_{ln}^*(x) = \frac{1}{S^* \sqrt{2\pi} x^*} \exp\left(-\frac{\ln x^* - M^*}{2S^{*2}}\right) \quad (7)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться средним μ^* , дисперсией σ^{*2} , асимметрией γ_1^* и эксцессом γ_2^* распределений, которые связаны с центральными моментами следующим образом

$$\mu^* = \mu_1^* \quad \sigma^{*2} = \mu_2^* \quad \gamma_1^* = \frac{\mu_3^*}{(\mu_2^*)^{3/2}} \quad \gamma_2^* = \frac{\mu_4^*}{\mu_2^{*2}} - 3 \quad (8)$$

Индексом мерцаний называется дисперсии потока к квадрату среднего потока $s^2 = \sigma^{*2}/\mu^{*2}$. Индекс мерцаний — это основная измеряемая величина в приборе MASS. Далее нас будут интересовать только обычные индексы мерцаний (не дифференциальные). Чтобы упростить все дальнейшие операции, нормируем наше распределение на среднее μ^* : $x = x^*/\mu^*$. Далее все величины, относящиеся к ненормированному распределению будут обозначаться звездочкой, а к нормированному — без звездочки. Получившееся распределение однопараметрическое. Индекс мерцаний для него записывается следующим образом:

$$s^2 = \exp S^2 - 1 \quad (9)$$

Формулы (8) также изменятся:

$$\mu = 1 \quad \sigma^2 = \mu_2 \quad \gamma_1 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} \quad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \quad (10)$$

На рисунке 6 показаны примеры распределений, полученных в результате моделирования и соответствующих им по параметрам теоретических распределений для случаев слабых и сильных мерцаний. Параметры турбулентности над приведены над рисунками (r_0 — радиус Фрида для слоя, h — высота слоя). Видно, что распределения эти отличаются, причем отличие гораздо больше в случае сильных мерцаний. Предметом этой главы является решение вопроса, является ли это отличие статистически значимым.

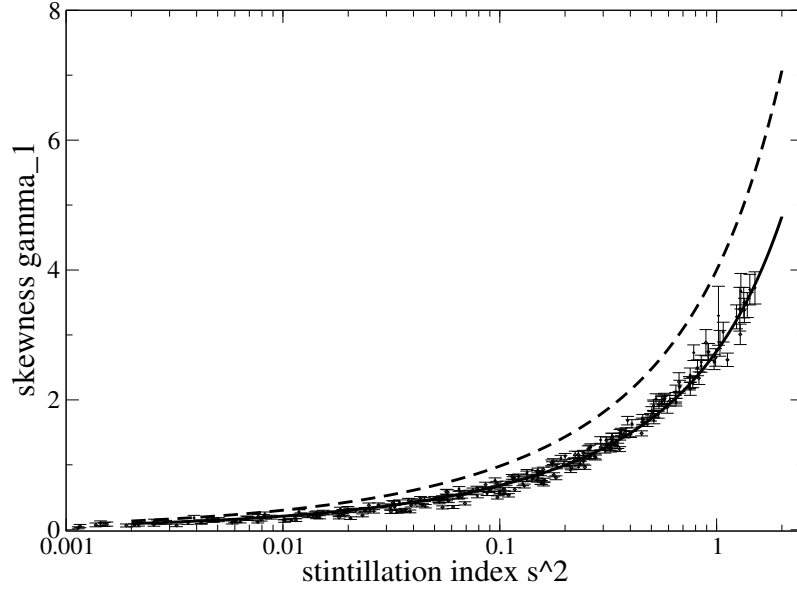


Рис. 7: Зависимость асимметрии от дисперсии. Погрешность определения ожидаемой асимметрии (черная прерывистая кривая) оказалась очень мала, так что на рисунке она не показана. Точками с интервалами ошибок показаны модельные данные, черная сплошная кривая - их аппроксимация. По горизонтальной оси отложен индекс мерцаний.

Анализ асимметрии модельного распределения Величина асимметрии логарифмически нормального распределения легко выражается через его дисперсию:

$$\gamma_1 = (\sigma^2)^{3/2} + 3 (\sigma^2)^{1/2} \quad (11)$$

В этом пункте мы проверим, выполняется ли такая зависимость для модельных данных. Мы будем сравнивать *ожидаемые* значения асимметрии γ_1^x (т.е. рассчитанные по формуле (11)) и *реальные*, рассчитанные в соответствии с определением (10) γ_1^o .

При этом мы будем исходить из эмпирических центральных моментов, оцененных по независимой выборке объема n [11].

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^r \quad (12)$$

Такие оценки обладают некоторой погрешностью. Допустим m_r — оценка центрального момента μ_r . Тогда величина m_r будет подчиняться нормальному распределению с параметрами [9]:

$$Mm_r = \mu_r \quad (13)$$

$$Dm_r = \frac{1}{n} [\mu_{2r} - 2r\mu_{r-1}\mu_{r+1} - \mu_r^2 + r^2\mu_2\mu_{r-1}^2], \quad (14)$$

где r — порядок момента. Величину $\epsilon_{m_r} = \sqrt{Dm_r}$ мы и будем считать средней квадратической погрешностью определения момента m_r . Так как величины γ_1^x и γ_1^o зависят от моментов, то они также определяются с некоторой погрешностью.

Ожидаемая асимметрия рассчитывается из дисперсии, следовательно, в соответствии с формулой (14) её ошибка связана с ошибкой определения дисперсии

$$\epsilon_{\sigma^2} = \epsilon_{m_r} = \sqrt{\frac{1}{n} [\mu_4 - 4\mu_3 - \mu_2^2 + 4\mu_2]} \quad (15)$$

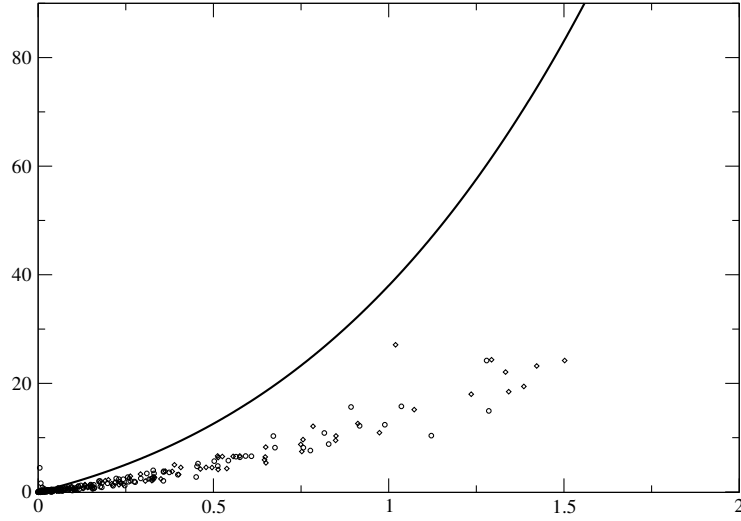


Рис. 8: Зависимость эксцесса от дисперсии. Черная кривая — теоретическая зависимость для лог-нормального распределения. Кружки — модельные данные. По горизонтальной оси отложен индекс мерцаний.

следующим образом:

$$\epsilon_{\gamma_1^x} = \frac{\partial \gamma_1^x}{\partial \sigma^2} \epsilon_{\sigma^2} = \left[\frac{3}{2} (\sigma^2)^{1/2} + \frac{3}{2} (\sigma^2)^{-1/2} \right] \epsilon_{\sigma^2} \quad (16)$$

Теперь определим ошибку реальной асимметрии. Сначала приведем формулу ошибки определения третьего центрального момента:

$$\epsilon_{m_3} = \sqrt{\frac{1}{n} [\mu_6 - 6\mu_2\mu_4 - \mu_3^2 + 9\mu_2^3]} \quad (17)$$

Из (10) следует, что ошибка асимметрии связана с ошибками определения третьего и второго центральных моментов так:

$$\epsilon_{\gamma_1^o} = \sqrt{\left(\frac{\partial \gamma_1^o}{\partial m_2} \epsilon_{m_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_1^o}{\partial m_3} \epsilon_{m_3} \right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} m_2^{-5} m_3^2 \epsilon_{m_2}^2 + m_2^{-3} \epsilon_{m_3}^2} \quad (18)$$

Итак, с помощью формул (11) и (10) были вычислены ожидаемые и реальные значения асимметрии для модельных данных. Также с помощью формул (16) и (18) вычислены средние квадратичные ошибки их определения. Результаты представлены на рис.7. Каждая модельная точка соответствует однородному ряду измерений потока в одной апертуре при фиксированном профиле турбулентности.

Также мы сравнили эксцесс модельного и теоретического распределений. Отметим, что эксцесс лог-нормального распределения также зависит от σ^2 .

$$\gamma_2 = \sigma^8 + 6\sigma^6 + 15\sigma^4 + 16\sigma^2. \quad (19)$$

Результат представлен на графике 8.

В интервале индексов мерцаний $s^2 > 0.1$ теоретические значения (предсказанные) асимметрии существенно выходят за пределы погрешности определения реальных значений. Отметим, что при меньших индексах мерцаний ошибки моделирования не позволяют сделать какой-то определенный вывод о совпадении асимметрий. Но, судя по графику, видно, что модельная и теоретическая зависимости не сливаются в одну. (11) является необходимым условием для того, чтобы мерцания подчинялись лог-нормальному распределению. Другими словами, если оно не выполнено (что имеет место в данном случае), то можно говорить о том, что мерцания этому распределению не подчиняются. С другой стороны, все модельные точки в пределах ошибок легли примерно на одну кривую. Её параметры:

$$\gamma_1 = 0.66 \times (\sigma^2)^{3/2} + 2.09 \times (\sigma^2)^{1/2} \quad (20)$$

Зависимость эксцесса для модельного распределения еще более существенно отклоняется от теоретической.

Сравнение распределений по критерию Колмогорова-Смирнова Описанный выше критерий сравнения распределений неконкретен, его очевидным минусом является хотя бы отсутствие способа определения вероятности ошибки первого рода — вероятности отвергнуть верное распределение. Так как же определить удовлетворяют ли мерцания лог-нормальному распределению? Для однозначного установления этого факта мы сравнили теоретическое и модельное распределения при помощи критерия Колмогорова-Смирнова [11]. Напомним его суть.

Будем проверять гипотезу о том, что наша выборка — модельные данные, удовлетворяет лог-нормальному распределению. В этом критерии основную роль играет так называемая D-статистика, которая определяется следующим образом:

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|, \quad (21)$$

где $F(x)$ — теоретическое кумулятивное распределение, $F_n(x)$ — эмпирическое кумулятивное распределение, построенное по модельным данным:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{x < x_i\}, \quad (22)$$

где

$$I\{x < x_i\} = \begin{cases} 0 & x \geq x_i; \\ 1 & x < x_i. \end{cases} \quad (23)$$

А.Н. Колмогоров доказал, что при $n \rightarrow \infty$ для любой непрерывной $F(x)$ имеет место следующая предельная теорема:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sqrt{n}D_n \leq x\} = K(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2 x^2}, x > 0 \quad (24)$$

Теперь рассмотрим некоторое число k_α такое, чтобы оно было чуть-чуть меньше, чем $\sqrt{n}D_n$ (в алгоритме считалось $k_\alpha = \sqrt{n}D_n$). Тогда можно отвергнуть гипотезу о том, что выборка взята из распределения $F(x)$. Уровень значимости этого критерия равен приближенно

$$\alpha = 1 - K(k_\alpha) \quad (25)$$

Уровень значимости имеет смысл вероятности отвергнуть верную гипотезу. Если это число окажется мало, то можно говорить, о том что теоретическое и модельное распределения не совпадают.

по.	дата	время	σ^2	γ_1^o
1	020510	24:06	0.185	1.240
2	020510	24:33	0.137	1.027
3	020510	25:19	0.298	1.628
4	020510	25:35	0.103	0.874
5	020510	27:53	0.059	0.703
6	020521	27:10	0.105	0.921
7	020521	27:54	0.142	1.070
8	020521	29:05	0.218	1.288
9	020521	29:27	0.484	1.904

Таблица 1: Ряды измерений и соответствующие им значения дисперсии (индексы мерцаний) и асимметрии потоков в апертуре А. Время всемирное.

Остается вопрос, как определить параметры теоретического распределения для каждого однородного ряда. Есть два варианта. Первый — по величине второго момента определить единственный параметр однопараметрического лог-нормального распределения. Соответствующий уровень значимости будем обозначать α . Второй вариант — подгонять этот параметр, минимизируя D-статистику. Соответствующий уровень значимости - α' оказывался незначительно выше α , т.ч. для однообразия будем пользоваться первым способом.

Результаты расчетов представлены в табл.3, 4 в приложении А. Они показали, что теоретическое и модельное распределения не совпадают при $s^2 > 0.1$. Хочется еще раз подчеркнуть, что при меньших индексах мерцаний нельзя сделать определенный вывод о совпадении распределений из-за недостаточности модельной выборки. Таким образом, на области своей применимости модель показывает, что распределение мерцаний не является лог-нормальным.

3.3 Сравнение с экспериментальными данными

После таких выводов возникает естественный вопрос : распределение реальных измерений ближе к модельному распределению или теоретическому? В данной главе мы попытаемся ответить на него. Для этого мы построим зависимость асимметрии от дисперсии экспериментальных данных. Также сравним для примера одно из экспериментальных распределений с модельным с помощью критерия Колмогорова-Смирнова.

При анализе использовались данные, полученные на обсерватории СТЮ в мае 2002г. в рамках компании по исследованию MASS. Измерения велись в обычном режиме с записью всех отсчетов. MASS измеряет поток в течение 1 минуты, при этом он делает 60000 экспозиций по 1мс, после чего вычисляются индексы мерцаний и другие характеристики турбулентности. Этот отрезок измерений мы и будем брать в качестве однородного ряда, другими словами, будем считать, что характеристики турбулентности за это время не меняются. В таблице 1 представлены ряды измерений, которые мы выбрали для обработки.

Асимметрия экспериментальных данных Основное отличие экспериментальных данных от модельных в том, что они искажены пуассоновским шумом. Так что сначала придется произвести редукцию моментов к идеальному случаю. В соответствии с [7] второй и третий моменты нормированного распределения (которые нас и интересуют) преобразуются следующим образом:

$$m_2 = m_2^{(p)} - \frac{1}{n} \quad (26)$$

$$m_3 = m_3^{(p)} - \frac{3m_2^{(p)}}{n} - \frac{2}{n^2}, \quad (27)$$

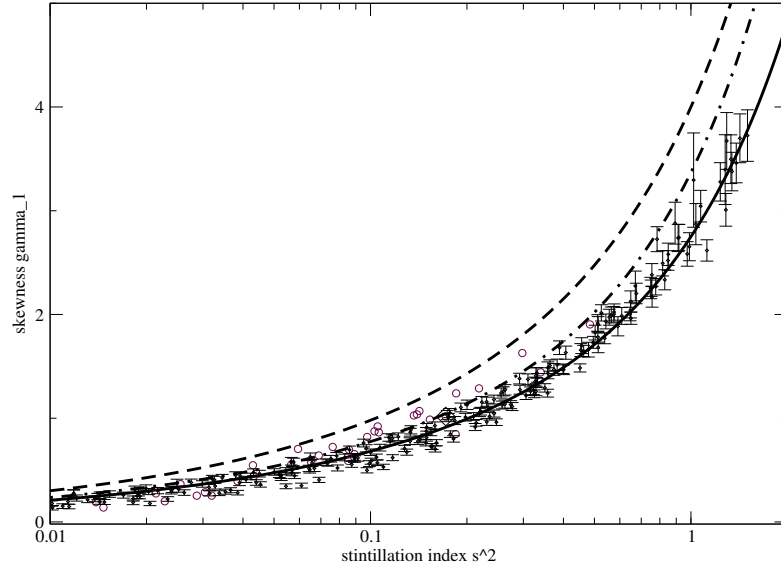


Рис. 9: Экспериментальная зависимость асимметрии от дисперсии. Пунктиром показана теоретическая зависимость для лог-нормального распределения. Кружками — наблюдательные данные, штрихпунктирной линией — их аппроксимация. Точками с интервалами ошибок — модельные данные, сплошной линией — их аппроксимация.

распределение	объем выборки	$s^2 = m_2$	m_3
экспериментальное	60000	0.1777	0.0752
модельное	50000	0.1771	0.0732

Таблица 2: Моменты эмпирического и зашумленного модельного распределений

где индекс (p) означает моменты определенные по "сырым" данным, зашумленным пуассоновским шумом, n — объем выборки. По этим формулам и была произведена редукция данных к идеальному случаю. Ошибка определения асимметрии не рассчитывалась. В табл. 1 приведены также редуцированные значения дисперсии и асимметрии. На рисунке 9 зависимость асимметрии от дисперсии для экспериментальных данных наложена на аналогичную теоретическую и модельную зависимости. При ее построении использовались распределения потоков через все четыре апертуры. Зависимость хорошо аппроксимируется формулой:

$$\gamma_1 = 1.02 \times (\sigma^2)^{3/2} + 2.35 \times (\sigma^2)^{1/2} \quad (28)$$

Сравнение модельного и экспериментального распределений по критерию Колмогорова-Смирнова

Для сравнения мы выбрали выбрали два распределения с близкими значениями дисперсии и асимметрии, очевидно, в этом случае у них гораздо больше шанс совпасть. В качестве экспериментального распределения было выбрано распределение потока в апертуре В в ряду 3 (см. таблицу 1). В качестве модельного распределения было выбрано распределение потока в апертуре В, серия 6, заход 7. На рисунке 9 они отмечены ромбом.

Редукция распределения экспериментальных данных к идеальному случаю связана с решением интегрального уравнения, т.ч. в данном случае мы пошли другим путем — исказили модельные данные Пуассоновским шумом. Моменты эмпирического и зашумленного модельного распределений для сравнения показаны в таблице 2.

Далее мы воспользовались критерием Колмогорова-Смирнова для сравнения этих распределений. При сравнении двух выборок с помощью этого критерия D-статистика вычисляется

следующим образом [11]:

$$D_{nm} = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - G_m(x)| \quad (29)$$

Где $F_n(x)$ и $G_m(x)$ - экспериментальное и модельное кумулятивные распределения. Также видоизменяется теорема (24)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} \leq x\right\} = K(x) \quad (30)$$

В остальном суть критерия та же. Критерий показал, что эти распределения совпадают с уровнем доверия 0.85. Надо отметить, что совпали распределения с довольно высоким индексом мерцаний 0.18.

3.4 Выводы

Итак, подведем итоги исследования мерцаний в рамках прибора MASS. Моделирование мерцаний показало, что их свойства существенно отличаются от того, что предсказывает приближение малых возмущений (см. раздел 2). Отличие, которое сразу бросается в глаза и на которое указывают другие источники [7], связано с моментами распределения мерцаний. Моменты лог-нормального распределения подчиняются простой зависимости, которая дает возможность предсказывать асимметрию распределения по его дисперсии. Анализ модельных данных, проведенный в разделе 3.2 показал, что реальная асимметрия распределения мерцаний существенно отличается от предсказанной. Это отличие уже заставляет усомниться в том, что распределение мерцаний лог-нормальное. Более подробное исследование распределений с целью проверки этого факта описано в разделе 3.2. Мы сравнивали теоретические и модельные распределения с помощью критерия Колмогорова-Смирнова. Расчеты показали, эти распределения не совпадают при индексах мерцаний во всей области применимости модели, т.е. при $s^2 > 0.1$.

Далее мы сравнили результаты, полученные в ходе моделирования с экспериментальными данными, полученными при наблюдениях MASS (раздел 3.3). Сначала мы построили экспериментальную зависимость асимметрии от дисперсии, и наложили её на аналогичные теоретическую и модельную зависимости. Судя по графикам, можно сказать, что эксперимент лучше совпадает с моделью, чем с теорией. Затем мы сравнили два распределения — модельное и экспериментальное с индексом мерцаний 0.18 — случай довольно интенсивных мерцаний. Критерий Колмогорова-Смирнова показал совпадение этих распределений с уровнем значимости 0.85.

Таким образом, теория в своем более общем варианте дает более точное описание мерцаний, чем в приближении плавных возмущений. К сожалению, при этом она перестает быть аналитической.

В следующей главе при помощи моделирования мы рассмотрим, к чему приводит некорректное применение приближения плавных возмущений.

4 Проверка алгоритмов MASS и DIMM в условиях сильной турбулентности.

В предыдущей главе было показано, что общепринятая теория мерцаний не совсем адекватно описывает реальные мерцания в условиях сильной турбулентности. Этот вывод заставляет усомниться в работоспособности алгоритма прибора MASS. В данной главе мы применим этот алгоритм к модельным данным и проверим то, как точно он восстанавливает интенсивность турбулентности на разных высотах.

Как известно, MASS нечувствителен к приземной турбулентности, поэтому он часто используется в комбинации с прибором DIMM, избавленным от этого недостатка. Принцип действия этого аппарата основан на измерении дисперсии относительного смещения центра

тяжести изображения звезды в двух близких апертурах. Как правило, эти апертуры реализуются путем накладывания соответствующей маски на объектив телескопа диаметром 30-40см. Само по себе смещение центра тяжести изображения происходит вследствие наклона волнового фронта, а неодинаковое смещение центров тяжести изображений, построенных близкими апертурами является следствием кривизны волнового фронта. Таким образом, DIMM, по сути, измеряет дисперсию кривизны волнового фронта. Эта величина зависит от турбулентности на всех высотах, в том числе и в приземном слое [2].

Рабочая формула DIMM (32) в теории плавных возмущений выводится в предположении

$$D \ll \sqrt{\lambda L}, \quad (31)$$

где D — характерный размер апертуры [8]. Для случая $D \gg \sqrt{\lambda L}$ получается та же формула, но с коэффициентом 2. Таким образом, теория предсказывает, что для очень высоких турбулентных слоев прибор будет недооценивать интенсивность турбулентности в два раза. О промежуточной же области с точки зрения теории ничего определенного сказать нельзя. Но для $\lambda = 0.5$ и $L = 10 - 20$ (типичная высота турбулентных слоев) $D = 7 - 10$, что очень близко к размерам апертур DIMM. Возникла необходимость узнать, что происходит между двумя предельными случаями, для чего и было проведено моделирование DIMM. Более конкретно, задачей данного моделирования являлось выяснение поведения зависимости восстановленного r_0 от высоты турбулентного слоя.

4.1 Модель MASS и DIMM

Часть прямой задачи для моделирования прибора DIMM/MASS мы взяли из модели MASS. Напомним ее характеристики (см. раздел 2.4):

```

nx = 1024 pix
angular scale = 0.2037 arcsec/pix
linear scale = 0.0050 m/pix
lambda = 5e-7 m
layer1:angle = 15 deg
layer1:wind = 10 m/s

```

Эта модель дает на выходе распределение комплексной амплитуды световой волны. Далее мы строили модель в соответствии с устройством DIMM. Сначала световая волна проходит через две апертуры диаметром 9см каждая, их центры находятся на расстоянии 19см. Далее каждая из апертур независимо строит изображение звезды на ПЗС-матрице. Затем измеряются центры тяжести получившихся изображений. (В нашем моделировании мы не учитывали эффекты, связанные с приемником : пуассоновский шум, шум считывания, размер пиксела, ненулевую экспозицию и так далее) Эти вычисления проводятся 2000 раз для последовательных моментов времени (интервал 150мс). Затем вычисляются дисперсии относительных смещений центров тяжести изображений. Дисперсии две : дисперсия продольных смещений σ_{iG}^2 и дисперсия поперечных смещений σ_{iZ}^2 . Кроме того, мы также вычисляли относительные наклоны волнового фронта и их дисперсии σ_{iZ}^2 и σ_{iZ}^2 . Отметим, что наблюдательные σ^2 лежат примерно между σ_Z^2 и σ_G^2 , но скорее ближе к σ_G^2 [2].

MASS мы моделировали в упрощенном варианте. Мы дополнительно вычисляли индекс мерцаний для одной из апертур (см. раздел такой-то) и из него рассчитывали интенсивность турбулентности (как именно см. далее).

Вышеописанные операции мы проделали для 13 разных высот и двух значений радиусов Фрида $r_0 = 7.2$ $r_0 = 14.4$, значения высот взяты из моделирования MASS. Суммарное время вычислений составило около 3 суток.

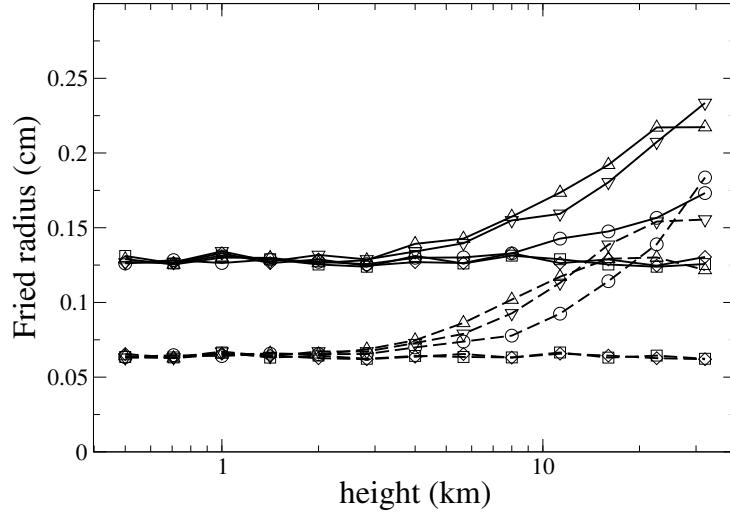


Рис. 10: Зависимость восстановленного радиуса Фрида от высоты слоя. Прерывистыми линиями обозначены зависимости для радиуса Фрида $r_0 = 7.2$, сплошными — для $r_0 = 7.2$. Треугольниками, направленными вверх, обозначены значения, восстановленные по σ_{IG}^2 , направленными вниз — σ_{tG}^2 . Квадратами обозначены значения соответствующие σ_{lZ}^2 , ромбами — σ_{tZ}^2 . Наконец, кружками обозначены значения радиуса Фрида, восстановленные с помощью MASS.

4.2 Алгоритмы DIMM и MASS

Формулу вычисления радиуса Фрида из дисперсий относительных смещений мы взяли из [2]:

$$r_0^{-5/3} = \frac{K \lambda^2 D^{-1/3}}{\sigma^2}, \quad (32)$$

где D — диаметр апертур, а коэффициент K зависит от отношения диаметра апертур к расстоянию между ними b , и типа дисперсии :

$$K_{IG} = 0.340 (1 - 0.570b^{-1/3} - 0.040b^{-7/3}) \quad (33)$$

$$K_{tG} = 0.340 (1 - 0.855b^{-1/3} + 0.030b^{-7/3}) \quad (34)$$

$$K_{lZ} = 0.364 (1 - 0.532b^{-1/3} - 0.024b^{-7/3}) \quad (35)$$

$$K_{tZ} = 0.364 (1 - 0.798b^{-1/3} + 0.018b^{-7/3}) \quad (36)$$

Результаты расчетов приведены на рисунке 10.

При расчете радиуса Фрида по индексу мерцаний мы воспользовались упрощенным вариантом алгоритма MASS. Упрощение заключалось в том, что высота единственного турбулентного слоя считалась известной, задача свелась к расчету радиуса Фрида этого слоя

$$r_0 = 0.185 \lambda^{6/5} s^{-6/5} W(h)^{3/5}, \quad (37)$$

где s^2 — индекс мерцаний $W(h)$ — так называемая весовая функция, характеризующая влияние турбулентности на высоте h на индекс s^2 . Весовая функция была рассчитана численно с помощью специальной программы, входящей в состав стандартного ПО MASS. Зависимость восстановленного r_0 от высоты также приведена на рис. 10.

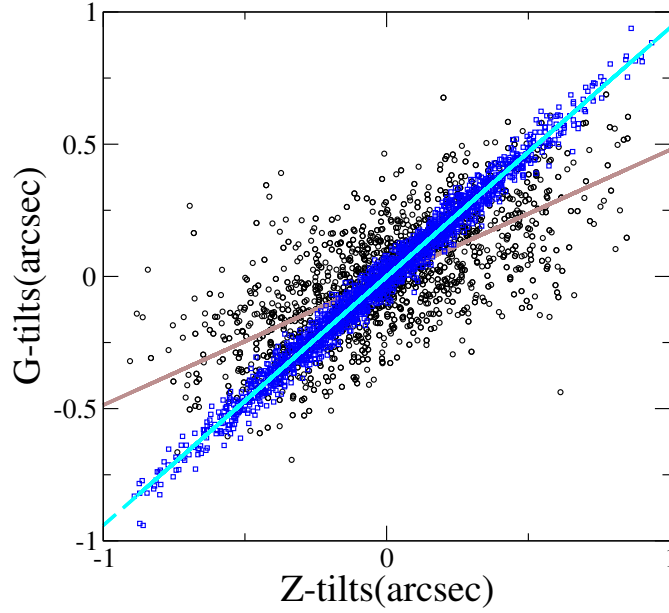


Рис. 11: Зависимость относительных смещений центров тяжести от относительных наклонов для двух значений высот турбулентного слоя: 0км (более крутая прямая) и 32км (более пологая прямая). Показаны соответствующие линейные тренды.

4.3 Результаты

Первое, что бросается в глаза, если посмотреть на график 10, это то, что оба прибора, и MASS, и DIMM недооценивают турбулентность. Но DIMM недооценивает её сильнее, чем MASS. Это означает, что при определенных условиях DIMM будет показывать меньшую турбулентность, чем MASS. Такой эффект действительно наблюдается [4].

Надо отметить, что r_0 , определенное по σ_{iZ}^2 и σ_{iZ}^2 , не зависит от высоты. Вообще, сам факт отличия σ_Z^2 от σ_G^2 заслуживает внимания. Мы построили зависимость относительных смещений центров тяжести от относительных наклонов для двух значений высот турбулентного слоя: 0км и 32км. Интересно, что при малой высоте наблюдается почти полное соответствие этих двух величин, но с ростом высоты относительные смещения центра тяжести все слабее коррелируют со относительным наклоном. Этот нетривиальный факт связан с тем, что при распространении в световой волне возникают флуктуации интенсивности, которые также влияют на положение центра тяжести. Причем они приводят не к увеличению дисперсии, а напротив, уменьшают её!

Кроме того, большую роль здесь играют собственные aberrации телескопа и способ вычисления центра тяжести [3]. Мы рассматривали два идеализированных случая без учета этих эффектов, чтобы продемонстрировать возможные диапазоны систематических ошибок DIMM, возникающих вследствие ограниченности теории плавных возмущений. Формула (32) перестает работать даже раньше, чем нарушается условие (31), а именно на высоте 3-4км! Еще раз подчеркнем, что это относится к r_0 , рассчитанному по σ_G^2 . Кстати, высота на которой начинается расхождение, не зависит от начального радиуса Фрида, а значит, она зависит только от размеров апертуры.

Для прибора MASS наблюдается обратная ситуация. При начальном $r_0 = 14.4cm$ расхождение наступает позже, чем для начального $r_0 = 7.2cm$, что косвенно указывает на зависимость от индекса мерцаний. Вообще недооценка турбулентности MASS является лишним подтвер-

ждением сказанному в главе 3 о том, что приближение плавных возмущений плохо описывает интенсивные мерцания.

5 Моделирование спекл-интерферометра

Угловое разрешение почти при всех наземных оптических наблюдениях ограничено атмосферой. Турбулентные течения вызывают размытие изображения и, какой большой телескоп мы бы ни взяли, нам не удастся различить детали менее 1-2 секунды. Но если сфотографировать изображение достаточно яркой звезды в крупный телескоп с очень короткой выдержкой, то можно заметить, что звезда — это не просто пятно размером в 1-2 секунды дуги. Все изображение состоит из маленьких пятнышек — спеклов. Причем картина спеклов очень быстро меняется. Если сфотографировать ту же звезду через 50 миллисекунд, то спеклы уже будут другие. Они появляются вследствие случайной когерентности света, прошедшего через атмосферу. Похожее явление наблюдается, если осветить лучом лазера шероховатую поверхность. Размер спеклов порядка дифракционного диска данного телескопа, в этом заключается намек на возможность достижения дифракционного разрешения, анализируя спекл-картину. Первым подобную методику предложил Лабейри в 1970 году, она называется спекл-интерферометрия.

Итак, спекл-интерферометрия — наблюдательная техника, позволяющая достичь дифракционного разрешения на крупных телескопах в условиях искажения изображений атмосферой. Принцип действия метода основан на статистическом анализе короткоэкспозиционных изображений объекта. Т.к. основным внешним фактором, определяющим работоспособность метода является атмосферная турбулентность, описанная ранее модель атмосферы представляется хорошим инструментом для моделирования спекл-интерферометрии. Например, с помощью нее можно "не выходя из дома" проверять алгоритмы спекл-интерферометрии, анализировать их точность и устойчивость при обработке объектов различного вида. В данной работе мы ограничились изучением зависимости погрешностей метода от звездной величины объекта для двух значений качества изображения, а также сравнением предельных величин в этих же условиях. Мы рассматривали один из простейших вариантов спекл-интерферометрических наблюдений — измерение параметров двойной звезды: разделения, позиционного угла и относительной яркости¹. Как обычно, мы разделили построение модели на два этапа — генерация наблюдательных данных и их обработка.

5.1 Моделирование наблюдательных данных.

Спекл-интерферометр в своем простейшем варианте представляет собой многоканальный приемник света типа ПЗС-матрицы. Он регистрирует изображение звезды с довольно высоким угловым $< \frac{\lambda}{2D}$ и временным разрешением < 20 мс. Высокое временное разрешение необходимо, чтобы поймать спекл-картину звезды, которая изменяется на временах порядка 20 мс. Если этого не сделать, то картина замозается и информация о тонкой структуре объекта безвозвратно потеряется (что и происходит при обычных астрономических наблюдениях). Высокое пространственное разрешение позволяет различать отдельные спеклы, характерный размер которых порядка $\frac{\lambda}{D}$. Вообще, эту величину можно принять за минимальный размер деталей в спекл-картине. Тогда оптимальное соотношение размеров спекла и пиксела — 2:1 (в соответствии с теоремой Котельникова). Проще говоря, дальнейшее уменьшение размера пиксела новой информации не даст, а увеличение зарежет высокие частоты. Для полноты картины отметим, что спекл-интерферометр дополнительно оснащают среднеполосным фильтром, так как спекл-картины на разных длинах волн отличаются. В данном моделировании мы рассматривали монохроматический случай (можно представить, что все оптическое излучение от звезды сосредоточено в узкой спектральной линии на длине волны 500 нм).

¹ под относительной яркостью будем понимать отношение яркости слабой компоненты к яркости всей системы

Данные с прибора поступают в виде рядов кадров. Современные камеры позволяют снимать спекл-картину постоянно, без потери времени на считывание. Так, за 5 минут наблюдений можно получить 15000 спекл-картин объекта. Мы моделировали гораздо более скромные ряды — 10 кадров (для экономии вычислительного времени), но и в таком случае получалось вполне приемлемое значение предельной звездной величины (см. далее). Кроме того, мы брали расстояние между кадрами 150мс чтобы увеличить информативность всего ряда (все же два кадра по 20мс, идущие подряд, практически одинаковые).

Теперь коснемся технической стороны вопроса. Расчет изображения звезды (Функции Рассеяния Точки — ФРТ) происходит по стандартной схеме, описанной в главе 2 (о модели Simatm). Перечислим параметры соответствующей модели:

```

nx = 1024 pix
angular scale = 0.0167 arcsec/pix
linear scale = 0.0061 m/pix
lambda = 5e-7 m
aperrad = 0.75 m (телескоп диаметром 1.5 метра)
layer1:angle = 15 deg
layer1:wind = 10 m/s
layer1:height = 5000 m
layer1:friedrad = 0.025 m
layer2:angle = 85 deg
layer2:wind = 10 m/s
layer2:height = 10000 m
layer2:friedrad = 0.025 m

```

Чтобы построить изображение двойной звезды, необходимо свернуть ФРТ с двумя дельта-функциями², представляющими собой изображение двойной в идеальный космический телескоп с бесконечно большим объективом. Для примера мы взяли двойную со следующими параметрами: разделение $d = 0.188arcsec$, позиционный угол $PA = 45$, относительная яркость $\alpha = 0.3$.

Далее мы моделировали детектирование изображения ПЗС-матрицей (экспозиция 20мс, интервал между экспозициями 150 мс), учитывая при этом следующие эффекты:

1. Пикселизация. Пиксел модельного изображения заранее был подобран так, чтобы он был ровно в два раза меньше пиксела матрицы. Это было сделано для удобства реализации алгоритма масштабирования (он свелся к бинированию изображения с параметром 2). Размер матрицы мы приняли 128 пикселов.

²в растровом представлении это будут два пиксела

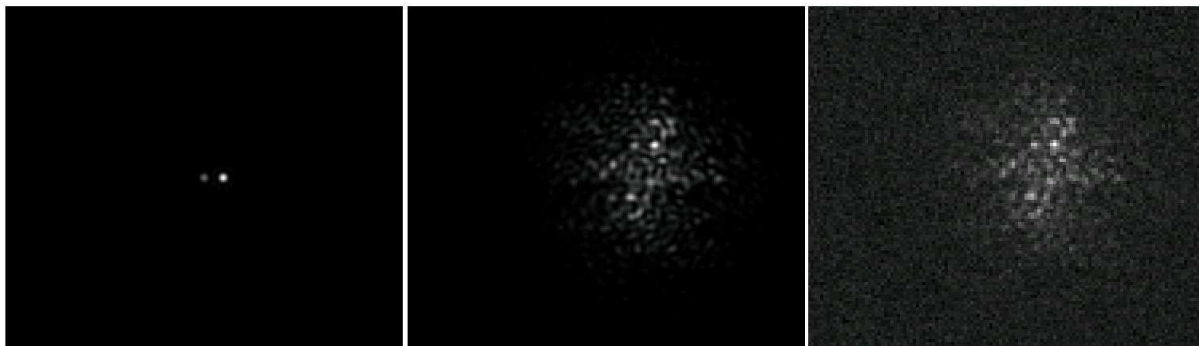


Рис. 12: Слева — изображение рассматриваемой двойной звезды при отсутствии атмосферы в данный телескоп. В центре та же звезда при качестве изображения 0.58. Справа та же звезда зарегистрированная с помощью ПЗС-матрицы, учтены фотонный шум и шум считывания (10e).

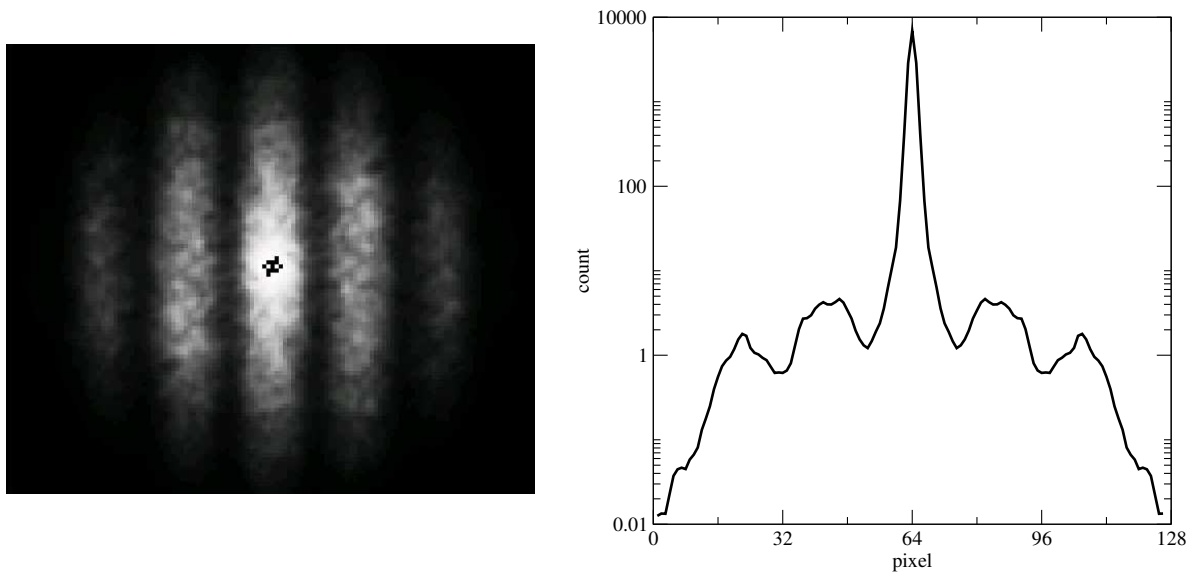


Рис. 13: Спектр мощности двойной звезды и его профиль. Центральный пик — следствие размытия изображения атмосферой.

2. Фотонный шум. Отметим, что в полученном изображении сигнал в пикселе изменяется непрерывно. В реальности же процесс регистрации имеет существенно квантовый характер и сигнал может принимать только целочисленные значения, причем эти значения распределены по Пуассону со средним, равным соответствующему непрерывному сигналу. Это и было реализовано в алгоритме. Сигнал в каждом пикселе — случайное число с только что описанными характеристиками.
3. Шум считывания. При считывании изображения с ПЗС-матрицы аналогово-цифровой преобразователь добавляет свой шум — так называемый шум считывания. Мы предполагали, что он распределен по Гауссу со средним отклонением $10e$.

Итак, на выходе модель дает ряд короткоэкспозиционных изображений звезды. На рисунке 12 для примера показано, как выглядит изображение звезды 9 величины, искаженное атмосферой, после его регистрации ПЗС-матрицей. Это, на первый взгляд, совершенно случайное изображение на самом деле содержит информацию о двойственности объекта. О том, как извлечь эту информацию, речь пойдет в следующем разделе.

5.2 Метод спекл-интерферометрии

Самая сложная и интересная часть спекл-интерферометра — это не прибор, а алгоритм обработки данных, на нем полученных. В зависимости от целей исследования и априорной информации об объекте могут применяться алгоритмы разной сложности — от оценки углового размера объекта до восстановления его изображения с дифракционным разрешением. В нашем случае известно, что наблюдаемый объект — двойная звезда, т.ч. мы будем сравнивать наблюдательные данные с параметрической моделью двойной звезды.

Спекл-интерферометрия в своем простейшем виде оперирует с квадратом фурье-спектра изображения — так называемым спектром мощности. Важно, что при суммировании спектров мощности многих кадров высокочастотная компонента не исчезает (именно она несет информацию о тонкой структуре объекта), как это происходило бы при суммировании самих

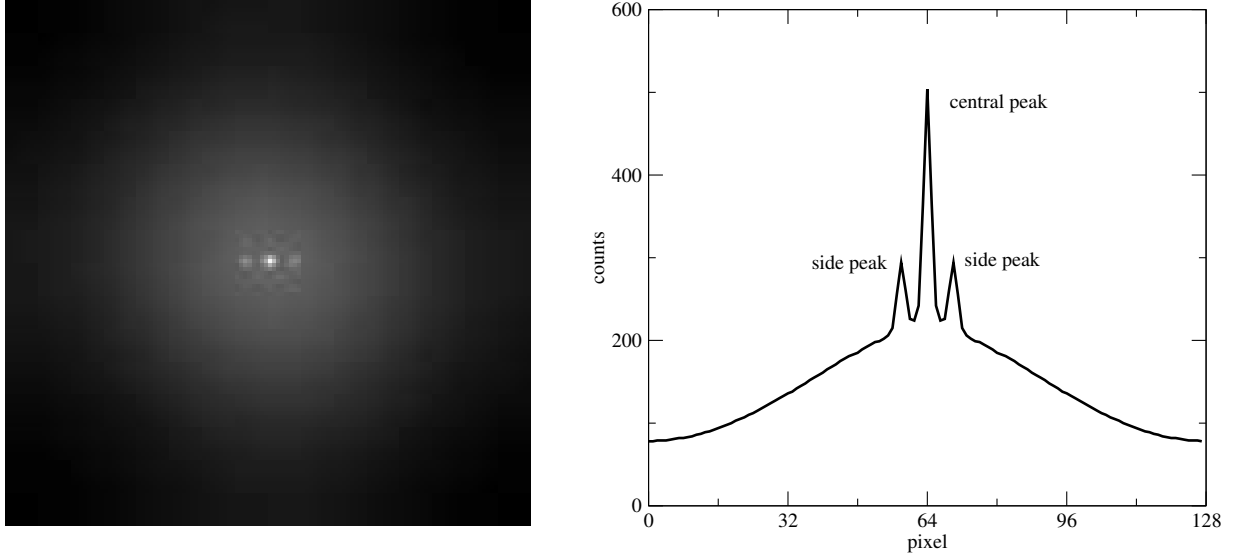


Рис. 14: Суммарная АКФ десяти изображений и её профиль. Хорошо заметны боковые пики, несущие информацию о двойственности объекта.

спектров. Анализируя вид этой компоненты можно, например, измерить параметры двойной звезды. Пример спектра мощности двойной звезды приведен на рис.13. Отметим, что прежде чем приступить к восстановлению параметров необходимо разделить полученный спектр мощности на спектр мощности одиночной звезды. Двойственность объекта выражается в появлении полос на спектре мощности. Их период и контраст связаны с параметрами двойной следующим образом.

$$P_x = \frac{2\pi}{d \sin(PA)} \quad P_y = \frac{2\pi}{d \cos(PA)} \quad \frac{I_{min}}{I_{max}} = (2\alpha - 1)^2, \quad (38)$$

где P_x — проекция периода на ось OX , а P_y — проекция на ось OY , I_{min} — интенсивность в ложбине, I_{max} — интенсивность на гребне. Влияние шумов на спектр мощности выражается в появлении постоянной добавки, так как спектр мощности шумов белый. Это также необходимо учитывать при вычислении относительной яркости двойной. Нам так и не удалось получить несмещенную оценку этого параметра из самого спектра мощности, т.ч. мы рассматривали обратное фурье-преобразование от него — так называемую автокорреляционную функцию. В этом случае учет шумов несколько проще.

Итак, для восстановления параметров двойной мы анализировали вид АКФ изображений, а точнее сумму АКФ 10 изображений (см. рис. 14). Вид АКФ двойной звезды хорошо изучен [5]. Видно, что в центральной части АКФ есть три пика, центральный пик ярче, боковые слабее. Информация о двойственности содержится в боковых пиках. Расстояние боковых пиков от центрального пика и позиционный угол равны соответственно разделению двойной и её позиционному углу, а их яркость связана с относительной яркостью двойной следующим образом:

$$\frac{I_c}{I_s} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{1 - \alpha}, \quad (39)$$

где I_s — яркость бокового пика, а I_c — яркость центрального пика. Таким образом, анализируя вид АКФ можно восстановить всю информацию о двойной звезде (надо отметить, что вычисленный позиционный угол обладает неоднозначностью 180 градусов, что не принципиально).

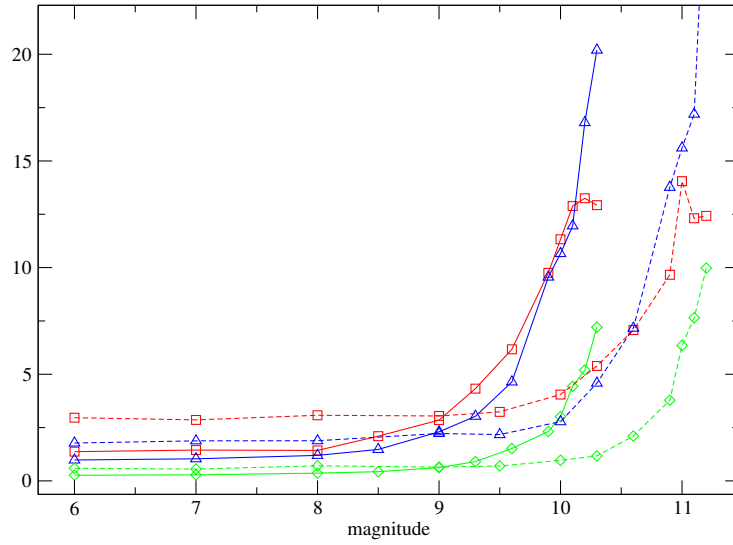


Рис. 15: Зависимость погрешностей определения параметров двойной от звездной величины. Прерывистыми линиями обозначены данные для сиинга 0.59, сплошными - для сиинга 1.18. Красные квадраты — ошибки определения относительной яркости (умноженные на 100 для соответствия масштабов), синие треугольники— ошибки определения углового расстояния (в миллисекундах дуги), зеленые ромбы — ошибки определения позиционного угла (в градусах).

Мы аппроксимировали вид АКФ четырьмя гауссианами (три пика + подложка) подгоняя их параметры методом наименьших квадратов [6]. Вклад шумов в АКФ выражается в появлении центрального пика, занимающего один пиксел (это также можно объяснить тем, что шумы не коррелированы). Чтобы избавиться от влияния шумов мы просто не учитывали центральный пиксел при подгонке.

5.3 Анализ

Чтобы оценить дисперсии вычисленных параметров двойной мы повторили все вышеописанные операции 100 раз для различных звездных величин и сиингов. Суммарное время вычислений составило около 4суток. Результаты вычислений представлены на рисунке 13. При больших потоках погрешности определения углового расстояния составили: 0.98mas при $\beta = 1.18$ и 1.78mas при $\beta = 0.59$. Соответствующие теоретические значения, вычисленные по формулам из [5] 1.03 и 2.07. Замечательно, что при плохом качестве изображения погрешности меньше, чем при хорошем, так как в изображении больше спеклов. Видно, что начиная с некоторой звездной величины ошибки начинают резко возрастать, эту звездную величину можно считать предельной. Для сиинга 0.59 она составила 10.7, а для сиинга 1.18 — 9.9. Добавим, что при приближении к предельной величине перестает сходиться алгоритм нелинейного МНК и восстановление параметров двойной становится вовсе невозможным.

Учитывая результаты моделирования DIMM и MASS, можно было ожидать, что для спекл-интерферометрии будет какая-то зависимость ошибок от высотности турбулентности. Мы проверили этот факт и выяснили, что такая зависимость отсутствует, по крайней мере, для ярких звезд (на что также указывает [5]).

Итак, при улучшении качества изображения в два раза мы можем измерять примерно в два раза более слабые объекты. Это еще раз показывает необходимость использования спекл-

интерферометра в условиях малой атмосферной турбулентности. С другой стороны, ночи с плохими изображениями также не являются бесполезными для спекл-интерферометрических наблюдений. В такие ночи можно проводить прецизионные измерения относительно ярких объектов, так как ошибки измерений обратно пропорциональны качеству изображения. Также добавим, что объекты, доступные спекл-интерферометру, все-таки довольно яркие (до $12 - 13^m$), т.ч. засветка неба для таких измерений не слишком важна и можно наблюдать даже вблизи полнолуния [5].

6 Выводы

Одним из важнейших результатов проделанной работы стала программа, позволяющая моделировать распространение света в атмосфере. В главе 2 подробно описано, как именно она работает. Отметим, что кроме вычисления волнового фронта, искажённого атмосферой, она предусматривает расчет изображения сложного (неточечного) источника, его статистический анализ, а также статистический анализ волнового фронта. Данная программа имеет широкие возможности в имитации различных ситуаций и проверке гипотез, связанных с наблюдениями сквозь турбулентную атмосферу.

В главе 3.1 данной работы мы моделировали мерцания (фактически мы моделировали прибор MASS) исходя только из основных постулатов распространения волн в турбулентной среде. Смоделированное распределение мерцаний не совпадает с лог-нормальным (предсказанным в рамках приближения плавных возмущений) при индексах мерцаний >0.1 , причем меньших индексах мерцаний просто не хватает статистики для того, чтобы решить, отличаются ли модельное и теоретическое распределения. Также мы сравнили смоделированное распределение с экспериментальными данными, полученными при наблюдениях MASS (раздел 3.3) и получили совпадение для довольно большого индекса мерцаний 0.18.

В главе 4 мы исследовали зависимость интенсивности турбулентности, восстановленной MASS и DIMM, от её высотности. Выяснилось, что при малой высоте турбулентного DIMM прекрасно восстанавливает турбулентность, но начиная с высот 3-6км (причем эта высота не зависит от интенсивности турбулентности) он начинает недооценивать турбулентность. MASS также недооценивает высотную турбулентность, но этот в его случае этот эффект не связан с какой-то фиксированной высотой и наступает при определённом индексе мерцаний. Таким образом, появляется необходимость изменить алгоритм MASS/DIMM так, чтобы исправить эту ситуацию.

В главе 5 в результате моделирования спекл-интерферометра была построена зависимость погрешности определения параметров двойной от звездной величины для двух значений качеств изображений. Эти зависимости позволяют также оценить предельную величину метода спекл-интерферометрии. Моделирование подтвердило погрешности определения параметров ярких звезд, предсказанные теорией [5].

Перечисленные выше модели устройств можно еще более приблизить к реальной жизни внесением в модель следующих эффектов, причем это не приведет к существенному усложнению кода.

1. Полихроматический случай. Сравнение результатов моделирования для разных длин волн поможет выбрать удобную ширину полосы фильтра для будущего устройства.
2. Ненулевая экспозиция. Подобным образом позволит выбрать оптимальную экспозицию и оценить систематические погрешности связанные с ее ненулевой длительностью.

Итак, разработаны и апробированы алгоритмы и программы для моделирования распространения световой волны через турбулентную атмосферу. Кроме описанных приложений они могут и будут использоваться при моделировании более сложных устройств, например, систем адаптивной оптики.

Список литературы

- [1] Tokovinin A. MASS under strong stintillation. Internal report, October 22, 2004
<http://www.ctio.noao.edu/~atokovin/profiler/simul04.pdf>
- [2] Tokovinin A. From differential image motion to seeing. PASP, 2002. V.114, P.1156
- [3] Tokovinin A. Response of DIMM turbulence sensor. December 20, 2006
<http://www.ctio.noao.edu/~atokovin/profiler/dimmsensor.pdf>
- [4] Tokovinin A., Kornilov V. Experiments with MASS. Internal report, October 12, 2004
<http://www.ctio.noao.edu/~atokovin/profiler/experiments.pdf>
- [5] Токовинин. А. Звездные интерферометры. М.:Наука, 1988
- [6] Теребиж В.Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач. М.: Физматлит, 2005
- [7] Корнилов В.Г. Достоверная оценка точности фотоэлектрических измерений. Астрон.Ж, т.10, No.2, с.426-429
- [8] В.И.Татарский. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967. с. 392
- [9] Корн Г., Корн Т.. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.:1968г.
- [10] www.mathworld.com
- [11] Севастьянов Б.А. Курс теории вероятности и математической статистики. М., 1982.
- [12] David R.Anderson et al. Performance modeling of a wide field ground layer adaptive optics system. astro-ph/0610097v1 3 Oct 2006
- [13] Alastair Badsen et al. The Durham ELT adaptive optics simulation platform. astro-ph/0611294v1 9 Nov 2006

А Уровни значимости

Заход \ Серия	$r_0 = 3$	$r_0 = 6$	$r_0 = 12$	Заход \ Серия	$r_0 = 3$	$r_0 = 6$	$r_0 = 12$
0 h=0.5km	$s^2=0.044$ Sig.Lvl=0.000	0.014 0.000	0.005 0.047	4 h=0.5, 1, 2km	0.382 0.000	0.133 0.000	0.043 0.000
2 h=1km	0.115 0.000	0.038 0.000	0.012 0.052	6 h=1, 2, 4km	0.756 0.000	0.292 0.000	0.095 0.000
4 h=2km	0.256 0.000	0.086 0.000	0.028 0.006	8 h=2, 4, 8km	1.235 0.000	0.575 0.000	0.191 0.000
6 h=4km	0.502 0.000	0.176 0.000	0.057 0.001	10 h=4, 8, 16km	1.422 0.000	0.974 0.000	0.363 0.000
8 h=8km	0.829 0.000	0.328 0.000	0.107 0.000	12 h=8, 16, 32km	1.293 0.000	1.502 0.000	0.649 0.000
10 h=16km	1.122 0.000	0.592 0.000	0.198 0.000				
12 h=32km	1.286 0.000	0.989 0.000	0.358 0.000				

Таблица 3: Уровень значимости. Апертура А (самая маленькая). Верхние цифры в ячейках — индексы мерцаний, нижние — уровни значимости

Заход \ Серия	$r_0 = 3$	$r_0 = 6$	$r_0 = 12$	Заход \ Серия	$r_0 = 3$	$r_0 = 6$	$r_0 = 12$
0 h=0.5km	0.001 0.030	0.000 0.108	0.000 0.244	4 h=0.5, 1, 2km	0.018 0.000	0.006 0.002	0.002 0.066
2 h=1km	0.004 0.001	0.001 0.090	0.000 0.402	6 h=1, 2, 4km	0.053 0.000	0.020 0.000	0.007 0.013
4 h=2km	0.014 0.000	0.005 0.063	0.002 0.413	8 h=2, 4, 8km	0.128 0.000	0.057 0.000	0.020 0.006
6 h=4km	0.042 0.000	0.015 0.002	0.005 0.084	10 h=4, 8, 16km	0.243 0.000	0.150 0.000	0.057 0.000
8 h=8km	0.104 0.000	0.041 0.000	0.014 0.000	12 h=8, 16, 32km	0.332 0.000	0.324 0.000	0.155 0.000
10 h=16km	0.214 0.000	0.110 0.000	0.039 0.000				
12 h=32km	0.323 0.000	0.277 0.000	0.117 0.000				

Таблица 4: Уровень значимости. Апертура D (самая большая). Верхние цифры в ячейках — индексы мерцаний, нижние — уровни значимости